T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİKOMPLEKS SAYILARA KARŞILIK GELEN MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

CANAN ÖLÇEK

ŞUBAT 2019
UŞAK

T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİKOMPLEKS SAYILARA KARŞILIK GELEN MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

CANAN ÖLÇEK

UŞAK 2019

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Canan ÖLÇEK

BİKOMPLEKS SAYILARA KARŞILIK GELEN MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ
(Doktora Tezi)

Canan ÖLÇEK

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2019

ÖZET

Bu tez çalışmasında bikompleks sayıların kuaterniyonlarla olan ilgisi göz önüne alınarak bikompleks sayılara karşılık gelen reel, kompleks matrisler ve ayrıca kompleks adjoint matrisleri ele alınmıştır. Literatürde bikompleks sayıların özellikleri ve matris gösterimleri ile ilgili bir çok yayın mevcuttur. Ancak bikompleks katsayılı matrisler ve özellikle bunlara karşılık gelen kompleks adjoint matrisler ele alınmamıştır. Bu tezin amacı, bu doğrultuda tanım ve teoremler vermektir.

Altı bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde ileri bölümlerde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde bikompleks sayıların kompleks matris gösterimleri, dördüncü bölümde ise bikompleks katsayılı matrislerin kompleks adjoint matris gösterimlerinin nasıl elde edildiği detaylı olarak incelenmiştir. Beşinci bölümde bikompleks katsayılı matrislerin özdeğerleri üzerinde durulmuştur.

Son olarak, altıncı bölümde dual bikompleks sayılar ve özellikleri ile ilgili temel kavramlara ve dual bikompleks katsayılı matrislerin kompleks adjoint matris gösterimleri üzerinde durulmuş ve bazı teoremler verilmiştir.

Bilim Kodu **:** 403.02.01
Anahtar Kelimeler **:** Bikompleks Sayılar, Dual Bikompleks Sayılar, Kompleks Adjoint Matris.
Sayfa Adedi **:** 110
Tez Yöneticisi **:** Doç. Dr. Semra NURKAN

PROPERTIES OF THE MATRIX CORRESPONDING TO BICOMPLEX NUMBERS

(PhD Thesis)

Canan ÖLÇEK

UŞAK UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 2019

ABSTRACT

In this thesis, real ,complex and complex adjoint matrices which correspond to the bicomplex numbers are taken into consideration considering the relation of bicomplex numbers with quaternions. There are many publications in the literature related to the properties of bicomplex numbers and their matrix representations. However, matrices with a bicomplex coefficient, especially their corresponding complex adjoint matrices, are not considered. The aim of this thesis is to give definitions and theorems in this direction.

The first chapter of this thesis, which consists of six chapters, is divided into the introduction part. In the second part, the basic concepts and definitions which are necessary in the advanced chapters are given. In the third chapter the complex matrix representations of the bicomplex numbers and in the fourth chapter how to obtain complex adjoint matrix representations of matrices with bicomplex coefficients examined in detail. In the fifth chapter the eigenvalues of matrices with bicomplex coefficients are discussed.

Finally, in the sixth chapter, the basic concepts related to the properties of dual bicomplex numbers and complex adjoint matrix representations of matrices with dual bicomplex coefficients are emphasized and some theorems are given.

Science Code : 403.02.01

Key Words : Bicomplex Numbers, Dual Bicomplex Numbers, Complex Adjoint Matrix.
Page Number : 110

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Semra NURKAN

TEŞEKKÜR

Bana araştırma ve çalışma olanağı sağlayan, çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Semra NURKAN ’a, yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN’a ve saygıdeğer Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü hocalarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştiren, yardımlarını esirgemeyen, sabreden ve her zaman maddi ve manevi olarak beni destekleyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$B\mathbb{C}$	Bikompleks Sayılar Kümesi
$IB\mathbb{C}$	Bikompleks Sayılar Cebiri
$\oplus$	Bikompleks Sayılarda toplama işlemi
$\otimes$	Bikompleks Sayılarda çarpma işlemi
$\odot$	Bikompleks Sayılarda dış işlem
$\overline{Z}_{(i)}$	Bikompleks Sayısının i birimine göre eşleniği
$\overline{Z}_{(j)}$	Bikompleks Sayısının j birimine göre eşleniği
$\overline{Z}_{(ij)}$	Bikompleks Sayısının ij birimine göre eşleniği
$\lvert Z\rvert$	Bikompleks Sayısının reel modülü
$\lvert Z\rvert_{(i)}$	Z Bikompleks Sayısının i birimine bağlı modülü
$\lvert Z\rvert_{(j)}$	Z Bikompleks Sayısının j birimine bağlı modülü
$\lvert Z\rvert_{(ij)}$	Z Bikompleks Sayısının ij birimine bağlı modülü

T_z	Bikompleks Sayılar üzerinde bir lineer dönüşüm
τ_Z	Bikompleks Sayıların kompleks matris dönüşümü
χ_A	A Bikompleks Matrisinin Kompleks Adjoint Matrisi
$\widetilde{Z}$	Dual Bikompleks Sayılar Kümesi
$\overline{\left(\widetilde{Z}\right)}_{(i)}$	Dual Z Bikompleks Sayısının i birimine bağlı eşleniği
$\overline{\left(\widetilde{Z}\right)}_{(j)}$	Dual Z Bikompleks Sayısının j birimine bağlı eşleniği
$\overline{\left(\widetilde{Z}\right)}_{(ij)}$	Dual Z Bikompleks Sayısının ij birimine bağlı eşleniği
$\left\|\widetilde{Z}\right\|_{(i)}$	Dual Z Bikompleks Sayısının i birimine bağlı modülü
$\left\|\widetilde{Z}\right\|_{(j)}$	Dual Z Bikompleks Sayısının j birimine bağlı modülü
$\left\|\widetilde{Z}\right\|_{(ij)}$	Dual Z Bikompleks Sayısının ij birimine bağlı modülü
$M_{m\times n}\left(B\mathbb{C}\right)$	Bikompleks sayıların matris gösterimi
$\tau_{\widetilde{Z}}$	Dual Bikompleks Sayıların dual matris dönüşümü
$\delta_l\left(A\right)$	A Bikompleks matrisinin sol özdeğer kümesi
$\delta_r\left(A\right)$	A Bikompleks matrisinin sağ özdeğer kümesi
$\chi_{\widetilde{A}}$	A Dual Bikompleks Matrisinin Kompleks Adjoint Matrisi

1 GİRİŞ

Tarihi 1800'lü yıllara dayanan bikompleks sayılar ilk olarak 1892 de Corrada Segre (Segre 1892) tarafından tanımlanmıştır. Hem kuaterniyonlar hem de bikompleks sayıların kümeleri kompleks sayılar kümesinin bir genellemesi olup, aslında bu iki küme birbirinden farklıdırlar. Kuaterniyonlar, değişmeli olmayan bir bölüm cebiri oluştururken, bikompleks sayılar, sıfır bölene sahip olan değişmeli bir halka oluştururlar. Bikompleks sayılar, kuaterniyon cebirinin alt cebirlerinden biridir. Bikompleks sayılar uzayının 4-boyutlu Euclid uzayına gömülebilir olduğunu Segre (Segre 1892) gösterdi. Dolayısıyla, bikompleks sayıların reel ve kompleks matris temsilleri, kuaterniyonlara benzer şekilde yapılabilir. Kuaterniyonlar kümesinde değişme özelliği olmadığından sağdan ve soldan çarpımlar sonucu farklı matrisler elde edilir. Bikompleks sayılar cebirinin özelliklerini geliştirmek amacı ile, C. Segre, trikompleks sayılar ve n-kompleks sayıları dikkate almıştır (Segre 1892). Price (Price 1991), bikompleks sayıların analizini çalışarak bu sayıları detaylı bir şekilde incelemiştir. 1893 de Scheffers (Scheffers 1893), tek değişkenli kompleks fonksiyonların bikompleks fonksiyonlara bir genelleştirmesini çalıştı. Bikompleks sayılarla ilgili gelişmelerin en çok kaydedildiği yıllar 1928-1940 yıllarıdır. Mesela, bu çalışmalardan bazıları için (Vignaux 1938, Scorza-Dragoni 1934) ve (Morin 1935) kaynaklarına bakılabilir. Özellikle Ringleb'in, 1933 de yazdığı makalesinde (Ringleb 1933), bikompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla tek değişkenli kompleks analitik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi vermesi sonucu, bu konudaki çalışmalar hız kazanmıştır. Üstelik bikompleks cebir, son yıllarda yaygın biçimde fizik ve matematik alanında çalışanların araştırma konusu haline gelmiştir. Son yıllarda bazı araştırmacılar bikompleks sayıların cebirsel, geometrik, topolojik ve dinamik özelliklerini çalışmaya başladılar (Rochon 2004, Hahn 1994,Vignaux 1938, Dimiev 2007). Ayrıca, bikompleks sayılar yardımıyla, hiperkompleks fonksiyonların özellikleri de literatürde incelenmektedir (Colombo 2011).

Bu tez çalışmasında ise bikompleks sayıların kuaterniyonlarla olan ilgisi gözönüne alınarak bikompleks sayılara karşılık gelen reel , kompleks matrisler ve ayrıca kompleks adjoint matrisleri ele alınmıştır. Literatürde bikompleks sayıların özellikleri ve matris gösterimleri ile ilgili bir çok yayın mevcuttur. Ancak bikompleks katsayılı matrisler ve özellikle bunlara karşılık gelen kompleks adjoint matrisler ele alınmamıştır. Bu tezin amacı, bu doğrultuda tanım ve teoremler vermektir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Bikompleks Sayılar ve Özellikleri

Tanım 2.1.1

$$B\mathbb{C} = \left\{ Z = z_1 + jz_2 | z_1, z_2 \in \mathbb{C}, j^2 = -1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye bikompleks sayılar kümesi denir. $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısı kompleks sayılar kümesinde tanımlanabileceği gibi reel sayılar kümesinde de tanımlanabilir. Bunun için $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları reel sayılar üzerinde

$$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$$

şeklinde tanımlanırsa bikompleks sayılar kümesi;

$$B\mathbb{C} = \left\{ Z = a + bi + cj + dij \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = -1, ij = ji \right\} \tag{2.1}$$

biçiminde de yazılır[13].

Tanım 2.1.2. Bikompleks sayılar kümesinin iki elemanı $Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij$ ve $Z_2 = a_2 + b_2 j + c_2 j + d_2 ij$ olsun. Bikompleks sayılarda toplama işlemi;

$$\oplus : B\mathbb{C} \times B\mathbb{C} \to B\mathbb{C}$$

$$Z_1 \oplus Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + ij(d_1 + d_2) \in B\mathbb{C} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır.Bikompleks sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır. İki bikompleks sayının toplamı yine bir bikompleks sayıdır. Ayrıca $(B\mathbb{C}, \oplus)$ ikilisi bir abel gruptur. Buradaki etkisiz eleman sıfır bikompleks sayısı $(0, 0, 0, 0)$ sıralı dörtlüsüdür[13].

Tanım 2.1.3 Bikompleks sayılarda skaler ile çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$Z = a + bi + cj + dij \in B\mathbb{C}$$

ve $\forall k \in \mathbb{R}$ için skaler ile çarpma işlemi

$$\odot : \mathbb{R} \times B\mathbb{C} \to B\mathbb{C}$$

$$k \odot Z = ka + kbi + kcj + kdij$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan dış işlem;

$$\begin{aligned}
&i)\ k \odot (Z_1 + Z_2) = (k \odot Z_1) + (k \odot Z_2);\ \forall k \in \mathbb{R},\ \forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C} \\
&ii)\ (k + t) \odot Z = (k \odot Z) + (t \odot Z);\ \forall k, t \in \mathbb{R},\ \forall Z \in B\mathbb{C} \\
&iii)\ (k.t) \odot Z = k \odot (t \odot Z);\ \forall k, t \in \mathbb{R},\ \forall Z \in B\mathbb{C} \\
&iv)\ 1 \odot Z = Z,\ \forall Z \in B\mathbb{C}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

özelliklerine sahiptir[13].

$\{B\mathbb{C}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Bu uzayı $IB\mathbb{C}$ ile $IB\mathbb{C}$ deki $\oplus$ işlemini kısaca " + "ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.4 Çarpma işlemi, $\otimes : B\mathbb{C} \times B\mathbb{C} \to B\mathbb{C}$ işlemi aşağıdaki çarpım tablosu ile tanımlanır.

$\otimes$	1	i	j	ij
1	1	i	j	ij
i	i	-1	ij	$-j$
j	j	ij	-1	$-i$
ij	ij	$-j$	$-i$	1

Buna göre;

$$\begin{aligned}
Z_1 \otimes Z_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij) \otimes (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 ij) \\
&= (a_1 a_2 + i a_1 b_2 + j a_1 c_2 + ij a_1 d_2 + i b_1 a_2 - b_1 b_2 \\
&\quad + ij b_1 c_2 - j b_1 d_2 + j c_1 a_2 + ij c_1 b_2 - c_1 c_2 \\
&\quad - i c_1 d_2 + ij a_2 d_1 - j b_2 d_1 - i c_2 d_1 + d_1 d_2) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + d_1 d_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - c_2 d_1) \\
&\quad + j(a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 - b_2 d_1) + ij(a_1 d_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + a_2 d_1)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

dir. Böylece bikompleks sayılar aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a)$\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için

$$Z_1 \otimes Z_2 \in B\mathbb{C}$$

olduğundan bikompleks sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

b)$\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in B\mathbb{C}$ için

$$Z_1 \otimes (Z_2 \otimes Z_3) = (Z_1 \otimes Z_2) \otimes Z_3$$

olduğundan bikompleks sayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

c)$\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için

$$Z_1 \otimes Z_2 = Z_2 \otimes Z_1$$

olduğundan bikompleks sayılar kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

d)$\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
Z_1 \otimes (Z_2 \oplus Z_3) &= (Z_1 \otimes Z_2) \oplus (Z_1 \otimes Z_3) \\
(Z_1 \oplus Z_2) \otimes Z_3 &= (Z_1 \otimes Z_3) \oplus (Z_2 \otimes Z_3)
\end{aligned}$$

olduğundan bikompleks sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Bu özelliklerle birlikte $\{B\mathbb{C}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot, \otimes\}$ sistemi bir cebirdir. Bu cebire bikompleks sayı cebiri denir ve kısaca $IB\mathbb{C}$ ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{1, i, j, ij\}$ve boyutu 4 dür.

Tanım 2.1.5 İki bikompleks sayı;

$$Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij \text{ ve } Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 ij \text{ olsun.}$$

Bikompleks sayılar için eşitlik bağıntısı;

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$$

şeklinde tanımlanır[1].

2.2.Bikompleks Sayılar Eşlenik Özellikleri

Tanım 2.2.1. Bikompleks sayılarda eşlenik kavramı i, j ve ij birimlerine göre olmak üzere üç farklı şekilde tanımlanır.

$$Z = a + bi + cj + dij$$

bikompleks sayısı;

$$z_1 = a + bi \text{ ve } z_2 = c + di$$

kompleks sayılar yardımıyla;

$$Z = (a + bi) + j\,(c + di)$$

şeklinde düzenlenirse,

$$Z = z_1 + jz_2, j^2 = -1$$

şeklinde yazılabilir.

Buna göre bikompleks sayısının i,j ve ij birimine göre eşlenikleri sırasıyla $\overline{Z}_{(i)}$, $\overline{Z}_{(j)}$ ve $\overline{Z}_{(ij)}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
1.\ \overline{Z}_{(i)} &= \overline{z_1 + jz_2} = \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
&= (a - bi) + j\,(c - di) = a - bi + cj - dij \\
2.\ \overline{Z}_{(j)} &= \overline{z_1 + jz_2} = z_1 - jz_2 \\
&= (a + bi) - j\,(c + di) = a + bi - cj - dij \\
3.\ \overline{Z}_{(ij)} &= \overline{z_1 + jz_2} = \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
&= (a - bi) - j\,(c - di) = a - bi - cj + dij
\end{aligned} \tag{2.5}$$

olarak tanımlanabilir[17].

Teorem 2.2.1. Bikompleks sayılarda (i) eşleniği aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}\ ,\ z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$$

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere,

a) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için

$$(\overline{Z_1 + Z_2})_{(i)} = \overline{Z}_{1(i)} + \overline{Z}_{2(i)}$$

b) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için

$$(\overline{Z_1 - Z_2})_{(i)} = \overline{Z}_{1(i)} - \overline{Z}_{2(i)}$$

c) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}$ için

$$\overline{\left(\overline{Z}_{1(i)}\right)}_{(i)} = Z_1$$

d) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için $\overline{(Z_1 \otimes Z_2)}_{(i)} = \overline{Z}_{1(i)} \otimes \overline{Z}_{2(i)}$

e) $\forall Z_1 = z_1 + jz_2 \in B\mathbb{C}$ için, $Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(i)} = |z_1|^2 - |z_2|^2 + 2j\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})$

f) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ için $\overline{(\lambda Z_1)}_{(i)} = \lambda\overline{Z_1}_{(i)}$

g) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ için $\overline{(\lambda Z_1 + \lambda Z_2)}_{(i)} = \lambda\overline{Z_1}_{(i)} + \lambda\overline{Z_2}_{(i)}$ dir.

İspat: a) İki bikompleks sayı,

$$Z = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{(Z_1 + Z_2)}_{(i)} &= \overline{(z_1 + jz_2) + (z_3 + jz_4)}_{(i)} \\
&= \overline{(z_1 + z_3) + j\,(z_2 + z_4)}_{(i)} \\
&= \overline{(z_1 + z_3)}_{(i)} + j\,\overline{(z_2 + z_4)}_{(i)} \\
\overline{(Z_1 + Z_2)}_{(i)} &= \overline{z_1} + \overline{z_3} + j\,(\overline{z_2} + \overline{z_4}) \\
&= (\overline{z_1} + j\overline{z_2}) + (\overline{z_3} + j\overline{z_4}) \\
&= \overline{Z_1}_{(i)} + \overline{Z_2}_{(i)}.
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4$$

olsun.

$$\overline{(Z_1 - Z_2)}_{(i)} = \overline{Z_1}_{(i)} - \overline{Z_2}_{(i)}$$

olduğu (a) şıkkındaki gibi yapılır.

c) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{1(i)} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
\left(\overline{\overline{Z}_{1(i)}}\right) &= \overline{(\overline{z_1})} + j\overline{(\overline{z_2})} \\
&= z_1 + jz_2 \\
&= Z_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

d) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4$$

olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{1(i)} \otimes \overline{Z}_{2(i)} &= \overline{(z_1 + jz_2)}.\overline{(z_3 + jz_4)} \\
&= (\overline{z_1} + j\overline{z_2})(\overline{z_3} + j\overline{z_4}) \\
&= \overline{z_1 z_3} - \overline{z_2 z_4} + j\left(\overline{z_1 z_4} + \overline{z_2 z_3}\right) \qquad (2.6) \\
\overline{(Z_1 \otimes Z_2)}_{(i)} &= \overline{(z_1 + jz_2)\,.\,(z_3 + jz_4)}_{(i)} \\
&= \left[\overline{(z_1 z_3 - z_2 z_4)}_{(i)} + j\,\overline{(z_1 z_4 + z_2 z_3)}_{(i)}\right] \\
&= \overline{z_1 z_3} - \overline{z_2 z_4} + j\left(\overline{z_1 z_4} + \overline{z_2 z_3}\right) \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

(2.6) ve (2.7) den

$$\overline{(Z_1 \otimes Z_2)}_{(i)} = \overline{Z}_{1(i)} \otimes \overline{Z}_{2(i)}$$

elde edilir.

e) $Z_1 = z_1 + jz_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{Z}_{1(i)} = \overline{z_1} + j\overline{z_2}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(i)} &= (z_1 + jz_2)\left(\overline{z_1} + j\overline{z_2}\right) \\
&= z_1\overline{z_1} + j\left(z_1\overline{z_2}\right) + j\left(z_2\overline{z_1}\right) - z_2\overline{z_2} \\
&= \left(z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2}\right) + j\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) \\
Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(i)} &= |z_1|^2 - |z_2|^2 + j\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$z_1 = a + ib \in \mathbb{C}$ ve $z_2 = c + id \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
z_1\overline{z_2} &= (a + bi)(c - di) = ac + bd + i(bc - ad) \\
z_2\overline{z_1} &= (c + id)(a - ib) = ac + bd + i(ad - bc)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan;

$$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2(ac + bd) = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \qquad (2.9)$$

olduğu görülür.

(2.9) ifadesini (2.8) de yerine yazarsak;

$$Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(i)} = |z_1|^2 - |z_2|^2 + 2j\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

elde edilir.

f) $\forall Z_1 = z_1 + jz_2 \in B\mathbb{C}$ için ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\overline{(\lambda Z_1)}_{(i)} = \overline{(\lambda z_1 + j\lambda z_2)}_{(i)} = \lambda(\overline{z_1} + j\overline{z_2}) = \lambda \overline{Z_1}_{(i)}$$

elde edilir.

g) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ için;

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \in B\mathbb{C} \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{(\lambda Z_1 + \lambda Z_2)}_{(i)} &= \overline{[\lambda (z_1 + jz_2) + \lambda (z_3 + jz_4)]}_{(i)} \\
&= \lambda(\overline{z_1} + j\overline{z_2}) + \lambda(\overline{z_3} + j\overline{z_4}) \\
&= \lambda\overline{Z}_{1(i)} + \lambda\overline{Z}_{2(i)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2 Bikompleks sayılarda (j) eşleniği aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$\forall Z_1 = z_1 + jz_2$, $Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$ olmak üzere;

a) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{(Z_1 + Z_2)}_{(j)} = \overline{Z}_{1(j)} + \overline{Z}_{2(j)}$$

b) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{(Z_1 - Z_2)}_{(j)} = \overline{Z}_{1(j)} - \overline{Z}_{2(j)}$$

c) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{(\overline{Z}_{1(j)})}_{(j)} = Z_1$$

d) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{(Z_1 \otimes Z_2)}_{(j)} = \overline{Z}_{1(j)} \otimes \overline{Z}_{2(j)}$$

e) $\forall Z_1 = z_1 + jz_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(j)} = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

f) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\overline{(\lambda Z_1)}_{(j)} = \lambda\overline{Z_1}_{(j)}$$

g) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$,$\forall\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\overline{(\lambda Z_1 + \lambda Z_2)}_{(j)} = \lambda\overline{Z_1}_{(j)} + \lambda\overline{Z_2}_{(j)}$$

İspat: a) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\overline{(Z_1 + Z_2)}_{(j)} &= \overline{[(z_1 + jz_2) + (z_3 + jz_4)]}_{(j)} \\
&= \overline{[(z_1 + z_3) + (z_2 + z_4)\, j]}_{(j)} \\
&= (z_1 + z_3) - j\,(z_2 + z_4) \\
&= (z_1 - jz_2) + (z_3 - jz_4) \\
&= \overline{Z_1}_{(j)} + \overline{Z_2}_{(j)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere;

$$\overline{(Z_1 - Z_2)}_{(j)} = \overline{Z_1}_{(j)} - \overline{Z_2}_{(j)}$$

olduğu a şıkkında olduğu gibi yapılabilir.

c) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\overline{Z_1}_{(j)}\right)}_{(j)} &= \overline{\left(\overline{(z_1 + jz_2)}_{(j)}\right)}_{(j)} \\
&= \overline{(z_1 - jz_2)}_{(j)} \\
&= z_1 - (-j)z_2 \\
&= z_1 + jz_2 \\
&= Z_1
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

d) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\overline{(Z_1 \otimes Z_2)}_{(j)} &= \overline{[(z_1 + jz_2) \otimes (z_3 + jz_4)]}_{(j)} \\
&= \overline{[(z_1z_3 - z_2z_4) + j\,(z_1z_4 + z_2z_3)]}_{(j)} \\
&= (z_1z_3 - z_2z_4) - j\,(z_1z_4 + z_2z_3) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{Z_1}_{(j)} \otimes \overline{Z_2}_{(j)} &= (z_1 - jz_2) + (z_3 - jz_4) \\
&= (z_1z_3 - z_1z_4j - z_2z_3j - z_2z_4) \\
&= (z_1z_3 - z_2z_4) - j(z_1z_4 + z_2z_3) \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

(2.10) ve (2.11) eşitliklerinden;

$$\overline{(Z_1 \otimes Z_2)}_{(j)} = \overline{Z_1}_{(j)} \otimes \overline{Z_2}_{(j)}$$

elde edilir.

e) $\forall Z_1 = z_1 + jz_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{Z_1}_{(j)} = z_1 - jz_2$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(j)} &= |z_1|^2 - |z_2|^2 \\
Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(j)} &= (z_1 + jz_2) \, . \, (z_1 - jz_2) \\
&= z_1^2 - z_1 z_2 j + z_1 z_2 j + z_2^2 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

f) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{(\lambda Z_1)}_{(j)} &= \lambda \overline{Z_1}_{(j)} \\
\overline{(\lambda Z_1)}_{(j)} &= \overline{(\lambda z_1 + \lambda z_2 j)}_{(j)} \\
&= \lambda z_1 - \lambda z_2 j \\
&= \lambda \overline{(z_1 + z_2 j)}_{(j)} \\
&= \lambda \overline{Z_1}_{(j)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

g) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$,$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\overline{(\lambda Z_1 + \lambda Z_2)}_{(j)} &= \overline{[(\lambda z_1 + \lambda z_2 j) + (\lambda z_3 + \lambda z_4 j)]}_{(j)} \\
&= [(\lambda z_1 - \lambda z_2 j) + (\lambda z_3 - \lambda z_4 j)] \\
&= \lambda(z_1 - jz_2) + \lambda(z_3 - jz_4) \\
&= \lambda\overline{Z_1}_{(j)} + \lambda\overline{Z_2}_{(j)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3. Bikompleks sayılarda (ij) eşleniği aşağıdaki özelliklere sahiptir. $\forall Z_1 = z_1 + jz_2$ ve $Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$ olmak üzere;

a) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{(Z_1 + Z_2)}_{(ij)} = \overline{Z_1}_{(ij)} + \overline{Z_2}_{(ij)}$$

b) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{(Z_1 - Z_2)}_{(ij)} = \overline{Z_1}_{(ij)} - \overline{Z_2}_{(ij)}$$

c) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{(\overline{Z_1}_{(ij)})}_{(ij)} = Z_1$$

d) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$\overline{(Z_1 \otimes Z_2)}_{(ij)} = \overline{Z_1}_{(ij)} \otimes \overline{Z_2}_{(ij)}$$

e) $\forall Z_1 = z_1 + jz_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(ij)} = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2ijIm(z_1\overline{z_2})$$

f) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\overline{(\lambda Z_1)}_{(ij)} = \lambda \overline{Z_1}_{(ij)}$$

g) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$,$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\overline{(\lambda Z_1 + \lambda Z_2)}_{(ij)} = \lambda \overline{Z_1}_{(ij)} + \lambda \overline{Z_2}_{(ij)}$$

İspat: a) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\overline{(Z_1 + Z_2)}_{(ij)} &= \overline{[(z_1 + jz_2) + (z_3 + jz_4)]}_{(ij)} \\
&= \overline{[(z_1 + z_3) + (z_2 + z_4)\, j]}_{(ij)} \\
&= \overline{(z_1 + z_3)} - j\overline{(z_2 + z_4)} \\
&= (\overline{z_1} - j\overline{z_2}) + (\overline{z_3} - j\overline{z_4}) \\
&= \overline{Z_1}_{(ij)} + \overline{Z_2}_{(ij)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere;

$$\overline{(Z_1 - Z_2)}_{(ij)} = \overline{Z}_{1(ij)} - \overline{Z}_{2(ij)}$$

olduğu a şıkkında olduğu gibi benzer bir şekilde yapılabilir.

c) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{1(ij)} &= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{1(ij)}\right)}_{(ij)} &= z_1 + jz_2 = Z_1
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

d) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4 \in B\mathbb{C}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\overline{(Z_1 \otimes Z_2)}_{(ij)} &= \overline{[(z_1 + jz_2) \otimes (z_3 + jz_4)]}_{(ij)} \\
&= \overline{[(z_1z_3 - z_2z_4) + j\,(z_1z_4 + z_2z_3)]}_{(ij)} \\
&= \overline{(z_1z_3 - z_2z_4)} - j\overline{(z_1z_4 + z_2z_3)} \\
&= \overline{z_1}\,\overline{z_3} - \overline{z_2}\,\overline{z_4} - j(\overline{z_1}\,\overline{z_4} + \overline{z_2}\,\overline{z_3}) \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{1(ij)} \otimes \overline{Z}_{2(ij)} &= (\overline{z_1} - j\overline{z_2}) + (\overline{z_3} - j\overline{z_4}) \\
&= \overline{z_1}\,\overline{z_3} - \overline{z_2}\,\overline{z_4} - j(\overline{z_1}\,\overline{z_4} + \overline{z_2}\,\overline{z_3}) \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

(2.12) ve (2.13) den;

$$\overline{(Z_1 \otimes Z_2)}_{(ij)} = \overline{Z}_{1(ij)} \otimes \overline{Z}_{2(ij)}$$

eşitliği elde edilir.

e) $\forall Z_1 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } \overline{Z_1}_{(ij)} = \overline{z_1} - j\ \overline{z_2}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(ij)} &= (z_1 + jz_2)\,.\,(\overline{z_1} - j\overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} - j(z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - j(z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$z_1 = a + ib \text{ ve } z_2 = c + id$$

karmaşık sayılarını kullanarak,

$$\begin{aligned} z_1\overline{z_2} &= (a+ib)(c-id) = ac + bd + i(bc - ad) \\ \overline{z_1}z_2 &= (a-ib)(c+id) = ac + bd + i(ad - bc) \\ z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 &= 2i(bc - ad) \\ &= 2i\,\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2}) \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan;

$$Z_1 \otimes \overline{Z_1}_{(ij)} = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2ij\,\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})$$

olduğu görülür.

f) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\overline{(\lambda Z_1)}_{(ij)} &= \overline{(\lambda z_1 + \lambda z_2 j)}_{(ij)} \\
&= \lambda \overline{z_1} - \lambda \overline{z_2} j \\
&= \lambda(\overline{z_1} - \overline{z_2} j) \\
&= \lambda \overline{Z_1}_{(ij)}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

g) $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için,

$$Z_1 = z_1 + jz_2 \text{ ve } Z_2 = z_3 + jz_4$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\overline{(\lambda Z_1 + \lambda Z_2)}_{(ij)} &= \overline{[(\lambda z_1 + \lambda z_2 j) + (\lambda z_3 + \lambda z_4 j)]}_{(ij)} \\
&= \overline{[(\lambda z_1 + \lambda z_3) + j(\lambda z_2 + \lambda z_4 j)]}_{(ij)} \\
&= (\overline{\lambda z_1} + \overline{\lambda z_3}) - j(\overline{\lambda z_2} + \overline{\lambda z_4}) \\
&= (\lambda \overline{z_1} - \lambda \overline{z_2} j) + (\lambda \overline{z_3} - \lambda \overline{z_4} j) \\
&= \lambda \overline{Z_1}_{(ij)} + \lambda \overline{Z_2}_{(ij)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.4. $\overline{Z}_{(i)}, Z$ nin i birimine göre eşleniğini; $\overline{Z}_{(j)}$, Z nin j birimine göre eşleniğini; $\overline{Z}_{(ij)}$, Z nin ij birimine göre eşleniğini göstermek üzere;

$$Z = z_1 + jz_2$$

bikompleks sayısı için,

$$\overline{Z}_{(i)} = \overline{z_1} + j\overline{z_2}, \overline{Z}_{(j)} = z_1 - jz_2, \overline{Z}_{(ij)} = \overline{z_1} - j\overline{z_2}$$

dir. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) $\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(j)} = \overline{Z}_{(ij)}$

b) $\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(ij)} = \overline{Z}_{(j)}$

c) $\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(i)} = \overline{Z}_{(ij)}$

d) $\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(ij)} = \overline{Z}_{(i)}$

e) $\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(i)} = \overline{Z}_{(j)}$

f) $\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(j)} = \overline{Z}_{(i)}$

g) $\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(j)}\right)}_{(ij)} = Z$

h) $\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(ij)}\right)}_{(j)} = Z$

i) $\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(j)}\right)}_{(i)} = Z$

j) $\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(i)}\right)}_{(j)} = Z$

k) $\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(ij)}\right)}_{(i)} = Z$

l) $\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(i)}\right)}_{(ij)} = Z$

İspat: a) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}
Z &= z_1 + jz_2 \\
\overline{Z}_{(i)} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(j)} &= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
&= \overline{Z}_{(ij)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{(i)} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(ij)} &= \overline{\overline{z_1}} - j\overline{\overline{z_2}} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(ij)} &= z_1 - jz_2 \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(ij)} &= \overline{Z}_{(j)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

c) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(j)} &= z_1 - jz_2 \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(i)} &= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(i)} &= \overline{Z}_{(ij)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

d) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(j)} &= z_1 - jz_2 \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(ij)} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(ij)} &= \overline{Z}_{(i)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

e) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(ij)} &= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(i)} &= \overline{\overline{z_1}} - j\overline{\overline{z_2}} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(i)} &= z_1 - jz_2 \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(i)} &= \overline{Z}_{(j)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

f) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için;

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(ij)} &= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(j)} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(j)} &= \overline{Z}_{(i)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

g) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için;

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(i)} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(j)} &= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(j)}\right)}_{(ij)} &= \overline{\overline{z_1}} + j\overline{\overline{z_2}} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(j)}\right)}_{(ij)} &= z_1 + jz_2 = Z
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

h) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(i)} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(ij)} &= (\overline{\overline{z_1}} - j\overline{\overline{z_2}}) \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(ij)} &= (z_1 - jz_2) \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(ij)}\right)}_{(j)} &= \overline{(z_1 - jz_2)}_{(j)} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(i)}\right)}_{(ij)}\right)}_{(j)} &= z_1 + jz_2 = Z
\end{aligned}
$$

elde edilir.

i) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(ij)} &= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(j)} &= \overline{(\overline{z_1} - j\overline{z_2})}_{(j)} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(j)} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(j)}\right)}_{(i)} &= \overline{(\overline{z_1} + j\overline{z_2})}_{(i)} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(j)}\right)}_{(i)} &= \overline{\overline{z_1}} + j\overline{\overline{z_2}} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(j)}\right)}_{(i)} &= z_1 + jz_2 = Z
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

j) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(ij)} &= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(i)} &= \overline{\left(\overline{z_1} - j\overline{z_2}\right)}_{(i)} \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(i)} &= \overline{\overline{z_1}} - j\overline{\overline{z_2}} \\
&= z_1 - jz_2 \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(i)}\right)}_{(j)} &= \overline{\left(z_1 - jz_2\right)}_{(j)} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(ij)}\right)}_{(i)}\right)}_{(j)} &= z_1 + jz_2 = Z
\end{aligned}
$$

elde edilir.

k) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(j)} &= z_1 - jz_2 \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(ij)} &= \overline{z_1} + j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(ij)}\right)}_{(i)} &= \overline{\left(\overline{z_1} + j\overline{z_2}\right)}_{(i)} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(ij)}\right)}_{(i)} &= \overline{\overline{z_1}} + j\overline{\overline{z_2}} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(ij)}\right)}_{(i)} &= z_1 + jz_2 = Z
\end{aligned}
$$

elde edilir.

l) $\forall Z \in B\mathbb{C}$ ve $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{(j)} &= z_1 - jz_2 \\
\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(i)} &= \overline{(z_1 - jz_2)}_{(i)} \\
&= \overline{z_1} - j\overline{z_2} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(i)}\right)}_{(ij)} &= \overline{(\overline{z_1} - j\overline{z_2})}_{(ij)} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(i)}\right)}_{(ij)} &= \overline{\overline{z_1}} + j\overline{\overline{z_2}} \\
\overline{\left(\overline{\left(\overline{Z}_{(j)}\right)}_{(i)}\right)}_{(ij)} &= z_1 + jz_2 = Z
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.3. Bikompleks Sayıların Modül Özellikleri

Tanım 2.3.1. Bikompleks sayılarda reel modül, i'ye bağlı modül, j'ye bağlı modül, ij'ye bağlı modül ve alternatif reel modül olmak üzere beş farklı modül tanımlanır.

a)Reel Modül:

$z_1 = a + ib$ kompleks sayısının modülü,

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$z_2 = c + id$ kompleks sayısının modülü,

$$|z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$$

$Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının reel modülü,

$$\begin{aligned}
|Z| &= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} \\
|Z| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir[8].

b) i'ye bağlı modül:

$Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının i'ye bağlı modülü, $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısı ile Z'nin j'ye göre eşleniği olan;

$$\overline{Z}_{(j)} = \overline{(z_1 + jz_2)}_{(j)} = z_1 - jz_2$$

nin çarpımı ile;

$$\begin{aligned} |Z|_{(i)} &= \sqrt{Z.\overline{Z}_{(j)}} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\ |Z|_{(i)} &= \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2i(ab + cd)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir[8].

c) j'ye bağlı modül:

$Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının j'ye bağlı modülü; $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısı ile Z'nin i'ye göre eşleniği olan;

$$\overline{Z}_{(i)} = \overline{(z_1 + jz_2)}_{(i)} = \overline{z_1} + j\overline{z_2}$$

nin çarpımı ile;

$$\begin{aligned} |Z|_{(j)} &= \sqrt{Z.\overline{Z}_{(i)}} \\ |Z|_{(j)} &= \sqrt{|z_1|^2 - |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})j} \\ |Z|_{(j)} &= \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2j(ac + bd)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir[8].

d) ij'ye bağlı modül:

$Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının ij'ye bağlı modülü; $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısı ile Z'nin ij'ye göre eşleniği olan;

$$\overline{Z}_{(ij)} = \overline{(z_1 + jz_2)}_{(ij)} = \overline{z_1} - j\overline{z_2}$$

nin çarpımı ile;

$$\begin{aligned} |Z|_{(ij)} &= \sqrt{Z.\overline{Z}_{(ij)}} \\ &= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})ij} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ij(ad - bc)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir[8].

e) Alternatif reel modül:

Z bikompleks sayısı alternatif bir şekilde iki kompleks sayının yardımıyla $i^2 = j^2 = -1$ için $z_1 = a+ib$ ve $z_2 = c+id$ kompleks sayıların çarpımından $Z = z_1.z_2$ olarak elde edilmiştir. Buradan $Z = z_1.z_2$ bikompleks sayısı için alternatif bir reel modül $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ kompleks sayılarının modülleri sırasıyla

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad |z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$$

olmak üzere,

$$|Z| = |z_1| . |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.3.1. Herhangi $Z, Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$; $\overline{Z}_{(i)}$, $\overline{Z}_{(j)}$, $\overline{Z}_{(ij)}$ ise sırasıyla i, j ve ij birimlerine göre eşlenikleri olsun.Bu bikompleks sayılar için aşağıdaki özellikler sağlanır.$Z = z_1 + jz_2 = a + bi + cj + dij$ için,

1 .$Z \otimes \overline{Z}_{(i)} = \overline{Z}_{(i)} \otimes Z$

2. $\overline{Z}_{(j)} \otimes Z = Z \otimes \overline{Z}_{(j)}$

3. $\overline{Z}_{(ij)} \otimes Z = Z \otimes \overline{Z}_{(ij)}$

4. $Z = z_1 + jz_2 = a + bi + cj + dij$ bikompleks sayısının reel modülü,

$$|Z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \in \mathbb{R}$$

dır.

5. $Z = z_1 + jz_2 = a + bi + cj + dij$ bikompleks sayısının i'ye bağlı modülü

$$|Z|_{(i)} = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2i(ab + cd)}$$

dır.

6. $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının j'ye bağlı modülü

$$|Z|_{(j)} = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2j(ac + bd)}$$

dır.

7. $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının ij'ye bağlı modülü,

$$|Z|_{(ij)} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ij(ad - bc)}$$

dır.

8. Reel modüle göre $|Z_1.Z_2| \neq |Z_1| . |Z_2|$dır.

9. Reel modüle göre $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = \frac{1}{2}\left(|Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2\right)$ dır.

10. i modülüne göre $|Z_1|_{(i)}^2 + |Z_2|_{(i)}^2 = \dfrac{|(Z_1 + Z_2)|_{(i)}^2 + |(Z_1 - Z_2)|_{(i)}^2}{2}$ dır.

11. Reel modülüne göre $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$ dır.

12. i modülüne göre $|Z_1.Z_2|_{(i)} \neq |Z_1|_{(i)} . |Z_2|_{(i)}$dır.

13. $|Z| \neq |Z|_{(i)}, |Z| \neq |Z|_{(j)}$ ve $|Z| \neq |Z|_{(ij)}$ dır.

14 . $j \in B\mathbb{C}$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $c = c_1 + ic_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} j.c &= \bar{c}.j \\ j.c.\overline{j} &= c \\ i.c &= c.i \\ i.c &\neq i.\bar{c} \\ i.c.i^* &= c \\ ij.c &= c.ij \\ ij.c(ij)^* &= c \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

15. $\overline{Z}_{(i)}.i.Z = i(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2ij(ac - bd)$

16. $\overline{Z}_{(j)}.i.Z = i(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) - 2(ab + cd)$

17. $\overline{Z}_{(j)}.j.Z = j(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + 2ij(ab + cd)$

18. $\overline{Z}_{(j)}.ij.Z = ij(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) - 2j(ab + cd)$

19. $\overline{Z}_{(i)}.ij.Z = ij(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 2i(ac + bd)$

20. $\overline{Z}_{(ij)}.i.Z = i(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2j(bc - ad)$

21. $\overline{Z}_{(ij)}.j.Z = j(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2i(bc - ad)$

22. $\overline{Z}_{(ij)}.ij.Z = ij(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ad - bc)$

23. $Z = \dfrac{Z + \overline{Z}_{(i)}}{2} + \dfrac{Z + i.\overline{Z}_{(i)}.i}{2}$

24. $\overline{Z}_{(i)} = \dfrac{j.\overline{Z}_{(i)}.j + ij.\overline{Z}_{(i)}.ij}{2} + \dfrac{\overline{Z}_{(i)} - j.\overline{Z}_{(i)}.j}{2}$

25. $Z = \frac{-1}{2}\left(i.Z.i + j.Z.j\right)$

26. $Z + i.Z.i + j.Z.j + ij.Z.ij = 0$

27. $Z^2 \neq \left|\operatorname{Re} z\right|^2 + \left|\operatorname{Im} z\right|^2 + 2\left|\operatorname{Re} z\right|.\left|\operatorname{Im} z\right|$

28. $\overline{(Z_1.Z_2)}_{(i)} \neq \left(\overline{Z}_{1(i)}\right).\left(\overline{Z}_{2(i)}\right)$

29..$(Z_1.Z_2).Z_3 = Z_1.(Z_2.Z_3)$

30. $Z \in B\mathbb{C}$ ise $Z \neq \overline{Z}_{(i)}$ dır.$Z \in \mathbb{R}$ ise$Z = \overline{Z}_{(i)}$dir.

31. $a \in \mathbb{R}$, $Z \in B\mathbb{C}$ için $aZ = Za$ dır.

İspat:

1. $Z = a + bi + cj + dij = a + bi + j(c + di) = z_1 + jz_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\overline{Z}_{(i)} &= \overline{z_1 + jz_2} = \overline{z_1} + j.\overline{z_2} = (a - bi) + j\left(c - di\right) \\ &= a - bi + cj - dij\end{aligned}$$

olmasından yararlanarak,

$$
\begin{aligned}
Z \otimes \overline{Z}_{(i)} &= (a + bi + cj + dij)(a - bi + cj - dij) \\
&= a^2 - iab + jac - ijad + iab - i^2b^2 \\
&\quad +ijbc + jbd + jac - ijbc + j^2c \\
&\quad -ij^2cd + ijad - i^2jbd + ij^2cd - i^2j^2d^2 \\
&= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2j(ac + bd)
\end{aligned}
$$

elde edilir.Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(i)} \otimes Z &= (a - bi + cj - dij)(a + bi + cj + dij) \\
&= a^2 + iab + jac + ijad - iab - i^2b^2 \\
&\quad -ijbc + i^2bd + jac + ijbc + j^2c^2 \\
&\quad +ij^2cd - ijad - i^2jbd - ij^2cd - i^2j^2d^2 \\
&= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2j(ac + bd)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.Dolayısıyla

$$Z \otimes \overline{Z}_{(i)} = \overline{Z}_{(i)} \otimes Z$$

şeklindedir.

2. $Z = a + bi + cj + dij = a + bi + j(c + di) = z_1 + jz_2$ olmak üzere,

$$\overline{Z}_{(j)} = \overline{z_1 + jz_2} = z_1 - jz_2 = (a + bi) - j(c + di) = a + bi - cj - dij$$

tanımından yararlanarak,

$$\begin{aligned}
Z \otimes \overline{Z}_{(j)} &= (a + bi + cj + dij)(a + bi - cj - dij) \\
&= a^2 - iab - jac - ijad + iab + i^2b^2 - ijbc \\
&\quad -jbd + jac + ijbc - j^2c^2 - ij^2cd \\
&\quad +ijad + i^2jbd - ij^2cd - i^2j^2d^2 \\
&= a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2i(ab + cd)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.Benzer şekilde, $\overline{Z}_{(j)} \otimes Z$ ifadesi hesaplandığında,

$$\overline{Z}_{(j)} \otimes Z = Z \otimes \overline{Z}_{(j)}$$

elde edilir.

3. $Z = a + bi + cj + dij = a + bi + j(c + di) = z_1 + jz_2$ olmak üzere,

$$\overline{Z}_{(ij)} = \overline{z_1 + jz_2} = \overline{z_1} - j\overline{z_2} = (a - ib) - j(c - id) = a - ib - jc + ijd$$

tanımından yararlanarak,

$$\begin{aligned}
Z \otimes \overline{Z}_{(ij)} &= (a + bi + cj + dij)(a - ib - jc + ijd) \\
&= a^2 - iab - jac + ijad + iab - i^2b^2 - ijbc \\
&\quad +i^2jbd + jac - ijbc - j^2c^2 + ij^2cd \\
&\quad +ijad - i^2jbd - ij^2cd + i^2j^2d^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ij(ad - bc)
\end{aligned}$$

benzer şekilde $\overline{Z}_{(ij)} \otimes Z$ ifadesi hesaplandığında,

$$\overline{Z}_{(ij)} \otimes Z = Z \otimes \overline{Z}_{(ij)}$$

elde edilir

4. $Z = a + bi + j\,(c + di) = z_1 + jz_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} z_1 &= a + ib \Rightarrow |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ z_2 &= c + id \Rightarrow |z_2| = \sqrt{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

olur.

$Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının reel modülü,

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

şeklindedir.

5. $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının i'ye bağlı modülü, $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısı ile Z'nin j'ye göre eşleniği olan $\overline{Z}_{(j)} = z_1 - jz_2$ nin çarpımı ile

$$\begin{aligned} |Z|_{(i)} &= \sqrt{Z.\overline{Z}_{(j)}} = \sqrt{(a + bi + cj + dij)(a + bi - cj - dij)} \\ &= \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2i(ab + cd)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

6. $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının j'ye bağlı modülü, $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısı ile Z nin i'ye göre eşleniği olan $\overline{Z}_{(i)} = \overline{z_1} + j\overline{z_2}$ nin çarpımı ile

$$\begin{aligned} |Z|_{(j)} &= \sqrt{Z.\overline{Z}_{(i)}} = \sqrt{|z_1|^2 - |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})j} \\ &= \sqrt{(a + bi + cj + dij)(a - bi + cj - dij)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2j(ac + bd)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

7. $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının ij'ye bağlı modülü, $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks

sayısı ile Z nin ij'ye göre eşleniği olan $\overline{Z}_{(ij)} = \overline{z_1} - j\overline{z_2}$ nin çarpımı ile

$$\begin{aligned} |Z|_{(ij)} &= \sqrt{Z.\overline{Z}_{(ij)}} = \sqrt{(a+bi+cj+dij)(a-bi-cj+dij)} \\ &= \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+2ij(ad-bc)} \end{aligned}$$

elde edilir.

8. Reel modüle göre

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_1+ib_1+jc_1+ijd_1 = z_1+jz_2 \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2} \\ Z_2 &= a_2+ib_2+jc_2+ijd_2 = z_3+jz_4 \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} Z_1.Z_2 &= (a_1+ib_1+jc_1+ijd_1)\otimes(a_2+ib_2+jc_2+ijd_2) \\ &= (a_1a_2+ia_1b_2+ja_1c_2+ija_1d_2+ib_1a_2 \\ &\quad -b_1b_2+ijb_1c_2-jb_1d_2+jc_1a_2+ijc_1b_2 \\ &\quad -c_1c_2-ic_1d_2+ijd_1a_2-jd_1b_2-id_1c_2+d_1d_2) \\ &= (a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2) \\ &\quad +i(a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1a_2) \\ &\quad +j(a_1c_2-b_1d_2-c_1w_4-d_1b_2) \\ &\quad +ij(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
|Z_1.Z_2| &= \sqrt{\begin{array}{c}(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2)^2\\+(a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1a_2)^2\\+(a_1c_2-b_1d_2-c_1w_4-d_1b_2)^2+\\(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2)^2\end{array}}\\
|Z_1|.|Z_2| &= \sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}\\
&= \sqrt{\begin{array}{c}a_1^2a_2^2+a_1^2b_2^2+a_1^2c_2^2+a_1^2d_2^2\\+b_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+b_1^2c_2^2+b_1^2d_2^2+c_1^2a_2^2\\+c_1^2b_2^2+c_1^2d_2^2+d_1^2a_2^2+d_1^2b_2^2+d_1^2c_2^2+d_1^2d_2^2\end{array}}
\end{aligned}
$$

Böylece,

$$|Z_1.Z_2| \neq |Z_1|.|Z_2|$$

olduğu görülür.

9. $Z_1 = a_1 + ib_1 + jc_1 + ijd_1, Z_2 = a_2 + ib_2 + jc_2 + ijd_2$ olmak üzere,
Reel modüle göre,

$$
\begin{aligned}
|Z_1|^2 &= a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\\
|Z_2|^2 &= a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\\
|Z_1+Z_2|^2 &= a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\\
&\quad +2\left(a_1a_2+b_1b_2+a_3b_3+a_4b_4\right)\\
|Z_1-Z_2|^2 &= a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\\
&\quad -2\left(a_1a_2+b_1b_2+a_3b_3+a_4b_4\right)\\
|Z_1+Z_2|^2+|Z_1-Z_2|^2 &= 2\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\right)\\
|Z_1|^2+|Z_2|^2 &= \frac{1}{2}\left(|Z_1+Z_2|^2+|Z_1-Z_2|^2\right)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

10. $Z_1 = a_1 + ib_1 + jc_1 + ijd_1, Z_2 = a_2 + ib_2 + jc_2 + ijd_2$ olmak üzere,

i modülüne göre;

$$\begin{aligned}
|Z_1|_{(i)} &= \sqrt{Z_1.\overline{Z_1}_{(j)}} = \sqrt{a_1^2 - b_1^2 + c_1^2 - d_1^2 + 2i(a_1b_1 + c_1d_1)} \\
|Z_2|_{(i)} &= \sqrt{Z_2.\overline{Z_2}_{(j)}} = \sqrt{a_2^2 - b_2^2 + c_2^2 - d_2^2 + 2i(a_2b_2 + c_2d_2)} \\
|Z_1|_{(i)}^2 + |Z_2|_{(i)}^2 &= a_1^2 - b_1^2 + c_1^2 - d_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + c_2^2 - d_2^2 \\
&\quad +2i(a_1b_1 + c_1d_1 + a_2b_2 + c_2d_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_1 + Z_2 &= a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + ij(d_1 + d_2) \\
|(Z_1 + Z_2)|_{(i)} &= \sqrt{(Z_1 + Z_2)\,.\overline{(Z_1 + Z_2)}_{(j)}} \\
&= \sqrt{[a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)]^2 + [c_1 + c_2 + i(d_1 + d_2)]^2} \\
&= \sqrt{\begin{array}{c} (a_1 + a_2)^2 - (b_1 + b_2)^2 + 2i(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \\ + (c_1 + c_2)^2 - (d_1 + d_2)^2 + 2i\,(c_1 + c_2)\,(d_1 + d_2) \end{array}} \\
&= \sqrt{\begin{array}{c} a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 - b_1^2 - b_2^2 - 2b_1b_2 \\ +c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 - d_1^2 - d_2^2 - 2d_1d_2 \\ +2i\,(a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2) \\ +2i(c_1d_1 + c_1d_2 + d_1c_2 + +c_2d_2) \end{array}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_1 - Z_2 &= a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2) + j(c_1 - c_2) + ij(d_1 - d_2) \\
|(Z_1 - Z_2)|_{(i)} &= \sqrt{\begin{array}{c} (a_1 - a_2)^2 - (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 \\ -(d_1 - d_2)^2 + 2i(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \\ +2i\,(c_1 - c_2)\,(d_1 - d_2) \end{array}} \\
&= \sqrt{\begin{array}{c} a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 - b_1^2 - b_2^2 + 2b_1b_2 \\ +c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 - d_1^2 - d_2^2 + 2d_1d_2 \\ +2i\,(a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_2) \\ +2i(c_1d_1 - c_1d_2 - d_1c_2 + +c_2d_2) \end{array}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|(Z_1+Z_2)|^2_{(i)}+|(Z_1-Z_2)|^2_{(i)} &= 2a_1^2+2a_2^2-2b_1^2-2b_2^2++2c_1^2+2c_2^2 \\
&\quad -2d_1^2-2d_2^2+4i(a_1b_1+a_2b_2+c_1d_1+c_2d_2) \\
\frac{|(Z_1+Z_2)|^2_{(i)}+|(Z_1-Z_2)|^2_{(i)}}{2} &= a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2+c_1^2-d_1^2+c_2^2-d_2^2 \\
&\quad +2i(a_1b_1+a_2b_2+c_1d_1+c_2d_2)
\end{aligned}
$$

$$
|Z_1|^2_{(i)}+|Z_2|^2_{(i)}=\frac{|(Z_1+Z_2)|^2_{(i)}+|(Z_1-Z_2)|^2_{(i)}}{2}
$$

elde edilir.

11. $Z_1=a_1+ib_1+jc_1+ijd_1$ olmak üzere, i modülüne göre,

$$
\begin{aligned}
|Z_1| &= \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2}=0 \Rightarrow Z_1=a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2=0 \\
a_1 &= b_1=c_1=d_1=0 \\
|Z_1| &= 0 \Leftrightarrow Z_1=0
\end{aligned}
$$

dir.

12. $Z_1=a_1+ib_1+jc_1+ijd_1, Z_2=a_2+ib_2+jc_2+ijd_2$ olmak üzere, i modülüne göre,

$$
\begin{aligned}
|Z_1|_{(i)} &= \sqrt{a_1^2-b_1^2+c_1^2-d_1^2+2i(a_1b_1+c_1d_1)} \\
|Z_2|_{(i)} &= \sqrt{a_2^2-b_2^2+c_2^2-d_2^2+2i(a_2b_2+c_2d_2)}
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$
\begin{aligned}
Z_1.Z_2 &= (a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2)+i(a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1a_2) \\
&\quad +j(a_1c_2-b_1d_2-c_1w_4-d_1b_2)+ij(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2)
\end{aligned}
$$

$$|Z_1Z_2|_{(i)} = \sqrt{\begin{array}{c}[a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 - d_1a_2)]^2 \\ +[(a_1c_2 - b_1d_2 - c_1a_2 - d_1b_2) + j(a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2)]^2\end{array}}$$

$$|Z_1Z_2|_{(i)} = \sqrt{\begin{array}{c}(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2)^2 - (a_1b_2 - b_1a_2 - c_1d_2 + d_1a_2)^2 \\ +2i(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2) + (a_1c_2 - b_1d_2 - c_1a_2 + d_1c_2)^2 \\ -(a_1d_2 - b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)^2 \\ +2i(a_1c_2 - b_1d_2 - c_1a_2 + d_1c_2)(a_1d_2 - b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)\end{array}}$$

$$|Z_1Z_2|_{(i)} = \sqrt{\begin{array}{c}(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2 \\ +a_1b_2 - b_1a_2 - c_1d_2 + d_1a_2) \\ (a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2 \\ -(a_1b_2 - b_1a_2 + c_1d_2 + d_1c_2) \\ +2i(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + a_1b_2 \\ +b_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2 + a_1c_2 - z_2d_2 \\ -c_1a_2 - d_1b_2 + a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2)\end{array}}$$

$$|Z_1Z_2|_{(i)} = \sqrt{\begin{array}{c}a_1^2a_2^2 - a_1b_1a_2b_2 - a_1c_1a_2c_2 + a_1d_1a_2d_2 \\ -a_1^2a_2b_2 - a_1b_1a_2^2 + a_1c_1a_2d_2 + \\ a_1d_1a_2c_2 - a_1b_1a_2b_2 + b_1^2b_2^2 + \\ b_1c_1b_2c_2 - b_1d_1b_2d_2 +\end{array}}$$

$|Z_1.Z_2|_{(i)} \neq |Z_1|_{(i)} . |Z_2|_{(i)}$ olduğu görülür.

13. $Z = a_1 + ib_1 + jc_1 + ijd_1$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(i)} &= \overline{z_1 + jz_2} \\
&= \overline{z_1} + j.\overline{z_2} \\
&= (a - ib) + j(c - id) = a - ib + jc - ijd \\
|Z|_{(i)} &= \sqrt{Z.\overline{Z}_{(j)} =} \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\
&= \sqrt{(a + ib)^2 + (c + id)^2} \\
&= \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2i(ab + cd)} \\
|Z|_{(j)} &= \sqrt{Z.\overline{Z}_{(i)}} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\
&= \sqrt{(a + bi + cj + dij)(a - bi + cj - dij)} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2j(ac + bd)} \\
|Z|_{(ij)} &= \sqrt{Z.\overline{Z}_{(ij)}} \\
&= \sqrt{(a + bi + cj + dij)(a - bi - cj + dij)} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ij(ad - bc)} \\
|Z| &\neq |Z|_{(i)}, |Z| \neq |Z|_{(j)} \text{ ve } |Z| \neq |Z|_{(ij)}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

14. $i, j \in B\mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ ise $c = c_1 + ic_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
j.c &= j.(c_1 + ic_2) \\
&= j.c_1 + ijc_2 \\
&= (c_1 + ic_2).j \\
j.c &= c.j
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.Bu eşitliği kullanarak;

$$
j.c.\overline{j} = c.j\overline{j} = c.j.(-j) = c.\left(-j^2\right) = c \Rightarrow j.c.\overline{j} = c.
$$

elde ederiz.Benzer olarak;

$$
\begin{aligned}
&i.c = i\,(c_1 + ic_2) = ic_1 - i^2c_2 = ic_1 - c_2 \\
&c.i = (c_1 + ic_2)\,i = ic_1 - c_2 \\
&i.c = c.i \\
&i.\overline{c} = i\,(c_1 - ic_2) = ic_1 - i^2c_2 = ic_1 + c_2 \\
&i.c \neq i.\overline{c} \\
&i.c.i^* = i\,(c_1 + ic_2)\,(-i) = c_1 + c_2 \\
&i.c.i^* = c \\
&ij.c = ij\,(c_1 + ic_2) = c_1ij - jc_2 \\
&c.ij = (c_1 + ic_2)\,ij = c_1ij - jc_2 \\
&ij.c = c.ij \\
&ij.c(ij)^* = ij\,(c_1 + ic_2)\,ij = ij\,(c_1ij - c_2j) = c_1 + c_2i = c \\
&ij.c(ij)^* = c
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir.

15. $Z = a + bi + cj + dij$ ve

$$\overline{Z}_{(i)} = \overline{z_1 + jz_2} = \overline{z_1} + j.\overline{z_2} = (a - bi) + j(c - id) = a - ib + jc - ijd$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{(i)}.i.Z &= (a - ib + jc - ijd)\,.i.\,(a + bi + cj + dij) \\
&= (a + bi + cj + dij)\,.\,(ia - b + ijc - jd) \\
&= i(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2ij(ac - bd)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

16. $Z = a + bi + cj + dij$ ve $\overline{Z}_{(j)} = a - bi + cj - dij$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{(j)}.i.Z &= (a - bi + cj - dij)\,.i\,(a + bi + cj + dij) \\
&= ia^2 - ab + ijac - jad \\
&\quad -ab - ib^2 - jbc - ijbd - ijac + jbc \\
&\quad +ic^2 - cd + jad + ijbd - cd - id^2 \\
&= i(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) - 2(ab + cd)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

17. $Z = a + bi + cj + dij$ ve $\overline{Z}_{(j)} = a + bi - cj - ijd$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{(j)}.j.Z &= (a + bi - cj - dij)\,.j\,(a + bi + cj + dij) \\
&= (a + bi - cj - dij)\,.(ja + ijb - c - id) \\
&= ja^2 + abij - ac - iad \\
&\quad +abij - jb^2 - ibc + bd + ac \\
&\quad +ibc + jc^2 + ijcd + iad - bd + ijcd - jd^2 \\
&= j(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + 2ij(ab + cd)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

18. $Z = a + bi + cj + dij \; ve \; \overline{Z}_{(j)} = a + bi - cj - dij$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{(j)}.ij.Z &= (a + bi - cj - dij)\,.ij\,(a + bi + cj + dij) \\
&= (a + bi - cj - dij)\,.(ija - jb - ic + d) \\
&= ija^2 - abj - aci + ad \\
&\quad -abj - ijb^2 + bc + ibd \\
&\quad +iac - bc + ijc^2 - jcd \\
&\quad -ad - ibd - jcd - ijd^2 \\
&= ij(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) - 2j(ab + cd)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

19. $Z = a + bi + cj + dij$ ve

$$\overline{Z}_{(i)} = \overline{z_1 + jz_2} = \overline{z_1} + j.\overline{z_2} = (a - bi) + j(c - di) = a - bi + cj - dij$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{(i)}.ij.Z &= (a - bi + cj - dij)\,.ij\,(a + bi + cj + dij) \\
&= (a - bi + cj - dij)\,.(ija - jb - ic + d) \\
&= ija^2 - abj - aci + ad \\
&\quad +abj + ijb^2 - bc - ibd - iac + bc - ijc^2 \\
&\quad +jcd - ad - ibd - jcd - ijd^2 \\
&= ij(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 2i(ac + bd)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

20. $Z = a + bi + cj + dij$ ve $\overline{Z}_{(ij)} = a - bi - cj + dij$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{(ij)}.i.Z &= (a - bi - cj + dij)\,.i\,(a + bi + cj + dij) \\
&= (a - bi - cj + dij)\,.(ia - b + ijc - jd) \\
&= ia^2 - ab + ijac - jad + ab \\
&\quad +ib^2 + jbc + ijbd - ijac + jbc \\
&\quad +ic^2 - cd - jad - ijbd + cd + id^2 \\
&= i(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2j(bc - ad)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

21. $Z = a + bi + cj + dij$ ve $\overline{Z}_{(ij)} = a - bi - cj + dij$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{(ij)}.j.Z &= (a - bi - cj + dij).j(a + bi + cj + dij) \\
&= (a - bi - cj + dij).(ja + ijb - c - id) \\
&= ja^2 + abij - ac - iad - ijab \\
&\quad + jb^2 + ibc - bd + ac + ibc \\
&\quad + jc^2 + ijcd - iad + bd - ijcd + jd^2 \\
&= j(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2i(bc - ad)
\end{aligned}$$

elde edilir.

22. $Z = a + bi + cj + dij$ ve $\overline{Z}_{(ij)} = a - bi - cj + dij$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_{(ij)}.ij.Z &= (a - bi - cj + dij).ij(a + bi + cj + dij) \\
&= (a - bi - cj + dij).(ija - jb - ic + d) \\
&= ija^2 - abj - iac + ad \\
&\quad + jab + ijb^2 - bc - ibd + iac - bc \\
&\quad + ijc^2 - jcd + ad + ibd + jcd + ijd^2 \\
&= ij(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ad - bc)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

23. $Z = a + bi + cj + dij$ ve $\overline{Z}_{(i)} = a - bi + cj - dij$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
i.\overline{Z}_{(i)}.i &= i^2.\overline{Z}_{(i)} \\
&= (-1)(a - bi + cj - dij) \\
&= -a + bi - cj + dij \\
j.\overline{Z}_{(i)}.j &= j^2.\overline{Z}_{(i)} \\
&= (-1)(a - bi + cj - dij) \\
&= -a + bi - cj + dij
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ij.\overline{Z}_{(i)}.ij &= i^2j^2.\overline{Z}_{(i)} \\
&= \overline{Z}_{(i)} \\
&= a - bi + cj - dij \\
i.\overline{Z}_{(i)}.j &= ij.\overline{Z}_{(i)} \\
&= (ij)\,(a - bi + cj - dij) \\
&= ija + jb - ic - d
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
Z &= a + bi + cj + dij \\
Z + \overline{Z}_{(i)} &= (a + bi + cj + dij) + (a - bi + cj - dij) \\
Z + \overline{Z}_{(i)} &= 2a + 2jc \\
\frac{Z + \overline{Z}_{(i)}}{2} &= a + jc
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

$$
\begin{aligned}
Z + i.\overline{Z}_{(i)}.i &= (a + bi + cj + dij) + (-a + bi - cj + dij) \\
Z + i.\overline{Z}_{(i)}.i &= 2ib + 2ijd \\
\frac{Z + i.\overline{Z}_{(i)}.i}{2} &= ib + ijd \\
Z &= \frac{Z + \overline{Z}_{(i)}}{2} + \frac{Z + i.\overline{Z}_{(i)}.i}{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

24. $Z = a + bi + cj + dij$ ve $\overline{Z}_{(i)} = a - bi + cj - dij$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
j.\overline{Z}_{(i)}.j + ij.\overline{Z}_{(i)}.ij &= (a + bi - cj + dij) + (a - bi + cj - dij) \\
\frac{j.\overline{Z}_{(i)}.j + ij.\overline{Z}_{(i)}.ij}{2} &= a \\
\overline{Z}_{(i)} - j.\overline{Z}_{(i)}.j &= (a - bi + cj - dij) - (a + bi - cj + dij) \\
\overline{Z}_{(i)} - j.\overline{Z}_{(i)}.j &= -2ib + 2jc - 2ijd \\
\frac{\overline{Z}_{(i)} - j.\overline{Z}_{(i)}.j}{2} &= -ib + jc - ijd
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\overline{Z}_{(i)} = \frac{j.\overline{Z}_{(i)}.j + ij.\overline{Z}_{(i)}.ij}{2} + \frac{\overline{Z}_{(i)} - j.\overline{Z}_{(i)}.j}{2}$$

eşitliği elde edilir.

25. $Z = a + bi + cj + dij$ olmak üzere,

$$i.Z.i = i^2 (a + bi + cj + dij) = -a - ib - jc - ijd$$

$$j.Z.j = j^2 (a + bi + cj + dij) = -a - ib - jc - ijd$$

$$Z = \frac{-1}{2} (i.Z.i + j.Z.j)$$

eşitliği elde edilir.

26. $Z = a + bi + cj + dij$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
ij.Z.ij &= i^2 j^2 (a + bi + cj + dij) = a + ib + jc + ijd \\
i.Z.i &= i^2 (a + bi + cj + dij) = -a - ib - jc - ijd \\
j.Z.j &= j^2 (a + bi + cj + dij) = -a - ib - jc - ijd
\end{aligned}$$

Bu elde ettiğimiz değerlerle $Z = a + bi + cj + dij$ bikompleks sayısını taraf tarafa topladığımızda,

$$Z + i.Z.i + j.Z.j + ij.Z.ij = 0$$

eşitliği elde edilir.

27.

$$Z = a + bi + cj + dij \ \ (Z \in B\mathbb{C}, a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

ve

$$\operatorname{Re}(Z) = a, \operatorname{Im}(Z) = ib + jc + ijd$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re}(Z)|^2 &= a^2, |\operatorname{Im}(Z)|^2 = b^2 + c^2 + d^2 \text{ (reel modüle göre)} \\
2\operatorname{Re}(Z).\ \operatorname{Im}(Z) &= 2abi + 2acj + 2adij \\
Z^2 &= Z.Z \\
&= (a + bi + cj + dij).(a + bi + cj + dij) \\
&= (a^2 + iab + jac + ijad + iab \\
&\quad -b^2 + ijbc - jbd + jac + ijbc \\
&\quad -c^2 - icd + ijad - jbd - icd + d^2) \\
&= (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) + 2i(ab - cd) \\
&\quad +2j(ac - bd) + 2ij(ad + bc)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

i modülüne göre,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Im}(Z)|^2 &= (bi + cj + dij).(bi - cj - dij) \\
&= -b^2 - ijbc + jbd + ijac \\
&\quad +c^2 + icd - jbd + icd - d^2 \\
&= -b^2 + c^2 - d^2 + 2icd
\end{aligned}$$

olur.

j modülüne göre,

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{Im}(Z)\right|^2 &= (bi+cj+dij)\,.\,(-bi+cj-dij) \\
&= -b^2+ijbc+jbd-ijbc \\
&\quad -c^2+icd+jbd-icd-d^2 \\
&= -b^2-c^2-d^2+2jbd
\end{aligned}$$

elde edilir.

ij modülüne göre,

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{Im}(Z)\right|^2 &= (bi+cj+dij)\,.\,(-bi-cj+dij) \\
&= -b^2-ijbc+jbd-ijbc+c^2-icd+jbd+icd+d^2 \\
&= -b^2+c^2+d^2-2ijbc
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Buradan $Z^2 \neq \left|\operatorname{Re} z\right|^2+\left|\operatorname{Im} z\right|^2+2\left|\operatorname{Re} z\right|.\left|\operatorname{Im} z\right|$ dır.

28. $Z_1 = a_1 + ib_1 + jc_1 + ijd_1, Z_2 = a_2 + ib_2 + jc_2 + ijd_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Z_1.Z_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij)\,(a_2 + ib_2 + jc_2 + ijd_2) \\
&= (a_1a_2 + ia_1b_2 + ja_1c_2 + ija_1d_2 + ib_1a_2 \\
&\quad -b_1b_2 + ijb_1c_2 - jb_1d_2 + jc_1a_2 + ijc_1b_2 \\
&\quad -c_1c_2 - ic_1d_2 + ijd_1a_2 - jd_1b_2 - id_1c_2 + d_1d_2) \\
Z_1.Z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + z_4d_2) \\
&\quad +i(a_1w_2 + b_1a_2 - c_1d_2 - d_1a_2) \\
&\quad +j(a_1c_2 - b_1d_2 - c_1d_2 - d_1b_2) \\
&\quad +ij(a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $\overline{Z_1}_{(i)}, \overline{Z_2}_{(i)}$ve $\overline{(Z_1.Z_2)}_{(i)}$ ifadelerini elde edersek,

$$\begin{aligned}
\overline{Z_1}_{(i)}.\overline{Z_2}_{(i)} &= (a_1 - ib_1 + jc_1 - ijd_1)\,(a_2 - ib_2 + jc_2 - ijd_2) \\
&= (a_1a_2 - ia_1b_2 + ja_1c_2 - ija_1d_2 - ib_1a_2 \\
&\quad -b_1b_2 - ijb_1c_2 - jb_1d_2 + jc_1a_2 - ijc_1b_2 - c_1c_2 \\
&\quad +ic_1d_2 - ijd_1a_2 - jd_1b_2 + id_1c_2 + d_1d_2) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2) \\
&\quad +i(a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 - d_1a_2) \\
&\quad +j(a_1c_2 - b_1d_2 - c_1d_2 - d_1b_2) \\
&\quad +ij(a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2) \\
\overline{(Z_1.Z_2)}_{(i)} &= (a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) \\
&\quad -i\,(a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 - d_1c_2) \\
&\quad +j\,(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2) \\
&\quad -ij\,(a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + a_1d_2) \\
\overline{(Z_1.Z_2)}_{(i)} &\neq \overline{Z_1}_{(i)}.\overline{Z_2}_{(i)}
\end{aligned}$$

29. $Z_1, Z_2, Z_3 \in B\mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}(Z_1.Z_2) &= (Z_2.Z_1) \text{ olduğundan,} \\ (Z_1.Z_2).Z_3 &= Z_1.(Z_2.Z_3)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

30. $Z = a + bi + cj + dij$ olsun.

$$\overline{Z}_{(i)} = a - bi + cj - dij$$

olduğundan $Z \in B\mathbb{C}$ olursa $\left(Z \neq \overline{Z}_{(i)}\right)$ olur.Eğer $Z \in \mathbb{R}$ olursa

$$Z = \overline{Z}_{(i)}$$

elde edilir.

31. $k \in \mathbb{R}, Z \in B\mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}Z &= a + bi + cj + dij \\ k.Z &= ka + ikb + jkc + ijkd \\ Z.k &= ak + ibk + jck + ijdk \\ k.Z &= Z.k\end{aligned}$$

elde edilir.

2.4. Bikompleks Sayıların Reel Matris Gösterimi

Tanım 2.4.1. $B\mathbb{C} = \{Z \mid \ Z = a + bi + cj + dij \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = -1, ij = ji\}$ bir reel vektör uzayıdır. $B\mathbb{C}$ nin bir bazı $\{1, i, j, ij\}$dir. Bikompleks sayıların reel matris dönüşümü T olmak üzere ;

$$\begin{aligned} T &: \ B\mathbb{C} \rightarrow Hom(B\mathbb{C}, B\mathbb{C}) \\ Z &\rightarrow \ T(Z) = T_Z \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall Y \in B\mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} T_Z &: \ B\mathbb{C} \rightarrow B\mathbb{C} \\ Y &\rightarrow \ T_Z(Y) = Z.Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.Burada T_Z bir lineer operatördür.
$\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in B\mathbb{C}$ için, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} i)T_{Z_1}(Z_2 + Z_3) &= Z_1(Z_2 + Z_3) \\ &= Z_1.Z_2 + Z_1.Z_3 \\ &= T_{Z_1}(Z_2) + T_{Z_1}(Z_3) \\ ii)T_{Z_1}(\lambda Z_3) &= Z_1.(\lambda Z_3) \\ &= \lambda(Z_1 Z_3) \\ &= \lambda T_{Z_1}(Z_3) \end{aligned}$$

olduğundan T_Z lineerdir. T_Z lineer dönüşümüne karşılık gelen matris;

$$\begin{aligned} T_Z(1) &= Z.1 = a + bi + cj + dij \\ T_Z(i) &= Z.i = -b + ia - jd + ijc \\ T_Z(j) &= Z.j = -c - id + ja + ijb \\ T_Z(ij) &= Z.ij = d - ic - jb + ija \end{aligned}$$

$$\tau_Z = \begin{bmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \text{ ya da } \tau_Z \left[1 \ i \ j \ ij\right] = \begin{bmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.4.2. τ_Z matrisine $Z = a + bi + cj + dij$ bikompleks sayısının Hamilton operatörü denir. Şimdi de T lineer dönüşümünde $\{1, i, j, ij\}$ bazının elemanlarına karşılık gelen matrisleri yazalım. $Z = 1 = 1 + 0i + 0j + 0ij$ için, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$ değerleri yerine koyulursa,

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Z = i = 0 + 1i + 0j + 0ij$ için $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$ değerleri yerine koyulursa,

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$Z = j = 0 + 0i + 1j + 0ij$ için $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$ değerleri yerine koyulursa,

$$j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Z = ij = 0 + 0i + 0j + 1ij$ için $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$ değerleri yerine koyulursa,

$$ij = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

3 BİKOMPLEKS SAYILARIN KOMPLEKS MATRİS GÖSTERİMİ

Bu bölümde bikompleks sayıların kompleks matris gösterimleri elde edilecektir.İlk olarak Bikompleks sayılar kümesini ele alalım. $B\mathbb{C}$ şeklinde gösterilen bu küme;

$$B\mathbb{C} = \left\{ Z = a + bi + cj + dij \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = -1, ij = ji \right\}$$

$$B\mathbb{C} = \left\{ Z = a + bi + j\left(c + di\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = -1, ij = ji \right\}$$

$$B\mathbb{C} = \left\{ Z = z_1 + jz_2, z_1 = a + ib, z_2 = c + id, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, i^2 = j^2 = -1, ij = ji \right\}$$

olarak ifade edilebilir. Böylece $B\mathbb{C}$,bikompleks sayılar cümlesinin, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar üzerinde iki boyutlu bir vektör uzayı olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu uzayın bir bazı $\{1, j\}$dir.

Benzer şekilde; şimdi de $Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için $Z_1 = z_1 + jz_2$ ve $Z_2 = z_3 + jz_4$ olmak üzere.

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad B\mathbb{C} \to B\mathbb{C} \\ Z_1 \quad &\to \quad T(Z_1) = T_{Z_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{Z_1} \quad &: \quad B\mathbb{C} \to B\mathbb{C} \\ Z_2 \quad &\to \quad T_{Z_1}(Z_2) = Z_1.Z_2 \end{aligned}$$

lineer dönüşümünden yararlanarak kompleks sayılar kümesi üzerinde $\{1, j\}$ bazına bağlı olarak tanımlanan Z bikompleks sayısının matris gösterimi ve baz elemanlarına karşılık gelen matrisleri buluruz.

$$\begin{aligned} Z_2 &= 1 \text{ için } T_{Z_1}(1) = Z_1.1 = z_1 + jz_2 \\ Z_2 &= j \text{ için } T_{Z_1}(j) = Z_1.j = -z_2 + jz_1 \end{aligned}$$

Bu elde edilen sonuçlar sütun olarak matriste yazılırsa, T lineer dönüşümünde;

$Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısına karşılık gelen matris;

$$\tau_{Z_1} = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

T lineer dönüşümünde $\{1, j\}$ bazının elemanlarına karşılık gelen matrisleri yazalım.

$Z = 1 = 1 + j0$ için $z_1 = 1, z_2 = 0$,değerleri matriste yerine yazılırsa,

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Z = j = 0 + j1$ için $z_1 = 0, z_2 = 1$,değerleri matriste yerine yazılırsa,

$$j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.$\{1, j\}$ bazının lineer dönüşüm altındaki görüntüsü,

$$\begin{aligned} T_{Z_1} &: B\mathbb{C} \to B\mathbb{C} \\ Z_2 &\to T_{Z_1}(Z_2) = Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1 \\ T_{Z_1}(1) &= Z_1 = z_1 + jz_2 \\ T_{Z_1}(j) &= Z_1.j = z_{1j} - z_2 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bikompleks sayıların kompleks matris dönüşümü τ olmak üzere,

$Z = z_1 + jz_2 \in B\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} T &: B\mathbb{C} \to Hom(B\mathbb{C}, B\mathbb{C}) \\ Z &\to T(Z) = T_Z \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}$ için $T_{Z_1}(Z_2) = Z_1 Z_2$ şeklinde tanımlanır. Burada tanımlanan T_{Z_1}, $\forall Z_2, Z_3 \in B\mathbb{C}$ için,

i) $T_{Z_1}(Z_2 + Z_3) = T_{Z_1}(Z_2) + T_{Z_1}(Z_3)$

ii) $\forall Z_2, Z_3 \in B\mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{C}$ için $T_{Z_1}(xZ_2) = xT_{Z_1}(Z_2)$

özellikleri sağlandığından lineerdir. Bu dönüşüme karşılık gelen matris,

$$\begin{aligned} T_Z(1) &= Z.1 = (z_1 + jz_2).1 = z_1 + jz_2 \\ T_Z(j) &= Z.j = (z_1 + jz_2).j = -z_2 + jz_1 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\tau = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

dir.

Burada özel olarak z_1 ve z_2 kompleks sayılarını $z_1 = a$, $z_2 = b$ gibi bir reel sayı alırsak,

$$\tau_{(Z)} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Bu ise $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının matris gösterimi olur.

Ayrıca $m \times n$ tipindeki bikompleks matrislerin kümesini $M_{m\times n}(B\mathbb{C})$ ile göstereceğiz. $A \in M_{n\times n}$ tipindeki bikompleks matrisi $A = A_1 + A_2 j$ formunda yazabiliriz. Burada $A_1,\ A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ dir.

Teorem 3.1. A,$B \in M_{n\times n}(B\mathbb{C})$ ve ,A_1,A_2,$B_1, B_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.olmak üzere, Aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$
\begin{aligned}
&1)\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}\\
&2)a)\left(\overline{A_{(i)}}\right)^{-1}=\overline{\left(A^{-1}\right)}_{(i)}\\
&b)\left(\overline{A_{(j)}}\right)^{-1}=\overline{\left(A^{-1}\right)}_{(j)}\\
&c)\left(\overline{A_{(ij)}}\right)^{-1}=\overline{\left(A^{-1}\right)}_{(ij)}\\
&3)a)\overline{AB}_{(i)}=\overline{A}_{(i)}\overline{B}_{(i)}\\
&b)\overline{AB}_{(j)}=\overline{A}_{(j)}\overline{B}_{(j)}\\
&c)\overline{AB}_{(ij)}=\overline{A}_{(ij)}\overline{B}_{(ij)}\\
&4)\left(AB\right)^{T}=B^{T}A^{T}
\end{aligned}
$$

İspat: 1) $A=A_1+A_2j$ $\left(A_{1,}A_2\in M_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)\right)$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{\det A}\left[\left(\det A_1\right)\left(A_1\right)^{-1}+j\left(\det A_2\right)\left(A_2\right)^{-1}\right]\\
A^{-1} &= \frac{\det A_1}{\det A}\left(A_1\right)^{-1}+j\frac{\det A_2}{\det A}\left(A_2\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^{T} &= \left(A_1+A_2j\right)^{T}=A_1^{T}+A_2^{T}j\\
\left(A^{T}\right)^{-1} &= \left(A_1^{T}+A_2^{T}j\right)^{-1}=\frac{\det A_1^{T}}{\det A^{T}}\left(A_1^{T}\right)^{-1}+j\frac{\det A_2^{T}}{\det A^{T}}\left(A_2^{T}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(A^{-1}\right)^{T} &= \frac{\det A_1}{\det A}\left(A_1^{-1}\right)^{T}+j\frac{\det A_2}{\det A}\left(A_2^{-1}\right)^{T}\\
\left(A^{-1}\right)^{T} &= \frac{\det A_1}{\det A}\left(A_1^{T}\right)^{-1}+j\frac{\det A_2}{\det A}\left(A_2^{T}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$detA=detA^{T}$olduğundan,

$$\left(A^{-1}\right)^{T}=\frac{\det A_1^{T}}{\det A^{T}}\left(A_1^{T}\right)^{-1}+j\frac{\det A_2^{T}}{\det A^{T}}\left(A_2^{T}\right)^{-1}$$

$$\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}.$$

2) a) $A = A_1 + A_2 j$ $(A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{A_{(i)}} &= \overline{A_1} + \overline{A_2} j \\
\left(\overline{A_{(i)}}\right)^{-1} &= \frac{\det \overline{A_1}}{\det \overline{A}_{(i)}} \left(\overline{A_1}\right)^{-1} + j \frac{\det \overline{A_2}}{\det \overline{A}_{(i)}} \left(\overline{A_2}\right)^{-1} \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{\det A_1}{\det A} (A_1)^{-1} + j \frac{\det A_2}{\det A} (A_2)^{-1} \\
\overline{(A^{-1})_{(i)}} &= \overline{\left(\frac{\det A_1}{\det A} (A_1)^{-1}\right)} + j \overline{\left(\frac{\det A_2}{\det A} (A_2)^{-1}\right)} \\
\overline{(A^{-1})_{(i)}} &= \frac{\overline{\det A_1}}{\overline{\det A_{(i)}}} \overline{(A_1)^{-1}} + j \frac{\overline{\det A_2}}{\overline{\det A_{(i)}}} \overline{(A_2)^{-1}} \\
\overline{(A^{-1})_{(i)}} &= \frac{\det \overline{A_1}}{\det \overline{A_{(i)}}} \left(\overline{A_1}\right)^{-1} + j \frac{\det \overline{A_2}}{\det \overline{A}_{(i)}} \left(\overline{A_2}\right)^{-1} \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

(3.1) ve (3.2) eşitliğini kullanarak,

$$\left(\overline{A_{(i)}}\right)^{-1} = \overline{(A^{-1})_{(i)}}$$

elde ederiz.

b) $A = A_1 + A_2 j$ $(A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{A_{(j)}} &= A_1 - A_2 j \\
\left(\overline{A_{(j)}}\right)^{-1} &= \frac{\det A_1}{\det \overline{A}_{(j)}} (A_1)^{-1} - j \frac{\det A_2}{\det \overline{A}_{(j)}} (A_2)^{-1} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{\det A_1}{\det A} (A_1)^{-1} + j \frac{\det A_2}{\det A} (A_2)^{-1} \\
\overline{(A^{-1})_{(j)}} &= \left(\frac{\overline{\det A_1}}{\overline{\det A_{(j)}}} (A_1)^{-1}\right) - j \left(\frac{\overline{\det A_2}}{\overline{\det A_{(j)}}} (A_2)^{-1}\right) \\
\overline{(A^{-1})_{(j)}} &= \left(\frac{\det A_1}{\det \overline{A_{(j)}}} (A_1)^{-1}\right) - j \left(\frac{\det A_2}{\det \overline{A_{(j)}}} (A_2)^{-1}\right) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

(3.3) ve (3.4) eşitliğini kullanarak,

$$\left(\overline{A_{(j)}}\right)^{-1} = \overline{(A^{-1})}_{(j)}$$

elde ederiz.

c) $A = A_1 + A_2 j$ $(A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{A_{(ij)}} &= \overline{A_1} - \overline{A_2} j \\
\left(\overline{A_{(ij)}}\right)^{-1} &= \frac{\det \overline{A_1}}{\det \overline{A}_{(ij)}} \left(\overline{A_1}\right)^{-1} - j \frac{\det \overline{A_2}}{\det \overline{A}_{(ij)}} \left(\overline{A_2}\right)^{-1} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{\det A_1}{\det A} (A_1)^{-1} + j \frac{\det A_2}{\det A} (A_2)^{-1} \\
\overline{(A^{-1})}_{(ij)} &= \overline{\left(\frac{\det A_1}{\det A} (A_1)^{-1} \right)} - j \overline{\left(\frac{\det A_2}{\det A} (A_2)^{-1} \right)} \\
\overline{(A^{-1})}_{(ij)} &= \left(\frac{\overline{\det A_1}}{\overline{\det A_{(ij)}}} \overline{(A_1)^{-1}} \right) - j \left(\frac{\overline{\det A_2}}{\overline{\det A_{(ij)}}} \overline{(A_2)^{-1}} \right) \\
\overline{(A^{-1})}_{(ij)} &= \left(\frac{\overline{\det A_1}}{\overline{\det A_{(ij)}}} \left(\overline{A_1}\right)^{-1} \right) - j \left(\frac{\overline{\det A_2}}{\overline{\det A_{(ij)}}} \left(\overline{A_2}\right)^{-1} \right) \\
\overline{(A^{-1})}_{(ij)} &= \left(\frac{\det \overline{A_1}}{\det \overline{A_{(ij)}}} \left(\overline{A_1}\right)^{-1} \right) - j \left(\frac{\det \overline{A_2}}{\det \overline{A_{(ij)}}} \left(\overline{A_2}\right)^{-1} \right) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

(3.5)ve (3.6) eşitliğini kullanarak,

$$\left(\overline{A_{(ij)}}\right)^{-1} = \overline{(A^{-1})}_{(ij)}$$

elde ederiz.

3) $A = A_1 + A_2 j$ ve $B = B_1 + B_2 j$ $(A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

a)

$$
\begin{aligned}
A.B &= A_1B_1 + A_1B_2j + B_1A_2j - A_2B_2 \\
\overline{A.B}_{(i)} &= \overline{A_1B_1} - \overline{A_2B_2} + \left(\overline{A_1B_2} + \overline{B_1A_2}\right) j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \overline{A_1} + \overline{A_2}j \text{ ve } \overline{B} = \overline{B_1} + \overline{B_2}j \\
\overline{A}_{(i)}.\overline{B}_{(i)} &= \overline{A_1B_1} + \overline{A_1B_2}j + \overline{B_1A_2}j - \overline{A_2B_2} \\
\overline{A}_{(i)}.\overline{B}_{(i)} &= \overline{A_1B_1} - \overline{A_2B_2} + \left(\overline{A_1B_2} + \overline{B_1A_2}\right) j
\end{aligned}
$$

böylece,

$$\overline{AB_{(i)}} = \overline{A_{(i)}B_{(i)}}$$

eşitliğini elde ederiz.

b)

$$
\begin{aligned}
A.B &= A_1B_1 + A_1B_2j + B_1A_2j - A_2B_2 \\
\overline{A.B}_{(j)} &= A_1B_1 - A_1B_2j - B_1A_2j - A_2B_2 \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{A_{(j)}} &= A_1 - A_2j \quad \overline{B_{(j)}} = B_1 - B_2j \\
\overline{A_{(j)}}.\overline{B_{(j)}} &= A_1B_1 - A_1B_2j - B_1A_2j - A_2B_2 \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

(3.7) ve (3.8) eşitliğini kullanarak,

$$\overline{AB_{(j)}} = \overline{A_{(j)}B_{(j)}}$$

elde ederiz.

c) $\overline{A}_{(ij)} = \overline{A_1} - \overline{A_2}j$ ve $\overline{B}_{(ij)} = \overline{B_1} - \overline{B_2}j$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A.B &= A_1B_1 + A_1B_2j + B_1A_2j - A_2B_2 \\ \overline{A.B}_{(ij)} &= \overline{A_1B_1} - \overline{A_2B_2} - \left(\overline{A_1B_2} + \overline{A_2B_1}\right) j \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_{(ij)}.\overline{B}_{(ij)} &= \overline{A_1B_1} - \overline{A_1B_2}j - \overline{A_2B_1}j - \overline{A_2B_2} \\ \overline{A}_{(ij)}.\overline{B}_{(ij)} &= \overline{A_1B_1} - \overline{A_2B_2} - \left(\overline{A_1B_2} + \overline{A_2B_1}\right) j \end{aligned} \tag{3.10}$$

şeklindedir. (3.9) ve (3.10) eşitliğini kullanarak,

$$\overline{AB_{(ij)}} = \overline{A_{(ij)}B_{(ij)}}$$

elde ederiz.

4) $A^T = A_1^T + A_2^T j$ ve $B^T = B_1^T + B_2^T j$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A.B &= A_1B_1 + A_1B_2j + B_1A_2j - A_2B_2 \\ A.B &= A_1B_1 - A_2B_2 + (A_1B_2 + A_2B_1) j \\ (A.B)^T &= B_1^T A_1^T - B_2^T A_2^T + \left(B_2^T A_1^T + B_1^T A_2^T\right) j \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} B^T A^T &= B_1^T A_1^T + B_1^T A_2^T j + B_2^T A_1^T j - B_2^T A_2^T \\ B^T A^T &= B_1^T A_1^T - B_2^T A_2^T + \left(B_2^T A_1^T + B_1^T A_2^T\right) j \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklindedir. (3.11) ve (3.12) eşitliğini kullanarak,

$$(AB)^T = B^T A^T$$

elde ederiz.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} i+j & i-ij \\ 1+i & 1-j \end{bmatrix}$ bikompleks katsayılı matrisi ele alalım. A^{-1} i hesap layalım.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} i+j & i-ij \\ 1+i & 1-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A_1 + jA_2 \\ |A_1| &= i-(i-1) = 1 \text{ ve } |A_2| = -1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1-i & i \end{bmatrix} \qquad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olur. A bikompleks katsayılı matrisin determinantını hesaplayarak, A^{-1}elde ederiz.

$$\begin{aligned} |A| &= (i+j)(1-j) - (1+i)(i-ij) = 2 \\ A^{-1} &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1-i & i \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ A^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+j & -i-ij \\ -1-i & i-j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorem 3.2. $A, B \in M_{n\times n}(B\mathbb{C})$ ve $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ olmak üzere; aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
&1)a)\ \left(\overline{A_{(i)}}\right)^T = \overline{(A^T)}_{(i)} \\
&b)\ \left(\overline{A_{(j)}}\right)^T = \overline{(A^T)}_{(j)} \\
&c)\ \left(\overline{A_{(ij)}}\right)^T = \overline{(A^T)}_{(ij)} \\
&2)a)\ (AB)^* = B^*A^* \Rightarrow \left(\overline{AB}_{(i)}\right)^T = \left(\overline{B}_{(i)}\right)^T \left(\overline{A}_{(i)}\right)^T \\
&b)\ (AB)^* = B^*A^* \Rightarrow \left(\overline{AB}_{(j)}\right)^T = \left(\overline{B}_{(j)}\right)^T \left(\overline{A}_{(j)}\right)^T \\
&c)\ (AB)^* = B^*A^* \Rightarrow \left(\overline{AB}_{(ij)}\right)^T = \left(\overline{B}_{(ij)}\right)^T \left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T \\
&3)a)\ \left(A^*_{(i)}\right)^{-1} = (A^{-1})^*_{(i)} \Rightarrow \left(\left(\overline{A_{(i)}}\right)^T\right)^{-1} = \left(\overline{(A^{-1})}_{(i)}\right)^T \\
&b)\ \left(A^*_{(j)}\right)^{-1} = (A^{-1})^*_{(j)} \Rightarrow \left(\left(\overline{A_{(j)}}\right)^T\right)^{-1} = \left(\overline{(A^{-1})}_{(j)}\right)^T \\
&c)\ \left(A^*_{(ij)}\right)^{-1} = (A^{-1})^*_{(ij)} \Rightarrow \left(\left(\overline{A_{(ij)}}\right)^T\right)^{-1} = \left(\overline{(A^{-1})}_{(ij)}\right)^T
\end{aligned}$$

İspat: 1) a) $A = A_1 + A_2 j$ $(A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{A_{(i)}} &= \overline{A_1} + \overline{A_2} j \\ \left(\overline{A_{(i)}}\right)^T &= \left(\overline{A_1}\right)^T - \left(\overline{A_2}\right)^T j \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} A^T &= A_1^T + A_2^T j \\ \overline{(A^T)}_{(i)} &= \overline{(A_1^T)} + \overline{(A_2^T)} j = \left(\overline{A_1}\right)^T - \left(\overline{A_2}\right)^T j \end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklindedir. Dolayısıyla (3.13) ve (3.14) eşitliğini kullanarak,

$$\left(\overline{A_{(i)}}\right)^T = \overline{(A^T)}_{(i)}$$

elde ederiz.

b) $A = A_1 + A_2 j$ $(A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{A_{(j)}} &= A_1 - A_2 j \\ \left(\overline{A_{(j)}}\right)^T &= (A_1)^T - (A_2)^T j \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} A^T &= A_1^T + A_2^T j \\ \overline{(A^T)}_{(j)} &= \left(A_1^T\right) - \left(A_2^T\right) j \end{aligned} \tag{3.16}$$

şeklindedir. (3.15) ve (3.16) eşitliğini kullanarak,

$$\left(\overline{A_{(j)}}\right)^T = \overline{(A^T)}_{(j)}$$

elde ederiz.

c) $A = A_1 + A_2 j$ $(A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{A_{(ij)}} &= \overline{A_1} - \overline{A_2} j \\ \left(\overline{A_{(ij)}}\right)^T &= \left(\overline{A_{1(ij)}}\right)^T - \left(\overline{A_{2(ij)}}\right)^T j \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} A^T &= A_1^T + A_2^T j \\ \overline{(A^T)}_{(ij)} &= \overline{(A_1^T)} - \overline{(A_2^T)} j = \left(\overline{A_{1(ij)}}\right)^T - \left(\overline{A_{2(ij)}}\right)^T j \end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.17) ve (3.18) eşitliğini kullanarak,

$$\left(\overline{A_{(ij)}}\right)^T = \overline{(A^T)}_{(ij)}$$

elde ederiz.

2) $A = A_1 + A_2 j, B = B_1 + B_2 j$ $(A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

a)

$$
\begin{aligned}
A^* &= \left(\overline{A_{(i)}}\right)^T = \left(\overline{A_1 + A_2 j}\right)^T_{(i)} \\
&= \left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{A_2}\right)^T j \\
B^* &= \left(\overline{B_{(i)}}\right)^T = \left(\overline{B_1 + B_2 j}\right)^T_{(i)} \\
&= \left(\overline{B_1}\right)^T + \left(\overline{B_2}\right)^T j \\
B^* A^* &= \left(\left(\overline{B_1}\right)^T + \left(\overline{B_2}\right)^T j\right)\left(\left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{A_2}\right)^T j\right) \\
&= \left(\overline{B_1}\right)^T \left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{B_1}\right)^T \left(\overline{A_2}\right)^T j \\
&\quad + \left(\overline{B_2}\right)^T \left(\overline{A_1}\right)^T j - \left(\overline{B_2}\right)^T \left(\overline{A_2}\right)^T \qquad (3.19) \\
AB &= \left(A_1 + A_2 j\right)\left(B_1 + B_2 j\right) \\
&= A_1 B_1 + A_1 B_2 j + A_2 B_1 j - A_2 B_2 \\
(AB)^* &= \overline{\left(AB_{(i)}\right)}^T \\
&= \left(\overline{A_1 B_1} + \overline{A_1 B_2} j + \overline{A_2 B_1} j - \overline{A_2 B_2}\right)^T \\
&= \left(\overline{B_1}\right)^T \left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{B_1}\right)^T \left(\overline{A_2}\right)^T j \\
&\quad + \left(\overline{B_2}\right)^T \left(\overline{A_1}\right)^T j - \left(\overline{B_2}\right)^T \left(\overline{A_2}\right)^T \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

biçimindedir. Buradan (3.19) ve (3.20) eşitliğini kullanarak,

$$
(AB)^* = \overline{\left(AB_{(i)}\right)}^T = B^* A^* = \left(\overline{B_{(i)}}\right)^T \left(\overline{A_{(i)}}\right)^T
$$

elde ederiz.

b)

$$
\begin{aligned}
AB &= \left(A_1 + A_2 j\right)\left(B_1 + B_2 j\right) = A_1 B_1 + A_1 B_2 j + A_2 B_1 j - A_2 B_2 \\
(AB)^* &= \overline{\left(AB_{(j)}\right)}^T = \left(A_1 B_1 - A_1 B_2 j - A_2 B_1 j - A_2 B_2\right)^T \\
&= \left(B_1\right)^T \left(A_1\right)^T - \left(B_1\right)^T \left(A_2\right)^T j \\
&\quad - \left(B_2\right)^T \left(A_1\right)^T j - \left(B_2\right)^T \left(A_2\right)^T \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^* &= \left(\overline{A_{(j)}}\right)^T = \left(\overline{A_1 + A_2 j}\right)^T_{(j)} = \left(A_1 - A_2 j\right)^T = A_1^T - A_2^T j \\
B^* &= \left(\overline{B_{(j)}}\right)^T = \left(\overline{B_1 + B_2 j}\right)^T_{(j)} = \left(B_1 - B_2 j\right)^T = B_1^T - B_2^T j \\
B^* A^* &= \left(B_1^T - B_2^T j\right)\left(A_1^T - A_2^T j\right) \\
&= \left(B_1\right)^T \left(A_1\right)^T - \left(B_1\right)^T \left(A_2\right)^T j \\
&\quad - \left(B_2\right)^T \left(A_1\right)^T j - \left(B_2\right)^T \left(A_2\right)^T
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

(3.21) ve (3.22) eşitliğini kullanarak,

$$
(AB)^* = \overline{\left(AB_{(j)}\right)}^T = B^* A^* = \left(\overline{B_{(j)}}\right)^T \left(\overline{A_{(j)}}\right)^T
$$

elde ederiz.

c)

$$
\begin{aligned}
AB &= \left(A_1 + A_2 j\right)\left(B_1 + B_2 j\right) \\
&= A_1 B_1 + A_1 B_2 j + A_2 B_1 j - A_2 B_2 \\
(AB)^* &= \overline{\left(AB_{(ij)}\right)}^T \\
&= \left(\overline{A_1 B_1} - \overline{A_1 B_2} j - \overline{A_2 B_1} j - \overline{A_2 B_2}\right)^T \\
&= \left(\overline{B_1}\right)^T \left(\overline{A_1}\right)^T - \left(\overline{B_1}\right)^T \left(\overline{A_2}\right)^T j \\
&\quad - \left(\overline{B_2}\right)^T \left(\overline{A_1}\right)^T j - \left(\overline{B_2}\right)^T \left(\overline{A_2}\right)^T
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

$$
\begin{aligned}
A^* &= \left(\overline{A_{(ij)}}\right)^T \\
&= \left(\overline{A_1 + A_2 j}\right)^T_{(ij)} \\
&= \left(\overline{A_1}\right)^T - \left(\overline{A_2}\right)^T j \\
B^* &= \left(\overline{B_{(ij)}}\right)^T \\
&= \left(\overline{B_1 + B_2 j}\right)^T_{(ij)} \\
&= \left(\overline{B_1}\right)^T - \left(\overline{B_2}\right)^T j \\
B^* A^* &= \left(\overline{B_1}\right)^T \left(\overline{A_1}\right)^T - \left(\overline{B_1}\right)^T \left(\overline{A_2}\right)^T j \\
&\quad - \left(\overline{B_2}\right)^T \left(\overline{A_1}\right)^T j - \left(\overline{B_2}\right)^T \left(\overline{A_2}\right)^T
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

biçimindedir. Dolayısıyla (3.23)ve (3.24) eşitliğini kullanarak,

$$(AB)^{*}=\overline{\left(AB_{(ij)}\right)}^{T}=B^{*}A^{*}=\left(\overline{B_{(ij)}}\right)^{T}\left(\overline{A_{(ij)}}\right)^{T}$$

elde ederiz.

3) $A=A_1+A_2j$ $(A_1,A_2\in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

a)

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{(i)} &= \overline{A_1}+\overline{A_2}j \\
\left(\overline{A}_{(i)}\right)^{T} &= \left(\overline{A_1}\right)^{T}+\left(\overline{A_2}\right)^{T}j \\
\left(\left(\overline{A}_{(i)}\right)^{T}\right)^{-1} &= \frac{\det\left(\overline{A_1}\right)^{T}}{\det\left(\overline{A}_{(i)}\right)^{T}}\left(\left(\overline{A_1}\right)^{T}\right)^{-1} \\
&\quad +j\frac{\det\left(\overline{A_2}\right)^{T}}{\det\left(\overline{A}_{(i)}\right)^{T}}\left(\left(\overline{A_2}\right)^{T}\right)^{-1} \qquad (3.25)\\
A^{-1} &= \frac{\det A_1}{\det A}\left(A_1\right)^{-1}+j\frac{\det A_2}{\det A}\left(A_2\right)^{-1} \\
\overline{A^{-1}}_{(i)} &= \overline{\frac{\det A_1}{\det A_{(i)}}\left(A_1\right)^{-1}+j\frac{\det A_2}{\det A_{(i)}}\left(A_2\right)^{-1}} \\
\overline{A^{-1}}_{(i)} &= \frac{\overline{\det A_1}}{\overline{\det A_{(i)}}}\overline{\left(A_1\right)^{-1}}+j\frac{\overline{\det A_2}}{\overline{\det A_{(i)}}}\overline{\left(A_2\right)^{-1}} \\
\overline{A^{-1}}_{(i)} &= \frac{\det\overline{A_1}}{\det\overline{A_{(i)}}}\left(\overline{A_1}\right)^{-1}+j\frac{\det\overline{A_2}}{\det\overline{A_{(i)}}}\left(\overline{A_2}\right)^{-1} \\
\left(\overline{A^{-1}}_{(i)}\right)^{T} &= \frac{\det\left(\overline{A_1}\right)^{T}}{\det\left(\overline{A}_{(i)}\right)^{T}}\left(\left(\overline{A_1}\right)^{-1}\right)^{T} \\
&\quad +j\frac{\det\left(\overline{A_2}\right)^{T}}{\det\left(\overline{A}_{(i)}\right)^{T}}\left(\left(\overline{A_2}\right)^{-1}\right)^{T} \\
\left(\overline{A^{-1}}_{(i)}\right)^{T} &= \frac{\det\left(\overline{A_1}\right)^{T}}{\det\left(\overline{A}_{(i)}\right)^{T}}\left(\left(\overline{A_1}\right)^{T}\right)^{-1} \\
&\quad +j\frac{\det\left(\overline{A_2}\right)^{T}}{\det\left(\overline{A}_{(i)}\right)^{T}}\left(\left(\overline{A_2}\right)^{T}\right)^{-1} \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

(3.25) ve (3.26) eşitliğini kullanarak,

$$\left(A^{*}_{(i)}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{*}_{(i)} \Rightarrow \left(\left(\overline{A_{(i)}}\right)^{T}\right)^{-1} = \left(\overline{\left(A^{-1}\right)_{(i)}}\right)^{T}$$

elde ederiz.

b)

$$\begin{aligned}
\overline{A_{(j)}} &= A_1 - A_2 j \\
\left(\overline{A}_{(j)}\right)^{T} &= (A_1)^{T} - (A_2)^{T} j \\
\left(\left(\overline{A}_{(j)}\right)^{T}\right)^{-1} &= \frac{\det (A_1)^{T}}{\det \left(\overline{A}_{(j)}\right)^{T}} \left((A_1)^{T}\right)^{-1} - j \frac{\det (A_2)^{T}}{\det \left(\overline{A}_{(j)}\right)^{T}} \left((A_2)^{T}\right)^{-1} \qquad (3.27) \\
A^{-1} &= \frac{\det A_1}{\det A} (A_1)^{-1} + j \frac{\det A_2}{\det A} (A_2)^{-1} \\
\overline{\left(A^{-1}\right)}_{(j)} &= \left(\frac{\det A_1}{\overline{\det A_{(j)}}} (A_1)^{-1}\right) - j \left(\frac{\det A_2}{\overline{\det A_{(j)}}} (A_2)^{-1}\right) \\
\left(\overline{A^{-1}}_{(j)}\right)^{T} &= \frac{\det (A_1)^{T}}{\det \left(\overline{A}_{(j)}\right)^{T}} \left((A_1)^{-1}\right)^{T} - j \frac{\det (A_2)^{T}}{\det \left(\overline{A}_{(j)}\right)^{T}} \left((A_2)^{-1}\right)^{T} \\
\left(\overline{A^{-1}}_{(j)}\right)^{T} &= \frac{\det (A_1)^{T}}{\det \left(\overline{A}_{(j)}\right)^{T}} \left((A_1)^{T}\right)^{-1} - j \frac{\det (A_2)^{T}}{\det \left(\overline{A}_{(j)}\right)^{T}} \left((A_2)^{T}\right)^{-1} \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

(3.27) ve (3.28) eşitliğini kullanarak,

$$\left(A^{*}_{(j)}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{*}_{(j)} \Rightarrow \left(\left(\overline{A_{(j)}}\right)^{T}\right)^{-1} = \left(\overline{\left(A^{-1}\right)_{(j)}}\right)^{T}$$

elde ederiz.

c)

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_{(ij)} &= \overline{A_1} - \overline{A_2}j \\
\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T &= \left(\overline{A_1}\right)^T - \left(\overline{A_2}\right)^T j \\
\left(\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T\right)^{-1} &= \frac{\det\left(\overline{A_1}\right)^T}{\det\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T}\left(\left(\overline{A_1}\right)^T\right)^{-1} \\
&\quad -j\frac{\det\left(\overline{A_2}\right)^T}{\det\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T}\left(\left(\overline{A_2}\right)^T\right)^{-1} \qquad (3.29) \\
A^{-1} &= \frac{\det A_1}{\det A}\left(A_1\right)^{-1} + j\frac{\det A_2}{\det A}\left(A_2\right)^{-1} \\
\overline{A^{-1}}_{(ij)} &= \overline{\frac{\det A_1}{\det A_{(ij)}}\left(A_1\right)^{-1}} - j\overline{\frac{\det A_2}{\det A_{(ij)}}\left(A_2\right)^{-1}} \\
\overline{A^{-1}}_{(ij)} &= \overline{\frac{\det A_1}{\det A_{(ij)}}}\,\overline{\left(A_1\right)^{-1}} - j\overline{\frac{\det A_2}{\det A_{(ij)}}}\,\overline{\left(A_2\right)^{-1}} \\
\overline{A^{-1}}_{(ij)} &= \frac{\det\overline{A_1}}{\det\overline{A_{(ij)}}}\left(\overline{A_1}\right)^{-1} - j\frac{\det\overline{A_2}}{\det\overline{A_{(ij)}}}\left(\overline{A_2}\right)^{-1} \\
\left(\overline{A^{-1}}_{(ij)}\right)^T &= \frac{\det\left(\overline{A_1}\right)^T}{\det\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T}\left(\left(\overline{A_1}\right)^{-1}\right)^T \\
&\quad -j\frac{\det\left(\overline{A_2}\right)^T}{\det\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T}\left(\left(\overline{A_2}\right)^{-1}\right)^T \\
\left(\overline{A^{-1}}_{(ij)}\right)^T &= \frac{\det\left(\overline{A_1}\right)^T}{\det\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T}\left(\left(\overline{A_1}\right)^T\right)^{-1} \\
&\quad -j\frac{\det\left(\overline{A_2}\right)^T}{\det\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T}\left(\left(\overline{A_2}\right)^T\right)^{-1} \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

(3.29) ve (3.30) eşitliğini kullanarak,

$$\left(A^*_{(ij)}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*_{(ij)} \Rightarrow \left(\left(\overline{A_{(ij)}}\right)^T\right)^{-1} = \left(\overline{\left(A^{-1}\right)}_{(ij)}\right)^T$$

elde ederiz.

4 BİKOMPLEKS MATRİSLERİN KOMPLEKS ADJOİNT MATRİSLERİ

Tanım 4.1. Herhangi $A \in M_{n\times n}(B\mathbb{C})$ bikompleks matrisini $A = A_1 + A_2 j$ biçiminde yazabiliriz. Burada $A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$dir. Bir $A = A_1 + A_2 j \in M_{n\times n}(B\mathbb{C})$ bikompleks matrisine bir tek $2n \times 2n$ tipindeki $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix}$ kompleks matrisi karşılık gelir. Bu matrise A nın adjointi veya kompleks adjoint matrisi adı verilir ve χ_A ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2+i+j & i-j \\ ij+1 & i-j+2ij \end{bmatrix}_{2\times 2}$ matrisini ele alırsak, A matrisini,

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & i \\ 1 & i \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ i & -1+2i \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$\chi_A = \begin{bmatrix} 2+i & i & 1 & -1 \\ 1 & i & i & -1+2i \\ -1 & 1 & 2+i & i \\ -i & 1-2i & 1 & i \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

matrisi elde edilir.

Teorem 4.1. $A, B \in M_{n\times n}(B\mathbb{C})$ bikompleks matrisleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$1) \chi_{I_n} = I_{2n}$

$2) \chi_{A+B} = \chi_A + \chi_B$

$3) \chi_{AB} = \chi_A \chi_B$

$4) \chi_{A^{-1}} = (\chi_A)^{-1}$

$5) \chi_{A^*} \neq (\chi_A)^*$

$6) \chi_A$ üniter,hermityen,veya normal matris ise

A sırasıyla üniter, hermityen, veya normal matrisdir.

İspat: 1)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I_n + 0j = A_1 + A_2 j$$

buradan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\chi_{I_n} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

olur.Buradan

$$\chi_{I_n} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$$

elde edilir.

2) $A = A_1 + A_2 j$ ve $B = B_1 + B_2 j \quad (A_1, A_{2,} B_1 B_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} \\
A+B &= (A_1+B_1)+(A_2+B_2)\,j \\
\chi_{A+B} &= \begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ -A_2-B_2 & A_1+B_1 \end{bmatrix} \qquad (4.1) \\
\chi_A &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} \chi_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{bmatrix} \\
\chi_A+\chi_B &= \begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ -A_2-B_2 & A_1+B_1 \end{bmatrix} \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

(4.1) ve (4.2) eşitliğini kullanarak,

$$\chi_{A+B} = \chi_A + \chi_B$$

elde ederiz.

3)

$$\begin{aligned}
AB &= (A_1+A_2 j)(B_1+B_2 j) \\
&= A_1B_1 + A_1B_2 j + A_2B_1 j - A_2B_2 \\
AB &= (A_1B_1 - A_2B_2) + (A_1B_2 + A_2B_1)\,j \\
\chi_{AB} &= \begin{bmatrix} A_1B_1-A_2B_2 & A_1B_2+A_2B_1 \\ -A_1B_2-A_2B_1 & A_1B_1-A_2B_2 \end{bmatrix} \qquad (4.3) \\
\chi_A\chi_B &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1B_1-A_2B_2 & A_1B_2+A_2B_1 \\ -A_1B_2-A_2B_1 & A_1B_1-A_2B_2 \end{bmatrix} \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

(4.3)ve (4.4) eşitliğini kullanarak,

$$\chi_{AB} = \chi_A \chi_B$$

elde edilir.

4)

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{bmatrix} = I \\ &\Leftrightarrow \chi_A \chi_{A^{-1}} = I \\ &\Leftrightarrow \chi_A \chi_{A^{-1}} \left(\chi_{A^{-1}}\right)^{-1} = I \left(\chi_{A^{-1}}\right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow \chi_A I = I \left(\chi_{A^{-1}}\right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow \chi_A = \left(\chi_{A^{-1}}\right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow \left(\chi_A\right)^{-1} = \chi_{A^{-1}} \end{aligned}$$

5) $A = A_1 + A_2 j$ $(A_1, A_{2,} \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$olsun.

$$\begin{aligned} A^*_{(i)} &= \left(\overline{A_{(i)}}\right)^T = \left(\overline{A_1} + \overline{A_2} j\right)^T = \left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{A_2}\right)^T \\ \chi^*_{A(i)} &= \begin{bmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \\ -\left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_1}\right)^T \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{\chi_{A(i)}} = \begin{bmatrix} \overline{A_1} & \overline{A_2} \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \left(\overline{\chi_{A(i)}}\right)^T = \begin{bmatrix} \overline{A_1} & -\overline{A_2} \\ \overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

(4.5) ve (4.6)eşitliğini kullanarak,

$$\chi^*_{A(i)} \neq \left(\chi_A\right)^*_{(i)}$$

elde ederiz.

6) χ_A üniter matris olsun.

$$\chi_A\left(\chi_A\right)^*_{(i)} = I_{2n} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\chi_A\left(\chi_A\right)^*_{(i)} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \\ -\left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_1}\right)^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_A\left(\chi_A\right)^*_{(i)} &= \begin{bmatrix} A_1\left(\overline{A_1}\right)^T - A_2\left(\overline{A_2}\right)^T & A_1\left(\overline{A_2}\right)^T + A_2\left(\overline{A_1}\right)^T \\ -A_2\left(\overline{A_1}\right)^T - A_1\left(\overline{A_2}\right)^T & A_2\left(\overline{A_2}\right)^T - A_1\left(\overline{A_1}\right)^T \end{bmatrix} \qquad (4.7) \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4.7) eşitliğini kullanarak,

$$A_1\left(\overline{A_1}\right)^T - A_2\left(\overline{A_2}\right)^T = I \text{ ve } A_1\left(\overline{A_2}\right)^T + A_2\left(\overline{A_1}\right)^T = 0 \qquad (4.8)$$

elde ederiz. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} A.A^*_{(i)} &= \left(A_1 + A_2 j\right)\left(\left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{A_2}\right)^T j\right) \\ A.A^*_{(i)} &= A_1\left(\overline{A_1}\right)^T - A_2\left(\overline{A_2}\right)^T + \left(A_1\left(\overline{A_2}\right)^T + A_2\left(\overline{A_1}\right)^T\right) j. \end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi (4.8) deki eşitlikleri kullanarak,

$$A.A^*_{(i)} = I.$$

A matrisini üniter matris elde ederiz.

χ_A hermityen matris olsun.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= (\chi_A)^*_{(i)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \\ -\left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_1}\right)^T \end{bmatrix} \\
A_1 &= \left(\overline{A_1}\right)^T \Rightarrow A_1 = A_1^* \\
A_2 &= \left(\overline{A_2}\right)^T \Rightarrow A_2 = A_2^* \\
A &= A_1 + A_2 j \text{ ve } A^*_{(i)} = \left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{A_2}\right)^T j
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanarak ,

$$A = A^*_{(i)}.$$

A matrisini hermityen matris elde ederiz.

χ_A normal matris olsun.

$$\chi_A . (\chi_A)^*_{(i)} = (\chi_A)^*_{(i)} . \chi_A$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \\ -\left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_1}\right)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \\ -\left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_1}\right)^T \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
(A_1 + A_2 j) . \left(\left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{A_2}\right)^T j\right) &= \left(\left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{A_2}\right)^T j\right) . (A_1 + A_2 j) \\
A . A^*_{(i)} &= A^*_{(i)} . A.
\end{aligned}$$

A matrisini normal matris elde ederiz.

Bu ispat benzer şekilde A bikompleks matrisinin j ve ij eşleniklerine göre de yapılır.

Teorem 4.2. $A \in M_{n\times n}(B\mathbb{C}), A = A_1 + A_2 j \ \ (A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$ bikompleks matrisi için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1)A_1veA_2 kompleks matrisleri pozitif (negatif) ortogonal matris ise

A bikompleks matrisi ortogonaldir

2)A_1veA_2 kompleks matrisleri simetrik matris ise A bikompleks matrisi

simetriktir.

3)A_1veA_2 kompleks matrisleri anti simetrik matris ise A bikompleks matrisi

anti simetriktir.

4)$a)$$A_1veA_2$ kompleks matrisleri hermityen matris ise A bikompleks matrisi

i eşleniğine göre hermityen matrisdir.

$b)$$A_1veA_2$ kompleks matrisleri hermityen matris ise A bikompleks matrisi

j eşleniğine göre hermityen matris değildir.

$c)$$A_1veA_2$ kompleks matrisleri hermityen matris ise A bikompleks matrisi

ij eşleniğine göre hermityen matris değildir.

5)$a)$$A_1veA_2$ kompleks matrisleri ters hermityen matris ise A bikompleks matrisi

i eşleniğine göre ters hermityen matrisdir.

$b)$$A_1veA_2$ kompleks matrisleri ters hermityen matris ise A bikompleks matrisi

j eşleniğine göre ters hermityen matris değildir.

$c)$$A_1veA_2$ kompleks matrisleri ters hermityen matris ise A bikompleks matrisi

ij eşleniğine göre ters hermityen matris değildir.

İspat: 1) A_1, A_2 ortogonal ise;

$$A_1^T = A_1^{-1} \text{ ve } A_2^T = A_2^{-1}$$

dir.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{\det A_1}{\det A}(A_1)^{-1} + j\frac{\det A_2}{\det A}(A_2)^{-1} && (4.9)\\ A^T &= (A_1 + A_2 j)^T = A_1^T + A_2^T j \\ A^T &= A_1^{-1} + A_2^{-1} j && (4.10) \end{aligned}$$

Eğer,

$$\frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\det A_2}{\det A} = 1$$

olursa (4.9) ve (4.10) eşitliğini kullanarak, $A^{-1} = A^T$ olur.A bikompleks matrisi ortogonal olur.
Eğer yukarıdaki eşitlik sağlanmazsa A bikompleks matrisi ortogonal olmaz.

2) A_1, A_2 simetrik ise $A_1^T = A_1$ ve $A_2^T = A_2$ dir. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} A^T &= (A_1 + A_2 j)^T = A_1^T + A_2^T j \\ A^T &= A_1 + A_2 j \\ A^T &= A \end{aligned}$$

olduğundan A bikompleks matrisi simetriktir.

3) A_1, A_2 anti simetrik ise $A_1^T = -A_1$ ve $A_2^T = -A_2$ dir. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} A^T &= (A_1 + A_2 j)^T = A_1^T + A_2^T j \\ A^T &= -A_1 - A_2 j \\ A^T &= -(A_1 + A_2 j) \\ A^T &= -A \end{aligned}$$

olduğundan A bikompleks matrisi anti simetriktir.

4)

a) A_1, A_2 hermityen matris ise $\left(\overline{A_{1}}_{(i)}\right)^T = A_1$ve $\left(\overline{A_{2}}_{(i)}\right)^T = A_2$ dir. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 j \Rightarrow \overline{A}_{(i)} = \overline{A_{1}}_{(i)} + \overline{A_{2}}_{(i)} j \\
\left(\overline{A}_{(i)}\right)^T &= \left(\overline{A_{1}}_{(i)}\right)^T + \left(\overline{A_{2}}_{(i)}\right)^T j \\
&= A_1 + A_2 j \\
&= A
\end{aligned}$$

olduğundan A bikompleks matrisi i eşleniğine göre hermityen matristir.

b) A_1, A_2 hermityen matris ise, $\left(\overline{A_{1}}_{(j)}\right)^T = A_1$ ve $\left(\overline{A_{2}}_{(j)}\right)^T = A_2$ dir. Buradan;

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 j \Rightarrow \overline{A}_{(j)} = A_1 - A_2 j \\
\left(\overline{A}_{(j)}\right)^T &= (A_1)^T - (A_2)^T j \\
\left(\overline{A}_{(j)}\right)^T &\neq A
\end{aligned}$$

Dolayısıyla; jeşleniğine göre A bikompleks matrisi hermityen matris değildir.

c) A_1, A_2 hermityen matris ise $\left(\overline{A_{1}}_{(ij)}\right)^T = A_1$ve $\left(\overline{A_{2}}_{(ij)}\right)^T = A_2$ dir. Buradan;

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 j \Rightarrow \overline{A}_{(ij)} = \overline{A_{1}}_{(i)} - \overline{A_{2}}_{(i)} j \\
\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T &= \left(\overline{A_{1}}_{(i)}\right)^T - \left(\overline{A_{2}}_{(i)}\right)^T j \\
\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T &\neq A
\end{aligned}$$

olduğundan A bikompleks matrisi ij eşleniğine göre hermityen matris değildir.

5)

a) A_1, A_2 ters hermityen matris ise $\left(\overline{A_1}_{(i)}\right)^T = -A_1$ve $\left(\overline{A_2}_{(i)}\right)^T = -A_2$ dir.

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 j \Rightarrow \overline{A}_{(i)} = \overline{A_1} + \overline{A_2} j \\
\left(\overline{A}_{(i)}\right)^T &= \left(\overline{A_1}_{(i)}\right)^T + \left(\overline{A_2}_{(i)}\right)^T j \\
&= -A_1 - A_2 j \\
&= -A
\end{aligned}$$

olduğundan A bikompleks matrisi i eşleniğine göre ters hermityen matristir.

b) A_1, A_2 ters hermityen matris ise $\left(\overline{A_1}_{(j)}\right)^T = -A_1$ ve $\left(\overline{A_2}_{(j)}\right)^T = -A_2$ dir.

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 j \Rightarrow \overline{A}_{(j)} = A_1 - A_2 j \\
\left(\overline{A}_{(j)}\right)^T &= (A_1)^T - (A_2)^T j \\
&= -A_1 + A_2 j \\
\left(\overline{A}_{(j)}\right)^T &\neq -A
\end{aligned}$$

Buna göre j eşleniğine göre A bikompleks matrisi ters hermityen matris değildir.

c) A_1, A_2 ters hermityen matris ise $\left(\overline{A_1}_{(ij)}\right)^T = -A_1$ ve $\left(\overline{A_2}_{(ij)}\right)^T = -A_2$ dir.

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 j \Rightarrow \overline{A}_{(ij)} = \overline{A_1}_{(i)} - \overline{A_2}_{(i)} j \\
\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T &= \left(\overline{A_1}_{(i)}\right)^T - \left(\overline{A_2}_{(i)}\right)^T j \\
\left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T &\neq -A
\end{aligned}$$

olduğundan ij eşleniğine göre A bikompleks matrisi ters hermityen matris değildir.

Örnek: A_1 ve A_2 simetrik matris olmak üzere,

$$A_1 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \text{ ve } A_2 = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

matrislerini ele alalım.

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 j = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} i+j+ij & 1 \\ 1 & -i-ij \end{bmatrix} \\
A^T &= \begin{bmatrix} i+j+ij & 1 \\ 1 & -i-ij \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. $A = A^T$olduğundan A bikompleks matrisi simetriktir.

Örnek: A_1 ve A_2 hermityen matris olsunlar.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

hermityen matrislerini ele alalım.

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 j = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} 1 & -i+j+ij \\ i+j-ij & 2+j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{(i)} &= \begin{bmatrix} 1 & i+j-ij \\ -i+j+ij & 2+j \end{bmatrix} \text{ ve } \left(\overline{A}_{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -i+j+ij \\ i+j-ij & 2+j \end{bmatrix} \\
\overline{A}_{(i)} &= \begin{bmatrix} 1 & i+j-ij \\ -i+j+ij & 2+j \end{bmatrix} \text{ ve } \left(\overline{A}_{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -i+j+ij \\ i+j-ij & 2+j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olur. $A = \left(\overline{A}_{(i)}\right)^T$ olduğundan A matrisi i eşleniğine göre hermityen matristir.

$$\overline{A}_{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & -i-j-ij \\ i-j+ij & 2-j \end{bmatrix} ve \left(\overline{A}_{(j)}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & i-j+ij \\ -i-j-ij & 2-j \end{bmatrix}$$

olur. $A \neq \left(\overline{A}_{(j)}\right)^T$ olduğundan A matrisi j eşleniğine göre hermityen matris değildir.

$$\overline{A}_{(ij)} = \begin{bmatrix} 1 & i-j+ij \\ -i-j-ij & 2-j \end{bmatrix} \text{ ve } \left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -i-j-ij \\ i-j+ij & 2-j \end{bmatrix}$$

olur. $A \neq \left(\overline{A}_{(ij)}\right)^T$ olduğundan A matrisi ij eşleniğine göre hermityen matris değildir.

Örnek: A_1 ve A_2 ortogonal matrislerini ele alalım.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & i \\ -i & \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ ve } A_2 = \begin{bmatrix} 2i & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2i \end{bmatrix}$$

olsun.

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 j = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & i \\ -i & \sqrt{2} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 2i & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2i \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}+2ij & i-\sqrt{5}j \\ -i+\sqrt{5}j & \sqrt{2}+2ij \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$A^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}+2ij & i-\sqrt{5}j \\ i-\sqrt{5}j & \sqrt{2}+2ij \end{bmatrix}$$

olur.

$$A^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{2}ij - 2\sqrt{5}ij} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+2ij & i-\sqrt{5}j \\ i-\sqrt{5}j & \sqrt{2}+2ij \end{bmatrix}$$

$A^T \neq A^{-1}$ olduğundan A bikompleks matrisi ortogonal değildir.

A bikompleks matrisinin ortogonal olması için $|A| = |A_1| = |A_2|$ olması gerekirdi.

Teorem 4.3. $A \in M_{n\times n}(B\mathbb{C})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) A nın tersi vardır.

ii) $AX = 0$ denkleminin bir tek çözümü vardır.Bu çözüm sıfırdır.

iii) $|\chi_A| \neq 0$ dır.Yani χ_A matrisinin tersi vardır.

iv) A matrisinin sıfır özdeğeri yoktur.Daha açık olarak eğer bazı λ bikompleks sayıları ve $X \neq 0$ bikompleks vektörleri için $AX = \lambda X$ veya $AX = X\lambda$ ise $\lambda \neq 0$ dır.

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ Bu gerektirme aşikardır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $A = A_1 + A_2 j$, $X = x_1 + x_2 j$ olsun.A_1, A_2 kompleks matrisler ve x_1, x_2 kompleks sütun vektörleri olsun.

$$\begin{aligned} AX &= (A_1 + A_2 j)(x_1 + x_2 j) \\ AX &= (A_1 x_1 - A_2 x_2) + (A_1 x_2 + A_2 x_1) j \end{aligned}$$

$$A_1 x_1 - A_2 x_2 = 0 \text{ ve } A_1 x_2 + A_2 x_1 = 0$$

Bu eşitlikleri kullanarak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} A_1 x_1 - A_2 x_2 &= 0 \\ -A_1 x_2 - A_2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$AX = 0 \text{ ancak ve ancak } \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\chi_A . \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \end{bmatrix}^T = 0$$

$$AX = 0$$

$\chi_A . \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \end{bmatrix}^T = 0$ şeklinde tek bir çözümü vardır. Böylece, χ_A bir bikompleks matristir ve χ_A tersi alınabilirdir.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ $A \in M_{n\times n}(B\mathbb{C})$ olmak üzere $AX = 0$ olsun. A matrisinin sıfır özdeğere sahip olduğunu kabul edelim. $X \neq 0$ bikompleks vektörü için $AX = \lambda X$ eşitliği sıfır özdeğere sahiptir. Böylece $AX = 0$ ve $X = 0$ elde etmiş oluruz. Şimdi A sıfır özdeğere sahip olsun. Eğer $AX = 0 = \lambda X$ ise $X = 0$ dır.

$(iii) \Rightarrow (i)$ χ_A tersi alınabilir bir bikompleks matris olsun,

$A = A_1 + A_2 j$ ve $B = B_1 + B_2 j$ bikompleks matrislerini ele alalım.

$$\chi_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \chi_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ B_1A_1 - B_2A_2 &= I \\ B_1A_2 + B_2A_1 &= 0 \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri kullanarak;

$$(B_1A_1 - B_2A_2) + (B_1A_2 + B_2A_1)\, j = I$$

ifadesini elde ederiz. $B = B_1 + B_2 j$ için $BA = I$ olur. Böylece A tersi alınabilir bir bikompleks matristir.

5 BİKOMPLEKS MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ

Tanım 5.1. $A \in M_n(B\mathbb{C})$ ve $\lambda \in B\mathbb{C}$ olsun. $Ax = \lambda x$ $(Ax = x\lambda)$ eşitliği sağlanıyorsa x vektörü A matrisinin bikompleks özvektörü, λ da A matrisinin sol özdeğeridir. Sol özdeğer kümesini $\delta_l(A) = \{\lambda \in B\mathbb{C} : Ax = \lambda x,\ x \neq 0\}$şeklinde yaza biliriz .Benzer şekilde sağ özdeğer kümesini de $\delta_r(A) = \{\lambda \in B\mathbb{C} : Ax = x\lambda,\ x \neq 0\}$ olarak gösterebiliriz.

Teorem 5.1. Eğer A $n \times n$ tipinde bikompleks bir matris ise A nın sol ve sağ özdeğerleri eşittir. Aşağıdaki şekilde ifade ederiz.

$$\delta_l(A) = \delta_r(A).$$

İspat: A matrisinin sol özdeğeri λ olsun. $x \neq 0$ için $Ax = \lambda x$ olur. Herhangi bir $q \neq 0$ bikompleks matrisi için,

$$\begin{aligned} \left(qAq^{-1}\right) qx &= \left(q\lambda q^{-1}\right) qx \\ Aqx &= \left(q\lambda q^{-1}\right) qx \end{aligned}$$

şeklinde A matrisini elde ederiz. $0 \neq q \in B\mathbb{C}$ olsun. Kompleks matrisini qAq^{-1} $qx = y = y_1 + y_2 j$ şeklinde yazabiliriz.

$$Ay_1 = y_1 q\lambda q^{-1} \text{ ve } Ay_2 = y_2 q\lambda q^{-1}$$

Benzer şekilde sağ özdeğeri ispatlayabiliriz.

Tanım 5.2. $A \in M_n(B\mathbb{C})$ ve A matrisinin kompleks adjoint matrisi χ_A olsun.A matrisinin determinantını $|A|$ ve χ_A nın determinantı $|\chi_A|$ olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} \text{i)}\, |\chi_A| &= |A| \,.\, \left|\overline{A_i}\right| \\ \text{ii)}\, |\chi_A| &= |A| \,.\, \left|\overline{A_j}\right| \\ \text{iii)}\, |\chi_A| &\neq |A| \,.\, \left|\overline{A_{ij}}\right| \end{aligned}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ij & i+j \end{bmatrix}$ bikompleks matrisini ele alalım.
A bikompleks matrisinin determinantını hesaplarsak $|A| = i + j$ buluruz. Şimdi ise $\left|\overline{A_i}\right|$, $\left|\overline{A_j}\right|$, $\left|\overline{A_{ij}}\right|$ değerlerini elde edelim.

$$\overline{A_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ij & -i+j \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\overline{A_i}\right| = -i + j$$

olur.

$$\overline{A_j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ij & i-j \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\overline{A_j}\right| = i - j$$

bulunur.

$$\overline{A_{ij}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ij & -i-j \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\overline{A_{ij}}\right| = -i - j$$

elde edilir. Şimdi de $|A| \,.\, \left|\overline{A_i}\right|$, $|A| \,.\, \left|\overline{A_j}\right|$, $|A| \,.\, \left|\overline{A_{ij}}\right|$ ifadelerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} |A| \,.\, \left|\overline{A_i}\right| &= (i+j)(-i+j) = -i^2 + j^2 = 0 \\ |A| \,.\, \left|\overline{A_j}\right| &= (i+j)(i-j) = i^2 - j^2 = 0 \\ |A| \,.\, \left|\overline{A_{ij}}\right| &= (i+j)(-i-j) = -i^2 - ij - ij - j^2 = 2 - 2ij \end{aligned}$$

elde edilir.A matrisini,

$$A = A_1 + A_2 j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} j$$

şeklinde yazıp χ_A'yı ve $|\chi_A|$'yı hesaplayalım.

$$\chi_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i & -1 & 0 & i \end{bmatrix} \Rightarrow |\chi_A| = 1. \begin{vmatrix} i & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & i \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{vmatrix} = i^2 + 1 = 0$$

Buradan,

$$\begin{aligned} |\chi_A| &= |A| \left|\overline{A_i}\right| \\ |\chi_A| &= |A| \left|\overline{A_j}\right| \\ |\chi_A| &\neq |A| \left|\overline{A_{ij}}\right| \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

6 DUAL BİKOMPLEKS SAYILAR

6.1. Dual Bikompleks Sayılar ve Özellikleri

Tanım 6.1.1.

$$\widetilde{Z} = \left\{ \begin{array}{c} A + Bi + Cj + Dij, A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^*, C = c + \varepsilon c^*, D = d + \varepsilon d^* \\ , a, a^*, b, b^*, c, c^*, d, d^* \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = -1 \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye dual bikompleks sayılar kümesi denir.
$\widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2$ dual bikompleks sayısı bikompleks sayılar kümesinde tanımlanabileceği gibi reel sayılar kümesinde de tanımlanabilir. Bunun için Z_1, Z_2 bikompleks sayıları reel sayılar üzerinde,

$$Z_1 = a + bi + cj + dij, Z_2 = a^* + b^*i + c^*j + d^*ij$$

şeklinde ifade edersek,

$$\begin{aligned} \widetilde{Z} &= A + Bi + Cj + Dij \\ \widetilde{Z} &= (a + \varepsilon a^*) + (b + \varepsilon b^*)i + (c + \varepsilon c^*)j + (d + \varepsilon d^*)ij \\ \widetilde{Z} &= a + bi + cj + dij + \varepsilon(a^* + b^*i + c^*j + d^*ij) \end{aligned}$$

elde ederiz.Dual bikompleks sayılar kümesini;

$$\widetilde{Z} = \left\{ \widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2 \mid Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C}, \varepsilon^2 = 0, i^2 = j^2 = -1, ij = ji \right\}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Tanım 6.1.2. Dual bikompleks sayılar kümesinin iki elemanı,
$\widetilde{Z} = A + Bi + Cj + Dij, \widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2$ ve $\widetilde{W} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 ij, \widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2$

$(Z_1, Z_2, W_1, W_2 \in B\mathbb{C})$ olsun. Dual bikompleks sayılarda toplama işlemi;

$$\oplus : D_{B\mathbb{C}} \times D_{B\mathbb{C}} \to D_{B\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} \oplus \widetilde{W} &= (Z_1 + \varepsilon Z_2) + (W_1 + \varepsilon W_2) \\
\widetilde{Z} \oplus \widetilde{W} &= (Z_1 + W_1) + \varepsilon (Z_2 + W_2)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bikompleks sayılar toplama işlemine göre kapalıdır. iki bikompleks sayının toplamı yine bir bikompleks sayıdır. Ayrıca $(D_{B\mathbb{C}}, +)$ ikilisi bir abel gruptur. Buradaki etkisiz eleman sıfır dual bikompleks sayısı $(0, 0, 0, 0)$ sıralı dörtlüsüdür.

Tanım 6.1.3. Dual bikompleks sayılarda skaler ile çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$Z = A + Bi + Cj + Dij \in D_{B\mathbb{C}}$$

ve $\forall k \in \mathbb{R}$ için skaler ile çarpma işlemi,

$$\odot : \mathbb{R}xD_{B\mathbb{C}} \to D_{B\mathbb{C}}$$

$$k \odot \widetilde{Z} = kA + kBi + kCj + kDij$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan dış işlem;

$$\begin{aligned}
i)k \odot (\widetilde{Z} + \widetilde{W}) &= (k \odot \widetilde{Z}) + (k \odot \widetilde{W}); \forall k \in \mathbb{R}, \forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}} \\
ii)(k + t) \odot \widetilde{Z} &= (k \odot \widetilde{Z}) + (t \odot \widetilde{Z}); \forall k, t \in \mathbb{R}, \forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}} \\
iii)(k.t) \odot \widetilde{Z} &= k \odot (t \odot \widetilde{Z}); \forall k, t \in \mathbb{R}, \forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}} \\
iV)1 \odot \widetilde{Z} &= \widetilde{Z}, \forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

özelliklerine sahiptir.

$\{D_{B\mathbb{C}}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Bu uzayı $D_{B\mathbb{C}}$ile $D_{B\mathbb{C}}$deki $\oplus$

işlemini kısaca " + "ile göstereceğiz.

Tanım 6.1.4. Çarpma işlemi, $\otimes : D_{B\mathbb{C}} \times D_{B\mathbb{C}} \to D_{B\mathbb{C}}$ işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır. Buna göre;

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W} &= (Z_1 + \varepsilon Z_2) . (W_1 + \varepsilon W_2) = (Z_1.W_1) + \varepsilon (Z_1.W_2 + Z_2.W_1) \\
&= (a + bi + cj + dij) (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij) \\
&\quad + \varepsilon((a + bi + cj + dij) (a_1^* + b_1^* i + c_1^* j + d_1^* ij) \\
&\quad + (a^* + b^* i + c^* j + d^* ij) . (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij)) \\
&= aa_1 - bb_1 - cc_1 + dd_1 + (ab_1 + ba_1 - cd_1 - dc_1) i \\
&\quad + (ac_1 + bd_1 + ca_1 - db_1) j + (ad_1 + bc_1 + cb_1 - da_1) ij \\
&\quad + \varepsilon((aa_1^* - bb_1^* - cc_1^* + dd_1^* + a^* a_1 - b^* b_1 - c^* c_1 + d^* d_1) \\
&\quad + (ab_1^* + ba_1^* - cd_1^* - dc_1^* + a^* b_1 + b^* a_1 - c^* d_1 - d^* c_1) i \\
&\quad + (ac_1^* - bd_1^* + ca_1^* - db_1^* + a^* c_1 - b^* d_1 + c^* a_1 - d^* b_1) j \\
&\quad + (ad_1^* + bc_1^* + cb_1^* + da_1^* + a^* d_1 + b^* c_1 + c^* b_1 + d^* a_1) ij)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\widetilde{W} \otimes \widetilde{Z}$ hesaplandığında ,

$$\begin{aligned}
\widetilde{W} \otimes \widetilde{Z} &= (W_1 + \varepsilon W_2) . (Z_1 + \varepsilon Z_2) \\
\widetilde{W} \otimes \widetilde{Z} &= W_1.Z_1 + \varepsilon (W_1.Z_2 + W_2.Z_1) \\
W_1.Z_2 &= Z_2.W_1, W_2.Z_1 = Z_1.W_2, Z_1.W_1 = W_1.Z_1
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W} = \widetilde{W} \otimes \widetilde{Z}$$

olduğu görülür. Dual bikompleks sayılarda çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

Tanım 6.1.5. Dual bikompleks sayılar için eşitlik bağıntısını;

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} &= A + Bi + Cj + Dij \text{ ve } \widetilde{W} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 ij \\
\widetilde{Z} &= \widetilde{W} \Leftrightarrow A = A_1, B = B_1, C = C_1, D = D_1
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Tanım 6.1.6. Dual bikompleks sayılarda eşlenik kavramı i, j ve ij birimlerine göre olmak üzere üç farklı şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} &= A + Bi + Cj + Dij \\
\widetilde{Z} &= (a+\varepsilon a^*) + (b+\varepsilon b^*)i + (c+\varepsilon c^*)j + (d+\varepsilon d^*)ij \\
1)\overline{\widetilde{Z}}_{(i)} &= (a+\varepsilon a^*) - (b+\varepsilon b^*)i + (c+\varepsilon c^*)j - (d+\varepsilon d^*)ij \\
\overline{\widetilde{Z}}_{(i)} &= (a - bi + cj - dij) + \varepsilon\,(a^* - b^*i + c^*j - d^*ij) \\
\overline{\widetilde{Z}}_{(i)} &= \overline{Z_1}_{(i)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(i)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\overline{\widetilde{Z}}_{(j)} &= (a+\varepsilon a^*) + (b+\varepsilon b^*)i - (c+\varepsilon c^*)j - (d+\varepsilon d^*)ij \\
\overline{\widetilde{Z}}_{(j)} &= (a + bi - cj - dij) + \varepsilon\,(a^* + b^*i - c^*j - d^*ij) \\
\overline{\widetilde{Z}}_{(j)} &= \overline{Z_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(j)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3)\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} &= (a+\varepsilon a^*) - (b+\varepsilon b^*)i - (c+\varepsilon c^*)j + (d+\varepsilon d^*)ij \\
\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} &= (a - bi - cj + dij) + \varepsilon\,(a^* - b^*i - c^*j + d^*ij) \\
\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} &= \overline{Z_1}_{(ij)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(ij)}
\end{aligned}$$

Teorem 6.1.1. Dual bikompleks sayılar kümesinin iki elemanı;

$$\widetilde{Z} = A + Bi + Cj + Dij, \widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2$$

ve

$$\widetilde{W} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 ij, \widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2$$

$(Z_1, Z_2, W_1, W_2 \in B\mathbb{C})$ olsun. (i) birimine göre eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$a)\forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}}$ için $\overline{(\widetilde{Z}+\widetilde{W})}_{(i)} = \overline{\widetilde{Z}}_{(i)} + \overline{\widetilde{W}}_{(i)}$

$b)\forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}}$ için $\overline{(\widetilde{Z}-\widetilde{W})}_{(i)} = \overline{\widetilde{Z}}_{(i)} - \overline{\widetilde{W}}_{(i)}$

$c)\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}$ için $\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(i)}\right)}_{(i)} = \widetilde{Z}$

$d)\forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}}$ için $\overline{(\widetilde{Z}\otimes\widetilde{W})}_{(i)} = \overline{\widetilde{Z}}_{(i)} \otimes \overline{\widetilde{W}}_{(i)}$

$e)\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\overline{\lambda\widetilde{Z}}_{(i)} = \lambda\overline{\widetilde{Z}}_{(i)}$

İspat: a) $\widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2, \widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2 \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}+\widetilde{W} &= (Z_1+\varepsilon Z_2)+(W_1+\varepsilon W_2)\\
\widetilde{Z}+\widetilde{W} &= (Z_1+W_1)+\varepsilon\,(Z_2+W_2)\\
\overline{\left(\widetilde{Z}+\widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \overline{(Z_1+W_1)}_{(i)}+\varepsilon\overline{(Z_2+W_2)}_{(i)}\\
\overline{\left(\widetilde{Z}+\widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \left(\overline{Z_1}_{(i)}+\overline{W_1}_{(i)}\right)+\varepsilon\left(\overline{Z_2}_{(i)}+\overline{W_2}_{(i)}\right)\\
\overline{\left(\widetilde{Z}+\widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \overline{Z_1}_{(i)}+\varepsilon\overline{Z_2}_{(i)}+\overline{W_1}_{(i)}+\varepsilon\overline{W_2}_{(i)}\\
\overline{\left(\widetilde{Z}+\widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \overline{\widetilde{Z}}_{(i)}+\overline{\widetilde{W}}_{(i)}
\end{aligned}$$

dir.

b) $\widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2$, $\widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2 \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}-\widetilde{W} &= (Z_1+\varepsilon Z_2)-(W_1+\varepsilon W_2)\\
\widetilde{Z}-\widetilde{W} &= (Z_1-W_1)+\varepsilon\,(Z_2-W_2)\\
\overline{\left(\widetilde{Z}-\widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \overline{(Z_1-W_1)}_{(i)}+\varepsilon\overline{(Z_2-W_2)}_{(i)}\\
\overline{\left(\widetilde{Z}-\widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \left(\overline{Z_1}_{(i)}-\overline{W_1}_{(i)}\right)+\varepsilon\left(\overline{Z_2}_{(i)}-\overline{W_2}_{(i)}\right)\\
\overline{\left(\widetilde{Z}-\widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \left(\overline{Z_1}_{(i)}+\varepsilon\overline{Z_2}_{(i)}\right)-\left(\overline{W_1}_{(i)}+\varepsilon\overline{W_2}_{(i)}\right)\\
\overline{\left(\widetilde{Z}-\widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \overline{\widetilde{Z}}_{(i)}-\overline{\widetilde{W}}_{(i)}
\end{aligned}$$

dir.

c) $\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(i)}\right)}_{(i)} &= \widetilde{Z} \\
\overline{\widetilde{Z}}_{(i)} &= \overline{Z_1}_{(i)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(i)} \\
\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(i)}\right)}_{(i)} &= \overline{\overline{Z_1}_{(i)}} + \varepsilon \overline{\overline{Z_2}_{(i)}} \\
\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(i)}\right)}_{(i)} &= Z_1 + \varepsilon Z_2 = \widetilde{Z}
\end{aligned}$$

dir.

d) $\forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W} &= (Z_1 + \varepsilon Z_2) . (W_1 + \varepsilon W_2) = (Z_1.W_1) + \varepsilon (Z_1.W_2 + Z_2.W_1) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \overline{(Z_1.W_1)}_{(i)} + \varepsilon \left(\overline{Z_1.W_2}_{(i)} + \overline{Z_2.W_1}_{(i)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \overline{Z_1}_{(i)} . \overline{W_1}_{(i)} + \varepsilon \left(\overline{Z_1}_{(i)} . \overline{W_2}_{(i)} + \overline{Z_2}_{(i)} . \overline{W_1}_{(i)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \left(\overline{Z_1}_{(i)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(i)}\right) \left(\overline{W_1}_{(i)} + \varepsilon \overline{W_2}_{(i)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(i)} &= \overline{\widetilde{Z}}_{(i)} \otimes \overline{\widetilde{W}}_{(i)}
\end{aligned}$$

e) $\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
\lambda \widetilde{Z} &= \lambda (Z_1 + \varepsilon Z_2) \\
\overline{\left(\lambda \widetilde{Z}\right)}_{(i)} &= \overline{\lambda (Z_1 + \varepsilon Z_2)}_{(i)} \\
\overline{\left(\lambda \widetilde{Z}\right)}_{(i)} &= \lambda \overline{Z_1}_{(i)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(i)} \\
&= \lambda \left(\overline{Z_1}_{(i)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(i)}\right)
\end{aligned}$$

Teorem 6.1.2. Dual bikompleks sayılar kümesinin iki elemanı,

$$\widetilde{Z} = A + Bi + Cj + Dij, \widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2$$

ve

$$\widetilde{W} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 ij, \widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2$$

$(Z_1, Z_2, W_1, W_2 \in B\mathbb{C})$ olsun. (j) birimine göre eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\begin{array}{l}
a)\forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}} \text{ için } \overline{(\widetilde{Z} + \widetilde{W})}_{(j)} = \overline{\widetilde{Z}}_{(j)} + \overline{\widetilde{W}}_{(j)} \\
b)\forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}} \text{ için } \overline{(\widetilde{Z} - \widetilde{W})}_{(j)} = \overline{\widetilde{Z}}_{(j)} - \overline{\widetilde{W}}_{(j)} \\
c)\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}} \text{ için } \overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(j)}\right)}_{(j)} = \widetilde{Z} \\
d)\forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}} \text{ için } \overline{(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W})}_{(j)} = \overline{\widetilde{Z}}_{(j)} \otimes \overline{\widetilde{W}}_{(j)} \\
e)\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } \overline{\left(\lambda \widetilde{Z}\right)}_{(j)} = \lambda \overline{\widetilde{Z}}_{(j)}
\end{array}$$

İspat: a) $\widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2, \widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2 \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} + \widetilde{W} &= (Z_1 + \varepsilon Z_2) + (W_1 + \varepsilon W_2) \\
\widetilde{Z} + \widetilde{W} &= (Z_1 + W_1) + \varepsilon (Z_2 + W_2) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} + \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \overline{(Z_1 + W_1)}_{(j)} + \varepsilon \overline{(Z_2 + W_2)}_{(j)} \\
\overline{\left(\widetilde{Z} + \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \left(\overline{Z_1}_{(j)} + \overline{W_1}_{(j)}\right) + \varepsilon \left(\overline{Z_2}_{(j)} + \overline{W_2}_{(j)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} + \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \overline{Z_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(j)} + \overline{W_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{W_2}_{(j)} \\
\overline{\left(\widetilde{Z} + \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \overline{\widetilde{Z}}_{(j)} + \overline{\widetilde{W}}_{(j)}
\end{aligned}$$

dir.

b) $\widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2$, $\widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2 \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} - \widetilde{W} &= (Z_1 + \varepsilon Z_2) - (W_1 + \varepsilon W_2) \\
\widetilde{Z} - \widetilde{W} &= (Z_1 - W_1) + \varepsilon (Z_2 - W_2) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} - \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \overline{(Z_1 - W_1)}_{(j)} + \varepsilon \overline{(Z_2 - W_2)}_{(j)} \\
\overline{\left(\widetilde{Z} - \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \left(\overline{Z_1}_{(j)} - \overline{W_1}_{(j)}\right) + \varepsilon \left(\overline{Z_2}_{(j)} - \overline{W_2}_{(j)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} - \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \left(\overline{Z_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(j)}\right) - \left(\overline{W_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{W_2}_{(j)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} - \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \overline{\widetilde{Z}}_{(j)} - \overline{\widetilde{W}}_{(j)}
\end{aligned}$$

c) $\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(j)}\right)}_{(j)} &= \widetilde{Z} \\
\overline{\widetilde{Z}}_{(j)} &= \overline{Z_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(j)} \\
\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(j)}\right)}_{(j)} &= \overline{\overline{Z_1}_{(j)}} + \varepsilon \overline{\overline{Z_2}_{(j)}} \\
\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(j)}\right)}_{(j)} &= Z_1 + \varepsilon Z_2 = \widetilde{Z}
\end{aligned}$$

dir.

d) $\forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W} &= (Z_1 + \varepsilon Z_2) . (W_1 + \varepsilon W_2) = (Z_1.W_1) + \varepsilon (Z_1.W_2 + Z_2.W_1) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \overline{(Z_1.W_1)}_{(j)} + \varepsilon \left(\overline{Z_1.W_2}_{(j)} + \overline{Z_2.W_1}_{(j)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \overline{Z_1}_{(j)}.\overline{W_1}_{(j)} + \varepsilon \left(\overline{Z_1}_{(j)}.\overline{W_2}_{(j)} + \overline{Z_2}_{(j)}.\overline{W_1}_{(j)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \left(\overline{Z_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(j)}\right) \left(\overline{W_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{W_2}_{(j)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(j)} &= \overline{\widetilde{Z}}_{(j)} \otimes \overline{\widetilde{W}}_{(j)}
\end{aligned}$$

dir.

e) $\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
\lambda \widetilde{Z} &= \lambda \left(Z_1 + \varepsilon Z_2 \right) \\
\overline{\left(\lambda \widetilde{Z} \right)}_{(j)} &= \overline{\lambda \left(Z_1 + \varepsilon Z_2 \right)}_{(j)} \\
\overline{\left(\lambda \widetilde{Z} \right)}_{(j)} &= \lambda \overline{Z_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(j)} \\
\overline{\left(\lambda \widetilde{Z} \right)}_{(j)} &= \lambda \left(\overline{Z_1}_{(j)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(j)} \right) \\
\overline{\left(\lambda \widetilde{Z} \right)}_{(j)} &= \lambda \overline{\widetilde{Z}}_{(j)}
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 6.1.3. Dual bikompleks sayılar kümesinin iki elemanı,

$$\widetilde{Z} = A + Bi + Cj + Dij, \ \widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2$$

ve

$$\widetilde{W} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 ij$$

$\widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2$ $(Z_1, Z_2, W_1, W_2 \in B\mathbb{C})$ olsun. (ij) birimine göre eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\begin{aligned}
&a) \ \forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}} \text{ için } \overline{(\widetilde{Z} + \widetilde{W})}_{(ij)} = \overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} + \overline{\widetilde{W}}_{(ij)} \\
&b) \ \forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}} \text{ için } \overline{(\widetilde{Z} - \widetilde{W})}_{(ij)} = \overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} - \overline{\widetilde{W}}_{(ij)} \\
&c) \ \forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}} \text{ için } \overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} \right)}_{(ij)} = \widetilde{Z} \\
&d) \ \forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}} \text{ için } \overline{(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W})}_{(ij)} = \overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} \otimes \overline{\widetilde{W}}_{(ij)} \\
&e) \ \forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } \overline{\left(\lambda \widetilde{Z} \right)}_{(ij)} = \lambda \overline{\widetilde{Z}}_{(ij)}
\end{aligned}$$

İspat: a) $\widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2$, $\widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2 \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} + \widetilde{W} &= (Z_1 + \varepsilon Z_2) + (W_1 + \varepsilon W_2) \\
\widetilde{Z} + \widetilde{W} &= (Z_1 + W_1) + \varepsilon (Z_2 + W_2) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} + \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \overline{(Z_1 + W_1)}_{(ij)} + \varepsilon \overline{(Z_2 + W_2)}_{(ij)} \\
\overline{\left(\widetilde{Z} + \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \left(\overline{Z}_{1(ij)} + \overline{W}_{1(ij)}\right) + \varepsilon \left(\overline{Z}_{2(ij)} + \overline{W}_{2(ij)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} + \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \overline{Z}_{1(ij)} + \varepsilon \overline{Z}_{2(ij)} + \overline{W}_{1(ij)} + \varepsilon \overline{W}_{2(ij)} \\
\overline{\left(\widetilde{Z} + \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} + \overline{\widetilde{W}}_{(ij)}
\end{aligned}$$

dir.

b) $\widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2$, $\widetilde{W} = W_1 + \varepsilon W_2 \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} - \widetilde{W} &= (Z_1 + \varepsilon Z_2) - (W_1 + \varepsilon W_2) \\
\widetilde{Z} - \widetilde{W} &= (Z_1 - W_1) + \varepsilon (Z_2 - W_2) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} - \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \overline{(Z_1 - W_1)}_{(ij)} + \varepsilon \overline{(Z_2 - W_2)}_{(ij)} \\
\overline{\left(\widetilde{Z} - \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \left(\overline{Z}_{1(ij)} - \overline{W}_{1(ij)}\right) + \varepsilon \left(\overline{Z}_{2(ij)} - \overline{W}_{2(ij)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} - \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \left(\overline{Z}_{1(ij)} + \varepsilon \overline{Z}_{2(ij)}\right) - \left(\overline{W}_{1(ij)} + \varepsilon \overline{W}_{2(ij)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} - \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} - \overline{\widetilde{W}}_{(ij)}
\end{aligned}$$

dir.

c) $\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)}\right)}_{(ij)} &= \widetilde{Z} \\
\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} &= \overline{Z}_{1(ij)} + \varepsilon \overline{Z}_{2(ij)} \\
\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)}\right)}_{(ij)} &= \overline{\overline{Z}_{1(ij)}} + \varepsilon \overline{\overline{Z}_{2(ij)}} \\
\overline{\left(\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)}\right)}_{(ij)} &= Z_1 + \varepsilon Z_2 = \widetilde{Z}
\end{aligned}$$

dir.

d) $\forall \widetilde{Z}, \widetilde{W} \in D_{B\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W} &= (Z_1 + \varepsilon Z_2) . (W_1 + \varepsilon W_2) = (Z_1.W_1) + \varepsilon (Z_1.W_2 + Z_2.W_1) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \overline{(Z_1.W_1)}_{(ij)} + \varepsilon \left(\overline{Z_1.W_2}_{(ij)} + \overline{Z_2.W_1}_{(ij)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \overline{Z_1}_{(ij)} . \overline{W_1}_{(ij)} + \varepsilon \left(\overline{Z_1}_{(ij)} . \overline{W_2}_{(ij)} + \overline{Z_2}_{(ij)} . \overline{W_1}_{(ij)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \left(\overline{Z_1}_{(ij)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(ij)}\right) \left(\overline{W_1}_{(ij)} + \varepsilon \overline{W_2}_{(ij)}\right) \\
\overline{\left(\widetilde{Z} \otimes \widetilde{W}\right)}_{(ij)} &= \overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} \otimes \overline{\widetilde{W}}_{(ij)}
\end{aligned}$$

dir.

e) $\forall \widetilde{Z} \in D_{B\mathbb{C}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
\lambda \widetilde{Z} &= \lambda (Z_1 + \varepsilon Z_2) \\
\overline{\left(\lambda \widetilde{Z}\right)}_{(ij)} &= \overline{\lambda (Z_1 + \varepsilon Z_2)}_{(ij)} \\
\overline{\left(\lambda \widetilde{Z}\right)}_{(ij)} &= \lambda \overline{Z_1}_{(ij)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(ij)} \\
\overline{\left(\lambda \widetilde{Z}\right)}_{(ij)} &= \lambda \left(\overline{Z_1}_{(ij)} + \varepsilon \overline{Z_2}_{(ij)}\right)
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 6.1.6. Dual bikompleks sayılarda modül kavramı reel, i, j ve ij birimlerine göre olmak üzere dört farklı şekilde tanımlanır.

1) Reel modül : $\widetilde{Z} = Z_1 + \varepsilon Z_2 \, (Z_1, Z_2 \in B\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
Z_1 &= a + bi + cj + dij \Rightarrow |Z_1| = \sqrt[2]{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\
Z_2 &= a^* + b^*i + c^*j + d^*ij \Rightarrow |Z_2| = \sqrt[2]{(a^*)^2 + (b^*)^2 + (c^*)^2 + (d^*)^2} \\
\left|\widetilde{Z}\right| &= \sqrt[2]{|Z_1|^2 + |Z_2|^2} = \sqrt[2]{\begin{array}{c} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (a^*)^2 \\ + (b^*)^2 + (c^*)^2 + (d^*)^2 \end{array}} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{2) } (i) \text{ ye göre modül } &: \quad \widetilde{Z}.\overline{\widetilde{Z}}_{(j)} = (a+bi+cj+dij+\varepsilon(a^*+b^*i+c^*j+d^*ij)) \\
& \quad (a+bi-cj-dij+\varepsilon\,(a^*+b^*i-c^*j-d^*ij)) \\
\widetilde{Z}.\overline{\widetilde{Z}}_{(j)} &= a^2-b^2+2abi+c^2-d^2+2cdi \\
& +\varepsilon(2aa^*-2bb^*+2cc^*-2dd^* \\
& +i(2ab^*+2a^*b+2cd^*+2c^*d)) \\
\left|\widetilde{Z}_{(i)}\right| &= \sqrt[2]{\widetilde{Z}.\overline{\widetilde{Z}}_{(j)}} = \sqrt{Z_1.\overline{Z_1}_{(j)}+2\varepsilon Z_2.\overline{Z_2}_{(j)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{3) } (j)' \text{ye göre modül } &: \quad \widetilde{Z}.\overline{\widetilde{Z}}_{(i)} = (a+bi+cj+dij+\varepsilon(a^*+b^*i+c^*j+d^*ij)) \\
& \quad (a-bi+cj-dij+\varepsilon\,(a^*-b^*i+c^*j-d^*ij)) \\
\widetilde{Z}.\overline{\widetilde{Z}}_{(i)} &= a^2+b^2+2acj-c^2-d^2+2bdj \\
& +\varepsilon(2aa^*+2bb^*-2cc^*-2dd^* \\
& {}_+j(2ac^*+2a^*c+2bd^*+2b^*d)) \\
\left|\widetilde{Z}_{(j)}\right| &= \sqrt[2]{\widetilde{Z}.\overline{\widetilde{Z}}_{(i)}} = \sqrt{Z_1.\overline{Z_1}_{(i)}+2\varepsilon Z_2.\overline{Z_2}_{(i)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{4) } (ij)\text{'ye göre modül } &: \quad \widetilde{Z}.\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} = (a+bi+cj+dij+\varepsilon(a^*+b^*i+c^*j+d^*ij)) \\
& \quad (a-bi-cj+dij+\varepsilon\,(a^*-b^*i-c^*j+d^*ij)) \\
\widetilde{Z}.\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)} &= a^2+b^2+2adij+c^2+d^2-2bcij \\
& +\varepsilon(2aa^*+2bb^*+2cc^*+2dd^* \\
& +ij(2ad^*-2b^*c-2bc^*+2a^*d)) \\
\left|\widetilde{Z}_{(ij)}\right| &= \sqrt[2]{\widetilde{Z}.\overline{\widetilde{Z}}_{(ij)}} = \sqrt{Z_1.\overline{Z_1}_{(ij)}+2\varepsilon Z_2.\overline{Z_2}_{(ij)}}
\end{aligned}
$$

6.2. Dual Bikompleks Sayıların Kompleks Matris Gösterimi

Bu bölümde dual bikompleks sayıların matris gösterimi yapılacaktır.

Dual Bikompleks sayılar cümlesi,

$$\begin{aligned}
D_{B\mathbb{C}} &= \left\{ \widetilde{Z} = A + Bi + Cj + Dij \mid A, B, C, D \in D_{\mathbb{R}}, \varepsilon^2 = 0, i^2 = j^2 = -1, ij = ji \right\} \\
D_{B\mathbb{C}} &= \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{Z} = (a + \varepsilon a^*) + (b + \varepsilon b^*)i + (c + \varepsilon c^*)j + (d + \varepsilon d^*)ij \mid \\ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0, i^2 = j^2 = -1, ij = ji \end{array} \right\} \\
D_{B\mathbb{C}} &= \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{Z} = a + bi + cj + dij + \varepsilon(a^* + b^* i + c^* j + d^* ij) = Z_1 + \varepsilon Z_2, \\ Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}, i^2 = j^2 = -1, ij = ji \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. $D_{B\mathbb{C}}$ nin bir bazı $\{1, i, j, ij\}$dir. Dual bikompleks sayıların dual matris dönüşümü olmak üzere;

$$\begin{aligned}
T &: D_{B\mathbb{C}} \to Hom(D_{B\mathbb{C}}, D_{B\mathbb{C}}) \\
\widetilde{Z} &\to T(\widetilde{Z}) = T_{\widetilde{Z}}
\end{aligned}$$

dönüşümü $\forall Y \in B\mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}
T_{\widetilde{Z}} &: D_{B\mathbb{C}} \to D_{B\mathbb{C}} \\
Y &\to T_{\widetilde{Z}}(Y) = \widetilde{Z}.Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\widetilde{Z}}(1) &= (a + \varepsilon a^*) + (b + \varepsilon b^*)\, i + (c + \varepsilon c^*)\, j + (d + \varepsilon d^*)\, ij \\
T_{\widetilde{Z}}(i) &= \widetilde{Z}.i = (a + \varepsilon a^*)\, i - (b + \varepsilon b^*) + (c + \varepsilon c^*)\, ij - (d + \varepsilon d^*)\, j \\
T_{\widetilde{Z}}(j) &= \widetilde{Z}.j = (a + \varepsilon a^*)\, j + (b + \varepsilon b^*)\, ij - (c + \varepsilon c^*) - (d + \varepsilon d^*)\, i \\
T_{\widetilde{Z}}(ij) &= \widetilde{Z}.ij = (a + \varepsilon a^*)\, ij - (b + \varepsilon b^*)\, j - (c + \varepsilon c^*)\, i + (d + \varepsilon d^*)
\end{aligned}$$

$$\tau_{\widetilde{Z}} = \begin{bmatrix} a + \varepsilon a^* & -b - \varepsilon b^* & -c - \varepsilon c^* & d + \varepsilon d^* \\ b + \varepsilon b^* & a + \varepsilon a^* & -d - \varepsilon d^* & -c - \varepsilon c^* \\ c + \varepsilon c^* & -d - \varepsilon d^* & a + \varepsilon a^* & -b - \varepsilon b^* \\ d + \varepsilon d^* & c + \varepsilon c^* & b + \varepsilon b^* & a + \varepsilon a^* \end{bmatrix}$$

$$\tau_{\widetilde{Z}}\left[\begin{array}{cccc}1 & i & j & ij\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}a+\varepsilon a^{*} & -b-\varepsilon b^{*} & -c-\varepsilon c^{*} & d+\varepsilon d^{*}\\ b+\varepsilon b^{*} & a+\varepsilon a^{*} & -d-\varepsilon d^{*} & -c-\varepsilon c^{*}\\ c+\varepsilon c^{*} & -d-\varepsilon d^{*} & a+\varepsilon a^{*} & -b-\varepsilon b^{*}\\ d+\varepsilon d^{*} & c+\varepsilon c^{*} & b+\varepsilon b^{*} & a+\varepsilon a^{*}\end{array}\right]$$

$T_{\widetilde{Z}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matristir.

$ID_{B\mathbb{C}}$, bikompleks sayıların cümlesi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar üzerinde iki boyutlu vektör uzayıdır. Bu uzayın bir bazı $\{1,j\}$ dir.

$$\begin{array}{l}T_{\widetilde{Z}}:B\mathbb{C}\rightarrow B\mathbb{C}\\ \widetilde{W}\rightarrow T_{\widetilde{Z}}\left(\widetilde{W}\right)=\widetilde{Z}\widetilde{W}=\widetilde{W}\widetilde{Z}\\ W=1icin\ \ T_{\widetilde{Z}}\left(1\right)=\widetilde{Z}=X+jY\\ W=jicin\ \ T_{\widetilde{Z}}\left(j\right)=\widetilde{Z}.j=Xj-Y\end{array}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\widetilde{Z}} &= \left[\begin{array}{cc}X & -Y\\ Y & X\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}A & -B & -C & D\\ B & A & -D & -C\\ C & -D & A & -B\\ D & C & B & A\end{array}\right]\\ \tau_{\widetilde{Z}} &= \left[\begin{array}{cccc}a & -b & -c & d\\ b & a & -d & -c\\ c & -d & a & -b\\ d & c & b & a\end{array}\right]+\varepsilon\left[\begin{array}{cccc}a^{*} & -b^{*} & -c^{*} & d^{*}\\ b^{*} & a^{*} & -d^{*} & -c^{*}\\ c^{*} & -d^{*} & a^{*} & -b^{*}\\ d^{*} & c^{*} & b^{*} & a^{*}\end{array}\right]\\ \tau_{\widetilde{Z}} &= \tau_{Z_1}+\varepsilon\tau_{Z_2}\end{aligned}$$

6.3. Dual Bikompleks Matrislerinin Kompleks Adjoint Matris Gösterimi

Tanım 6.3.1. Herhangi $\widetilde{A}\in M_{n\times n}\left(D_{B\mathbb{C}}\right)$ dual bikompleks matrisini $\widetilde{A}=A+\varepsilon A^{*}$ biçiminde yazabiliriz. Burada $A,A^{*}\in M_{n\times n}\left(B\mathbb{C}\right)$dir.Bir $A=A_1+A_2j$, $A_1,A_2\in M_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ bikompleks matrisine bir tek $2n\times 2n$ tipindeki

$\chi_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix}$ kompleks matrisi karşılık gelir.

$A^* = A_1^* + A_2^* j$, $A_1^*, A_2^* \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ bikompleks matrisine bir tek $2n \times 2n$ tipindeki $\chi_{A^*} = \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \\ -A_2^* & A_1^* \end{bmatrix}$ kompleks matrisi karşılık gelir.

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= A_1 + A_2 j + \varepsilon\left(A_1^* + A_2^* j\right) \\
\widetilde{A} &= \left(A_1 + \varepsilon A_1^*\right) + \left(A_2 + \varepsilon A_2^*\right) j \\
\chi_{\widetilde{A}} &= \begin{bmatrix} A_1 + \varepsilon A_1^* & A_2 + \varepsilon A_2^* \\ -\left(A_2 + \varepsilon A_2^*\right) & A_1 + \varepsilon A_1^* \end{bmatrix} \\
\chi_{\widetilde{A}} &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \\ -A_2^* & A_1^* \end{bmatrix} \\
\chi_{\widetilde{A}} &= \chi_A + \varepsilon \chi_{A^*}
\end{aligned}$$

Teorem 6.3.1. $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in M_{n\times n}(D_{B\mathbb{C}})$ dual bikompleks matrisleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$1)\chi_{I_n} = I_{2n}$$
$$2)\chi_{\widetilde{A}+\widetilde{B}} = \chi_{\widetilde{A}} + \chi_{\widetilde{B}}$$
$$3)\chi_{\widetilde{A}\widetilde{B}} = \chi_{\widetilde{A}}\chi_{\widetilde{B}}$$

İspat: 1)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I_n + 0j = A_1 + A_2 j$$

buradan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\chi_{I_n} = \begin{bmatrix} A_1 + \varepsilon A_1^* & A_2 + \varepsilon A_2^* \\ -\left(A_2 + \varepsilon A_2^*\right) & A_1 + \varepsilon A_1^* \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$\chi_{I_n} = \begin{bmatrix} A_1 + \varepsilon A_1^* & A_2 + \varepsilon A_2^* \\ -\left(A_2 + \varepsilon A_2^*\right) & A_1 + \varepsilon A_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$$

elde edilir.

2)

$$\widetilde{A} = (A_1 + \varepsilon A_1^*) + (A_2 + \varepsilon A_2^*)\, j \ \ (A_1, A_{2,} A_1^*, A_2^* \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$$

ve

$$\widetilde{B} = (B_1 + \varepsilon B_1^*) + (B_2 + \varepsilon B_2^*)\, j \ \ (B_1, B_{2,} B_1^*, B_2^* \in M_{n\times n}(\mathbb{C}))$$

olsun. Bu durumda,

$$\chi_{\widetilde{A}} = \begin{bmatrix} A_1 + \varepsilon A_1^* & A_2 + \varepsilon A_2^* \\ -(A_2 + \varepsilon A_2^*) & A_1 + \varepsilon A_1^* \end{bmatrix}$$

ve

$$\chi_{\widetilde{B}} = \begin{bmatrix} B_1 + \varepsilon B_1^* & B_2 + \varepsilon B_2^* \\ -(B_2 + \varepsilon B_2^*) & B_1 + \varepsilon B_1^* \end{bmatrix}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} + \widetilde{B} &= (A_1 + B_1 + \varepsilon(A_1^* + B_1^*)) + (A_2 + B_2 + \varepsilon(A_2^* + B_2^*))\, j \\
\chi_{\widetilde{A}+\widetilde{B}} &= \begin{bmatrix} A_1 + B_1 + \varepsilon(A_1^* + B_1^*) & A_2 + B_2 + \varepsilon(A_2^* + B_2^*) \\ -A_2 + B_2 + \varepsilon(A_2^* + B_2^*) & A_1 + B_1 + \varepsilon(A_1^* + B_1^*) \end{bmatrix} \qquad (6.1) \\
\chi_{\widetilde{A}} + \chi_{\widetilde{B}} &= \begin{bmatrix} A_1 + \varepsilon A_1^* & A_2 + \varepsilon A_2^* \\ -(A_2 + \varepsilon A_2^*) & A_1 + \varepsilon A_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + \varepsilon B_1^* & B_2 + \varepsilon B_2^* \\ -(B_2 + \varepsilon B_2^*) & B_1 + \varepsilon B_1^* \end{bmatrix} \\
\chi_{\widetilde{A}} + \chi_{\widetilde{B}} &= \begin{bmatrix} A_1 + B_1 + \varepsilon(A_1^* + B_1^*) & A_2 + B_2 + \varepsilon(A_2^* + B_2^*) \\ -(A_2 + B_2 + \varepsilon(A_2^* + B_2^*)) & A_1 + B_1 + \varepsilon(A_1^* + B_1^*) \end{bmatrix} \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.1) ve (6.2) eşitliğini kullanarak,

$$\chi_{\widetilde{A}+\widetilde{B}} = \chi_{\widetilde{A}} + \chi_{\widetilde{B}}$$

elde ederiz.

3)

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A} &= (A_1+\varepsilon A_1^*)+(A_2+\varepsilon A_2^*)\,j, \widetilde{B}=(B_1+\varepsilon B_1^*)+(B_2+\varepsilon B_2^*)\,j \\
\widetilde{A}.\widetilde{B} &= ((A_1+\varepsilon A_1^*)+(A_2+\varepsilon A_2^*)\,j)\,((B_1+\varepsilon B_1^*)+(B_2+\varepsilon B_2^*)\,j) \\
\widetilde{A}.\widetilde{B} &= ((A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*)-(A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)) \\
&\quad +j\,((A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*)+(A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)) \\
\chi_{\widetilde{A}.\widetilde{B}} &= \begin{bmatrix} \begin{array}{c}(A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*)- \\ (A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)\end{array} & \begin{array}{c}(A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*) \\ +(A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)\end{array} \\ \begin{array}{c}-(A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*) \\ +(A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)\end{array} & \begin{array}{c}(A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*) \\ -(A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)\end{array} \end{bmatrix} \qquad (6.3) \\
\chi_{\widetilde{A}}\chi_{\widetilde{B}} &= \begin{bmatrix} (A_1+\varepsilon A_1^*) & A_2+\varepsilon A_2^* \\ -(A_2+\varepsilon A_2^*) & (A_1+\varepsilon A_1^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1+\varepsilon B_1^* & B_2+\varepsilon B_2^* \\ -(B_2+\varepsilon B_2^*) & B_1+\varepsilon B_1^* \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \begin{array}{c}(A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*) \\ -(A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)\end{array} & \begin{array}{c}(A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*) \\ +(A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)\end{array} \\ \begin{array}{c}-(A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*) \\ +(A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)\end{array} & \begin{array}{c}(A_1+\varepsilon A_1^*)\,(B_1+\varepsilon B_1^*) \\ -(A_2+\varepsilon A_2^*)\,(B_2+\varepsilon B_2^*)\end{array} \end{bmatrix} \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

(6.3) ve (6.4) eşitliğini kullanarak,

$$\chi_{\widetilde{A}.\widetilde{B}}=\chi_{\widetilde{A}}\chi_{\widetilde{B}}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Aslan, S. 2018.Bikompleks Sayılar ve Cebirsel Yapıları,Yüksek Lisans Tezi.

[2] Beardon,A.1983. The Geometry of Discrete Groups. Springer-Verlag,9-81 p., Berlin.

[3] Brannon,A,D, Esplen, M.F, Gray,J.J, 1999.Geometry.Cambridge University Press.,Australia.

[4] D.Rochon,M.Shapiro, "On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers", an. Univ. Oredea Fasc.Mat. 11 (2004) 71-110.

[5] Erdoğdu M. ,Özdemir M., 2013, On Eigenvalues of Split Quaternion Matrices, Adv.Appl.Clifford Algebras,Vol 23, 615-623.

[6] Flaut,C. and Shpakvski V., 2013, Real matrix representations for the complex quaternions, Adv.Appl.Clifford Algebras,Vol 23, 657-671.

[7] F.O.Farid ,Qing-Wen Wang and F. Zhang, "On the eigenvalues of quaternion matrices", Linear and MultilinearAlgebra vol.59, no.4,
April 2011,451-473.

[8] Jaishree,A.2012 , "Bicomplex and Hyperbolic Numbers:Conjugates and Modulii", Lambert Academic Publishing.

[9] Hacısalihoğlu, H.H. 1999. Lineer Cebir. Cilt II. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

[10] Hacısalihoğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No:2, Ankara.

[11] Halıcı, S. 2012 On Fibonacci Quaternions. Adv. in Appl. Clifford Algebras, 22, 321-327.

[12] Karger, A. and Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach Science Publishers, Montreux.

[13] Kaya, H. 2014.Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar, Yüksek Lisans Tezi.

[14] Luna-Elizarraras, M.E. ,Shapiro, M. ,Struppa, D.C. ,Vajiac, A. ,2012, Bicomplex numbers and their elemantary functions, CUBO A Mathematical Journal, Vol.14, no:2, 231-248.

[15] M. Özdemir, M. Erdoğdu and H. Şimşek, "On the Eigen values and Eigenvectors of a Lorentzion Rotation Matrix by using split queternions". Adv.Appl. Clifford Algebras 24(2014), 179-192.

[16] Nalbant, G. K. 2018.Dual Kuaterniyon Katsayılı Matrisler,Doktora Tezi.

[17]Price,G.B.,An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions.Marcel Dakker, Newyork,1(1)-44(1),(1991).

[18] Şimşek, R. 2011.Kuaterniyon Matrisler ve Özdeğerleri,Yüksek Lisans Tezi.

[19] Ünal, T. 2011.Kuaterniyonlar ve Kuaterniyon Matrisleri Yüksek Lisans Tezi Dumlupınar Üniversitesi, Haziran.

[20] Y. Alagöz, K. H. Oral, and S. Yüce, "Split quaternion matrices", Miskolc Mathematical Notes vol.13(2012), No.2, p.223-232.

[21] Zhang,F. 1997. Quaternions and Matrices of Quaternions, Linear Algebra and its Applications 251: 21-57.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Canan ÖLÇEK
Doğum Yeri	:	Uşak
Doğum Tarihi	:	27.08.1978
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce
Telefon	:	05389703977
E-mail	:	cananolcek@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Uşak Anadolu Öğretmen Lisesi (1995)
Lisans	:	Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü (1999)
Yüksek Lisans	:	Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı (2000 – 2003)
Doktora	:	Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2014 – 2019)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Uşak Fen Lisesi (2002-2019)

Yayınları (SCI ve diğer)

Ölçek, C. Nurkan,S. 2018. Note on Bicomplex matrices,Mathematical sciences and applications E-Notes, 6(2) 46-56.