

**T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3 BOYUTLU AFİN UZAYINDA BAZI ÖZEL YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUYGU DOĞAN ÖZYÜREK

TEMMUZ 2019

UŞAK

**T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3 BOYUTLU AFİN UZAYINDA BAZI ÖZEL YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUYGU DOĞAN ÖZYÜREK

TEMMUZ 2019

UŞAK

Duygu DOĞAN ÖZYÜREK tarafından hazırlanan “3 Boyutlu Afin Uzayında Bazı Özel Yüzeyleyler” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

Tez Danışmanı, Matematik Ana Bilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

Uşak Üniversitesi, Matematik

Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER

Uşak Üniversitesi, Matematik

Doç. Dr. Hüseyin KOCA YİĞİT

Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik

04/07/2019

Bu tez ile U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Duygu DOĞAN ÖZYÜREK

3 BOYUTLU AFİN UZAYINDA BAZI ÖZEL YÜZEYLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Duygu DOĞAN ÖZYÜREK

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, 3 boyutlu Afın ve Öklid uzaylarında temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Afın uzayda, Blaschke metriği, yüzeyler teorisi ve has olmayan Afın regle küre yüzeyleri hakkında verildi.

Dördüncü bölümde, has olmayan Afın regle küre yüzey örnekleri incelendi.

Bilim Kodu : 403.02.01

Anahtar Kelimeler : Regle yüzeyi, Has olmayan afın küreler, Gauss eğriliği, Ortalama eğrilik, Afın normal vektörü, Afın konormal vektörü, Öklid uzay, Afın uzay

Sayfa Adedi : 65

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

SOME SPECIAL SURFACES IN AFFINE 3-SPACE

(M.Sc. Thesis)

Duygu DOGAN OZYUREK

UNIVERSITY OF USAK
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2019

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction section and provides a general knowledge of literature.

In the second chapter, basic concepts in the three dimensional Euclidean and Affine spaces 3-space are given.

In the third chapter, In the three dimensional Affine space, Blaschke metric, theory of surface and improper Affine ruled spheres are given.

In the fourth chapter, In the three dimensional Affine space, improper Affine ruled spheres are examined.

Science Code : 403.02.01

Keywords : Ruled surface, Improper Affine curves, Gaussian curvature, Mean curvature, Affine normal vector, Affine conormal vector, Euclidean space, Affine space

Page Number : 65

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat Kemal KARACAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında konu seçimi, görüş, düşünce, bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, uzun çalışma sürecinde yardımlarını esirgemeyen ve tezin her aşamasında manevi desteğini ve büyük yardımlarını gördüğüm değerli danışman hocam danışman Sayın Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN' a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Bu çalışma boyunca bana anlayış gösteren, destek olan, hissettirdikleri sonsuz güven, sabır ve manevi destekten dolayı başta annem Sevgi DOĞAN ve eşim Emre ÖZYÜREK olmak üzere tüm aileme teşekkürlerimi sunarım.

Duygu DOĞAN ÖZYÜREK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. AFİN UZAY.....	17
3.1. Afın Uzayda Düzlemsel Eğriler.....	17
3.2. Afın Uzay Eğrileri.....	20
3.3. Afın ile Öklid Yay Parametresi Arasındaki İlişki.....	24
3.4. Afın Yüzeyler.....	27
3.5. Has Olmayan Afın Küreler ve Afın Maksimal Dönüşümler.....	45
4. HAS OLMAYAN AFİN KÜRE ÖRNEKLERİ.....	48
KAYNAKÇA.....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	65

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil		Sayfa
Şekil 2.1.	Regle Yüzeyi	16
Şekil 3.1.	Afin Normal ve Konormal Vektörü	26
Şekil 3.2.	Eliptik Paraboloid	30
Şekil 3.3.	Hiperbolik Paraboloid	30
Şekil 3.4.	Afin Üçyüzlü ve Duali	33
Şekil 4.1.	r_1 Yüzeyinin Grafiği	51
Şekil 4.2.	r_2 Yüzeyinin Grafiği	55
Şekil 4.3.	r_3 Yüzeyinin Grafiği	58
Şekil 4.4.	r_4 Yüzeyinin Grafiği	62

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış olan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
IR	Reel Sayılar
E^3	Üç boyutlu afin uzay
T	E^3 te teğet vektör
N	E^3 te asli normal vektör
B	E^3 binormal vektör
t	E^3 afin teğet vektör
n	E^3 afin asli normal vektör
b	E^3 afin binormal vektör
κ	E^3 te eğrilik fonksiyonu
τ	E^3 burulma(torsiyon)
K	Gauss eğriliği
H	Ortalama eğrilik
$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$	Öklidiyen yay parametresine göre türev
$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$	Afin yay parametresine göre türev
ρ	Afin metrik
S	Şekil operatörü
ξ	Afin normal vektör
\mathcal{G}	Konormal vektör
h	Berwald-Blaschke Metrik
$\langle \rangle$	Öklid iç çarpımı
\times	Vektörel çarpım

1. GİRİŞ

Afin diferensiyel geometri çalışmaları A. Transon un 1841 de yayınladığı afin diferensiyel geometri kitabına kadar dayanır. 1872 de F. Klein geometrik dönüşümler grubu altında invariant kalan özellikleri inceledi. Afin diferensiyel geometri afin dönüşümler grubunun invariantlarının bir çalışmasıdır. L. Berwalt ve W. Blaschke hacim koruyan afin dönüşümlerinin grubu olan equi-afin (unimodular) dönüşümleri altında eğri ve yüzeyleri çalıştılar [1]. Afin geometrinin içerisinde var olan diğer dönüşüm grubu öteleme olmayan ve $L(n, \mathbb{R})$ ile gösterilen centro-afin dönüşümler grubudur. Schirokow 1962 de bu konudaki kaynağını yayınlamıştır [2]. 1991 de K. Nomizu ve T. Sasaki \mathbb{R}^3 uzayında equi-afin homojen yüzeyleri sınıflandırmış ve afin konneksiyonları incelemiştir [3,4]. Benzer çalışmayı \mathbb{R}^4 uzayında F. Dillen ve L. Vrancken 1993 yılında yapmıştır [5,6]. B. Abdüssamed 2018 de Afin uzayda eğrilerin diferensiyel geometrisi konusunda yüksek lisans tezi hazırlamıştır [7]. Miller 2013 yılında Afin regle küre yüzeyleri üzerinde çalışmıştır [21].

Bu tezde 3 boyutlu Afin uzayda has olmayan Afin küre yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri Blaschke metriği kullanarak hesaplanacaktır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\Psi : A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P, Q) \rightarrow (\overrightarrow{PQ}) \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

i. $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir.

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

\overrightarrow{PQ} vektöründe P noktasına başlangıç noktası ve Q noktasına uç noktası denir. Diğer yandan A nın boyutu

$$\text{boy}A = \text{boy}V$$

olarak tanımlanır [8,9].

Tanım 2.2. Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörlerinin sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve P_1 noktalarına da çatının birim noktaları denir [8,9].

Teorem 2.1. Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. Belli bir $P_0 \in A$ noktası seçildiğinde başlangıçlı P_0 olan bir afin çatı vardır [8,9].

İspat : V nin bir bazı $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ olsun. Her bir $1 \leq i \leq n$, için $\overrightarrow{P_0 P_i} = \alpha_i$ olacak şekilde bir tek $P_i \in A$ noktasının var olduğunu biliyoruz. O halde $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ – lisi bir afin çatıdır ve $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı verildiğinde tektir.

Sonuç 2.1. Bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayı verildiğinde A da bir $P_0 \in A$ noktası ve V de bir $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı verildiğinde başlangıcı P_0 olan afin çatı ile V deki $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı birbirine karşılık gelirler [8,9].

Tanım 2.3. n - boyutlu bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayının afin çatılarından biri $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ olsun. Bu çatı A da aşağıdaki gibi afin koordinat sistemi denen bir koordinat sistemi belirtir. V nin bir bazı $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ olduğundan $\forall P \in A$ için $\overrightarrow{P_0 P} \in V$ vektörünü bu baza göre tek türlü

$$\overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{P_0 P_i} , \quad \alpha_i \in F$$

ifade edebiliriz. A nın birleştiği V vektör uzayı F cismi üzerinde tanımlandığına göre

$$x_i : A \rightarrow F , \quad 1 \leq i \leq n$$

fonksiyonlarını $\forall P \in A$ için

$$P \rightarrow x_i(P) = \alpha_i , 1 \leq i \leq n$$

şeklinde tanımlayalım.

Böylece $P \in A$ noktasına F^n standart afin uzayının bir $(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$ elemanını karşılık tutmuş oluruz, bu sıralı n - liye P noktasının koordinatları denir.

Tersine n tane $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ sayıları verildiğinde koordinatları $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ olan bir tek $P \in A$ noktası vardır. Gerçekten

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{P_0 P_i} \right) \in V$$

vektörünü ele alalım. Bu halde ikinci afin aksiyom uyarınca

$$\overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{P_0 P_i}$$

olacak biçimde bir tek $P \in A$ noktası vardır. Böylece $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : A \rightarrow F$ fonksiyonlarının bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemini elde etmiş oluruz. Bu sistem yardımıyla bir $A \xrightarrow{\text{birebir}} F^n$ (standart afin uzay) dönüşümü elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlar sistemine A nın bir afin koordinat sistemi denir. O halde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afin koordinat sisteminde $x_i : A \rightarrow F$ fonksiyonları afin anlamda koordinat fonksiyonlarıdır. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemini belirleyen $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ afin çatısındaki $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktalarından P_0 başlangıç noktası ve diğerleri birim noktalardır [8,9].

Örnek 2.1. n - boyutlu bir A afin uzayında bir afin çatı $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ ise P_0, P_1, \dots, P_n noktalarının koordinatları $P_0 = (0, 0, \dots, 0), P_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, P_n = (0, 0, \dots, 1)$ dir. Buradan da P_0 ın A da başlangıç noktası ve P_i nin de A da i -yinci birim nokta olduğu görülmektedir [8,9].

Örnek 2.2. n -boyutlu standart afin uzay F^n de $E_0 = (0, 0, \dots, 0), E_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, 0, \dots, 1)$ noktalarını alalım. $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına standart afin çatı ve bu çatıya karşılık gelen afin koordinat sistemine de standart koordinat sistemi denir. Bu koordinat sisteminde $\forall P \in F^n$ noktasına $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ sayıları, P nin koordinatları olarak $P = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ biçiminde karşılık gelir [8,9].

Tanım 2.4. A , n - boyutlu bir afin uzay ve $\{P_i\} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ ile $\{Q_i\} = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ de A da farklı iki afin çatı olsun. $\{P_i\}$ çatısının $\{Q_i\}$ çatısına göre konumu aşağıdaki biçimde ifade edilebilir. $\{Q_i\}$ afin çatısı yardımıyla belirlenen afin koordinat sisteminde $P_0 \in A$ olduğundan $\overrightarrow{Q_0P_0} \in V$ ve dolayısıyla

$$\overrightarrow{Q_0P_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{Q_0Q_i} \quad (2.1)$$

ve benzer şekilde $P_0, P_i \in A$ olduğundan $\overrightarrow{P_0P_i} \in V$ ve dolayısıyla

$$\overrightarrow{P_0P_i} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \overrightarrow{Q_0Q_j} \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.2)$$

yazılabilir. (2.1) ifadesinden görülmektedir ki $\{P_i\}$ çatısındaki P_0 başlangıç noktasının $\{Q_i\}$ çatısına göre afin koordinatları $[a_i]$ dir. Benzer olarak (2.2) ifadesinden görülmektedir ki $A = [a_{ij}]$ matrisinin i - yinci kolonu $\overrightarrow{P_0P_i} \in V$ vektörünün V deki $\{\overrightarrow{Q_0Q_i}\}$ bazına göre koordinatlarından oluşur. Diğer yandan $\{\overrightarrow{P_0P_i}, 1 \leq i \leq n\}$ ve $\{\overrightarrow{Q_0Q_i}, 1 \leq i \leq n\}$ sistemleri V nin birer bazı olduklarından A matrisi regülerdir. O halde $\{P_i\}$ ve $\{Q_i\}$ afin çatılarının rollerini değiştirerek (2.1) ve (2.2) ifadeleri yerine sırasıyla,

$$\overrightarrow{P_0Q_0} = \sum_{i=1}^n b_i \overrightarrow{P_0P_i} \quad (2.3)$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_i} = \sum_{j=1}^n b_{ji} \overrightarrow{P_0P_j} \quad (2.4)$$

elde edilir. (2.4) deki $B = [b_{ji}] = F_n^n$ matrisi (2.2) deki $A = [a_{ij}] \in F_n^n$ matrisinin inversidir.

Dolayısıyla

$$AB = BA = I_n = [\delta_{ij}] \in F_n^n$$

dir. $P \in A$ keyfi bir nokta olmak üzere birinci afin aksiyomdan

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P} \quad (2.5)$$

yazabiliriz.

Burada P nin $\{Q_i\}$ çatısına göre koordinatları $[y_i]$ olmak üzere

$$\overrightarrow{Q_0P} = \sum_{i=1}^n y_i \overrightarrow{Q_0Q_i} \quad (2.6)$$

dır. Aynı biçimde P nin $\{P_i\}$ çatısına göre koordinatları $[x_i]$ olmak üzere

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{P_0P_i} \quad (2.7)$$

dır. (2.1), (2.6) ve (2.7) nin (2.5) de yerlerine yazılması ile

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \overrightarrow{Q_0Q_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{Q_0Q_i} + \sum_{j=1}^n x_j \overrightarrow{P_0P_j}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \overrightarrow{Q_0Q_i} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \alpha_i \right) \overrightarrow{Q_0Q_i}$$

veya iki vektörün eşitliği tanımından

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.8)$$

veya matris formundaki ifade ile

$$Y = AX + C, \quad Y = [y_i] \in F_1^n, \quad A = [\alpha_{ij}] \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.5) ifadesinde $P \in A$ noktası keyfi olduğundan $\{P_i\}$ ve $\{Q_i\}$ çatıları tarafından belirtilen iki koordinat sistemi arasındaki bağıntı (2.8) ile verilebilir. Bu ifadenin (2.9) ile verilen matris formu açık olarak yazılırsa

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \alpha_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

elde edilir [8,9].

Teorem 2.2. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A da iki afin çatı olsun. Bu iki çatı

$$\overrightarrow{Q_0P_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{Q_0Q_i} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{P_0P_i} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \overrightarrow{Q_0Q_i} \quad 1 \leq i \leq n$$

biçiminde bağıntılı ise bu çatıların belirlediği afin koordinat sistemleri olan $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ de

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bağıntılıdır. $P_0 = Q_0$ olması özel halinde şu sonuç elde edilir [8,9].

Teorem 2.3. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A uzayında iki afin çatı olsun. $P_0 = Q_0$ ise bu iki çatının belirlediği $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ afin koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$Y = AX \quad \text{veya} \quad X = A^{-1}Y$$

dır, burada $A = [\alpha_{ij}] \in F_n^n$ dır [8,9].

Teorem 2.4. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A uzayında iki afin çatı olsun. $\forall i$, için $\overrightarrow{P_0P_i} = \overrightarrow{Q_0Q_i}$ ise bu çatıya karşılık gelen $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ifadeleri koordinat eksenlerinin ötelenmesi hareketine karşılık gelir [10,11].

Örnek 2.3. İki boyutlu bir reel vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun.

$$\begin{aligned}y_1 &= 3x_1 + 2 \\y_2 &= 4x_2 - 7\end{aligned}$$

dönüşümü A daki iki afin koordinat sistemi arasındaki bağıntıyı göstermektedir. Gerçekten bu sistemi matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğunu görürüz ki bu da (2.10) formundadır. Buradan x_1, x_2 yi y_1, y_2 cinsinden hesaplırsak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

matrislerine karşılık

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad b = A^{-1}C = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür [8,9].

Teorem 2.5. F standart afin uzayında bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta sisteminin bir afin çatı olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{bmatrix} P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ P_{20} & P_{21} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \cdots & P_{nn} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır, burada

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ \vdots \\ P_{ni} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n$$

dır [8,9].

İspat :

$$\overrightarrow{P_0 P_i} = \begin{bmatrix} P_{1i} - P_{10} \\ P_{2i} - P_{20} \\ \vdots \\ P_{ni} - P_{n0} \end{bmatrix},$$

dır. Biliyoruz ki $\{\overrightarrow{P_0 P_i}\}$ vektörlerinin F^n standart vektör uzayında bir baz olması için gerek ve yeter koşul sütunları

$$\overrightarrow{P_0 P_i} = \begin{bmatrix} P_{1i} - P_{10} \\ P_{2i} - P_{20} \\ \vdots \\ P_{ni} - P_{n0} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n$$

olan $n \times n$ matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır, yani,

$$\det \begin{bmatrix} P_{11} - P_{10} & P_{12} - P_{10} & \cdots & P_{1n} - P_{10} \\ P_{21} - P_{20} & P_{22} - P_{20} & \cdots & P_{2n} - P_{20} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} - P_{n0} & P_{n2} - P_{n0} & \cdots & P_{nn} - P_{n0} \end{bmatrix}$$

$$(-1)^n \det \begin{bmatrix} P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Diğer taraftan $\{\overrightarrow{P_0 P_i}\}$ sistemi F^n vektör uzayında bir baz oluşturursa $\{P_i\}$, nokta sistemi de F^n vektör uzayı ile birleştirilen F^n standart afin uzayında bir çatı oluşturur.

Tanım 2.5. Ω , E^2 uzayının irtibatlı bir açık alt cümlesi olmak üzere $\Psi : \Omega \subset E^2 \rightarrow E^3$ diferensiyellenebilir ve regüler bir dönüşüm olsun. $\Psi : \Omega \subset E^2 \rightarrow \Psi(\Omega)$ dönüşümü bir homomorfizm ise $\Psi(\Omega)$ cümlesine, E^3 uzayında bir basit yüzey denir. Σ , E^3 uzayının bir alt cümlesi olsun. M her bir p noktası için $p \in \Psi(\Omega)$ ve $\Psi(\Omega) \subset \Sigma$ olacak biçimde bir $\Psi(\Omega)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa Σ cümlesine E^3 uzayında bir yüzey denir [8].

Tanım 2.6. Σ yüzeyi $\Psi : \Omega \subset E^2 \rightarrow E^3$ parametrizasyonu ile verilsin. Σ nin $p \in \Psi(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, Ψ_u ve Ψ_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece Σ nin birinci ve ikinci temel formları sırasıyla,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2.11)$$

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Burada, N birim normali olmak üzere birinci ve ikinci temel formun katsayıları sırasıyla,

$$E = \langle \Psi_u, \Psi_u \rangle, F = \langle \Psi_u, \Psi_v \rangle, G = \langle \Psi_v, \Psi_v \rangle, \quad (2.12)$$

ve

$$e = \langle \Psi_{uu}, N \rangle, f = \langle \Psi_{uv}, N \rangle, g = \langle \Psi_{vv}, N \rangle \quad (2.13)$$

şeklindedir [8].

$\Sigma \subset E^3$ yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları, H. Anciaux tarafından;

$$\bar{e} = \langle \Psi_{uu}, \Psi_u \wedge \Psi_v \rangle, \bar{f} = \langle \Psi_{uv}, \Psi_u \wedge \Psi_v \rangle, \bar{g} = \langle \Psi_{vv}, \Psi_u \wedge \Psi_v \rangle \quad (2.14)$$

şeklinde alınarak yüzeyin H ortalama eğriliği,

$$2H = \frac{eG + gE - 2fF}{(EG - F^2)^{1/2}}$$

şeklinde tanımlandı [4].

Bir $\Sigma \subset E^3$ yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\vec{H} = HN$ şeklinde tanımlanır. (2.13) eşitliklerinden,

$$\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|^2 = EG - F^2$$

bulunur. Eğer $\|\Psi_u \wedge \Psi_v\| \neq 0$ ise $\Psi(u, v)$ parametrizasyonu regülerdir denir [8]. Bundan sonra aksi söylenmediği sürece $\Psi(u, v)$ parametrizasyonu regüler kabul edilecektir.

Önerme 2.1. Σ yüzeyi $\Psi : \Omega \subset E^2 \rightarrow E^3$ parametrizasyonu ile verilsin. (2.12) ve (2.13) eşitliklerinden, Σ yüzeyinin birinci ve ikinci temel formu sırasıyla,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

olduğundan,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$2H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2},$$

asli eğrilikleri

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

dır [8].

Tanım 2.7. Bir $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^3$ için $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$; $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

şeklinde tanımlanıyorsa \langle , \rangle fonksiyonuna \mathbb{R}^3 vektör uzayında bir iç çarpım denir. Bu iç çarpıma Öklid anlamındaki iç çarpım veya \mathbb{R}^3 uzayındaki standart iç çarpım denir [12]. Herhangi iki $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörlerinin iç çarpımı şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8. \mathbb{R}^3 uzayında bir x vektörünün normu $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanır ve $\|\vec{x}\|$ ile gösterilir [12].

Tanım 2.9. E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında her $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ için Öklid vektörel çarpımı,

$$x \times y = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Tanım 2.10. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere her

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow E^3 \\ t &\rightarrow (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu üç boyutlu reel uzayda bir eğri tanımlar [12].

Tanım 2.11. $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t))$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki hız vektörü denir [13].

Tanım 2.12. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \|\gamma'(s)\| = 1$ olacak şekilde bir eğri olsun. Böylece s 'ye γ eğrisinin yay parametresi denir [10].

Tanım 2.13. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ eğrisine düzenli (regüler) eğri denir [13].

Tanım 2.14. Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri denir [24].

Tanım 2.15. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için,

- 1) $D_{fX+gY} Z = fD_X Y + gD_Y Z, \forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
- 2) $D_X Y (fY) = fD_X Y + (Xf)Y, \forall X, Y \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

özellikleri sağlanıyorsa D 'ye M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve D_X 'e de X 'e göre kovaryant türev operatörü denir [11].

Tanım 2.16. \mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için,

$$T(s) = \gamma'(s)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir. T, γ eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır [13].

Tanım 2.17. \mathbb{R}^3 uzayındaki $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için,

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna γ eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına $\gamma(s)$ eğrinin noktasındaki eğriliği denir. $\kappa(s)$ sayısının büyüklüğü, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki teğetinden ne kadar ayrıldığıнын ölçüsüdür [13].

Tanım 2.18. \mathbb{R}^3 uzayındaki $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için,

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki asli normali denir. N vektör alanına γ eğrisinin asli normal vektör alanı denir [13].

Tanım 2.19. \mathbb{R}^3 uzayındaki $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için,

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki binormali denir. Bu vektör alanına γ eğrisinin asli normal vektör alanı denir [13].

Tanım 2.20. $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına γ eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir [13].

Tanım 2.21. \mathbb{R}^3 uzayındaki $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle = \langle B(s), N'(s) \rangle$$

fonksiyonuna γ eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki burulması denir.

$\tau(s)$ sayısının büyüklüğü, eğrinin $\gamma(s)$ noktası komşuluğunda bu noktadaki oskütatör düzeleminde ne kadar ayrıldığıнын ölçüsüdür [13].

Teorem 2.6. IR^3 uzayındaki $\gamma:I \rightarrow IR^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise,

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ B &= -\kappa T + \tau B \\ N &= -\tau N \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliklere birim hızlı γ eğrisi için Frenet formülleri denir [13].

Teorem 2.7. $\gamma:I \rightarrow IR^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olduğuna göre,

$$\begin{aligned} N \times B &= T \\ B \times T &= N \end{aligned}$$

dir [13].

Teorem 2.8. Birim hızlı olmayan $\gamma:I \rightarrow IR^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olduğuna göre,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \\ B &= \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \\ N &= B \times T \end{aligned}$$

dir. $\gamma:I \rightarrow IR^3$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları κ ve τ olduğuna göre,

$$\kappa = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}, \quad \tau = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma'''\rangle}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$$

dir [13].

Tanım 2.22. E^3 uzayının bir M yüzeyi ve M yüzeyinin birim normal vektör alanı N verilsin. E^3 'te Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$S(X) = D_x N$$

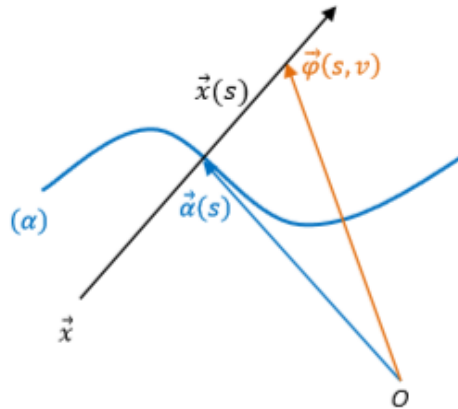
şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir [11].

Tanım 2.23. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi boyunca, eğriye bağlı bir $x(s)$ doğrusunun hareketiyle meydana gelen yüzeye regle yüzey denir. Burada α eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi, $x(s)$ doğrusuna da regle yüzeyin ana doğrusu (doğrultmanı) adı verilir. Bu tanıma göre bir regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(s, v) \rightarrow \varphi(s, v) = \alpha(s) + vx(s)$$

şeklinde verilir [15].



Şekil 2.1. Regle Yüzey

3. AFİN UZAY

\mathbb{R}^2 uzayında $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vektörleri ile belli olan paralelkenarın alanı

$$\det[x, y] = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

olarak tanımlanır. Düzlemde alan koruyan afin dönüşümler grubu, $SL(2, \mathbb{R})$ lineer grubunun elemanları ve \mathbb{R}^2 nin öteleme grubu tarafından üretilen gruptur. Bkz [16,17].

$$Y = AX + \alpha$$

olmak üzere $X, Y \in \mathbb{R}^2, A \in SL(2, \mathbb{R})$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^2$ dir.

Bu bölümde alan koruyan afin dönüşümler grubu altında invaryant olan düzlemsel eğrilerin afin anlamda ve Öklid anlamında özelliklerini ve birbiri arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

3.1. Afin Uzayda Düzlemsel Eğriler

Tanım 3.1.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ regüler bir eğri olsun. Eğer

$$\det \left[\frac{d\alpha}{dr}(r), \frac{d^2\alpha}{dr^2} \right] \neq 0, \forall r \in I$$

ise α eğrisine afin eğri denir [15,16].

Tanım 3.1.2. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ regüler bir eğri olsun.

$$\det \left[\frac{d\alpha}{ds}(s), \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s) \right] = 1, \forall s \in I$$

ise s ye afin yay parametresi denir [15,16].

Afin eğriler yay parametresi ile yeniden parametrelendirilebilir.

Tanım 3.1.3. Düzlemde regüler bir α eğrisinin afin eğriliği

$$k : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k(s) = \det[\alpha''(s), \alpha'''(s)]$$

olarak tanımlanır. s afin yay parametresi, u herhangi bir parametre olmak üzere,

$$\frac{d\alpha}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{du} \frac{du}{ds}$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2}(s) = \frac{d^2\alpha}{du^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{d\alpha}{du} \frac{d^2u}{ds^2}$$

şeklindedir. Afin yay parametresi olabilmesi için

$$\left[\frac{d\alpha}{ds}(s), \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s) \right] = 1$$

olmalıdır. Bu durumda

$$1 = \det \left[\frac{d\alpha}{du} \frac{du}{ds}, \frac{d^2\alpha}{du^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{d\alpha}{du} \frac{d^2u}{ds^2} \right]$$

$$= \det \left[\frac{d\alpha}{du}, \frac{d^2\alpha}{du^2} \right] \left(\frac{du}{ds} \right)^2$$

bulunur.

Buradan afin yay parametresi fonksiyonu $u_0 \in I$ için,

$$s = \int_{u_0}^u \det \left[\frac{d\alpha}{du}(u), \frac{d^2\alpha}{du^2}(u) \right]^{\frac{1}{3}} du$$

şeklinde bulunur. Regüler her afin eğri parametre değişimi ile birim hızlı hale getirilebilir. $u_0 \in I$ için,

$$f : IR \rightarrow IR$$

$$s \rightarrow f(u) = \int_{u_0}^u \det \left[\frac{d\alpha}{du}(u), \frac{d^2\alpha}{du^2}(u) \right]^{\frac{1}{3}} du$$

dönüşümü ile verilen α afin eğrisi birim hızlı hale dönüştürülebilir [18].

Tanım 3.1.4. Düzlemde α afin regüler birim hızlı bir eğri olsun. $\vec{t} = \alpha'(s)$, α afin eğrisinin birim afin teğet vektörü $\vec{t}(s)$ ve $\vec{n}(s)$ birim afin normal vektörü olmak üzere,

$$\alpha' = \vec{t} \quad \text{ve} \quad \vec{n}'(s) = k(s)\vec{t}(s)$$

dir. $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$ sistemi ortonormal bir sistemdir. $s \in I$ afin yay parametresi olmak üzere α eğrisi için,

$$\vec{t} = \alpha'(s), \quad \alpha' = \frac{d\alpha}{ds}, \quad \vec{n} = \alpha''(s)$$

olmak üzere $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$ eğrinin afin Frenet 2-ayaklısıdır. α eğrisinin afin düzlem Serret-Frenet çatısı $\alpha' = \vec{t}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \vec{t}' &= \vec{n} \\ \vec{n}' &= -k\vec{t} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \vec{t}' \\ \vec{n}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

Burada $\det \begin{bmatrix} \vec{t}' \\ \vec{n}' \end{bmatrix} = 1$ ve türevler afin yay parametresine göre alınmıştır. $\det[\alpha'(s), \alpha''(s)] = 1$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\det[\alpha''(s), \alpha''(s)] + \det[\alpha'(s), \alpha'''(s)] = 0$$

bulunur. Buradan düzlemsel afin eğriler için

$$\alpha''(s) + \kappa(s)\alpha'(s) = 0$$

eşitliğini elde ederiz [17].

Sonuç 3.1.1. Sabit afin eğrilikli α regüler eğrisi, aşağıdaki eşitliklerden birine denktir:

- i. $k = 0$ ise parabol,
- ii. $k > 0$ ise elips,
- iii. $k < 0$ ise hiperbol belirtir.

Düzlemde κ Öklid eğriliği sabit olan sadece çembersel yaylar ve doğru parçalarıdır. Fakat k afin eğriliği sabit olan sadece konik yaylardır [17].

3.2. Afin Uzay Eğrileri

\mathbb{R}^2 uzayında $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri ile belirlenen geometrik şeklin hacmi,

$$\begin{aligned} \det[x, y, z] &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_1 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2 \end{aligned}$$

ile tanımlıdır. Burada $X, Y \in \mathbb{R}^2, A \in SL(3, \mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}^2$ şeklindedir. Hacim koruyan afin dönüşümler $Y = AX + \alpha$ formundaki dönüşümler olup bu grup $SL(3, \mathbb{R})$ ve \mathbb{R}^3 ün öteleme grubu tarafından üretilen gruptur. Bu bölümde 3- boyutlu afin uzayda hacim koruyan afin dönüşümler grubu altında invariant kalan eğrilerin afin anlamda ve Öklid anlamında özelliklerini ve birbirleriyle olan ilişkileri inceleyeceğiz. Bölümün son kısmında, küresel afin eğriler için bir karakterizasyon vereceğiz. Bkz [16,17].

Tanım 3.2.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. Eğer

$$\det \left[\frac{d\alpha}{dr}(r), \frac{d^2\alpha}{dr^2}(r), \frac{d^3\alpha}{dr^3}(r) \right] \neq 0 \quad \forall r \in I \text{ ise}$$

α eğrisine **afin uzay eğrisi** denir [15,16].

Tanım 3.2.2. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. Eğer

$$\det \left[\frac{d\alpha}{ds}(s), \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s), \frac{d^3\alpha}{ds^3}(s) \right] = 1$$

ise s ye afin **uzay yay parametresi** denir [14,15].

s afin yay parametresi, u herhangi bir parametre olmak üzere,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{du} \frac{du}{ds}$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d^2\alpha}{du^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{d\alpha}{du} \frac{d^2u}{ds^2}$$

$$\frac{d^3\alpha}{ds^3} = \frac{d^3\alpha}{du^3} \left(\frac{du}{ds} \right)^3 + 3 \frac{d^2\alpha}{du^2} \frac{d^2u}{ds^2} \frac{du}{ds} + \frac{d\alpha}{du} \frac{d^3u}{ds^3}$$

şeklindedir.

Burada s nin afin yay parametresi olabilmesi için

$$\det[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)] = 1$$

olmalıdır. Buradan afin yay parametresi fonksiyonu $u_0 \in I$ için,

$$s = \int_{u_0}^u \det \left[\frac{d\alpha}{du}(u), \frac{d^2\alpha}{du^2}(u), \frac{d^3\alpha}{du^3}(u) \right]^{\frac{1}{6}} du$$

şeklinde hesaplanabilir [17].

Tanım 3.2.3. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzay eğrisinin afin eğriliği

$$k(s) = \det[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)]$$

olarak tanımlanır [16].

Tanım 3.2.4. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzay eğrisinin afin torsiyonu

$$\tau_\alpha(s) = -\det[\alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha''''(s)]$$

olarak tanımlanır [16].

$\det[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)] = 1$ eşitliğinin türevi alınır, 3-boyutlu afin uzayda eğriler için,

$$\alpha''''(s) + \tau_\alpha(s)\alpha(s) + k(s)\alpha'(s) = 0$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 3.2.5. Uzayda afin yay parametresine göre türevler alınarak afin teğet vektör $\vec{t} = \alpha'$, afin normal vektör $\vec{n} = \alpha''$ ve afin binormal vektör $\vec{b} = \alpha'''$ yardımıyla $\alpha = \vec{t}$ olmak üzere afin çatı,

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \alpha' = \vec{n} \\ \vec{n} &= \alpha'' = \vec{b} \\ \vec{b} &= \alpha''' = -\tau_\alpha \alpha - k\alpha'\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\det[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)] = 1$$

dir [16].

$$\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\tau & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

Burada $\det[\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}] = 1$ ve türevler afin yay parametresine göre alınmıştır.

Tanım 3.2.6. Afin uzayda birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun.

$\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **afin oskütör düzlem** denir.

$\{\vec{t}(s), \vec{b}(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **afin rektifiyan düzlem** denir.

$\{\vec{b}(s), \vec{n}(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **afin normal düzlem** denir.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir afin uzay eğrisi olsun. Burada $s_0 \in I$ olmak üzere eğrinin $\alpha(s_0)$ noktası komşuluğunda Frenet düzlemlerini inceleyeceğiz. $\alpha(s)$ eğrisinin, $\alpha(s_0)$ noktasındaki afin eğriliğini k ve afin eğriliğini τ_α ile gösterelim. α fonksiyonun s_0 noktası komşuluğunda Taylor açılımı $h = s - s_0$ olmak üzere yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha(s) - \alpha(s_0) &= \left(s - \frac{1}{4!} \tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!} \tau_\alpha s^5 \right) \alpha(s_0) + \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{4!} k s^4 - \frac{1}{5!} (k + \tau_\alpha) s^5 \right) \alpha'(s_0) + \left(\frac{1}{3!} s^3 - \frac{1}{5!} s^5 \right) \alpha''(s_0) + \dots \\
&= \left(s - \frac{1}{4!} \tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!} \tau_\alpha s^5 \right) t + \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{4!} k s^4 - \frac{1}{5!} (k + \tau_\alpha) s^5 \right) n + \left(\frac{1}{3!} s^3 - \frac{1}{5!} s^5 \right) b \\
&\cong \left(s - \frac{1}{4!} \tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!} \tau_\alpha s^5 \right) t + \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{4!} k s^4 - \frac{1}{5!} (k + \tau_\alpha) s^5 \right) n + \left(\frac{1}{3!} s^3 - \frac{1}{5!} s^5 \right) b
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ vektörü, $\alpha(s_0)$ noktasından $\alpha(s)$ noktasına giden vektördür. $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ vektörünün $\{t, n, b\}$ ortonormal çatısına göre bileşenlerine x, y, z denirse;

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) \cong \left(s - \frac{1}{4!} \tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!} \tau_\alpha s^5 \right) t + \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{4!} k s^4 - \frac{1}{5!} (k + \tau_\alpha) s^5 \right) n + \left(\frac{1}{3!} s^3 - \frac{1}{5!} s^5 \right) b$$

eşitliğine göre yaklaşık olarak

$$\begin{aligned}
\alpha(s) - \alpha(s_0) &\cong \left(s - \frac{1}{4!} \tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!} \tau_\alpha s^5 \right) t + \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{4!} k s^4 - \frac{1}{5!} (k + \tau_\alpha) s^5 \right) n + \left(\frac{1}{3!} s^3 - \frac{1}{5!} s^5 \right) b \\
x &= s - \frac{1}{4!} \tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!} \tau_\alpha s^5 \\
y &= \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{4!} k s^4 - \frac{1}{5!} (k + \tau_\alpha) s^5 \\
z &= \frac{1}{3!} s^3 - \frac{1}{5!} s^5
\end{aligned}$$

yazılabilir [17].

3.3. Afin İle Öklid Yay Parametresi Arasındaki İlişki

Düzlemde bir $\alpha(t) = \gamma(s(t))$ eğrisi alalım. t , Öklid yay parametresi ve s , afin yay parametresi olmak üzere;

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Öklid yay parametresine göre türev ve

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$$

afin yay parametresine göre türev olsun. $\dot{\alpha} = \vec{T}$, $\dot{T} = \kappa \vec{N}$, $\dot{N} = -\kappa \vec{T}$ ise $\det(T, N) = 1$ ve $\alpha' = \dot{t}$, $\vec{t}' = \vec{n}$, $\vec{n}' = -\kappa \vec{t}$ ise $\det(t, n) = 1$ olduğu bilinmektedir.

$$\vec{T} = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \text{ ve } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{t}$$

eşitliklerinden $\vec{T} = \dot{s} \vec{t} = \dot{\alpha}$ bulunur.

$$\vec{T} = \dot{\alpha} = \kappa \vec{N}, \quad \kappa \vec{N} = (\dot{s})^2 \vec{n} + \ddot{s} \vec{t}, \quad \vec{N} = \left((\dot{s})^2 \vec{n} + \ddot{s} \vec{t} \right) \kappa^{-1}$$

bulunur.

$\det(T, N) = 1$ olduğundan

$$\begin{vmatrix} \dot{s} & 0 \\ \ddot{s} \kappa^{-1} & (\dot{s})^2 \kappa^{-1} \end{vmatrix} = 1$$

olup determinant değeri hesaplanırsa,

$$(\dot{s})^3 \kappa^{-1} = 1$$

$$(\dot{s})^3 = \kappa$$

$$\dot{s} = (\kappa)^{\frac{1}{3}}$$

elde edilir.

Böylece afin yay parametresi ile Öklid yay parametresi arasındaki bağıntı,

$$\frac{ds}{dt} = (\kappa)^{\frac{1}{3}}$$

şeklinde elde edilir [16].

Düzlemde bir $\alpha(t) = \lambda(s(t))$ eğrisi alalım. t , Öklid yay parametresi ve s , afin yay parametresi olmak üzere;

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Öklid yay parametresine göre türev ve

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{ds}$$

afin yay parametresine göre türev olsun. Bölüm 3.3. ün başında afin yay parametresi ile Öklid yay parametresi arasındaki bağıntıyı $\vec{T} = \dot{s}\vec{t}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\vec{T} = (\kappa)^{\frac{1}{3}}\vec{t}$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılarak $(\dot{s})^3 = \kappa$ elde edilir. $(\dot{s})^3 = \kappa$ eşitliğinin türevi alınır,

$$\vec{s} = \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{2}{3}}\kappa$$

bulunur. $\vec{N} = ((\dot{s})^2\vec{n} + \vec{s}\vec{t})\kappa^{-1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\vec{N} = \frac{1}{3}(\kappa)^{\frac{5}{3}}\kappa\vec{t} + (\kappa)^{-\frac{1}{3}}\vec{n}$$

bulunur. Bu durumda çatılar arasındaki geçiş matrisi aşağıdaki gibidir:

Sonuç 3.3.1 Öklid çatıdan afin çatıya geçiş matrisi,

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\kappa)^{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3}(\kappa)^{\frac{5}{3}}\kappa & (\kappa)^{-\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

ve afin çatıdan Öklid çatıya geçiş matrisi ise;

$$\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\kappa)^{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & (\kappa)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [17].

3.4. Afin Yüzeyler

Afin diferensiyel geometride afin dönüşümler altında invariant olan 3-boyutlu uzayda yüzeylerin özelliklerini inceleyeceğiz. Daha fazla detay için [19,20].

Tanım 3.4.1. Berwald-Blaschke metriği afin dönüşümler için invarianttır ve aynı zamanda koordinat sistemlerinden bağımsızdır. Bu metrik kuadratik formdur. Bu kuadratik formun pozitif tanımlı (dış bükey olmayan durum) olmayabileceğini göreceğiz.

Berwald-Blaschke metriği;

$$h = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}},$$

tarafından verilir ki burada L, M ve N

$$L = \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uu}] \quad , \quad M = \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uv}] \quad , \quad N = \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}]$$

olarak verilir. Bundan böyle, yüzeyin non-dejenere olduğunu kabul edebiliriz, yani $LN - M^2 \neq 0$ dır [21].

Birinci afin temel formu ile ikinci Öklid temel formunun katsayıları arasında bir ilişki vardır öyle ki,

$$l_{ij} = N \cdot \Psi_{ij} = \left(\frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|} \right) \quad \Psi_{ij} = \frac{\det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{ij}]}{\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|}$$

ki, bu denklemde $N = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|}$ Öklid normal vektördür.

$l_{ij}; i, j = 1, 2$ $l_{11} = L, l_{12} = M, l_{21} = N$ olmak üzere Öklid Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$K = \frac{\det(l_{ij})}{\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|^4},$$

$$1. K < 0 \Leftrightarrow LN - M^2 < 0$$

$$2. K = 0 \Leftrightarrow LN - M^2 = 0 \quad (3.1)$$

$$3. K > 0 \Leftrightarrow LN - M^2 > 0$$

$LN - M^2$ negatif, sıfır veya pozitif olduğundan noktalar sırasıyla hiperbolik, parabolik veya eliptiktir. $LN - M^2 \neq 0$ hipotezinden dolayı sadece konveks durumlarda (eliptik noktalar) ve konveks olmayan durumlarda (hiperbolik noktalar) çalışacağız [21].

Tanım 3.4.2. S non-dejenere noktalarla regüler yüzey ve $\Psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizasyon olsun. Afin konormal vektörü

$$\mathcal{G} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{|LN - M^2|^{1/4}} \quad (3.2)$$

ifadesiyle verilir ki burada L, M ve N birinci temel afin formun katsayılarıdır. Ayrıca işarete göre tespit edildiğini unutmamak gerekir. Tanımdan görüyoruz ki $\mathcal{G} \cdot d\Psi = 0$ dır. Noktanın eliptik yada hiperbolik olmasına bağlı olarak \pm işaretin olduğu durumda $\rho^4 = \pm(LN - M^2)$ olsun. Bu notasyonu kullanarak,

$$\mathcal{G} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\rho} \quad (3.3)$$

elde ederiz [21].

Tanım 3.4.3. Afin normal vektörü

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \cdot \xi &= 1 \\ \mathcal{G}_u \cdot \xi &= 0 \\ \mathcal{G}_v \cdot \xi &= 0\end{aligned}\tag{3.4}$$

denklemleri ile tanımlarız. Afin normal vektörün S yüzeyine, tanjant düzlemine ait olmadığını gözlemleyelim. (3.4) teki birinci denklemin türevi alındığında $\mathcal{G} \cdot \xi_u = 0$ ve $\mathcal{G} \cdot \xi_v = 0$ olduğunu kolayca görebiliriz. Dolayısıyla $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyle ki;

$$\xi = \delta(\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v)$$

dir. Şimdi, δ fonksiyonunu elde etmek için afin normal ve konormalin iç çarpımını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

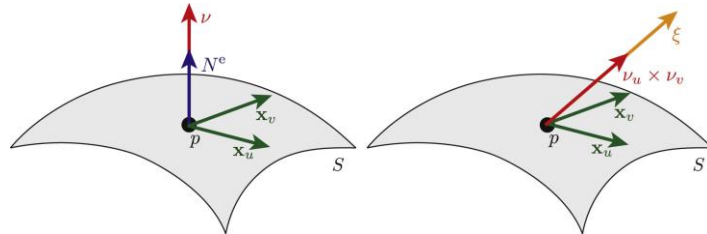
$$1 = \mathcal{G} \cdot \xi = \delta \det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]$$

Böylece, $\delta = \frac{1}{\det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]}$, yani afin normal vektör

$$\xi = \frac{1}{\det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]} \mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v\tag{3.5}$$

dir [21].

Ayrıca afin normal vektörün işarete göre saptandığını unutmamalıyız. Her bir $x \in \Omega$ noktası için afin normal $\xi(x)$ vektörü yönünde x boyunca doğru alalım. Bu doğru, ξ için işaretin seçiminden bağımsız olarak x boyunca afin normal olarak adlandırılır.



Şekil 3.1. Afin konormal ve normal vektörü

Örnek 3.4.1. Afin normal vektörü eliptik ve hiperbolik paraboloidlerde sabittir. Eliptik ve paraboloidlerin parametrizasyonunun $X(u, v) = (u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2))$ olduğunu kabul edelim. u ve v ye göre türevleri

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, u) \quad , \quad X_{uu} = (0, 0, 1) \quad , \quad X_{vv} = (0, 0, 1) \quad , \\ X_v &= (0, 1, v) \quad , \quad X_{uv} = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\rho = \det [X_u, X_v, X_{uu}] \det [X_u, X_v, X_{vv}] - \det [X_u, X_v, X_{uv}]^2 = 1$$

dir. Dolayısıyla,

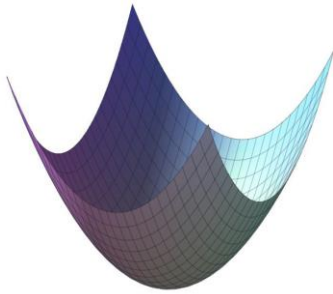
$$\mathcal{G} = \frac{X_u \wedge X_v}{\rho} = (-u, -v, 1)$$

dir. O nedenle, $\mathcal{G}_u = (-1, 0, 0)$ ve $\mathcal{G}_v = (0, -1, 0)$ sonrasında

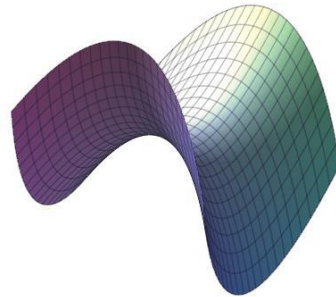
$$\xi = \frac{1}{[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]} \mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v = (0, 0, 1) \quad (3.6)$$

dır. Benzer yoldan hiperbolik paraboloidin parametrizasyonunu $S(u, v) = (u, v, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$ olarak kabul edersek afin normalin bu yüzeyin herhangi bir noktasında $(0, 0, 1)$ vektörü olduğu gösterilebilir [21].

Tanım 3.4.4. Afin eğrilikler normal vektörün varyasyonlarını tanımlar. $\mathcal{G} \cdot \xi_u = \mathcal{G} \cdot \xi_v = 0$ olduğunu biliyoruz. Yani, ξ_u ve ξ_v türevleri \mathcal{G} ye diktir.



Şekil 3.2. Eliptik paraboloid



Şekil 3.3. Hiperbolik paraboloid

Bilhassa ξ_u ve $\xi_v \in T_p S$ dir. Bu nedenle S şekil operatörünü $S : T_p S \rightarrow T_p S$ olarak tanımlayabiliriz ki burada $S_p(v) = -D_v \xi$ dir. ξ_u ve ξ_v yüzeye teğet oldukları için $i, j = 1, 2$ olmak üzere $b_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları vardır öyle ki,

$$\begin{aligned}\xi_u &= b_{11}\Psi_u + b_{21}\Psi_v, \\ \xi_v &= b_{12}\Psi_u + b_{22}\Psi_v\end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$D\xi(\alpha') = (b_{11}u' + b_{12}v')\Psi_u + (b_{21}u' + b_{22}v')\Psi_v$$

dir. Bu nedenle

$$D\xi \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

dir. Yukarıdaki eşitlik $\{\Psi_u, \Psi_v\}$ bazında $S_p(v) = D_v \xi$ şekil operatörünün $i, j = 1, 2$ için $B = (b_{ij})$ matrisi tarafından verildiğini gösterir. Bu matris simetrik olmak zorunda değildir [21].

Tanım 3.4.5. b_{ij} katsayıları determinantı ve izinin yarısı sırasıyla Gauss ve afin ortalama eğrilikler olan $B = (b_{ij})$ matrisini oluşturur. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}K &= \det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \\ H &= \frac{1}{2} \text{iz}B = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22})\end{aligned}$$

dir [21].

Tanım 3.4.6. Afin diferensiyel geometrisinde, izotermal koordinatlar metriğin lokal olarak

$$h = \rho(du^2 + dv^2)$$

formuna sahip olduğu anlamına gelir ki burada ρ diferensiyellenebilir fonksiyondur. Bu durumda, konveks durumu dikkate alırız. İzotermal koordinatların $L = N = \rho^2$, $M = 0$ özelliğinden faydalanarak ,

$$\det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uu}] = \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] = \rho^2 \text{ ve } \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uv}] = 0 \quad (3.7)$$

koordinatları yukarıda belirtildiği şekilde çalışabiliriz. Böylelikle afin diferensiyel geometrisinde önemli bir sonuç elde etmiş oluruz [21].

Teorem 3.4.1. Lelievre Formülü) İzotermal koordinatlarla lokal olarak konveks yüzeylerde

$$\Psi_u = \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v \text{ ve } \Psi_v = -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u \quad (3.8)$$

eşitliklerimiz vardır [21].

İspat : (3.2) den $L = N$ ve $M = 0$ olduğundan

$$\mathcal{G} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{|LN - M^2|^{1/4}} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{|L|^{1/2}} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\rho}$$

dir. Konormal vektörün v ye göre türevi

$$\mathcal{G}_v = \frac{\rho[(\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) + (\Psi_u \wedge \Psi_{vv})] - (\Psi_u \wedge \Psi_v)\rho_v}{\rho^2}$$

dir. Şimdi, $(A \wedge B) \wedge (A \wedge C) = \det[A, B, C]A$ eşitliğini kullanırsak direk hesaplamayla

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v &= \left(\frac{1}{\rho} \Psi_u \wedge \Psi_v \right) \wedge \left(\frac{\rho[(\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) + (\Psi_u \wedge \Psi_{vv})] - (\Psi_u \wedge \Psi_v)\rho_v}{\rho^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\rho^2} \Psi_u \wedge \Psi_v \right) \wedge (\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) + \left(\frac{1}{\rho^2} \Psi_u \wedge \Psi_v \right) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_{vv}) - \left(\frac{\rho_v}{\rho^3} \Psi_u \wedge \Psi_v \right) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_v) \\ &= \frac{1}{\rho^2} \det[\Psi_v, \Psi_u, \Psi_{uv}] \Psi_v + \frac{1}{\rho^2} \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] \Psi_u - \frac{\rho_v}{\rho^3} \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_v] \Psi_u \\ &= \frac{1}{\rho^2} \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] \Psi_u = \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \Psi_u = \Psi_u \end{aligned}$$

elde ederiz. Aynı yöntemle $\Psi_v = -\varrho \wedge \varrho_u$ olduğunu ispatlayabiliriz. Şimdi

$$\rho = \det[\varrho, \varrho_u, \varrho_v] \quad (3.9)$$

eşitliğini ispatlayalım. Konormal vektörü hesaplamak için Teorem (3.4.1) Lelievre Formülünden aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \Psi_u \wedge \Psi_v &= (\varrho \wedge \varrho_v) \wedge (-\varrho \wedge \varrho_u) \\ &= -\det[\varrho, \varrho_v, \varrho_u] \varrho \\ &= \det[\varrho, \varrho_v, \varrho_u] \end{aligned}$$

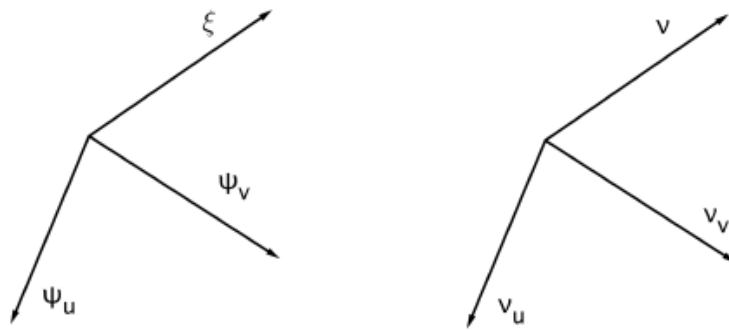
Böylece,

$$\frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\det[\varrho, \varrho_u, \varrho_v]} = \varrho$$

dir. (3.3) den $\varrho = \frac{1}{\rho} \Psi_u \wedge \Psi_v$ denklemini kullanarak,

$$\rho = \det[\varrho, \varrho_u, \varrho_v]$$

elde edilir.



Şekil 3.4. Afin Üçyüzlü ve Duali

Aynı zamanda konormal vektörün \mathcal{G}_u ve \mathcal{G}_v türevlerini aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}
 \Psi_v \wedge \xi &= (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) \wedge \left(-\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} (\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v) \\
 &= \frac{1}{\rho} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_v] \mathcal{G}_u \\
 &= -\mathcal{G}_u
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde \mathcal{G} konormal vektörünün v ye göre türevini hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}
 \Psi_u \wedge \xi &= (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) \wedge \left(-\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} (\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u) \\
 &= \frac{1}{\rho} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] \mathcal{G}_v \\
 &= \mathcal{G}_v
 \end{aligned}$$

olur veya eşit bir biçimde

$$\mathcal{G}_u = \xi \wedge \Psi_v \quad \text{ve} \quad \mathcal{G}_v = \Psi_u \wedge \xi \tag{3.10}$$

dir. Lelievre Formülünü kullanarak ρ afin metriği için başka bir formül ve afin normal vektörü için bir formül elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
 \det[\Psi_u, \Psi_v, \xi] &= \det \left[\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v, -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u, \frac{1}{\rho} \mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v \right] \\
 &= -\frac{1}{\rho} ((\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u)) \cdot (\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v) \\
 &= -\frac{1}{\rho} \det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_v, \mathcal{G}_u] \mathcal{G} \cdot (\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v) \\
 &= \frac{\rho}{\rho} \mathcal{G} \cdot (\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v) \\
 &= \det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]
 \end{aligned}$$

Böylece,

$$\rho = \det [\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v] = \det [\Psi_u, \Psi_v, \xi]$$

bulunur. Şimdi, \mathcal{G} konormal vektörü ile H ortalama afin eğriliği arasında bir ilişki oluşturabiliriz.

Teorem 3.4.2. $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ izotermal koordinatlarla bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathcal{G}_{uu} + \mathcal{G}_{vv} = 2\rho H \mathcal{G} \quad (3.11)$$

dir ki burada ρ afin metriği, \mathcal{G} konormal vektör ve H afin ortalama eğriliğidir. Başka bir deyişle,

$$\Delta_h \mathcal{G} = -H \mathcal{G} := -\frac{\mathcal{G}_{uu} + \mathcal{G}_{vv}}{2\rho}$$

dir [21].

İspat : Lelievre Formülünden

$$\Psi_u = \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v, \quad \Psi_v = -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u$$

dir. Sonra sırasıyla v ve u ya göre türevlerini hesaplırsak,

$$\Psi_{uv} = \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{vv}, \quad \Psi_{vu} = -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{uu}$$

elde ederiz. Ψ diferensiyellenebilir fonksiyondur ve $\Psi_{uv} = \Psi_{vu}$ dir. Bundan dolayı,

$$\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{vv} = -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{uu}$$

olur. Böylece,

$$\mathcal{G} \wedge (\mathcal{G}_{uu} + \mathcal{G}_{vv}) = 0$$

dir. Şimdi, $\mathcal{G}_{uu} + \mathcal{G}_{vv} = \alpha \mathcal{G}$ eşitliği ile sonuçlandırabiliriz. Afin normal vektörün tanımından $\mathcal{G} \cdot \xi = 1$ dir.

Buradan

$$(\mathcal{G}_{uu} + \mathcal{G}_{vv}) \cdot \xi = \alpha$$

elde edilir. (3.4) denklemi bize $\mathcal{G}_v \cdot \xi = 0$ eşitliğini verir, bu eşitliğin v ye göre türevini aldığımızda

$$\mathcal{G}_{vv} \cdot \xi + \mathcal{G}_v \cdot \xi_v = 0,$$

buluruz. Aynı zamanda $\mathcal{G}_u \cdot \xi = 0$ eşitliğinin u ya göre türevi alındığında

$$\mathcal{G}_{uu} \cdot \xi + \mathcal{G}_u \cdot \xi_u = 0$$

dir. (3.4.5) tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{uu} \cdot \xi &= -\mathcal{G}_u \cdot \xi_u \\ &= -\mathcal{G}_u \cdot (b_{11}\Psi_u + b_{21}\Psi_v) \\ &= -b_{11}\mathcal{G}_u \cdot (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) - b_{21}\mathcal{G}_u \cdot (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) \\ &= -b_{11} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_v] + b_{21} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] \\ &= b_{11}\rho \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{vv} \cdot \xi &= -\mathcal{G}_v \cdot \xi_v \\ &= -\mathcal{G}_v \cdot (b_{12}\Psi_u + b_{22}\Psi_v) \\ &= -b_{12}\mathcal{G}_v \cdot (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) - b_{22}\mathcal{G}_v \cdot (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) \\ &= -b_{12} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] + b_{22} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] \\ &= b_{22}\rho \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$(\mathcal{G}_{uu} + \mathcal{G}_{vv}) \cdot \xi = \mathcal{G}_{uu} \cdot \xi + \mathcal{G}_{vv} \cdot \xi = (b_{11} + b_{22})\rho = 2\rho H$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{G}_{uu} + \mathcal{G}_{vv} = 2\rho H \mathcal{G}$$

eşitliğiyle sonuçlandırabiliriz. Dahası, $\Delta_h \mathcal{G} := -\frac{\mathcal{G}_{uu} + \mathcal{G}_{vv}}{2\rho}$ olduğundan

$$\Delta_h \mathcal{G} = -H \mathcal{G}$$

elde edilir.

Böylece, H ortalama afin eğriliği ile afin konormal vektörün laplasyanı arasında bir ilişki oluşturduk. Dahası, Teorem (3.4.1) den biliyoruz ki $\Psi_u = \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v$ ifadesinin u ya göre ve $\Psi_v = -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u$ ifadesinin v ye göre türevleri alındığında

$$\Psi_{uu} = (\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v) + (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{uu}),$$

ve

$$\Psi_{vv} = (-\mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u) - (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{uv})$$

bulunur. Bu nedenle,

$$\Psi_{uu} + \Psi_{vv} = 2\rho \frac{1}{\rho} \mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v = 2\rho \xi$$

dir. Böylece,

$$\Psi_{uu} + \Psi_{vv} = 2\rho \xi$$

olduğu kanıtlanmış olur. Teorem (3.4.2) den $\mathcal{G}_{uu} \cdot \xi = -\mathcal{G}_u \cdot \xi_u = b_{11}\rho$ ve $\mathcal{G}_{vv} \cdot \xi = -\mathcal{G}_v \cdot \xi_v = b_{22}\rho$ eşitliklerine vardır. (3.4.3) afin normal vektörün tanımını kullanarak $\mathcal{G}_v \cdot \xi = 0$ denkleminin u ya göre türevini alırsak

$$\mathcal{G}_{uu} \cdot \xi + \mathcal{G}_v \cdot \xi_u = 0$$

elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_u \cdot \xi &= -\mathcal{G}_v \cdot \xi_u \\ &= \mathcal{G}_v \cdot (b_{11}\psi_u + b_{21}\Psi_v) \\ &= -b_{11}\mathcal{G}_v \cdot (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) - b_{21}\mathcal{G}_v \cdot (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) \\ &= -b_{11} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_v] + b_{21} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] \\ &= b_{21}\rho \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, Tanım (3.4.3) den elde ettiğimiz $\mathcal{G}_u \cdot \xi = 0$ denkleminin v ye göre türevini alırsak

$$\mathcal{G}_{uu} \cdot \xi + \mathcal{G}_u \cdot \xi_v = 0$$

olur.

Böylece,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{uu} \cdot \xi &= -\mathcal{G}_u \cdot \xi_v \\
&= -\mathcal{G}_u \cdot (b_{12}\Psi_u + b_{22}\Psi_v) \\
&= -b_{12}\mathcal{G}_u \cdot (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) - b_{22}\mathcal{G}_u \cdot (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) \\
&= -b_{12} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_v] + b_{22} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] \\
&= b_{12}\rho
\end{aligned}$$

dir. Bu yüzden, konveks durumda $b_{12} = b_{21}$ dir. Şimdi B matrisinin katsayılarını hesaplamak için diğer formülleri bulacağız. (3.10) dan hatırlayalım, $\mathcal{G}_u = \xi \wedge \Psi_v$ ve $\mathcal{G}_v = \Psi_u \wedge \xi$ ve B matrisinin b_{ij} katsayıları aşağıdaki formüllerle verilir :

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_u \cdot \xi_u = -\frac{1}{\rho} \det[\xi, \Psi_v, \xi_u] = \frac{1}{\rho} \det[\xi_u, \Psi_v, \xi] \\
b_{12} &= -\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_u \cdot \xi_v = -\frac{1}{\rho} \det[\xi, \Psi_v, \xi_v] = \frac{1}{\rho} \det[\xi_v, \Psi_v, \xi] \\
b_{21} &= -\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \cdot \xi_u = -\frac{1}{\rho} \det[\Psi_u, \xi, \xi_u] = \frac{1}{\rho} \det[\Psi_u, \xi_u, \xi] \\
b_{22} &= -\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \cdot \xi_v = -\frac{1}{\rho} \det[\Psi_u, \xi, \xi_v] = \frac{1}{\rho} \det[\Psi_u, \xi_v, \xi]
\end{aligned}$$

Böylece, şekil operatörünün katsayılarını hesaplamış oluruz. $\mathcal{G} \cdot \xi = 1$ ve $\mathcal{G} \cdot \xi_u = \mathcal{G} \cdot \xi_v = 0$ olduğundan $\xi_u, \xi_v \in T_p S$ dir. $B = D_v \xi$ nin self-adjoint (kendine eş) olduğunu görmek için,

$$\xi_u \cdot \mathcal{G}_v = \xi_v \cdot \mathcal{G}_u$$

eşitliğini ispatlamak yeterlidir. $\mathcal{G} \cdot \xi_u = 0$ ve $\mathcal{G} \cdot \xi_v = 0$ olduğunu biliyoruz, bu eşitliklerin sırasıyla v ve u ya göre türevlerini aldığımızda,

$$\mathcal{G}_v \cdot \xi_u + \rho \cdot \xi_u = 0 \quad \text{ve} \quad \mathcal{G}_u \cdot \xi_v + \mathcal{G} \cdot \xi_{vv} = 0$$

elde ederiz.

Böylece,

$$\mathcal{G}_v \cdot \xi_u = -\mathcal{G} \cdot \xi_{uv} = \mathcal{G}_u \cdot \xi_v$$

dir. Dolayısıyla, $B = D_v \xi$ matrisinin self-adjoint (kendine eş) olduğu sonucuna varabiliriz.

Tanım 3.4.8. Konveks olmayan durum için asimptotik (u, v) parametreleri alabiliriz, diğer bir deyişle,

$$h = 2\rho dudv,$$

ki burada ρ diferensiyellenebilir fonksiyondur. Burada asimptotik koordinatların $L=N=0$, $M = \rho^2$ özelliğini kullanarak koordinatları aşağıdaki şekilde çalışırız [21].

$$\det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uu}] = \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] = 0, \quad \det[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uv}] = \rho^2 \quad (3.12)$$

Teorem 3.4.3. (Lelievre Formülü) Yerel hiperbolik yüzeylerdeki asimptotik koordinatlarda

$$\Psi_u = \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u \text{ ve } \Psi_v = -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v \quad (3.13)$$

dir [21].

İspat : (3.2) den $L = N = 0$ ve $M = \rho^2$ olduğundan

$$\mathcal{G} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{|LN - M^2|^{1/4}} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{|M|^{1/2}} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\rho},$$

elde ederiz. Konormal vektörün v ye göre türevi

$$\mathcal{G}_v = \frac{\rho[(\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) + (\Psi_u \wedge \Psi_{vv})] - (\Psi_u \wedge \Psi_v)\rho_v}{\rho^2}$$

dir.

Şimdi, $(A \wedge B) \wedge (A \wedge C) = \det [A, B, C] A$ eşitliğini kullanırsak direk hesaplamayla

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u &= \left(\frac{1}{\rho} \Psi_u \wedge \Psi_v \right) \wedge \left(\frac{\rho [(\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_{vv})] - (\Psi_u \wedge \Psi_v) \rho_v}{\rho^2} \right) \\
&= \left[\left(\frac{1}{\rho^2} \Psi_u \wedge \Psi_v \right) \wedge (\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) \right] + \left[\left(\frac{1}{\rho^2} \Psi_u \wedge \Psi_v \right) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_{vv}) \right] - \left[\left(\frac{\rho_v}{\rho^3} \Psi_u \wedge \Psi_v \right) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_v) \right] \\
&= \frac{1}{\rho^2} \det [\Psi_v, \Psi_u, \Psi_{uv}] \Psi_v + \frac{1}{\rho^2} \det [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] \Psi_u - \frac{\rho_v}{\rho^3} \det [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_v] \Psi_u \\
&= \frac{1}{\rho^2} \det [\Psi_v, \Psi_u, \Psi_{uv}] \Psi_v \\
&= \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \Psi_v \\
&= -\Psi_v
\end{aligned}$$

bulunur. Aynı yoldan, $\Psi_u = \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u$ olduğunu ispatlayabiliriz. Şimdi,

$$\rho = \det [\mathcal{G}, \mathcal{G}_v, \mathcal{G}_u] \quad (3.14)$$

ispatlayalım. Lelievre formülü Teorem (3.4.3) den

$$\begin{aligned}
\Psi_u \wedge \Psi_v &= (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) \wedge (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) \\
&= -\det [\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v] \mathcal{G}
\end{aligned}$$

sonucu çıkar. Böylece,

$$-\frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\det [\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]} = \mathcal{G}$$

dir. Şimdi (3.3) ü kullanarak $\mathcal{G} = \frac{1}{\rho} \Psi_u \wedge \Psi_v$ eşitliğini elde ederiz, böylece

$$\rho = \det [\mathcal{G}, \mathcal{G}_v, \mathcal{G}_u]$$

dir. Yani, afin normal ve konormal vektörleri elde etmiş oluruz.

$$\xi = \frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u \quad \text{ve} \quad \mathcal{G} = \frac{1}{\rho} \Psi_u \wedge \Psi_v$$

dir.

Biz aynı zamanda \mathcal{G} konormal vektörünün türevlerini aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\begin{aligned}
 \Psi_v \wedge \xi &= (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) \wedge \left(\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} (\mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u) \\
 &= \frac{1}{\rho} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] \mathcal{G}_v \\
 &= -\mathcal{G}_v
 \end{aligned}$$

Benzer yoldan, \mathcal{G} konormal vektörünün v ye göre türevini hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}
 \Psi_u \wedge \xi &= (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) \wedge \left(\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} (\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v) \\
 &= \frac{1}{\rho} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_v] \mathcal{G}_u \\
 &= \mathcal{G}_u
 \end{aligned}$$

Böylece,

$$\mathcal{G}_v = \xi \wedge \Psi_v \quad \text{ve} \quad \mathcal{G}_u = \Psi_u \wedge \xi \quad (3.15)$$

sonucuna varırız. Lelievre formülünü kullanarak ρ afin metriği için ve afin normal vektörü için başka bir formül elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
 \det[\Psi_u, \Psi_v, \xi] &= \det \left[\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u, -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v, \frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u \right] \\
 &= -\frac{1}{\rho} \det((\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v)) \cdot (\mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u) \\
 &= -\frac{1}{\rho} \det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v] \mathcal{G} \cdot (\mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u) = \frac{\rho}{\rho} \mathcal{G} \cdot (\mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u)
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\rho = \det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_v, \mathcal{G}_u] = \det[\Psi_u, \Psi_v, \xi]$$

dir.

Şimdi belirsiz durumda ortalama afin eğriliği ve konormal \mathcal{G} vektörü arasında bir ilişki bulabiliriz [20].

Teorem 3.4.4. $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ asimptotik parametrelerle bir diferensiyellenebilir fonksiyon, \mathcal{G} afin konormal vektör ve H ortalama afin eğriliği olsun. Buradan

$$\mathcal{G}_{uv} = \rho H \mathcal{G} \quad (3.16)$$

elde ederiz ki burada $\rho = [\mathcal{G}, \mathcal{G}_v, \mathcal{G}_u] > 0$ afin metriğidir. Başka bir deyişle,

$$\Delta_h \mathcal{G} = -2H \mathcal{G} := -\frac{\mathcal{G}_{uv}}{2\rho}$$

dir [21].

İspat : Lelievre formülünden

$$\Psi_u = \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u, \quad \Psi_v = -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v$$

bulunur. Sonrasında, sırasıyla v ve u ya göre türevlerini hesapladığımızda

$$\Psi_{uv} = \mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u + \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{uv}, \quad \Psi_{vu} = -\mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v - \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{vu}$$

elde ederiz. Ψ diferensiyellenebilir fonksiyondur dolayısıyla $\Psi_{uv} = \Psi_{vu}$ dur. Bu nedenle,

$$\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{uv} = -\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{vu}$$

dir. Buradan

$$\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{vu} = 0$$

dir. Şimdi, $\mathcal{G}_{uv} = \alpha \mathcal{G}$ olduğu sonucuna varabiliriz.

Yukarıdaki eşitliği ve $\mathcal{G} \cdot \xi = 1$ afin normal vektör tanımını kullanarak,

$$\mathcal{G}_{uv} \cdot \xi = \alpha$$

elde ederiz. (3.4) den $\mathcal{G}_v \cdot \xi = 0$ olduğunu biliyoruz. u ya göre türevini aldığımızda

$$\mathcal{G}_{vu} \cdot \xi + \mathcal{G}_v \cdot \xi_u = 0,$$

olur, aynı zamanda $\mathcal{G}_u \cdot \xi = 0$ olduğundan, bu ifadenin v ye göre türevini aldığımızda

$$\mathcal{G}_{uv} \cdot \xi + \mathcal{G}_u \cdot \xi_v = 0$$

dir. Tanım (3.4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{vu} \cdot \xi &= -\mathcal{G}_v \cdot \xi_u \\ &= -\mathcal{G}_v \cdot (b_{11} \Psi_u + b_{21} \Psi_v) \\ &= -b_{11} \mathcal{G}_v \cdot (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) - b_{21} \mathcal{G}_v \cdot (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) \\ &= -b_{11} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] + b_{21} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_v] \\ &= b_{11} \rho \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{uv} \cdot \xi &= -\mathcal{G}_u \cdot \xi_v \\ &= -\mathcal{G}_u \cdot (b_{12} \Psi_u + b_{22} \Psi_v) \\ &= -b_{12} \mathcal{G}_u \cdot (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) - b_{22} \mathcal{G}_u \cdot (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) \\ &= -b_{12} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_v] + b_{22} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] \\ &= b_{22} \rho \end{aligned}$$

dir. Bu iki eşitlikten konveks olmayan durumda çalışıldığında $b_{11} = b_{22}$ olduğu sonucuna varılabilir. Şekil operatörünün self-adjoint (kendine eş) olduğunu ispatlamak için

$$\xi_u \cdot \mathcal{G}_v = \mathcal{G}_u \cdot \xi_v$$

olduğunu göstermek için yeterlidir. $b_{11} = -\mathcal{G}_v \cdot \xi_u$ ve $b_{22} = -\mathcal{G}_u \cdot \xi_v$ olduğunda $b_{11} = b_{22}$ eşitliğinden bu aşıkardır. Böylece,

$$2\mathcal{G}_{uv} \cdot \xi = (\mathcal{G}_{uv} + \mathcal{G}_{vu}) \cdot \xi = \mathcal{G}_{uv} \cdot \xi + \mathcal{G}_{vu} \cdot \xi = (b_{11} + b_{22})\rho = 2\rho H$$

dir.

Bu sebeple,

$$\mathcal{G}_{uv} = \rho H \mathcal{G}$$

sonucu elde edilir. Dahası,

$$\Delta_h \mathcal{G} := -\frac{\mathcal{G}_{uv}}{2\rho}$$

olduğundan

$$\Delta_h \mathcal{G} = -2H \mathcal{G}$$

dir. Böylece, afin konormal vektörün laplasyanı ile H ortalama afin eğriliği arasında bir ilişki kurulabilir. Şimdi B matrisinin katsayılarının geriye kalanını hesaplayalım. Teorem (3.4.4) den

$$\mathcal{G}_{vu} \cdot \xi = -\mathcal{G}_v \cdot \xi_u = b_{11}\rho \text{ ve } \mathcal{G}_{uv} \cdot \xi = -\mathcal{G}_u \cdot \xi_v = b_{22}\rho$$

eşitliklerini elde ederiz. (3.4.3) afin normal vektörü tanımından, $\mathcal{G}_v \cdot \xi = 0$ ifadesinin v ye göre türevi alındığında

$$\mathcal{G}_{vv} \cdot \xi = \mathcal{G}_v \cdot \xi_v = 0$$

bulunur. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{vv} \cdot \xi &= -\mathcal{G}_v \cdot \xi_v \\ &= -\mathcal{G}_v \cdot (b_{12}\Psi_u + b_{22}\Psi_v) \\ &= -b_{12}\mathcal{G}_v \cdot (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) - b_{22}\mathcal{G}_v \cdot (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) \\ &= -b_{12} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] + b_{22} \det[\mathcal{G}_v, \mathcal{G}, \mathcal{G}_v] \\ &= b_{12}\rho \end{aligned}$$

dir. Tanım (3.4.3) den $\mathcal{G}_u \cdot \xi = 0$ ifadesini elde ederiz, bu ifadenin u ya göre türevi alındığında ise

$$\mathcal{G}_{uu} \cdot \xi + \mathcal{G}_u \cdot \xi_u = 0$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{uu} \cdot \xi &= -\mathcal{G}_u \cdot \xi_u \\ &= -\mathcal{G}_u \cdot (b_{11}\Psi_u + b_{21}\Psi_v) \\ &= -b_{11}\mathcal{G}_u \cdot (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u) - b_{21}\mathcal{G}_u \cdot (-\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_v) \\ &= -b_{11} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_u] + b_{21} \det[\mathcal{G}_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}_v] \\ &= b_{21}\rho \end{aligned}$$

dir.

Aşağıdaki denklemler şekil operatörünün katsayılarını hesaplamak için bize diğer formülü verir. (3.15) den $\mathcal{G}_v = \xi \wedge \Psi_v$ ve $\mathcal{G}_u = \Psi_u \wedge \xi$ dir.

$$b_{11} = -\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \cdot \xi_u = -\frac{1}{\rho} \det[\xi, \Psi_v, \xi_u] = \frac{1}{\rho} \det[\xi_u, \Psi_v, \xi]$$

$$b_{12} = -\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \cdot \xi_v = -\frac{1}{\rho} \det[\xi, \Psi_v, \xi_v] = \frac{1}{\rho} \det[\xi_v, \Psi_v, \xi]$$

$$b_{22} = -\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_u \cdot \xi_v = -\frac{1}{\rho} \det[\Psi_u, \xi, \xi_v] = \frac{1}{\rho} \det[\Psi_u, \xi_v, \xi]$$

$$b_{21} = -\frac{1}{\rho} \mathcal{G}_u \cdot \xi_u = -\frac{1}{\rho} \det[\Psi_u, \xi, \xi_u] = \frac{1}{\rho} \det[\Psi_u, \xi_u, \xi]$$

Sonuç olarak, B matrisinin katsayıları yukarıdaki şekilde hesaplanmış olur. Dahası, Teorem (3.4.4) den $\mathcal{G} // \mathcal{G}_{uv}$ olduğunu biliyoruz. Lelievre formülünden $\Psi_u = \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_u$ denkleminin v ye göre türevi alındığında

$$\Psi_{uv} = (\mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u) + (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}_{uv}) = \mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u = \rho \frac{1}{\rho} \mathcal{G}_v \wedge \mathcal{G}_u = \rho \xi$$

elde edilir. Böylece, sıradaki formül

$$\Psi_{uv} = \rho \xi$$

elde edilir [20].

3.5. Has Olmayan Afın Küreler Ve Afın Maksimal Dönüşümler

Bu bölümde, afın minimal dönüşüm ve afın minimal yüzey kavramlarını tanıtacağız. Aynı zamanda has olmayan afın küre tanımını vereceğiz.

Tanım 3.5.1. H afın ortalama eğriliği sıfır olan yüzeyler afın minimal yüzeyler olarak adlandırılır, çünkü $H=0$ denklemi kompakt iç destek ile diferensiyellenebilir deformasyonlara göre afın alanı durağan (kritik) olan yüzeyleri karakterize eden Euler-Lagrange denklemidir. Konveks durumda, onları minimal değil maksimal olarak belirlemeyi tercih ederiz, çünkü bazı yüzeyler için afın alanın ikinci varyasyonu her zaman negatiftir. E.Calabi bu notasyonu kullanan ilk kişiydi [21].

Bir başka deyişle, biz afin minimal yüzeyler olarak adlandırılan sıfır afin ortalama eğrilik ile yüzeylere çalışırız ve konveks yüzeyler için onlar aynı zamanda afin maksimal yüzeyler olarak adlandırılır [21].

Tanım 3.5.2. Afin ortalama eğrilik ile birleşen yüzeyler afin minimal yüzeyler olarak adlandırılır [21].

Tanım 3.5.3. Sabit afin ξ normali ile $\Psi : \Omega \rightarrow R^3$ immersiyonu has olmayan afin küre olarak adlandırılır [21].

Sonuç 3.5.1. Has olmayan afin küre, afin minimal yüzeydir [21].

Sonuç 3.5.2. \mathcal{G} ye eşdeğer minimal afin yüzeyler harmoniktir. Gerçekten, konveks durumda Teorem (3.4.2) den sadece ve sadece $H=0$ olduğu durumda $\mathcal{G}_{uu} + \mathcal{G}_{vv} = 0$ elde edilir. Belirsiz durumda ise Teorem (3.4.2) den sadece ve sadece $H=0$ olduğu durumda aynı zamanda $\mathcal{G}_{uv} = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, afin konormal vektörün $\mathcal{G} : \Omega \subset IR^2 \rightarrow IR^3$ harmonik ve $\text{Im}(\mathcal{G}) \subset \text{düzlem}$ olduğunu kabul edelim. Ψ nin has olmayan afin küre olduğunu ispatlamalıyız.

Genelliği kaybetmeden düzlemin $z=1$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer $\text{Im}(\mathcal{G}) \subset \text{düzlem}$ ise konormal vektör için parametrizasyon $\mathcal{A}(u, v) = (v_1(u, v), v_2(u, v), 1)$ dir. $\xi = (0, 0, 1)$ normal vektörünün (3.4) denklemini sağladığını kolayca doğrulayabiliriz. (3.4) ün aşağıdaki denklemler sistemine eşit olduğunu dikkate alırsak,

$$\begin{cases} \mathcal{G} \cdot \xi = 1 \\ \mathcal{G} \cdot \xi_u = 0 \\ \mathcal{G} \cdot \xi_v = 0 \end{cases}$$

dir. Böylece, ξ nin sabit olduğu sonucuna varabiliriz. Bu da Ψ nin has olmayan afin küre olduğu anlamına gelir [21].

Tanım 3.5.4. Ω regüler yüzey olsun. Eğer \mathcal{G} harmonik vektör alanı var ise yani, $\det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v], \Omega \setminus S_\Psi$ de sıfırdan farklı ise $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümüne afin maksimal dönüşüm denir, ki burada S_Ψ tekil eğrilerin kümesi ve Ψ ise (3.13) de verildiği gibidir.

Bir başka deyişle, eğer Ψ afin minimal yüzeysen afin minimal dönüşümdür ve $\det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v] = 0$ olduğunda noktalarda belirli tekilliklere izin verir. $\rho = \det[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]$ sıfır olduğunda, Ψ afin maksimal dönüşümünün S_Ψ tekil kümesi noktaların kümesidir. Bu durumda Ψ afin normal S_Ψ üzerinde iyi tanımlı olmayabilir. Tabii ki, $S_\Psi = \emptyset$ olduğunda afin minimal yüzey vardır ve ξ sabit oluyor ise has olmayan afin küredir [21].



4. HAS OLMAYAN AFİN KÜRE ÖRNEKLERİ

Bu bölümde has olmayan Afın regle küre yüzey örnekleri incelenerek Gauss ve ortalama eğrilikleri sıfır olarak bulunmuştur. Ayrıca yüzeylerin Matlab programı kullanılarak çizilen grafikleri de bölüme eklenmiştir.

Örnek 4.1. $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \rightarrow (u, v, uv + g(v))$$

biçiminde verilen Cayley yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım [23].

$r = (u, v, uv + g(v))$ 'nun u ve v ye göre kısmi türevlerini alalım.

$$\begin{aligned} r_u &= (1, 0, v) \\ r_v &= (0, 1, u + g'(v)) \\ r_{uu} &= (0, 0, 0) \\ r_{uv} &= (0, 0, 1) \\ r_{vv} &= (0, 0, g''(v)) \end{aligned}$$

olsun. Şimdi afın konormal vektörünü hesaplamak için ihtiyacımız olan L , N ve M katsayılarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} L &= \det[r_u, r_v, r_{uu}] \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u + g'(v) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \det[r_u, r_v, r_{vv}] \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u + g'(v) \\ 0 & 0 & g''(v) \end{bmatrix} \\ &= g''(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \det[r_u, r_v, r_{uv}] \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u + g'(v) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\rho &= |LN - M^2|^{\frac{1}{4}} \\
&= |0 \cdot g''(v) - 1|^{\frac{1}{4}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan Berwald-Blashke Metriği

$$\begin{aligned}
h &= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}} \\
&= 2dudv + dv^2 g''(v)
\end{aligned}$$

dir. Burada Cayley yüzeyinin konormal vektörü

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \frac{r_u \wedge r_v}{\rho} \\
&= \frac{(1, 0, v) \wedge (0, 1, u + g'(u))}{1} \\
&= (v, -(u + g'(u)), 1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan \mathcal{G} konormal vektörün u ve v ye göre türevleri

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_u &= (0, -(1 + g''(u)), 0) \\
\mathcal{G}_v &= (1, 0, 0)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin afin normal vektörü olan ξ ,

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]} \mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v \\
&= -\frac{1}{1+g''(u)} (0,0, -(1+g''(u))) \\
&= (0,0,1)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada ξ_u ve ξ_v türevleri

$$\begin{aligned}
\xi_u &= (0,0,0) \\
\xi_v &= (0,0,0)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Şimdi de Gauss ve ortalama eğriliklerin hesaplanması için gerekli S Şekil Operatörünü bulalım. $S = [b_{ij}]$, $i, j = 1,2$ olacak şekilde b_{ij} katsayıları aşağıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\xi_u &= b_{11}(1,0,v) + b_{21}(0,1,u+g'(v)) \\
&= (b_{11}, 0, vb_{11}) + (0, b_{21}, (u+g'(v))b_{21}) \\
&= (b_{11}, b_{21}, vb_{11} + (u+g'(v))b_{21}) = (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_v &= b_{12}(1,0,v) + b_{22}(0,1,u+g'(v)) \\
&= (b_{12}, 0, vb_{12}) + (0, b_{22}, (u+g'(v))b_{22}) \\
&= (b_{12}, b_{22}, vb_{12} + (u+g'(v))b_{22}) = (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{21} = 0, b_{22} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla şekil operatörü

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Son olarak K , Gauss Eğriliği

$$K = \det S$$

olduğundan

$$K = 0$$

ve H , ortalama eğriliği

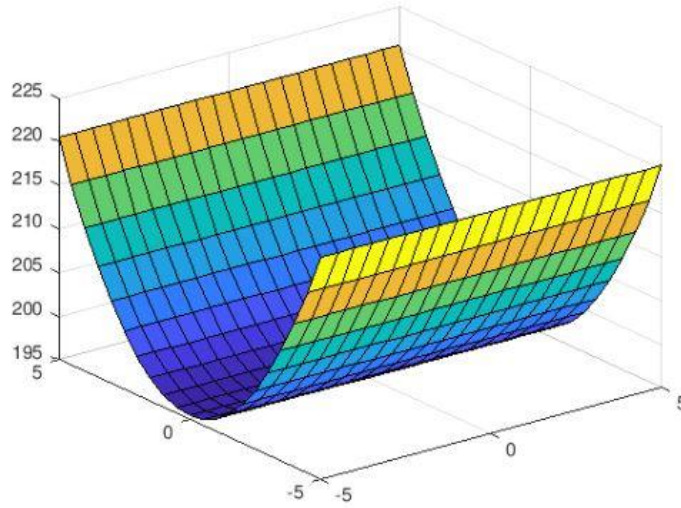
$$H = \frac{1}{2} \text{iz}(S)$$

olduğundan

$$H = 0$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin Matlab programı kullanılarak çizilen grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.1. r_1 regle yüzeyinin grafiği

Örnek 4.2. $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \rightarrow (u, v + f(u), uv + g(u))$$

biçiminde verilen Regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım [23].

$r = (u, v + f(u), uv + g(u))$ 'nun u ve v ye göre kısmi türevlerini alalım.

$$r_u = (1, f'(u), v + g'(u))$$

$$r_v = (0, 1, u)$$

$$r_{uu} = (0, f''(u), g''(u))$$

$$r_{uv} = (0, 0, 1)$$

$$r_{vv} = (0, 0, 0)$$

olsun. Şimdi afin konormal vektörünü hesaplamak için ihtiyacımız olan L , N ve M katsayılarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} L &= \det[r_u, r_v, r_{uu}] \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & f'(u) & v + g'(u) \\ 0 & 1 & u \\ 0 & f''(u) & g''(u) \end{bmatrix} \\ &= uf''(u) + g''(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \det[r_u, r_v, r_{vv}] \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & f'(u) & v + g'(u) \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \det[r_u, r_v, r_{uv}] \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & f'(u) & v + g'(u) \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\rho &= |LN - M^2|^{\frac{1}{4}} \\
&= |u.(f''(u) + g''(v).0 - 1) - 1|^{\frac{1}{4}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan Berwald-Blashke Metriği

$$\begin{aligned}
h &= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}} \\
&= (uf''(u) + g''(u))du^2 + 2dudv
\end{aligned}$$

dir. Burada Regle yüzeyinin konormal vektörü

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \frac{r_u \wedge r_v}{\rho} \\
&= \frac{(1, f'(u), v + g'(u)) \wedge (0, 1, u)}{1} \\
&= (-v + uf'(u) - g'(u), -u, 1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan \mathcal{G} konormal vektörün u ve v ye göre türevleri

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_u &= (f'(u) - uf''(u) - g''(u), -1, 0) \\
\mathcal{G}_v &= (-1, 0, 0)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin afin normal vektörü olan ξ ,

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]} \mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v \\
&= -\frac{1}{1}(0, 0, -1) \\
&= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada ξ_u ve ξ_v türevleri

$$\xi_u = (0,0,0)$$

$$\xi_v = (0,0,0)$$

olarak hesaplanır.

Şimdi de Gauss ve ortalama eğriliklerin hesaplanması için gerekli S Şekil Operatörünü bulalım. $S = [b_{ij}]$, $i, j = 1,2$ olacak şekilde b_{ij} katsayıları aşağıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned}\xi_u &= b_{11}(1, f'(u), v + g'(u)) + b_{21}(0,1,u) \\ &= (b_{11}, f'(u)b_{11}, (v + g'(u))b_{11}) + (0, b_{21}, ub_{21}) \\ &= (b_{11}, f'(u)b_{11} + b_{21}, (v + g'(u))b_{11} + ub_{21}) = (0,0,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_v &= b_{12}(1, f'(u), v + g'(u)) + b_{22}(0,1,u) \\ &= (b_{12}, f'(u)b_{12}, (v + g'(u))b_{12}) + (0, b_{22}, ub_{22}) \\ &= (b_{12}, f'(u)b_{12} + b_{22}, (v + g'(u))b_{12} + ub_{22}) = (0,0,0)\end{aligned}$$

$$b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{21} = 0, b_{22} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla şekil operatörü

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Son olarak K , Gauss Eğriliği

$$K = \det S$$

olduğundan

$$K = 0$$

ve H , ortalama eğriliği

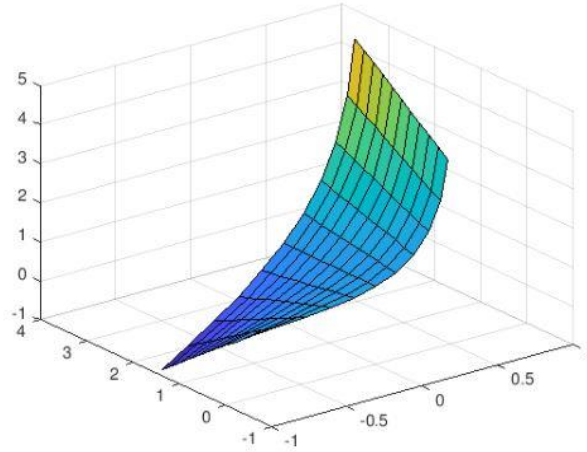
$$H = \frac{1}{2} \text{iz}(S)$$

olduğundan

$$H = 0$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin Matlab programı kullanılarak çizilen grafiği aşağıdaki gibidir :



Şekil 4.2. r_2 regle yüzeyinin grafiği

Örnek 4.3. $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \rightarrow (u + f(v), v, uv + g(v))$$

biçiminde verilen yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım [23].

$r = (u + f(v), v, uv + g(v))$ 'nun u ve v ye göre kısmi türevlerini alalım.

$$\begin{aligned} r_u &= (1, 0, v) \\ r_v &= (f'(v), 1, u + g'(v)) \\ r_{uu} &= (0, 0, 0) \\ r_{uv} &= (0, 0, 1) \\ r_{vv} &= (f''(v), 0, g''(v)) \end{aligned}$$

olsun. Şimdi afin konormal vektörü hesaplamak için ihtiyacımız olan L , N ve M katsayılarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
L &= \det[r_u, r_v, r_{uu}] \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v \\ f'(v) & 1 & u + g'(v) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N &= \det[r_u, r_v, r_{vv}] \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v \\ f'(v) & 1 & u + g'(v) \\ f''(v) & 0 & g''(v) \end{bmatrix} \\
&= vf''(v) + g''(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \det[r_u, r_v, r_{uv}] \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v \\ f'(v) & 1 & u + g'(v) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\rho &= |LN - M^2|^{\frac{1}{4}} \\
&= |0 \cdot v \cdot (vf''(v) + g''(v)) - 1|^{\frac{1}{4}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan Berwald-Blashke Metriği

$$\begin{aligned}
h &= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}} \\
&= 2dudv + (vf''(v) + g''(v))dv^2
\end{aligned}$$

dir. Burada Regle yüzeyinin konormal vektörü

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \frac{r_u \wedge r_v}{\rho} \\
&= \frac{(1,0,v) \wedge (f'(v),1,u+g'(v))}{1} \\
&= (-v, -u + vf'(v) - g'(v), 1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan \mathcal{G} konormal vektörün u ve v ye göre türevleri

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_u &= (0, -1, 0) \\
\mathcal{G}_v &= (-1, f'(v) + vf''(v) - g''(v), 0)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin afin normal vektörü olan ξ ,

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]} \mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v \\
&= -\frac{1}{1} (0, 0, -1) \\
&= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada ξ_u ve ξ_v türevleri

$$\begin{aligned}
\xi_u &= (0, 0, 0) \\
\xi_v &= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Şimdi de Gauss ve ortalama eğriliklerin hesaplanması için gerekli S Şekil Operatörünü bulalım. $S = [b_{ij}]$, $i, j = 1, 2$ olacak şekilde b_{ij} katsayıları aşağıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\xi_u &= b_{11}(1, 0, v) + b_{21}(f'(v), 1, u + g'(v)) \\
&= (b_{11}, 0, vb_{11}) + (f'(v)b_{21}, b_{21}, (u + g'(v))b_{21}) \\
&= (b_{11} + f'(v)b_{21}, b_{21}, vb_{11} + (u + g'(v))b_{21}) = (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_v &= b_{12}(1,0,v) + b_{22}(f'(v),1,u + g'(v)) \\
&= (b_{12},0,vb_{12}) + (f'(v)b_{22},b_{22},(u + g'(v))b_{22}) \\
&= (b_{12} + f'(v)b_{22},b_{22},vb_{12} + (u + g'(v))b_{22}) = (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{21} = 0, b_{22} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla şekil operatörü

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Son olarak K , Gauss Eğriliği

$$K = \det S$$

olduğundan

$$K = 0$$

ve H , ortalama eğriliği

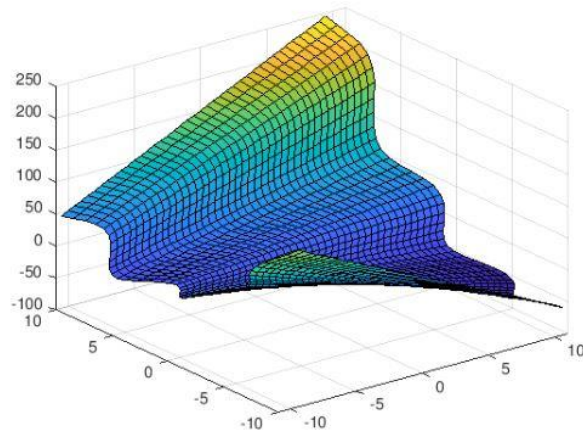
$$H = \frac{1}{2} \text{iz}(S)$$

olduğundan

$$H = 0$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin Matlab programı kullanılarak çizilen grafiği aşağıdaki gibidir :



Şekil 4.3. r_3 regle yüzeyinin grafiği

Örnek 4.4. $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \rightarrow (u, v, v \tan u + f(u))$$

biçiminde verilen yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım [23].

$r = (u, v, v \tan u + f(u))$ 'nun u ve v ye göre kısmi türevlerini alalım.

$$r_u = (1, 0, v \sec^2 u + f'(u))$$

$$r_v = (0, 1, \tan u)$$

$$r_{uu} = (0, 0, 2v \sec^2 u \tan u + f''(u))$$

$$r_{uv} = (0, 0, \sec^2 u)$$

$$r_{vv} = (0, 0, 0)$$

olsun. Şimdi afin konormal vektörü hesaplamak için ihtiyacımız olan L, N ve M katsayılarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} L &= \det[r_u, r_v, r_{uu}] \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v \sec^2 u + f'(u) \\ 0 & 1 & \tan u \\ 0 & 0 & 2v \sec^2 u \tan u + f''(u) \end{bmatrix} \\ &= 2v \sec^2 u \tan u + f''(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \det[r_u, r_v, r_{vv}] \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v \sec^2 u + f'(u) \\ 0 & 1 & \tan u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \det[r_u, r_v, r_{uv}] \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v \sec^2 u + f'(u) \\ 0 & 1 & \tan u \\ 0 & 0 & \sec^2 u \end{bmatrix} \\ &= \sec^2 u \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \rho &= |LN - M^2|^{\frac{1}{4}} \\
 &= \left| (2v \sec^2 u \tan u + f''(u)) - (\sec^2 u)^2 \right|^{\frac{1}{4}} \\
 &= | -(\sec^4 u) |^{\frac{1}{4}} \\
 &= (\sec^4 u)^{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

olduğundan Berwald-Blashke Metriği,

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}} \\
 &= (2v \sec^2 u \tan u + f''(u))du^2 + 2 \sec^2 u dudv
 \end{aligned}$$

dir. Burada Regle yüzeyinin konormal vektörü

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &= \frac{r_u \wedge r_v}{\rho} \\
 &= \frac{(1, 0, v \sec^2 u + f'(u)) \wedge (0, 1, \tan u)}{1} \\
 &= (v \sec^2 u - f'(u), -\tan u, 1)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan \mathcal{G} konormal vektörün u ve v ye göre türevleri

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_u &= (-2v \sec^2 u \tan u + f''(u), -\sec^2 u, 0) \\
 \mathcal{G}_v &= (-\sec^2 u, 0, 0)
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin afin normal vektörü olan ξ ,

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{[\mathcal{G}, \mathcal{G}_u, \mathcal{G}_v]} \mathcal{G}_u \wedge \mathcal{G}_v \\
&= -\frac{1}{\sec^4 u} (0, 0, -\sec^4 u) \\
&= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada ξ_u ve ξ_v türevleri

$$\begin{aligned}
\xi_u &= (0, 0, 0) \\
\xi_v &= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Şimdi de Gauss ve ortalama eğriliklerin hesaplanması için gerekli S Şekil Operatörünü bulalım. $S = [b_{ij}]$, $i, j = 1, 2$ olacak şekilde b_{ij} katsayıları aşağıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\xi_u &= b_{11}(1, 0, v \sec^2 u + f'(u)) + b_{21}(0, 1, \tan u) \\
&= (b_{11}, 0, (v \sec^2 u + f'(u))b_{11}) + (0, b_{21}, \tan u b_{21}) \\
&= (b_{11}, b_{21}, (v \sec^2 u + f'(u))b_{11} + \tan u b_{21}) = (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_v &= b_{12}(1, 0, v \sec^2 u + f'(u)) + b_{22}(0, 1, \tan u) \\
&= (b_{12}, 0, (v \sec^2 u + f'(u))b_{12}) + (0, b_{22}, \tan u b_{22}) \\
&= (b_{12}, b_{22}, (v \sec^2 u + f'(u))b_{12} + \tan u b_{22}) = (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{21} = 0, b_{22} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla şekil operatörü

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Son olarak K , Gauss Eğriliği

$$K = \det S$$

olduğundan

$$K = 0$$

ve H , ortalama eğriliği

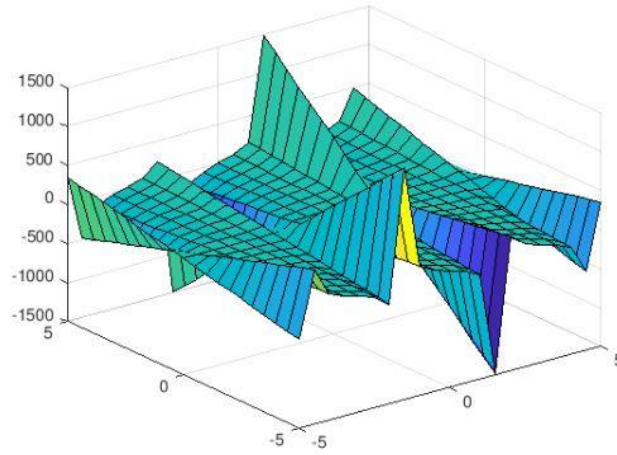
$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(S)$$

olduğundan

$$H = 0$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin Matlab programı kullanılarak çizilen grafiği aşağıdaki gibidir :



Şekil 4.4. r_4 regle yüzeyinin grafiği

KAYNAKÇA

- [1] Blaschke, W., 1923, “Vorlesungen uber Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie”, Springer, Berlin, 69-99.
- [2] Schirokow A.P. and Schirokow, P.A., 1962, “Affine Differentialgeometrie”, Teubner, Leipzig.
- [3] Nomizu, K. and Sasaki, T., 1991, “A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces”, *manuscripta math.* 73, 39-44.
- [4] Nomizu, K. and Sasaki, T., 1994, *Affine differential geometry*. Cambridge Univ. Press.
- [5] Dillen, F. and Vrancken, L., 1993, “The classification of 3-dimensional locally strongly convex homogeneous affine hypersurfaces”, *manuscripta math.* 80, 165-180.
- [6] Dillen, F. and Vrancken, L., 1993, “Homogeneous affine hypersurfaces with rank one shape operators”, *math. Z.* 212, 61-72.
- [7] Abdüssamed, B., 2018, “Afin diferensiyel geometride eğriler teorisi”, Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
- [8] Hacısalıhoğlu, H.H., 1998, “H. Diferensiyel Geometri”, Cilt 1,2. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [9] Hacısalıhoğlu, H.H., 2000, “Dönüşümler ve Geometriler”, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara
- [10] Hacısalıhoğlu, H.H. 1993. *Diferensiyel Geometri*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [11] Hacısalıhoğlu, H.H. 2000. *Diferensiyel Geometri*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Cilt 1,2, Ankara.
- [12] Hacısalıhoğlu, H.H. 2005. *2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri*. Hacısalıhoğlu Yayınları, Ankara.
- [13] Sabuncuoğlu, A. 2004. *Diferensiyel Geometri*, 2. Baskı. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

- [14] Hu, N., 2011 “Centroaffine space curves with constant curvatures and homogeneous surfaces”, *J. of Geom.* 102, 103-114.
- [15] Hu, N., 2012, *Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces*, phd thesis, Hokkaido University, 73, 39-44.
- [16] Hu, N., 2012, *Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces*, phd thesis, Hokkaido University, 73, 39-44.
- [17] Cansu, G., 2015, “Afin diferensiyel geometride eğriler teorisi”, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 10-22, 28-52.
- [18] Buchin, S., 1983, “Affine Differential Geometry”, Gordon and Breach, China.
- [19] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge University Press, 1994.
- [20] F. Milán, Singular curves of affine maximal maps, *Fundamental Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 1, Issue 1, 2014, 57-68.
- [21] E. F. C. Huamani, *Affine Minimal Surfaces with Singularities*, Masters dissertation, Rio de Janeiro, September, 2017.
- [22] E. Calabi, *Convex Affine Maximal Surfaces*, *Results. Math.* (1988) 13:199. doi: 10.1007/BF03323241.
- [23] Miller, Jonah Maxwell, "A Characterization of Affine Minimal and Affine Flat Surfaces" (2013). Undergraduate Honors Theses. 444.
- [24] Karger, A. and Novak, J. 1985. *Space Kinematics and Lie Groups*. Gordon and Breach Science Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Duygu DOĞAN ÖZYÜREK
Doğum Yeri : Uşak
Doğum Tarihi : 08/10/1990
Medeni Hali : Evli

Eğitim Durumu

Lise : Uşak İzzettin Çalışlar Lisesi(Yabancı Dil Ağırlıklı)
(2004-2008)
Lisans :Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
(2008-2012)
Pedagojik Formasyon
Eğitimi : Uşak Üniversitesi Eğitim Fakültesi
(2010-2012)

İş Deneyimi

Ücretli Öğretmenlik Kızılcasöğüt ÇPL/Uşak
(2012-2013)
Ücretli Öğretmenlik Necati Özen Anadolu Lisesi/ Uşak
(2014-2015)
Kamu Personeli Uşak Gençlik ve Spor İl Müdürlüğü
Latife Hanım Kız Yurdu
(2015-halen)