T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA TANIMLI FONKSİYONLARIN

Δ- LİMİT ve Δ- KAPLAMA NOKTALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA ONAR

NİSAN 2019

UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA TANIMLI FONKSİYONLARIN

Δ- LİMİT ve Δ- KAPLAMA NOKTALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA ONAR

UŞAK 2019

Mustafa ONAR tarafından hazırlanan “**ZAMAN SKALASINDA TANIMLI FONKSİYONLARIN ∆- LİMİT ve ∆- KAPLAMA NOKTALARI**” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylıyorum.

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Seyyit SEYYİDOĞLU, ……………………………………….
Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Alp Aslan KIRAÇ ………………………………….
Matematik Anabilim Dalı, Pamukkale Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Seyyit SEYYİDOĞLU …………………………………..
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Doç. Dr. Deniz UÇAR ………………………………….
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih: …./…./…….

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

………………………..

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mustafa ONAR

ZAMAN SKALASINDA TANIMLI FONKSİYONLARIN

Δ- LİMİT ve Δ- KAPLAMA NOKTALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa ONAR

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2019

ÖZET

Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Başkanlığı bünyesinde Yüksek Lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, belirli özelliklere sahip bir zaman skalası üzerinde tanımlı fonksiyonların, delta- limit ve delta- kaplama noktalarının karakterizasyonu konu edilmektedir.

Bu çalışma, üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ölçü teorisi ve zaman skalasının tarihsel gelişimine yer verilmektedir. İkinci bölümde, ölçü teorisine ait yarı halka, halka, cebir, sigma cebir, yarıhalkalar üzerine inşa edilen ölçüler, dış ölçüler ve ölçülebilen kümeler, bir küme fonksiyonundan dış ölçü elde edilmesi, bir ölçü tarafından üretilen dış ölçü ve ölçülebilir fonksiyonlar kavramlarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise zaman skalasında temel tanım, teorem ve zaman skalasının ölçülebilir bir alt kümesi için delta yoğunluk kavramı ile zaman skalasında tanımlı fonksiyonlara ait delta yakınsaklık, delta Cauchy, delta limit noktası ve delta kaplama noktalarına ait tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Bilim Kodu **:** 403.03.00

Anahtar Kelimeler **:** Δ- Yakınsaklık, Δ- Cauchy, Δ- Limit Noktası, Δ- Kaplama Noktası

Sayfa Adedi **:** 55

Tez Yöneticisi **:** Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Seyyit SEYYİDOĞLU

Δ-LIMIT AND Δ-CLUSTER POINTS OF THE FUNCTIONS DEFINED ON TIME SCALES

(M.Sc. Thesis)

Mustafa ONAR

UNIVERSITY OF UŞAK

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2019

ABSTRACT

This master thesis was prepared in Uşak University Institute of Science, Field of Mathematics. The subject is on the delta-limits and delta-cluster points of function defined on a class of time scales.

This thesis consist of three parts. The first part is dedicated to measure theory and the history of the development of time scale. The concepts of semiring of measure theory, rings, algebra, sigma-algebra, measures constructed on semirings, outer measures and measurable sets, measures supplied by set function and measurable functions are given in the second part. In the last part, the definitions of the basic concepts of time scale and the fundamental theorems are given. The definitions and theorem on the concepts of delta-density for on measurable subject of a time scale and delta-convergence, delta-limit and delta-cluster points of functions defined on a time scale are also supplied in this part.

Science Code: 403.03.00

Keywords: Δ- convergence, Δ- Cauchy, Δ- Limit point, Δ- Cluster point

Number of Page: 55

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Seyyit SEYYİDOĞLU

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yaptığım süre boyunca büyük fedakarlık göstererek sabır ve dikkatle çalışmalarımda bana rehberlik eden kıymetli hocam Sayın Doktor Öğretim Üyesi M. Seyyit SEYYİDOĞLU' na ve her zaman yanımda olan canımdan çok sevdiğim aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa ONAR

Nisan 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi.
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$	İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
$\boldsymbol{\mu}^*$	Dış ölçü
$\boldsymbol{\Lambda}$	Ölçülebilen kümeler sınıfı
$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{t})$	İleri sıçrama operatörü
$\boldsymbol{P}(\mathbb{T})$	Zaman skalasının kuvvet kümesi
$\boldsymbol{\mathcal{M}}\ (\boldsymbol{m}^*)$	m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen kümelerin sınıfı
Δ-h.h.	Δ- hemen her
$\boldsymbol{\mu}_{\Delta}\ (\boldsymbol{A})$	*A* kümesinin μ_{Δ} ölçüsü
$\boldsymbol{\delta}_{\Delta}(\boldsymbol{A})$	*A* kümesinin Δ- yoğunluğu
$\boldsymbol{M_d}$	Δ- yoğun kümelerin ailesi
$\boldsymbol{M_d^0}$	Δ- yoğunluğu 0 olan kümelerin ailesi
$\boldsymbol{\Lambda_f}$	*f* fonksiyonunun Δ- limit noktalarının kümesi
$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{f}}$	*f* fonksiyonunun Δ- kaplama noktalarının kümesi

1. GİRİŞ

19 y.y. sonlarında matematikçilerin çalışma alanı nerdeyse sürekli fonksiyonlarla sınırlı kalmıştı. Giderek daha sıklıkla karşılaşılmaya başlanan anlaşılması zor fonksiyonlarla başa çıkabilmek için bazı kısıtlamalar koymak zorunluluk haline gelmişti. Riemann'ın tarifinde integral alma yönteminde, fonksiyonun sürekli, monoton veya sınırlı salınımlı olması gibi bazı ağır şartlar bulunmaktaydı. Emile Borel, Camile Jordan ve diğer matematikçilerin birlikte geliştirmiş oldukları ölçüm teorisinden esinlenen Lebesgue, bu teoriyi bir adım daha ileriye taşımış ve bugün kendi ismiyle anılan Lebesgue integralini tarif etmiştir. Modern reel analizin en büyük başarılarından biri, Lebesgue integral teorisine göre, sınırlı ve ölçülebilen her fonksiyon, Lebesgue ölçüsü sıfır olan kümeler dışında belirsiz integralinin türevine eşit olmasının bulunmasıdır. Daha açık bir şekilde ifade edilecek olursa, sınırlı ve ölçülebilen her fonksiyon Lebesgue anlamında da integrallenebilirdir.

Dikkat edilecek olursa son zamanların çalışma alanlarından biri de zaman skalası teorisidir.

Zaman skalası kavramı, kesikli analiz ile sürekli analizi bir ortak payda altında toplamak amacıyla 1988 yılında Stefan Hilger tarafından ortaya atılmıştır. Stefan Hilger her iki analizde kullanabilecek kümeleri dikkate almış ve bu kümelere zaman skalası adını vermiştir.

Bu çalışmada Δ-limit noktası ve Δ- kaplama noktası kavramlarını ve bunlara ait özellikleri incelenecektir. Özellikle yarıhalkalar, yarıhalkalar üzerine inşa edilen ölçü, dış ölçü, bir ölçü tarafından üretilen dış ölçü, ölçülebilir küme, ölçünün Carathéodary kısıtlaması, ölçülebilir fonksiyon dikkate alınarak bunlara ait temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2. ÖLÇÜ TEORİSİ

Ölçü teorisi, 20. yüzyıl başlarında ortaya çıkmıştır. O yıllarda fonksiyonların yapısını en iyi bir şekilde kavrayabilmek için Euclidean uzayının altkümelerinde çalışma yapmak gerekiyordu. Bu kümelerde çalışma yapmak için ise klasik manada alan, uzunluk ve hacim gibi kavramların genelleştirilmesi gerekmekteydi.

Reel sayıların altkümelerinde ölçü teorisini ilk olarak E. Borel 1898' de inşa etmiş ve bu kümeler bugün Borel kümeleri adıyla bilinmektedir. 1902' de H. Lebesgue, Lebesgue ölçüsünü ve ölçü teorisinde integrali tarif etmiştir. 1918 yılında ünlü matematikçi C. Carathéodory, dış ölçü kavramını ve dış ölçüye ait özellikler üzerinde çalışmıştır. Özellikle 20. yüzyılın ilk yarısında yapılan tüm çalışmalar bu teori temel alınarak yapılmıştır.

Bu bölümde kümeler cebri, yarıhalkalar, yarıhalkalarda ölçü ve dış ölçü, bir ölçü tarafından üretilen dış ölçü, ölçülebilen fonksiyon kavramları incelenerek bunlara ait tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Kümeler Cebri ve Yarıhalkalar

Tanım 2.1. (Yarıhalka) X boş kümeden farklı bir küme ve X'in altkümelerinin bir sınıfı $\mathbb{S}$ olsun. $\mathbb{S}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathbb{S}$ sınıfına, X üzerinde yarıhalka denir:

i. $\emptyset \in \mathbb{S}$.

ii. $A, B \in \mathbb{S}$ ise $A \cap B \in \mathbb{S}$.

iii. $A, B \in \mathbb{S}$ ise $A - B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ olacak şekilde $\mathbb{S}$ sınıfına ait ayrık $C_1, C_2, \dots, C_n$ kümeleri mecuttur [1].

Tanım 2.2. (σ - Küme) $\mathbb{S}$ sınıfı, X üzerinde bir yarıhalka olsun. $A \subset X$ kümesi $\mathbb{S}$ sınıfına ait ayrık bazı kümelerin sayılabilir birleşimleri şeklinde yazılabiliyorsa A kümesine σ-küme denir [1].

Teorem 2.3. $\mathbb{S}$ bir yarıhalka olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler sağlanır :

i. $A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{S}$ ise $A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ kümesi $\mathbb{S}$ sınıfına ait ayrık kümelerin sonlu birleşimi şeklinde yazılabilir.

ii. $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{S}$ ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ bir σ-kümedir.

iii. σ- kümelerin sayılabilir birleşimleri ve sonlu adetteki arakesitleri de bir σ- kümedir [1].

İspat (i) İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. $n = 1$ için $A - A_1$ olur ki bu ise yarı halka tanımından açıktır. Şimdi $A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{S}$ olmak üzere

$$B = A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

olacak şekildeki B_i kümelerinin ikişerli ayrık olduğunu kabul edelim ve bu durumun $n + 1$ için sağlandığını gösterelim. Buna göre A_{n+1} kümesi $\mathbb{S}$ ailesinin elemanı olsun. Buradan

$$A - \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = A - \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup (A_{n+1}) \right)$$

$$= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup (A_{n+1}) \right)^t$$

$$= \left(A \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i^t \right) \cap (A \cap A_{n+1}^t)$$

$$= \left(A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap (A \cap A_{n+1}^t)$$

$$= B \cap A \cap A_{n+1}^t \quad (B \subset A)$$

$$= B \cap A_{n+1}^t = B - A_{n+1}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} B_i - A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (B_i - A_{n+1})$$

eşitliği elde edilir. Her bir i için $B_i - A_{n+1}$ kümesini $\mathbb{S}$ ailesine ait ayrık kümelerin sonlu birleşimi şeklinde yazabiliriz. Daha açık ifade edilecek olursa; her i, j için $C_{ij} \in \mathbb{S}$ ve C_{ij} kümeleri her iki indise göre ayrık olmak üzere

$$B_i - A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{m_i} C_{ij}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak

$$A - \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{m_i} C_{ij}$$

eşitliği elde edilir ki bu ise göstermek istenilen ifadedir.

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{S}$ olmak üzere $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ sağlansın. Önce $n \geq 1$ için

$$B_1 = A_1 \, , B_{n+1} = A_{n+1} - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

şeklinde tanımlanan B_n kümelerinin ayrık ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$ olduğunu gösterelim. B_n kümelerinin ayrık olduğunu göstermek için $r \neq s$ olmak üzere $B_r \cap B_s = \emptyset$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için $r > s$ alalım. Bu durumda $r - 1 \geq s$ olur. Bu bilgilerden hareketle,

$$B_r \cap B_s = \left(A_r - \bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right) \cap \left(A_s - \bigcup_{i=1}^{s-1} A_i \right)$$

$$= \left(A_r \cap \bigcap_{i=1}^{r-1} A_i^t \right) \cap \left(A_s \cap \bigcap_{i=1}^{s-1} A_i^t \right)$$

$$= A_r \cap A_1^t \cap A_2^t \cap \ldots A_{r-1}^t \cap A_s \cap A_1^t \cap A_2^t \cap \ldots A_{s-1}^t$$

$$= A_r \cap A_1^t \cap A_2^t \cap \ldots A_s^t \cap A_s \cap A_1^t \cap A_2^t \cap \ldots A_{s-1}^t$$

$$= \emptyset$$

yazılabilir. Diğer taraftan **(i)** özelliğini hatırlanacak olursa her bir B_n kümesini

$$B_n = \bigcup_{m=1}^{k_n} C_{mn}$$

biçiminde yazabiliriz. Böylece A kümesi $\mathbb{S}$ sınıfına ait ayrık kümelerin sayılabilir birleşimi şeklinde yazılmış olur. Yani A bir σ- kümedir.

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{S}$ kümelerinin her biri σ- küme olsun. Bu takdirde $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{mn}$ eşitliği sağlanacak şekilde $C_{mn} \in \mathbb{S}$ kümeleri vardır. (Buradaki C_{mn} kümeleri m indisine göre ayrıktır). Böylece,

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \bigcap_{i=1}^{k} \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{mi} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k} C_{mi}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ise $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ kümesinin bir σ- küme olduğunu gösterir.

Tanım 2.4. (Cebir) X boş kümeden farklı bir küme ve X kümesinin altkümelerinin boştan farklı bir sınıfı $\mathbb{S}$ olsun. $\mathbb{S}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathbb{S}$ sınıfına X üzerinde cebir adı verilir:

i. $A, B \in \mathbb{S}$ ise $A \cap B \in \mathbb{S}$.

ii. $A \in \mathbb{S}$ ise $A^t \in \mathbb{S}$ [1].

Teorem 2.5. X boş kümeden farklı bir küme, $\mathbb{S}$ ailesi ise X kümesi üzerinde bir cebir olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $\emptyset, X \in \mathbb{S}$.

ii. $\mathbb{S}$ cebri sonlu birleşim ve sonlu arakesit işlemleri altında kapalıdır.

iii. $\mathbb{S}$ bir yarıhalkadır [1].

İspat (i) $\mathbb{S}$ boş kümeden farklı olduğundan en az bir $A \in \mathbb{S}$ vardır. $\mathbb{S}$ cebir olduğundan $A^t \in \mathbb{S}$ kümesi vardır. Cebrin (i) özelliğinden $\emptyset = A \cap A^t \in \mathbb{S}$ elde edilir. (ii) özelliğinden $\emptyset^t = X \in \mathbb{S}$ bulunur.

(ii) Sonlu arakesit altında kapalılık cebrin (i) özelliğinden kolayca görülebilir. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ kümesini,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^t\right)^t$$

şeklinde yazabiliriz. Burada her i için $A_i \in \mathbb{S}$ olduğundan cebrin (ii) özelliği gereğince $A_i^t \in \mathbb{S}$ olur. İspatın ilk kısmından $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^t \in \mathbb{S}$ ve (ii) özelliğinden $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^t)^t \in \mathbb{S}$ sonucu çıkar. Yani $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{S}$ sağlanır.

(iii) $\mathbb{S}$ ailesinin bir yarıhalka olduğu

$$A - B = A \cap B^t$$

eşitliğinden görülebilir. Gerçekten $A, B \in \mathbb{S}$ olduğundan bu eşitlikten $A - B \in \mathbb{S}$ olduğu görülebilir. Ayrıca

$$A - B = (A - B) \cup \emptyset$$

yazılabileceğinden istenilen gösterilmiş olur.

Örnek 2.6. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a \leq b$ olsun. $a = b$ ise $[a, b) = \emptyset$ diyelim. $a < b$ ise $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ aralıklarını göz önüne alalım.

$$\mathbb{S} = \{[\mathrm{a}, \mathrm{b}) : \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

sınıfı $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir yarıhalka olup cebir değildir. Çünkü $[a, b) = \mathbb{R}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ elemanları yoktur. Örneğin,

$[1,2), [3,4) \in \mathbb{S}$ iken $[1,2) \cup [3,4) \notin \mathbb{S}$ dir.

Örnek 2.7. $X = [0,1)$ olmak üzere,

$$\mathbb{S} = \left\{\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : [a_i, b_i) \subset [0,1), i = 1,2, \dots, n\right\}$$

biçiminde tanımlanan $\mathbb{S}$ sınıfının bir cebir olduğunu gösterelim.

$A \in \mathbb{S}$ olmak üzere $A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ olsun. Burada özel olarak her bir i için $a_i = b_i$ alınacak olursa $A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \emptyset \in \mathbb{S}$ sağlanır.

$A, B \in \mathbb{S}$ olmak üzere

$$A = \bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i) \ , B = \bigcup_{j=1}^{m}[c_j, d_j)$$

kabul edelim. Buradan

$$A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i)\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m}[c_j, d_j)\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m} \left([a_i, b_i) \cap [c_j, d_j)\right)$$

eşitliği sağlanır. Her i, j sayısı için $[a_i, b_i) \cap \left[c_j, d_j\right) = [\alpha_t, \beta_t) \subset [0,1)$ sağlanacak şekilde $t = 1,2, \dots, k$ sayıları bulabiliriz. Böylece

$$A \cap B = \bigcup_{t=1}^{k}[\alpha_t, \beta_t) \in \mathbb{S}$$

olduğu görülür. Ayrıca $A \cup B \in \mathbb{S}$ olur. Yani $\mathbb{S}$ ailesi sonlu arakesit ve sonlu birleşim işlemleri altında kapalıdır.

$A = \bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i) \in \mathbb{S}$ ise

$$[0,1) - A = [0,1) - \bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$$

$$= [0,1) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i)\right)^t$$

$$= [0,1) \cap \bigcap_{i=1}^{n}[a_i, b_i)^t$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n}([0,1) \cap [a_i, b_i)^t)$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} ([0,1) - [a_i, b_i))$$

olup, her $[0,1) - [a_i, b_i)$ kümesi $[a, b)$ şeklindeki kümelerin sonlu birleşimi şeklinde yazılabilir. Daha açık bir ifadeyle her i için

$$[0,1) - [a_i, b_i) = [0, a_i) \cup [b_i, 1)$$

olur. Buradan

$$[0,1) - A = \bigcap_{i=1}^{n} \big([0, a_i) \cup [b_i, 1)\big)$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\mathbb{S}$ sınıfının cebir yapısına sahip olduğu görülmüş olur.

Tanım 2.8. (Halka) X boş kümeden farklı bir küme ve X kümesinin altkümelerinin boştan farklı bir sınıfı $\mathfrak{R}$ olsun. $\mathfrak{R}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu sınıfa X kümesi üzerinde halka denir :

i. $A, B \in \mathfrak{R}$ ise $A \cup B \in \mathfrak{R}$

ii. $A, B \in \mathfrak{R}$ ise $A - B \in \mathfrak{R}$ [1].

Eğer $\mathfrak{R}$ sınıfı bir halka ise $\emptyset \in \mathfrak{R}$ olmak zorundadır. Gerçekten $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ olduğundan en az bir $A \in \mathfrak{R}$ vardır. Halkanın (ii) özelliğinden $\emptyset = A - A \in \mathfrak{R}$ elde edilir. Her cebrin bir halka olduğu açıktır. Her halka da aynı zamanda bir yarıhalkadır. Yarıhalkanın (i) ve (iii) şartlarının sağlandığı açıktır. (ii) özelliği ise $A \cap B = A - (A - B)$ eşitliğinden elde edilir.

Tanım 2.9. (σ-cebir) $\mathbb{S}$ sınıfı X kümesi üzerinde bir cebir olsun. Eğer $\mathbb{S}$ sınıfına ait sayılabilir adetteki kümenin birleşimi $\mathbb{S}$ sınıfına aitse, $\mathbb{S}$ sınıfına X kümesi üzerinde bir σ- cebir adı verilir. Daha açık şekilde ifade edilecek olursa,

i. $A, B \in \mathbb{S}$ ise $A \cap B \in \mathbb{S}$,

ii. $A \in \mathbb{S}$ ise $A^t \in \mathbb{S}$,

iii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{S}$ ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{S}$

şartlarını sağlayan $\mathbb{S}$ sınıfına X kümesi üzerinde bir σ- cebir denir [1].

$\mathbb{R}$ ' nin açık alt kümelerini kapsayan en küçük σ- cebire Borel σ- cebri denir.

σ- cebir özelliklerinden

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{S}$$

yazılabilir, çünkü

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^t\right)^t$$

şeklinde ifade edilebilir. σ- cebir, cebir, halka ve yarıhalka arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

σ- cebir ⇒ Cebir ⇒ Halka ⇒ Yarıhalka

Tanım 2.10. Boş kümeden farklı bir X kümesinin bazı altkümelerinden oluşan $\mathcal{F}$ sınıfını ihtiva eden σ- cebirlerin en küçüğüne $\mathcal{F}$ sınıfının ürettiği σ- cebir denir [1].

Örneğin, $X = \{1,2,3\}$ ve $\mathcal{F} = \{\{1\}\}$ alınacak olursa $\mathcal{F}$ sınıfının ürettiği σ- cebir

$$\mathbb{S} = \{\{1\}, \{2,3\}, \emptyset, \mathrm{X}\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.11. X kümesi sayılamayacak adette elemana sahip bir küme olsun.

$$\mathbb{S} = \{E \subset X : E \text{ veya } E^t \text{ sayılabilir }\}$$

biçiminde tanımlanan $\mathbb{S}$ sınıfının, tek nokta kümelerinin ürettiği bir σ- cebir olduğunu gösterelim.

Açıktır ki $\mathbb{S}$ sınıfı X kümesinin tek elemanlı altkümelerini ihtiva eder. Ayrıca $\mathbb{S}$ sınıfının her elemanı tek nokta kümeleri tarafından üretilen σ- cebrin bir elemanıdır. Bu durumda $\mathbb{S}$ sınıfının σ- cebir olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$\emptyset, X \in \mathbb{S}$ olup ve $\mathbb{S}$ sınıfının tümleme işlemi altında kapalı olduğu açıktır. $\{A_n\} \in \mathbb{S}$ alalım. Eğer A_n kümeleri sayılabilir ise sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimleri de sayılabilir olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{S}$ olur. Bazı k sayıları için A_k kümeleri sayılamayan kümeler ise $(A_k)^t$ kümeleri sayılabilir olup,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^t \subset (A_k)^t$$

olur ki bu ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{S}$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla buradan $\mathbb{S}$ sınıfının bir σ-cebir olduğu gösterilmiş olur.

2.2. Yarıhalkalar Üzerine İnşa Edilen Ölçüler

Tanım 2.12. $\mathbb{S}$ ailesi boş kümeden farklı bir X kümesi üzerinde bir yarı halka olsun. Bu durumda $m : \mathbb{S} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna $\mathbb{S}$ sınıfına ait her $[a, b)$ aralığının görüntüsünü o aralığın uzunluğuna karşılık getiren küme fonksiyonu denir [3].

Yani , $m : \mathbb{S} \rightarrow [0, \infty]$ küme fonksiyonu her $[a, b) \in \mathbb{S}$ için

$$m\left([a, b)\right) = b - a$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.13. X boş kümeden farklı bir küme ve $\mathbb{S}$ ailesi X kümesi üzerinde bir yarıhalka olsun. $\mu : \mathbb{S} \rightarrow [0, \infty]$ küme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa μ fonksiyonuna $\mathbb{S}$ üzerinde ölçü denir:

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{S}$ ayrık kümeler ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{S}$ ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$(X, \mathbb{S}, \mu)$ üçlüsüne ise ölçü uzayı denir [1].

Teorem 2.14. $(X, \mathbb{S}, \mu)$ bir ölçü uzayı ise aşağıdaki şartlar sağlanır:

i. $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathbb{S}$ ayrık kümeler ve $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{S}$ ise,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

(μ-fonksiyonu sonlu toplamsaldır.)

ii. $A, B \in \mathbb{S}$ ve $A \subset B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ eşitsizliği sağlanır. Yani μ- fonksiyonu monotondur [1].

İspat (i) $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathbb{S}$ ayrık kümeler ve $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{S}$ olsun. $i > n$ için $A_i = \emptyset$ olarak tarif edersek, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ sınıfı $\mathbb{S}$ ailesine ait ayrık kümelerden oluşur. Ayrıca

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

eşitliği mevcuttur. Böylece

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

elde edilir.

(ii) $A, B \in \mathbb{S}$ ve $A \subset B$ olsun. $\mathbb{S}$ sınıfından

$$B - A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

eşitliği sağlanacak şekilde ayrık $C_i \in \mathbb{S}$ kümelerini seçelim. $A \subset B$ olduğundan B kümesini,

$$B = A \cup (B - A)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece,

$$B = A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \right)$$

$$= A \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots C_n$$

olur. Dolayısıyla (i) yardımıyla

$$\mu(B) = \mu(A \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots C_n)$$

$$= \mu(A) + \mu(C_1) + \mu(C_2) + \cdots + \mu(C_n)$$

$$\geq \mu(A)$$

bulunur.

Örnek 2.15. (Sayma Ölçüsü) X boş kümeden farklı bir küme ve $\mathbb{S} = P(X)$ olsun. $A \subset X$ olmak üzere

$$\mu = \begin{cases} s(A)\,, & A \text{ sonlu} \\ \infty\,, & A \text{ sonsuz} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mu : \mathbb{S} \to [0, \infty]$ fonksiyonu bir ölçüdür.

Örnek 2.16. (Dirac ölçüsü) X boş kümeden farklı bir küme ve $\mathbb{S} = P(X)$ olsun. Sabit bir $a \in X$ elemanı için

$$\mu(A) = \begin{cases} 1\,, & a \in A \\ 0\,, & a \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mu : \mathbb{S} \to [0, \infty]$ fonksiyonu bir ölçüdür.

Teorem 2.17. $\mathbb{S}$ ailesi bir yarıhalka ve $\mu : \mathbb{S} \to [0, \infty]$ bir küme fonksiyonu olsun. μ-fonksiyonunun $\mathbb{S}$ sınıfı üzerinde ölçü olması için gerek ve yeter şart ;

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathbb{S}$ ayrık kümeler olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$ ise,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu\,(A)\,,$$

iii. $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{S}$ ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ise,

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

şartlarının sağlanmasıdır [1].

İspat $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki μ fonksiyonu $\mathbb{S}$ ailesi üzerinde ölçü olsun.

(i) Tanımdan açıktır.

(ii) $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathbb{S}$ ayrık kümeler olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$ olsun. Teorem 2.3.(i) den $A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ olacak şekilde ikişerli ayrık $B_i \in \mathbb{S}$ kümeleri vardır.

$$C_1 = A_1, C_2 = A_2, \dots, C_n = A_n \text{ ve } C_{n+1} = B_1, C_{n+2} = B_2, \dots, C_{n+m} = B_m$$

diyelim. Bu takdirde $C_1, C_2, \dots, C_{n+m}$ kümeleri ikişerli ayrıktır ve $A = \bigcup_{i=1}^{n+m} C_i$ şeklinde yazılabilir. μ fonksiyonunun sonlu toplamsallık özelliğinden

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+m} C_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+m} \mu(C_i) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{S}$ ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ olsun. $B_1 = A_1$ ve $n \geq 1$ için $B_{n+1} = A_{n+1} - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ diyelim. Bu durumda B_n kümeleri ayrık olup $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eşitliği ve her bir n için $B_n \subset A_n$ kapsama bağıntısı sağlanır. Teorem2.3.(i) gereğince her bir B_n kümesi $B_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n$ şeklinde bir gösterime sahiptir.

Burada $C_1^n, C_2^n, \ldots, C_{k_n}^n \in \mathbb{S}$ olup bu kümeler ayrıktır. Her bir n için $\bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n \subset A_n$ olduğu ve (ii) şıkkı dikkate alınırsa,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n\right) = \sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_i^n)$$

$$\leq \mu(A_n)$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca,

$$A = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n\right)\right]$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} (A \cap C_i^n)$$

eşitliği ve μ fonksiyonunun σ-alttoplamsallık özelliği dikkate alınırsa,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(A \cap C_i^n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_i^n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

eşitsizliği elde edilir.

($\Leftarrow$) Şimdi de (i), (ii) ve (iii) şıklarının sağlandığını kabul edelim. Ölçünün ilk şartının sağlandığı açıktır. μ fonksiyonunun σ- alttoplamsal olduğunu gösterelim. Bunun için, $A_n \in \mathbb{S}$ kümeleri ikişerli ayrık olmak üzere $\bigcup_{n=1}^{k} A_n \in \mathbb{S}$ olsun. Her bir k doğal sayısı için,

$$\bigcup_{n=1}^{k} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olup,

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin tersi için (iii)' de $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ yazmak yeterli olacaktır. Bu durumda

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

eşitsizliği bulunur. Böylece

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.18. $\mathbb{S}$ sınıfı bir yarıhalka olmak üzere $\mu : \mathbb{S} \to [0, \infty]$ küme fonksiyonu,

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathbb{S}$ ayrık kümeler ve $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{S}$ ise,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

(μ-sonlu toplamsal) şartlarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna $\mathbb{S}$ üzerinde sonlu ölçü adı verilir [1].

Teorem 2.19. (Heine-Borel) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ve I herhangi bir indis kümesi olmak üzere reel sayıların açık alt kümelerinin bir sınıfı $\{G_i\}_{i\epsilon I}$ olsun. Eğer $[a, b] \subset \bigcup_{i\epsilon I} G_i$ ise $\{G_i\}_{i\epsilon I}$ sınıfından

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

olacak şekilde sonlu adette $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_n}$ kümeleri bulanabilir [1].

Örnek 2.20. (Lebesgue Ölçüsü) Örnek 2.6. da $\mathbb{S}$ sınıfı üzerinde $\lambda([a, b)) = b - a$ olarak tanımlanan λ fonksiyonu bir ölçüdür. Bu ölçüye Lebesgue ölçüsü denir [1].

Çözüm. λ fonksiyonunun bir ölçü fonksiyonu olduğunu anlamak için Teorem 2.17. nin şartlarının sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

(i) $a = b$ ise ,

$$\lambda(\emptyset) = \lambda([a, b)) = \lambda([a, a)) = 0$$

olduğu açıktır.

(ii) $[a_1, b_1), [a_2, b_2), \dots, [a_n, b_n)$ kümeleri ikişerli ayrık kümeler olmak üzere,

$$\bigcup_{k=1}^{n} [a_k\ , b_k) \subset [a, b)$$

olsun.

$$a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \cdots \le a_n \le b_n \le b$$

şeklinde kabul edelim. Buna göre

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda([a_k, b_k)) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1}\, , b_k)$$

$$= b_k - a_1$$

$$\leq b - a = \lambda([a, b))$$

eşitsizliği sağlanır.

(iii)

$$[a, b) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i)$$

olsun. $a = b$ olması durumu açıktır. $a < b$ olsun. $b - a > \varepsilon$ olacak şekilde keyfi bir ε pozitif sayısı seçelim. $\delta > 0$ keyfi olmak üzere

$$[a, b - \varepsilon] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a_i - \frac{\delta}{2^i}\, , b_i\right)$$

yazılabilir. Heine- Borel teoremi gereğince,

$$[a, b - \varepsilon] \subset \bigcup_{i=1}^{k} \left(a_{n_i} - \frac{\delta}{2^{n_i}}\, , b_{n_i}\right)$$

olacak şekilde $\left(a_{n_i} - \frac{\delta}{2^{n_i}}\, , b_{n_i}\right)$ aralıkları vardır. Böylece,

$$\lambda\big([a, b)\big) - \varepsilon = (b - a) - \varepsilon$$

$$= [a, b - \varepsilon] \quad \text{aralığının boyu}$$

$$< \sum_{i=1}^{k} \left(b_{n_i} - a_{n_i} + \frac{\delta}{2^{n_i}}\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(b_{n_i} - a_{n_i} + \frac{\delta}{2^{n_i}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda\big([a_i, b_i)\big) + \delta$$

yazılabilir. Buradaki ε ve δ sayıları keyfi olduğundan

$$\lambda\big([a, b)\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\lambda\big([a_i, b_i)\big)$$

eşitsizliği elde edilir. λ fonksiyonunun ölçü fonksiyonu olduğu görülür.

2.3. Dış Ölçüler ve Ölçülebilir Kümeler

Tanım 2.21. (Dış Ölçü) X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\mu^*: P(X) \to [0, \infty]$ küme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde dış ölçü denir :

i. $\mu^*(\emptyset) = 0$ **.**

ii. $\forall\, A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. (μ^* fonksiyonu monotondur.)

iii. X'in altkümelerinin her $\{A_n\}$ dizisi için

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

(μ^* fonksiyonu σ- alttoplamsaldır.) [1].

Tanım 2.22. (Ölçülebilir Küme) μ^* fonksiyonu, X üzerinde bir dış ölçü olsun. Her $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^t)$$

eşitliği sağlanıyorsa $E \subset X$ kümesine ölçülebilir (μ^*-ölçülebilir) küme denir [1].

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^t)$$

eşitliği ve μ^* fonksiyonunun σ-alttoplamsallığı göz önüne alınacak olursa

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^t)$$

eşitsizliğinin her zaman sağlandığı görülür. Bu nedenle bir E kümesinin ölçülebilir olduğunu görmek için her $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^t)$$

eşitsizliğinin sağlandığını görmek yeterli olacaktır. Ölçülebilir kümelerin sınıfı Λ ile gösterilecektir.

Tanım 2.23. E bir küme olsun. Eğer $\mu^*(E) = 0$ ise E kümesine μ^*- boş küme denir [1].

Teorem 2.24. Her μ^*- boş küme ölçülebilirdir [1].

İspat : $\mu^*(E) = 0$ olsun. μ^*- fonksiyonu monoton olduğundan her $A \subset X$ için

$\mu^*(A \cap E) = 0$ sağlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^t) \\ &= 0 + \mu^*(A \cap E^t) \\ &= \mu^*(A \cap E^t) \\ &\leq \mu^*(A) \end{aligned}$$

eşitsizliklerinden E kümesinin ölçülebilir olduğu rahatça görülür.

Teorem 2.25. $E_1, E_2, \dots, E_n \in \Lambda$ kümeleri ayrık ise her $A \subset X$ için

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap E_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(A \cap E_i)$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.26. Ölçülebilen kümelerin sınıfı olan Λ bir σ-cebirdir [1].

İspat Öncelikle Λ sınıfının cebir olduğunu gösterelim.

(i) $E \in \Lambda$ olsun. Bu takdirde her $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^t)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte özel olarak $E = E^t$alırsak ,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E^t) + \mu^*(A \ \cap \ (E^t)^t)$$

$$= \mu^*(A \cap E^t) + \ \mu^*(A \cap E)$$

ifadesinden $E^t \in \Lambda$ olduğu görülür.

(ii) $\mu^*(\emptyset) = 0$ olduğundan $\emptyset \in \Lambda$ olur. Ayrıca (i) özelliğinden $\emptyset^t = X \ \in \Lambda$ olduğu açıktır.

(iii) $E_1, E_2 \ \in \ \Lambda$ ve $A \subset X$ olsun. $E_1 \cup \ E_2 = \ E_1 \ \cup (E_1^t \cap E_2\ )$ ve $\forall A \subset X$ için

$$A \cap (E_1 \cup \ E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap E_1^t)$$

eşitliklerini ve dış ölçünün σ- alttoplamsallık özelliğini kullanarak;

$$\mu^*\big(A \cap (E_1 \cup \ E_2)\big) \leq \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2 \cap E_1^t)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan her $A \subset X$ için,

$$\mu^*\big(A \cap (E_1 \cup \ E_2)\big) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup \ E_2)^t)$$

$$\leq \ \mu^*(A \cap E_1) + \ \mu^*(A \cap E_2 \cap E_1^t) + \mu^*(A \cap E_1^t \cap E_2^t) \qquad 2.1$$

olduğundan ve E_2 kümesinin ölçülebilirliğinden

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_2^t) + \mu^*(A \cap E_2) \qquad 2.2$$

yazılabilir. E_1 kümesinin ölçülebilirliği ve Teorem 2.25.gereğince (2.2) ifadesinde A kümesini $A = A \cap E_1^t$ olarak alınacak olursa

$$\mu^*(A \cap E_1^t) = \mu^*(A \cap E_2 \cap E_1^t) + \mu^*(A \cap E_1^t \ \cap \ E_2^t) \qquad 2.3$$

yazılır. Son eşitlik (2.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mu^*\big(A \cap (E_1 \cup \ E_2)\big) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup \ E_2)^t)$$

$$\leq \mu^*(A \ \cap E_1^t) + \ \mu^*(A \cap E_1)$$

$$= \mu^*(A)$$

elde edilir. Buradan

$$E_1 \cup E_2 \in \Lambda$$

sağlanır. Bu ise $E_1 \cap E_2 = (E_1^t \cup E_2^t)^t$ eşitliği gereğince $E_1 \cap E_2 \in \Lambda$ sağlandığı kolaylıkla görülebilir. $E_1, E_2 \in \Lambda$ için $E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2^t$ olduğundan $E_1 - E_2 \in \Lambda$ ifadesi sağlanır. Bu ise Λ sınıfının bir cebir olması demektir.

iv. Bu kısımda Λ sınıfının sayılabilir birleşim altında kapalı olduğunu göstereceğiz ki Λ ailesi σ-cebir ismini alabilecek. Bunun için $E_1, E_2, \dots, \in \Lambda$ olmak üzere $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ ve $G_1 = G_1$, $n \geq 1$ için $G_{n+1} = E_{n+1} - \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda G_n kümeleri ayrıktır ve her bir n için $G_n \in \Lambda$ olur. Çünkü Λ sınıfı fark işlemi altında kapalıdır. Ayrıca ,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz. $n \geq 1$ için $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ olsun. Her F_n kümesi ölçülebilirdir ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E$ sağlanır. F_n ölçülebilir bir küme olduğundan her $A \subset X$ için,

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^t) \\
&\geq \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap E^t) \\
&= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right)\right) + \mu^*(A \cap E^t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap G_i) + \mu^*(A \cap E^t) \\
&\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^t) \\
&\geq \mu^*(A)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece Λ sınıfının bir σ-cebir olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.27. μ^*, X kümesi üzerinde bir dış ölçü olsun. Bu durumda (X, Λ, μ^*) bir ölçü uzayıdır. Diğer bir ifadeyle μ^* fonksiyonunun tanım kümesinin Λ sınıfına kısıtlanmasıyla μ^* bir ölçü olur. Bu ölçüye, μ^* dış ölçüsünün ürettiği ölçü denir [1].

İspat. $E_1, E_2, \dots, \in \Lambda$ kümeleri ayrık ve $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ olsun. μ^* fonksiyonunun σ-alttoplamsallık özelliğinden,

$$\mu^*(\mathrm{E}) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \qquad 2.4$$

eşitsizliği mevcuttur. Diğer taraftan her bir k doğal sayısı için

$$\sum_{n=1}^{k} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap E_n)$$

$$= \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\right)\right)$$

$$\leq \mu^*(E)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ yapılacak olursa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \leq \mu^*(E) \qquad 2.5$$

elde edilir. (2.4) ve (2.5) ifadelerinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*(E)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Teorem 2.28. $A \subset B$ olmak üzere $A, B \in \Lambda$ olsun. Eğer $\mu^*(A) < \infty$ ise,

$$\mu^*(B-A)=\mu^*(B)-\mu^*(A)$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. $B=A\cup(B-A)$ ve $A\cap(B-A)=\emptyset$ eşitlikleri ve μ^* fonksiyonunun sonlu toplamsal olduğu göz önüne alındığında

$$\mu^*(B)=\mu^*(A)+\mu^*(B-A)$$

eşitliği yazılabilir ki bu ise görmek istediğimiz sonuçtur.

2.4 Bir Küme Fonksiyonundan Dış Ölçü Elde Edilmesi

$\emptyset\in\mathfrak{F}$ olmak üzere $\mathfrak{F}$, bir X kümesinin altkümelerinin sınıfı olsun. $\mu(\emptyset)=0$ olacak şekilde bir $\mu:\mathfrak{F}\to[0,\infty]$ küme fonksiyonu yardımıyla

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\,,A_n\in\mathfrak{F}\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\mu^*:\wp(X)\to[0,\infty]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $\mathfrak{F}$ sınıfında $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ olacak şekilde A_n kümeleri yoksa $\mu^*(A)=\infty$ olarak tarif edelim. Bu şekilde tanımlanan μ^* fonksiyonuna μ küme fonksiyonunun ürettiği dış ölçü denir [1].

Teorem 2.29. $\mu:\mathfrak{F}\to[0,\infty]$ küme fonksiyonunun ürettiği $\mu^*:P(X)\to[0,\infty]$ fonksiyonu her $A\in\mathfrak{F}$ için $\mu^*(A)\le\mu(A)$ eşitsizliğini sağlayan bir dış ölçüdür [1].

İspat Öncelikle μ^* fonksiyonunun dış ölçü olduğunu görelim.

(i) Her $A\subset X$ için $\mu^*(A)\ge 0$ olduğu açıktır. Eğer her n için $A_n=\emptyset$ ise,

$$0\le\mu^*(\emptyset)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(\emptyset)=0$$

eşitsizliğinden $\mu^*(\emptyset)=0$ elde edilir.

(ii) μ^* fonksiyonunun monotonluğu için $A\subset B$ olmak üzere $\{A_n\}\subset\mathfrak{F}$, $A\subset B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathfrak{F}\right\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathfrak{F}\right\}$$

kapsama bağıntısı vardır. İnfimumun özelliğinden

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathfrak{F}\right\}$$

$$\leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathfrak{F}\right\} = \mu^*(B)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak μ^*-monotondur.

(iii) $\{A_n\}$ küme dizileri X'in altkümelerinin keyfi bir dizisi olsun. Eğer, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$ ise sonuç açıktır. Kabul edelim ki $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her i için $\mathfrak{F}$' den $A_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^i) \leq \mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon$ bağıntıları sağlanacak şekilde bir $\{A_n^i\}$ dizisi seçelim. Her i, n için $A_n^i \in \mathfrak{F}$ ve

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$$

olacağından

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon\right)$$

$$= \sum_{i=}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$$

$$= \sum_{i=}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi seçildiğinden

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla μ^* fonksiyonu bir dış ölçüdür.

Teorem 2.30. $\mathfrak{F}$, bir X kümesinin altkümelerinin sınıfı olsun. $\mu(\emptyset) = 0$ olacak şekilde μ : $\mathfrak{F} \to [0,\infty]$ küme fonksiyonu, ϕ ailesi, $\mathfrak{F} \subset \phi$ olmak üzere X'in altkümelerinin bir sınıfı, $v : \phi \to [0,\infty]$ küme fonksiyonu μ^* ' ın ϕ ailesine kısıtlanması olsun. Bu durumda $\forall A \subset X$ için $v^*(A) = \mu^*(A)$ eşitliği sağlanır [1].

İspat. $A \subset X$ olsun. Öncelikle $v^*(A) \geq \mu^*(A)$ olduğunu gösterelim. Eğer $v^*(A) = \infty$ ise eşitsizliğin sağlandığı açıktır. Kabul edelim ki $v^*(A) < \infty$ olsun. Bu durumda $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak şekilde ϕ sınıfının bir $\{A_n\}$ dizisi vardır. μ^* fonksiyonunun σ-alttoplamsallık özelliğinden

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\mu^*(A) \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v(A_n) : \{A_n\} \subset \phi\,, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = v^*(A)$$

$$\mu^*(A) \leq v^*(A) \qquad 2.6$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi de eşitsizliğin diğer yönünü gösterelim. $\mu^*(A) = \infty$ ise durum açıktır.

$\mu^*(A) \leq \infty$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Dolayısıyla,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\{A_n\} \subset \mathfrak{F} \subset \phi$ dizisi vardır. Teorem 2.28. gereğince her n için

$$\mu^*(A_n) \leq \mu(A_n)$$

olup, infimumun özelliğinden

$$v^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$$\leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan

$$v^*(A) \leq \mu^*(A) \tag{2.7}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.6) ve (2.7)ifadelerinden istenen eşitliğin sağlandığı görülmüş olur.

2.5 Bir Ölçü Tarafından Üretilen Dış Ölçü

Bu kısımda $(X, \mathbb{S}, \mu)$ üçlüsünü sabit bir ölçü uzayı olarak kabul edelim. Amacımız μ ölçüsü ile bunun ürettiği μ^* dış ölçüsü arasındaki ilişkiyi incelemektir. Bir küme fonksiyonundan bir dış ölçünün nasıl elde edilebileceğini incelemiştik. $\mu: \mathbb{S} \to [0, \infty]$ ölçü fonksiyonu aynı zamanda bir küme fonksiyonu olduğundan μ ölçüsünün ürettiği μ^* dış ölçüsünden bahsedilebilir.

Teorem 2.31. μ^* dış ölçüsü μ ölçüsünün bir genişlemesidir. Yani $\forall A \in \mathbb{S}$ için $\mu(A) = \mu^*(A)$ eşitliği sağlanır [1].

İspat. $A \in \mathbb{S}$ olsun. Teorem 2.28 'den $\mu(A) \geq \mu^*(A)$ olduğunu biliyoruz. Eşitsizliğin tersi için $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak şekilde $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{S}$ alalım. Teorem 2.16.(iii) dikkate alınırsa

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

yazılabilir. Bu ise $\mu(A)$ ‘nın $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ tipindeki elemanlardan oluşan kümenin bir alt sınırı olması demektir. Bu ise

$$\mu(A) \leq \mu^*(A)$$

olmasını gerektirir. Böylece istenen eşitliğin sağlandığını gösterir.

Sonuç olarak μ^* dış ölçüsü μ ölçüsünün bir genişlemesidir. Bu genişlemeye μ’nün Carathéodory genişlemesi denir [1].

Tanım 2.32. $(X, \mathbb{S}, \mu)$ ölçü uzayının bir E altkümesinin μ-ölçülebilir olması demek o kümenin μ’nün ürettiği μ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilir olması demektir [1].

Teorem 2.33. $\mathbb{S}$ sınıfının her elemanı ölçülebilirdir [1].

İspat. $E \in \mathbb{S}$ olsun. Her $A \in \mathbb{S}$ için,

$$\mu(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^t)$$

olduğunu göstererek $E \in \Lambda$ sonucunu elde edeceğiz. Bunun için $A \in \mathbb{S}$ alalım.Bu durumda yarıhalkanın özelliğinden,

$$A \cap E^t = A - E = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

eşitliği sağlanacak şekilde ikişerli ayrık $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathbb{S}$ kümelerini bulabiliriz. $A \cap E \in \mathbb{S}$ ile B_i kümeleri ayrık olup

$$A = (A \cap E) \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$$

eşitliği sağlanır. μ^* fonksiyonunun σ- alttoplamsallık özelliği ve Teorem2.30. gereğince ,

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^t) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$$

$$\leq \mu^*(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i)$$

$$= \mu^*(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$

$$\leq \mu(A)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Tanım 2.34. $\mathbb{S} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ sınıfı üzerinde

$$\lambda\big([a, b)\big) = b - a$$

şeklinde tarif edilen Lebesgue ölçüsünün ürettiği dış ölçüye λ^* diyelim. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. $\mathbb{R}$'in λ^* ölçülebilen altkümelerine Lebesgue ölçülebilen kümeler adı verilir [1].

Teorem2.35. $\mathbb{R}$' nin tüm açık ve kapalı altkümeleri Lebesgue ölçülebilirdir [1].

İspat. Teorem 2.33. gereğince,

$$\mathbb{S} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

sınıfının her elemanı Lebesgue ölçülebilirdir. (a, b) formundaki aralıkların ölçülebilir olduğunu göstermek için

$$a + \frac{1}{n_0} < b$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçilebilir.

$$(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n_0}, b\right)$$

eşitliği ve bir dış ölçüye göre ölçülebilen kümeler sınıfının bir σ-cebir olduğu hatırlanacak olursa (a, b) aralığının da Lebesgue ölçülebilir olduğunu görülmüş olur.

$\mathbb{R}$'nin açık altkümeleri (a, b) formundaki kümelerin sayılabilir birleşimleri olarak yazılabileceğinden $\mathbb{R}$' nin açık altkümeleri de Lebesgue ölçülebilirdir. Ayrıca ölçülebilen kümeler sınıfı tümleme işlemi altında kapalı olduğu için kapalı kümelerde Lebesgue ölçülebilir olur.

Teorem 2.36. $E \subset \mathbb{R}$ sayılabilir bir küme ise $\lambda^*(E) = 0$ eşitliği sağlanır [1].

İspat. $\{x_0\} \subset \mathbb{R}$ kümesi ve keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için $\{x_0\} \subset [x_0, x_0 + \varepsilon)$ sağlanır ve dış ölçünün monotonluk özelliği gereğince

$$0 \leq \lambda^*(\{x_0\}) \leq \lambda^*\big([x_0, x_0 + \varepsilon)\big) = \varepsilon$$

eşitsizliği söz konusudur. Bu ise tek elemanlı kümelerin Lebesgue dış ölçüsünün 0 olması demektir. Sayılabilen kümeler tek nokta kümelerinin sayılabilir birleşimi olarak yazıldığından sayılabilir kümelerinde Lebesgue dış ölçüsü 0 olur.

2.6 Ölçülebilen Fonksiyonlar

Lebesgue integral teorisinde kısaca h.h.y. ile göstereceğimiz " hemen her yerde" kavramı önemli bir yer tutar. X üzerinde bir dış ölçü μ olsun. Eğer bir önerme $\mu(A) = 0$ olacak şekilde bir küme dışında sağlanıyorsa bu önermeye hemen her yerde sağlanıyor denir. Diğer bir ifadeyle hemen her $x \in X$ için sağlanıyor denir.

Örneğin, X üzerinde tanımlı reel değerli f ve g fonksiyonları hemen her yerde $f = g$

demek ,

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

eşitliğinin sağlanıyor olması anlamına gelir.

Hemen her yerde kavramından $(X, \mathbb{S}, \mu)$ ölçü uzayında da bahsedilebilir. Örneğin ,

$$f \leq g \text{ h.h.y. } \Leftrightarrow \mu(\{x \in X : f > g\}) = 0$$

yazılabilir.

Tanım 2.37. $(X, \mathbb{S}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\mathbb{R}$ ' in açık her A altkümesi için $f^{-1}(A)$ kümesi ölçülebilir ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir [1].

Teorem 2.38. Sabit her fonksiyon ölçülebilirdir [1].

İspat. Her $x \in X$ için $f(x) = c$ (c keyyfi bir sabit) ve $A \subset \mathbb{R}$ herhangi bir açık küme olsun. Bu durumda , $c \notin A$ ise

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} = \emptyset$$

eşitliği sağlanır ki $\emptyset$ ölçülebilirdir. $c \in A$ ise

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} = X$$

olur ki X kümesi de ölçülebilirdir. Dolayısıyla sabit her fonksiyon ölçülebilirdir.

Teorem 2.39. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

i. f fonksiyonu ölçülebilirdir.

ii. Sınırlı ve açık her (a, b) aralığı için $f^{-1}\big((a, b)\big)$ kümesi ölçülebilirdir.

iii. $\mathbb{R}$ ‘ in kapalı her A kümesi için $f^{-1}(A)$ kümesi ölçülebilirdir.

iv. Her $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\big([a, \infty)\big)$ kümesi ölçülebilirdir.

v. Her $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\big((-\infty, a]\big)$ kümesi ölçülebilirdir.

vi. $\mathbb{R}$' in her B Borel kümesi için $f^{-1}(B)$ kümesi ölçülebilirdir.

İspat (i) ⇒ (ii) tanımdan açıktır.

(ii) ⇒ (iii) $A \subset \mathbb{R}$ kapalı bir küme olsun. Bu durumda A^t açık bir kümedir. Dolayısıyla

$$A^t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

biçiminde yazılabilir.

$$f^{-1}(A) = [f^{-1}(A^t)]^t$$

$$= \left[f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)\right)\right]^t$$

$$= \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\big((a,b)\big)\right]^t$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[f^{-1}\big((a,b)\big)\right]^t$$

eşitliklerinden $f^{-1}(A)$ kümesinin ölçülebilir olduğu kolayca görülür.

(iii) ⇒ (iv) açıktır.

(iv) ⇒ (v) Öncelikle belirtmeliyiz ki

$$f^{-1}\big((-\infty,a)\big) = \left[f^{-1}\big([a,\infty)\big)\right]^t$$

eşitliği sağlandığından $f^{-1}\big((-\infty,a)\big)$ kümesi de ölçülebilirdir.

$$f^{-1}\big((-\infty,a]\big) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, a+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(-\infty, a+\frac{1}{n}\right)\right)$$

yazılabileceğinden $f^{-1}\big((-\infty,a]\big)$ kümesi de ölçülebilirdir.

(v) ⇒ (vi) $\Upsilon = \{A \subset \mathbb{R} : f^{-1}(A) \text{ ölçülebilir}\}$ olsun. Hipotez gereğince her $a \in \mathbb{R}$ için $(-\infty,a] \in \Upsilon$ olur. Buradan ise sırasıyla,

$$(a,\infty) = (-\infty,a]^t \,, (a,b] - (-\infty,b] \cap (a,\infty), (a,b) - \bigcup_{n=n_0}^{\infty}\left(a, b-\frac{1}{n}\right)$$

şeklindeki aralıkların dolayısıyla bütün açık kümelerin Υ sınıfına ait olduğu görülür. Bu ise ispat için yeterlidir.

(vi) ⇒ (i) Açıktır.

3. ZAMAN SKALASINDA TANIMLI FONKSİYONLARIN Δ-LİMİT ve Δ-KAPLAMA NOKTALARI

3.1 Zaman Skalasında Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1. Reel sayıların boştan farklı keyfi kapalı bir altkümesine zaman skalası denir. [2]

$\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}_0$ kümeleri birer zaman skalası örneği iken $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ birer zaman skalası örneği değildir. Zaman skalası genel olarak $\mathbb{T}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için ileri sıçrama operatörü

$$\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$$

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

şeklinde tarif edilir [2]. Eğer t noktası $\mathbb{T}$ zaman skalasının maksimum noktası ise $\sigma(t) = t$ olur [2].

Tanım 3.3. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t noktasına sağ saçılmış nokta denir [2].

Tanım 3.4. $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktasına sağ yoğun nokta denir [2].

3.2 Zaman Skalasında Ölçü Teorisi

$\mathbb{S}$ ailesini $\mathbb{T}$'nin $[a, b) = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b,\ a, b \in \mathbb{T}\}$ şeklindeki sağdan açık soldan kapalı aralıklarının ailesi olarak tanımlayalım. Burada $a = b$ olduğunda $[a, b) = [a, a)$ olur, bu ise $[a, b)$ aralığının boş küme olduğu anlamına gelir [3].

Teorem 3.5. $\mathbb{S} = \{ [a, b) : a \leq t \leq b ; a, b \in \mathbb{T} , a \leq b \}$ şeklinde tarif edilen $\mathbb{S}$ sınıfı $\mathbb{T}$ nin altkümelerinin bir yarıhalkasıdır [3].

Tanım 3.6. $\mathbb{S}$ ailesinde tanımlı m küme fonksiyonunun Carathéodary kısıtlaması μ_Δ olarak tanımlanır. μ_Δ fonksiyonuna $\mathbb{T}$ de Lebesgue Delta ölçüsü adı verilir [3].

Tanım 3.7. A, $\mathbb{T}$ zaman skalasının herhangi bir altkümesi olsun. $m(\emptyset) = 0$ olacak şekilde bir

$m : \mathbb{S} \to [\,0\,,\infty]$ ölçü fonksiyonu yardımıyla

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m\,(A_n) : (A_n) \text{ dizisi } A_n \in \mathbb{S} \text{ ve } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$$

şeklinde tanımlanan $m^*: P(\mathbb{T}) \to [0\,,\infty]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $\mathbb{S}$ sınıfında $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak şekilde A_n kümeleri yoksa $m^*(\,A\,) = \infty$ tanımlayalım.

Bu şekilde tanımlanan m^* fonksiyonuna m ölçü fonksiyonunun ürettiği (doğurduğu) dış ölçü denir [3].

Tanım 3.8. E kümesi , $\mathbb{T}$ nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $A \subset \mathbb{T}$ için

$$m^*(\mathrm{A}) = m^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + m^*(\mathrm{A} \cap E^t)$$

eşitliği sağlanıyorsa E kümesine m^* ölçülebilir veya Δ-ölçülebilir küme denir [3]. ($E^t = \mathbb{T} - E$)

Tüm delta ölçülebilir kümelerin sınıfı $\mathcal{M}\,(m^*)$ ile gösterilir. Yani $\mathcal{M}\,(m^*)$ ailesi

$$\mathcal{M}\,(m^*) = \{\mathrm{E} \subset \mathbb{T} : m^*(\mathrm{A}) = m^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + m^*(\mathrm{A} \cap E^t)\,, \forall\, \mathrm{A} \subset \mathbb{T}\}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 3.9. $\mathbb{T}$' nin tüm delta ölçülebilir alt kümelerinin sınıfı olan $\mathcal{M}\,(m^*)$ bir σ- cebirdir [3].

Teorem 3.10. m^* dış ölçüsünün $\mathcal{M}\,(m^*)$ ailesine kısıtlaması olan μ_Δ fonksiyonu, $\mathcal{M}\,(m^*)$ ailesi üzerinde sayılabilen toplamsal bir ölçüdür [3].

Teorem 3.11. $\mathbb{S}$ sınıfının tüm elemanları Δ- ölçülebilirdir [3].

Teorem 3.12. m^* dış ölçüsü m ölçüsünün bir genişlemesidir.

Yani , $\forall\, A \in \mathbb{S}$ için $m(A) = m^*\,(A)$ sağlanır [3].

m ölçüsü tarafından üretilen m^* dış ölçüsü yukarıdaki teorem gereğince m ölçüsünün bir genişlemesidir. Bu genişlemeye m Carathéodary kısıtlaması adı verilir [3].

Tanım 3.13. Zaman skalasındaki bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise bu önermeye Δ hemen her yerde sağlanır denir ve Δ-h.h. ile gösterilir.[3]

Teorem 3.14. (E_n) , $\mathbb{T}$' deki kümelerin artan bir dizisi ise

$$\mu_\Delta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_\Delta\ (E_n)$$

eğer azalan bir dizi ise

$$\mu_\Delta\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_\Delta\ (E_n)$$

eşitlikleri mevcuttur [3].

Teorem 3.15. $\forall\, t_0 \in \mathbb{T} - \max\{\mathbb{T}\}$ için $\{t_0\}$ kümesi Δ - ölçülebilirdir ve Δ-ölçüsü

$$\mu_\Delta(\{t_0\}) = \sigma(t_0) - t_0$$

eşitliği ile bulunur [3].

İspat. Eğer t_0 noktası sağ saçılmış nokta ise $\{t_0\} = \left[\, t_0\,,\ \sigma(t_0)\right) \in \mathbb{S}$ olur ki $\mathbb{S}$ sınıfının tüm elemanları Δ - ölçülebilir olduğundan $\{t_0\}$ kümesi de Δ - ölçülebilirdir ve ölçüsü

$$\begin{aligned}\mu_\Delta(\{t_0\}) &= m(\{t_0\})\\ &= m\left(\left[\, t_0\,, \sigma(t_0)\right)\right)\\ &= \sigma(t_0) - t_0\end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi de t_0 noktasının sağ yoğun bir nokta olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathbb{T}$ nin noktalarının azalan bir (t_k) dizisi vardır öyle ki $t_k > t_0$ ve $t_k \to t_0$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$[t_0\,, t_1) \supset [t_0\,, t_2) \supset [t_0\,, t_3) \supset \ldots$$

ve

$$\{t_0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [t_0\,, t_k)$$

olur. Ayrıca $\{t_0\}$ tek nokta kümesi Δ - ölçülebilir kümelerin sayılabilir arakesitleri olarak ifade edildiğinden Δ - ölçülebilir kümedir. Buradan

$$\mu_\Delta(\{t_0\}) = \mu_\Delta\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}[t_0\,, t_k)\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu_\Delta\big([t_0\,, t_k)\big)$$

$$= \lim_{k\to\infty} (t_k - t_0) = 0$$

olarak bulunur.

Teorem 3.16. Eğer $a\,, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere $a \le b$ ise

i. $\mu_\Delta([a, b)) = b - a$

ii. $\mu_\Delta\big((a, b)\big) = b - \sigma(a)$

$a, b \in \mathbb{T} - \{\max \mathbb{T}\}$ olmak üzere $a \le b$ olduğunda

iii. $\mu_\Delta\big((a, b]\big) = \sigma(b) - \sigma(a)$

iv. $\mu_\Delta([a, b]) = \sigma(b) - a$

eşitlikleri vardır [3].

İspat (i) $\mu_\Delta([a, b)) = m\big([a\,, b)\big) = b - a$

(ii) $[a, b) = \{a\} \cup (a\,, b)$ şeklinde ifade edebiliriz. Bu eşitliğin Δ - ölçüsü alınırsa

$$\mu_\Delta([a, b)) = \mu_\Delta(\{a\}) + \mu_\Delta((a\,, b))$$

$$b - a = \sigma(a) - a + \mu_\Delta((a\,, b))$$

elde edilir ki bu ise bizi istenilen sonuca götürür.

(iii) $(a, b]$ aralığı $(a, b] = (a\,, b) \cup \{b\}$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\mu_\Delta((a, b]) = \mu_\Delta\big((a\,, b)\big) + \mu_\Delta(\{b\})$$

$$\mu_\Delta\big((a\,, b]\big) = b - \sigma(a) + \sigma(b) - b$$

$$= \sigma(b) - \sigma(a)$$

bulunur.

(iv) Benzer şekilde $[a\,, b]$ aralığı da $[a\,, b] = \{a\} \cup (a\,, b\,]$ biçiminde tarif edilir. Dolayısıyla bu aralığın ölçüsü,

$$\mu_\Delta([a, b]) = \sigma(b) - a$$

şeklinde hesap edilir.

Bundan sonra uğraştığımız zaman skalalarını minimumu olan ve üstten sınırsız olan zaman skalası olarak ele alacağız.

Tanım 3.17. $A \subset \mathbb{T}$ ve A Δ - ölçülebilir ve $\min \mathbb{T} = a$ olsun. Eğer

$$\delta_\Delta(A) = \lim_{t \to \infty} \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\sigma(t) - a} = L$$

limiti mevcut ise L sayısına A kümesinin Δ- yoğunluğu, A kümesine ise Δ- yoğun küme denir [4].

Burada $A(t)$ kümesi

$$A(t) = \{s \in A : s \leq t\,, t \in \mathbb{T}\} = A \cap [a, t]$$

şeklindedir. M_d ve M_d^0 kümeleri ise

$$M_d := \{\, A \subset \mathbb{T} : A\ \Delta - \text{yoğun}\}$$

$$M_d^0 := \{A \subset \mathbb{T} :\ \delta_\Delta(A) = 0\}$$

şeklinde tarif edilir [4]. Şimdi Δ-yoğunluğun özelliklerini ortaya koyan aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.18.

i. $A, B \in M_d$ ve $A \subset B$ ise $\delta_\Delta(A) \leq \delta_\Delta(B)$ sağlanır.

ii. $A \in M_d$ ise $0 \leq \delta_\Delta(A) \leq 1$ sağlanır.

iii. $\mathbb{T} \in M_d$ ve $\delta_\Delta(\mathbb{T}) = 1$ eşitliği sağlanır.

iv. $A \in M_d$ ise $A^t \in M_d$ ve $\delta_\Delta(A) + \delta_\Delta(A^t) = 1$ eşitliği sağlanır.

v. $A, B \in M_d$ ve $A \subset B$ ise $B - A \in M_d$ durumu ve $\delta_\Delta(B - A) = \delta_\Delta(B) - \delta_\Delta(A)$ eşitliği sağlanır.

vi. $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_d$ ve kümeleri ikişerli ayrık ise $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in M_d$ sağlanır.

$$\delta_\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_\Delta(A_k)$$

eşitliği sağlanır.

vii. $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_d$ ve $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in M_d$ ise

$$\delta_\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \delta_\Delta(A_k)$$

viii. A ölçülebilir bir küme ve $B \in M_d^0$ ve $A \subset B$ ise A $\in M_d^0$ sağlanır .

ix. $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_d^0$ ise

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in M_d^0 \quad , \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in M_d^0$$

x. $\mathbb{T}$ nin ölçülebilir sınırlı her alt kümesi M_d^0 ailesine aittir.

xi. $\delta_\Delta(A) = 0$ ve $B \in M_d$ ise $\delta_\Delta(A \cup B) = \delta_\Delta(B)$ eşitliği sağlanır [4].

İspat (i) $A, B \in M_d$ ve $A \subset B$ olsun. O zaman $A(t) \subset B(t)$ ve μ_Δ ölçü fonksiyonu olduğundan $\mu_\Delta(A(t)) \leq \mu_\Delta(B(t))$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\delta_\Delta(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\sigma(t)-a} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big(B(t)\big)}{\sigma(t)-a} = \delta_\Delta(B)$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Dikkat edilmelidir ki her $t \in \mathbb{T}$ için $A\,(t) \subset [a,t]$ geçerlidir. Buradan

$$0 \leq \frac{\mu_\Delta\big(A(t)\big)}{\sigma(t)-a} \leq \frac{\mu_\Delta([a,t])}{\sigma(t)-a} = \frac{\sigma(t)-a}{\sigma(t)-a}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte $t \to \infty$ yapılırsa istenen ifade elde edilir.

(iii)

$$\delta_\Delta(\mathbb{T}) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(\mathbb{T}(t))}{\sigma(t)-a} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta([a,t])}{\sigma(t)-a} = 1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\mathbb{T} \in M_d$ sağlanır.

(iv) A kümesi ölçülebilir olduğundan A^t kümesi de ölçülebilirdir ve

$$A^t(t) = \{s \in A^t : s \leq t\}$$

kümesi de ölçülebilirdir ve $A\,(t) \cup A^t(t) = [a,t]$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$1 = \frac{\mu_\Delta([a,t])}{\sigma(t)-a} = \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\sigma(t)-a} + \frac{\mu_\Delta(A^t(t))}{\sigma(t)-a}$$

eşitliğinde $t \to \infty$ yapılırsa istenen eşitlik görülmüş olur.

(v) A, B kümeleri ölçülebilir olduğundan $B - A$ kümesi de ölçülebilirdir.

$$A(t) \cup (B-A)(t) \cup B^t(t) = [a,t]$$

eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla görülür.

$$\delta_\Delta(B) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(B(t))}{\sigma(t)-a} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta((B-A)(t))}{\sigma(t)-a} + \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\sigma(t)-a}$$

sağlanır ve $\delta_\Delta(B) = \delta_\Delta(B-A) + \delta_\Delta(A) \Rightarrow \delta_\Delta(B-A) = \delta_\Delta(B) - \delta_\Delta(A)$ sağlanır.

(vi) A_k kümeleri Δ-yoğun olsun.

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_\Delta(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big(A_k(t)\big)}{\sigma(t)-a}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_\Delta\big(A_k(t)\big)}{\sigma(t)-a}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\,(t)\big)}{\sigma(t)-a}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big((\bigcup_{k=1}^{n} A_k)\,(t)\big)}{\sigma(t)-a}$$

$$= \delta_\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

(vii)

$$\delta_\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big((\bigcup_{k=1}^{n} A_k)\,(t)\big)}{\sigma(t)-a}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\,(t)\big)}{\sigma(t)-a}$$

$$\leq \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_\Delta\big(A_k(t)\big)}{\sigma(t)-a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big(A_k(t)\big)}{\sigma(t)-a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_\Delta(A_k)$$

(viii)

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big(A(t)\big)}{\sigma(t)-a} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big(B(t)\big)}{\sigma(t)-a} = 0$$

olduğundan $\delta_\Delta(A) = 0$ eşitliği sağlanır. Bu ise $A \in M_d^0$ olması demektir.

(ix)

$$\delta_\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \delta_\Delta(A_k)$$

eşitsizliğinden $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in M_d^0$ olduğu kolaylıkla görülür.

$$\delta_\Delta\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \delta_\Delta(A_k)$$

olduğundan $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in M_d^0$ ifadesi elde edilir.

(x) $A \subset \mathbb{T}$ ölçülebilir ve sınırlı bir küme olsun. Yeterince büyük $M \in \mathbb{T}$ için $A \subset [a, M]$ sağlanır. O zaman

$$0 \leq \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\sigma(t) - a} \leq \frac{\mu_\Delta([a, M])}{\sigma(t) - a} \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

ise $\delta_\Delta(A) = 0$ eşitliği sağlanır. Bu ise $A \in M_d^0$ olması demektir.

(xi) (i) ve (vii) şıklarından

$$\delta_\Delta(B) \leq \delta_\Delta(A \cup B) \leq \delta_\Delta(A) + \delta_\Delta(B) = \delta_\Delta(B)$$

olduğundan $\delta_\Delta(A \cup B) = \delta_\Delta(B)$ eşitliği sağlanır.

Açıktır ki M_d^0 ailesi $\mathbb{T}$ nin alt kümelerinden oluşan bir halkadır. Lemma 1-(iv) e göre Δ- yoğun kümenin tümleyeni de Δ-yoğundur. M_d^0 kümesi tümleyen işlemine göre kapalı değildir. Dolayısıyla σ- cebir değildir.

Örnek 3.19. $\mathbb{T} = [0\,,\ \infty)$ ve l *ile* r iki pozitif reel sayı olsun. A kümesini

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde tarif edelim. Burada $A_n = [nl + nr\,,\ (n+1)l\ +\ nr]$ biçimindeki aralıklardır. Her bir A_n kümesi sınırlıdır ve Lemma3.18 (x) e göre $\delta_\Delta(A_n) = 0$ eşitliği sağlanır. $A\,(t)$ kümesinin tanımından dolayı

$$\mu_\Delta\big(A(t)\big) = \begin{cases} t - nr, & nl + nr \le t \le (n+1)l + nr \\ (n+1)l\,, & (n+1)l + nr \le t \le (n+1)l + (n+1)r \end{cases}$$

$n = (0,1,2,\dots)$ sağlanır ve bu yüzden

$$\delta_\Delta(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\sigma(t) - a}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A(t))}{t - 0}$$

$$= \frac{l}{l + r}$$

eşitliği sağlanır. Dikkat edilmelidir ki

$$\frac{l}{l+r} = \delta_\Delta(A) > \sum_{n=0}^{\infty} \mu_\Delta(A_n) = 0$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu yüzden δ_Δ fonksiyonu bir ölçü fonksiyonu değildir.

Örnek 3.20. $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ olsun. $A = \{2,4,6,8,\dots\} \subset \mathbb{T}$ Δ - yoğundur.

$$\delta_\Delta(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\sigma(t) - a} = \lim_{t\to\infty} \frac{\left[\!\left[\frac{t}{2}\right]\!\right]}{t} = \frac{1}{2}$$

Tanım 3.21. (Δ - yakınsaklık) Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $t \in K_\varepsilon$ için

$$|f(t) - L| < \varepsilon \text{ ve } \delta_\Delta(K_\varepsilon) = 1$$

olacak şekilde bir $K_\varepsilon \subset \mathbb{T}$ kümesi bulunabiliyorsa $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna L noktasına Δ - yakınsaktır denir.

$$\Delta\text{ - }\lim_{t\to\infty} f(t) = L$$

şeklinde gösterilir [4].

Tanım 3.22. (Δ - Cauchy) Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $t \in K_\varepsilon$ için

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \quad \text{ve} \quad \delta_\Delta(K_\varepsilon) = 1$$

olacak şekilde $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $K_\varepsilon \subset \mathbb{T}$ bulunabiliyorsa $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna Δ - Cauchy denir [4].

Önerme 3.23. $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$ olması için gerek ve yeter şart $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta_\Delta(\{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ olmasıdır [4].

İspat. (⇒) Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$ olsun ve $\epsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $K_\varepsilon \subset \mathbb{T}$ vardır öyle ki $\delta_\Delta(K_\varepsilon) = 1$ ve $\forall\, t \in K_\varepsilon$ için $|f(t) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

$K_\varepsilon \subset \{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - L| \leq \varepsilon\}$ sağlanır ve buna karşılık $\delta_\Delta(\{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - L| \leq \varepsilon\}) = 1$ elde edilir. Lemma3.18. (iv) gereğince

$$\delta_\Delta(\{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

eşitliği sağlanır.

(⇐) $\forall\, \epsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta_\Delta(\{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ sağlansın. O zaman

Lemma3.18.(iv) gereğince $\delta_\Delta(\{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - L| \leq \varepsilon\}) = 1$ sağlanır. Bu ise

Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$ demektir.

Önerme 3.24. $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun.

f fonksiyonunun Δ - Cauchy olması için gerek ve yeter şart $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $t_0 \epsilon \mathbb{T}$ vardır öyleki $\delta_\Delta(\{t \epsilon T : |f(t) - f(t_0)| \geq \varepsilon\}) = 0$ eşitliği sağlanır [4].

İspat. (⇒) f Δ - Cauchy olsun. Tanımdan $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $t_0 \epsilon \mathbb{T}$ ve $K_\varepsilon \subset \mathbb{T}$, $\delta_\Delta(K_\varepsilon) = 1$ vardır ki $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

$K_\varepsilon \subset \{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon\}$ olduğundan $\delta_\Delta(\{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon\}) = 1$ sağlanır. Dolayısıyla $\delta_\Delta(\{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - f(t_0)| \geq \varepsilon\}) = 0$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\delta_\Delta(\{t \in T : |f(t) - f(t_0)| \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde $t_0 \in \mathbb{T}$ mevcut olsun. Lemma 3.18. gereği $\delta_\Delta(\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon\}) = 1$ eşitliği yazılabilir. Bu ise f fonksiyonunun Δ - Cauchy olması demektir.

Örnek 3.25. $I_{[0,\infty)}$ kümesi $[0,\infty)$ aralığındaki irrasyonel sayıların, $Q_{[0,\infty)}$ kümesi ise $[0,\infty)$ aralığındaki rasyonel sayıların kemesini göstersin.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in Q_{[0,\infty)} \\ 1, & t \in I_{[0,\infty)} \end{cases}$$

eklinde tanımlanan $f : \mathbb{T} = [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\mu_\Delta\left(Q_{[0,\infty)}\right) = 0$, $Q_{[0,\infty)} \subset \mathbb{T}$ kümesi Δ- yoğundur. Tanımdan dolayı $\delta_\Delta\left(I_{[0,\infty)}\right) = 1$ dir. Bu yüzden $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall\, t \in I_{[0,\infty)}$ için

$$0 = |f(t) - 1| < \varepsilon$$

olur. Bu ise Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 1$ demektir.

Önerme 3.26. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ- limiti tektir [4].

İspat. Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L_1$ ve Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L_2$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle $K_1, K_2 \subset \mathbb{T}$ ve $\delta_\Delta(K_1) = 1$, $\delta_\Delta(K_2) = 1$ vardır ki $\forall\, t \in K_1$ için $|f(t) - L_1| < \varepsilon/2$ ve $\forall\, t \in K_2$ için $|f(t) - L_2| < \varepsilon/2$ sağlanır. Lemma3.18.(iv) şıkkından dolayı $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ dir. O zaman $\forall\, t \in K_1 \cap K_2$ için

$$|L_1 - L_2| \leq |f(t) - L_1| + |f(t) - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olduğundan $L_1 = L_2$ eşitliği sağlanır. Bu ise Δ- limitin tek olduğu anlamına gelir.

Önerme 3.27. $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L_1$, Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L_2$ olsun.

O zaman aşağıdakiler sağlanır.

i. Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} [f(t) + g(t)] = L_1 + L_2$.

ii. Δ - $\lim\limits_{t\to\infty} [c.f(t)] = c.L_1$ $(c \in R)$ [4].

Önerme 3.28. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve $\lim_{t \to \infty} f(t) = L$ ise Δ - $\lim_{t \to \infty} f(t) = L$ sağlanır [4].

İspat. $\lim_{t \to \infty} f(t) = L$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle bir $t_0 \in \mathbb{T}$ vardır ki $\forall\, t > t_0$ için

$$|f(t) - L| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. $K_\varepsilon = \{t \in \mathbb{T} : t > t_0\}$ kümesi ölçülebilirdir ve Lemma 3.18.(iv) ve (x) şıklarından $\delta_\Delta(K_\epsilon) = 1$ dir. Bu ise Δ- yakınsaklığın tanımına denktir. Yani

$$\Delta\text{ - }\lim_{t\to\infty} f(t) = L$$

olması demektir.

Teorem 3.29. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler denktir.

i. f Δ- yakınsaktır.

ii. f Δ - Cauchy' dir.

iii. Δ- limiti mevcut olan ve hemen her t için $f(t) = g(t)$ olacak şekilde Δ-ölçülebilen bir $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır [4].

İspat (1) ⇒ (2) Δ - $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $|f(t) - L| < \varepsilon/2$ sağlanır. Bu yüzden $t_0 \in \mathbb{T}$ için $|f(t_0) - L| < \varepsilon/2$ sağlanır. Bu yüzden Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - L| + |f(t_0) - L| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise f fonksiyonunun Δ - Cauchy olması demektir.

(2) ⇒ (3) $t_1 \in \mathbb{T}$ seçelim. $I = [f(t_1) - 1\,, f(t_1) + 1\,]$ şeklinde tarif edilen aralık

Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)$ noktasını içerir. Benzer metotla $t^* \in \mathbb{T}$ seçilirse

$I' = [f(t^*) - 1/2\,, f(t^*) + 1/2]$ aralığı Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)$ noktasını içerir.

$$\{t \leq s : f(t) \notin I \cap I'\} = \{t \leq s : f(t) \notin I\} \cup \{t \leq s : f(t) \notin I'\}$$

f ölçülebilir fonksiyon olduğundan eşitliğin iki tarafındaki kümeler de ölçülebilirdir. Lemma3.18. (vii) den

$$\delta_\Delta(\{t \le s : f(t) \notin I \cap I'\}) \le \delta_\Delta(\{t \le s : f(t) \notin I\}) + \delta_\Delta(\{t \le s : f(t) \notin I'\}) = 0$$

Bu yüzden Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $I_1 = I \cap I'$ aralığı $f(t)$ noktasını içerir. Açıktır ki I_1 aralığının boyu en fazla 1 olur. Şimdi $t_2 \in T$ için $I'' = \left[f(t_2) - 1/4\ , f(t_2) + 1/4\right]$ aralığı Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)$ noktasını içerir. Şüphesiz ki $I_2 = I_1 \cap I''$ kapalı aralığı Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)$ noktasını içerir ve I_2 aralığının boyu en fazla $1/2$ ye eşittir. Benzer şekilde her $m \in N$ için $I_{m+1} \subset I_m$ olacak şeklide $(I_m)_{m=1}^{\infty}$ kapalı aralıklar dizisi yazılabilir ve her bir I_m aralığının boyu en fazla 2^{1-m} ye eşittir. Diğer taraftan bu aralıkların hepsi Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)$ noktasını içerir. Yapılan işlemlerden dolayı kapalı aralıkların arakesitinde λ reel sayısı vardır öyle ki $\cap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\lambda\}$ sağlanır. $f(t) \notin I_m$ özelliği için Δ-yoğunluk 0'a eşittir. $\mathbb{T}$' de artan bir $(T_m)_{m=1}^{\infty}$ dizisi bulabiliriz öyle ki

$$\frac{\mu_\Delta(\{t \le s : f(t) \notin I_m\})}{\sigma(t) - a} < \frac{1}{m} \qquad s > T_m \tag{3.1}$$

Burada $a = \min \mathbb{T}$, $g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$

$$g(t) = \begin{cases} \lambda & , \quad T_m < t \le T_{m+1} \ \ ve \ \ f(t) \notin I_m \\ f(t) \ , & \quad d.d \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Açıktır ki g fonksiyonu ölçülebilirdir ve

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = \lambda$$

Gerçekten $T_m < t$ için $g(t) = \lambda$ veya $g(t) = f(t) \in I_m$ sağlanır. Buradan

$|g(t) - \lambda| < 2^{1-m}$ sağlanır. Son kısımda Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = g(t)$ olduğunu göstereceğiz. Amacımız için

$$\{t \le s : f(t) \ne g(t)\} \subset \{t \le s : f(t) \notin I_m\} \qquad T_m < t \le T_{m+1}$$

dikkate alalım. 3.1 gereğince

$$\frac{\mu_\Delta(\{t \le s : f(t) \ne g(t)\})}{\sigma(t) - a} \le \frac{\mu_\Delta(\{t \le s : f(t) \notin I_m\})}{\sigma(t) - a} < \frac{1}{m}$$

eşitsizliğinden $\delta_\Delta(\{t \leq s : f(t) \neq g(t)\}) = 0$ olduğundan Δ-h.h. $t \epsilon \mathbb{T}$ için

$$f(t) = g(t)$$

eşitliği sağlanır.

(3)⇒(1) Δ-h.h. $t \epsilon \mathbb{T}$ için $f(t) = g(t)$ ve $\lim_{t\to\infty} g(t) = L$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| \geq \varepsilon\} \subset \{t \in \mathbb{T}: f(t) \neq g(t)\} \cup \{t \in \mathbb{T} : |g(t) - L| \geq \varepsilon\}$$

$\lim_{t\to\infty} g(t) = L$ olduğundan kapsama bağıntısının sağ tarafındaki ikinci küme sınırlıdır ve buradan $\delta_\Delta(\{t \in \mathbb{T} : |g(t) - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ eşitliği sağlanır. İlave olarak

Δ- h.h $t \epsilon \mathbb{T}$ için $f(t) = g(t)$ olduğundan $\delta_\Delta(\{t \in \mathbb{T}: f(t) \neq g(t)\}) = 0$ eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $\delta_\Delta(\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ sağlanır. Bu ise f fonksiyonunun Δ- yakınsak olması anlamına gelir.

Tanım 3.30. (Δ- limit noktası) Δ- yoğunluğu sıfırdan farklı veya Δ- yoğunluğa sahip olmayan $K \subset \mathbb{T}$ kümesi üzerinde $t \to \infty$ iken $f(t) \to L$ oluyorsa L sayısına $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ- limit noktası denir [5].

Dikkat edilmelidir ki tanımdaki K kümesi ölçülebilirdir ve pozitif Δ- yoğunluğa sahip veya Δ- yoğunluğa sahip olmayan bir kümedir. Bu şekilde tanımlanan kümelere "Δ-ince olmayan küme" denilir.

Tanım 3.31. (Δ- kaplama noktası) Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t) - L| < \varepsilon\}$ kümesi Δ-ince olmayan küme ise L sayısına $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonunun Δ-kaplama noktası denir [5].

$\Lambda_f \to f$ ' in Δ- limit noktalarının kümesi

$\Gamma_f \to f$ ' in Δ- kaplama noktalarının kümesi

Tanım 3.32. (Δ - sınırlılık) $\delta_\Delta(\{t \epsilon \mathbb{T} : |f(t)| \leq r\}) = 1$ olacak şekilde $r \epsilon \mathbb{R}$ varsa $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna Δ- sınırlıdır denir [5].

Tanım 3.33. (Δ - monoton artan) $\delta_\Delta(K) = 1$ olacak şekilde $K \subset \mathbb{T}$ varsa ve $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu K üzerinde monoton artan ise f fonksiyonuna Δ- monoton artan fonksiyon denir [5].

Yani $\forall\, t_1, t_2 \in K$ için $t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_1) \leq f(t_2)$ olmalı.

Önerme 3.34. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. O zaman $\Lambda_f \subset \Gamma_f$ olur [5].

İspat. $L \in \Lambda_f$ olsun. O zaman öyle bir Δ-ince olmayan $K \subset \mathbb{T}$ vardır ki

$\lim\limits_{\substack{s \to \infty \\ s \in K}} f(s) = L$ olup,

$$\limsup_{s \to \infty} \frac{\mu_\Delta\big(K(s)\big)}{\sigma(s) - a} = d > 0$$

ifadesi sağlanır. Keyfi $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\{t \in K : |f(t) - L| \geq \varepsilon\}$ kümesi ölçülebilir ve sınırlıdır.

$$\{t \in K : |f(t) - L| \leq \varepsilon\} \supset K - \{t \in K : |f(t) - L| \geq \varepsilon\}$$

ifadesinden

$$\frac{\mu_\Delta(\{t \in K : |f(t) - L| \leq \varepsilon\}(s))}{\sigma(s) - a} \geq \frac{\mu_\Delta\big(K(s)\big)}{\sigma(s) - a} - \frac{\theta(1)}{\sigma(s) - a}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak

$$\limsup_{s \to \infty} \frac{\mu_\Delta(\{t \in K : |f(t) - L| \leq \varepsilon\}(s))}{\sigma(s) - a} \geq d > 0$$

eşitsizliği sağlandığından $\{t \in K : |f(t) - L| < \varepsilon\}$ kümesi Δ-ince olmayan kümedir. Dolayısıyla $L \in \Gamma_f$ dir.

Örnekler 3.35.

1) Zaman skalası $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda Δ - limit noktası ve Δ-kaplama noktası tanımlarının klasik istatistiksel yakınsaklık teorisiyle örtüştüğü kolaylıkla görülebilir.

2) $q > 1$ sabit bir tamsayı ve $\mathbb{T} = \{q^m : m \in \mathbb{N}\}$ olsun. (k_n) reel sayı dizisini $k_{n+1} - k_n > 1$ olacak şekilde dikkate alalım. $K = \{q^{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ alt kümesini alalım. O zaman kolaylıkla görülebilir ki K kümesi Δ-ince olmayan kümedir.

$k_n \le k \le k_{n+1}$ ve $t = q^k$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_\Delta\big(K(t)\big)}{\sigma(t) - q} &= \frac{q-1}{q(q^k - 1)} \sum_{i=1}^{n} q^{k_i} \\
&= \frac{q-1}{q(q^k - 1)} (q^{k_1} + q^{k_2} + \cdots + q^{k_n}) \\
&\ge \frac{q-1}{q(q^{k_{n+1}} - 1)} \, q^{k_n} \\
&= \frac{q-1}{q(q^{k_{n+1}-k_n} - q^{-k_n})} \to \frac{q-1}{q^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizlik üzerinde $t \to \infty$ yapılırsa sonuç olarak limit sıfırdan farklıdır. Bu ise dikkate aldığımız K kümesinin Δ-ince olmayan küme olması demektir.

3) $\mathbb{T} = [0, \infty)$ ve $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunu dikkate alalım ve f fonksiyonunu

$$f = \begin{cases} 0\,, & t = 0 \\ \dfrac{1}{n+1}\,, t \in \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} ((2k+1).2^n - 1\,, (2k+1)2^n] & \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu yüzden her bir $n = 0, 1, 2, \ldots$için

$$\delta_\Delta\left(\left\{t \in \mathbb{T} : f(t) = \frac{1}{n+1}\right\}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$$

ve $\frac{1}{n+1} \in \Lambda_f$ dir. Üstelik

$$\begin{aligned}
\delta_\Delta\left(\left\{t \in \mathbb{T} : f(t) \ge \frac{1}{n+1}\right\}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Bu ise

$$\delta_\Delta\left(\left\{t \in \mathbb{T} : f(t) < \frac{1}{n+1}\right\}\right) = 1 - (1 - \frac{1}{2^{n+1}})$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}$$

Demek oluyor ki $0 \in \Gamma_f$ dir. Δ- kaplama noktalarının kümesi tamı tamına $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \cup \{0\}$ kümesidir. Şimdi $0 \notin \Lambda_f$ olduğunu gösterelim. Biz $A \subset \mathbb{T}$ ölçülebilir alt kümesini dikkate alalım.

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ t \in A}} f(t) = 0$$

Bizim iddiamız , $\delta_\Delta(A) = 0$ olmasıdır. $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. Öyle bir m doğal sayısı vardır öyle ki $2^{-m-1} < \varepsilon/3$ eşitsizliği sağlanır. O zaman $s_1 \in \mathbb{T}$ vardır öyle ki

$$\frac{\mu_\Delta\left(\left\{t \in A : f(t) \geq \frac{1}{m+1}\right\}(s)\right)}{s} < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur, ($\forall\, s > s_1$ *için*)

$$\left\{t \in \mathbb{T} : f(t) = \frac{1}{m+1}\right\} \subset \left\{t \in A : f(t) \geq \frac{1}{m+1}\right\}$$

kapsama bağıntısı sağlanır. Bunun yanı sıra (2.1) ‘ den $s_2 \in \mathbb{T}$ seçilebilir ki

$$\frac{\mu_\Delta\left(\left\{t \in A : f(t) < \frac{1}{m+1}\right\}(s)\right)}{s} \leq \frac{\mu_\Delta\left(\left\{t \in \mathbb{T} : f(t) < \frac{1}{m+1}\right\}(s)\right)}{s}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2^{m+1}}$$
$$< \frac{2\varepsilon}{3} \qquad (\forall\, s > s_2)$$

s_0 noktasını $s_0 = maks\,\{s_1, s_2\}$ şeklinde tanımlayalım. (2.1) ve (2.2) den

$$\frac{\mu_\Delta(A(s))}{s} = \frac{\mu_\Delta\left(\left\{t \in A : f(t) \geq \frac{1}{m+1}\right\}(s)\right)}{s} + \frac{\mu_\Delta\left(\left\{t \in A : f(t) < \frac{1}{m+1}\right\}(s)\right)}{s}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \forall\, s > s_0$$

Önerme 3.36. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon ve Δ - $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$ olsun. O zaman $\Lambda_f = \Gamma_f = \{L\}$ sağlanır [5].

İspat: Kabul edelim ki Δ - $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$ olsun. Teorem 3.30. dan ölçülebilir bir $g : \mathbb{T} \to R$ fonksiyonu vardır ki $\lim_{t\to\infty} g(t)) = L$ ve Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = g(t)$ eşitliği sağlanır. K kümesini $K = \{t \in \mathbb{T} : f(t) = g(t)\}$ şeklinde tarif edelim. Kabulümüzden Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $\delta_\Delta(K) = 1$ olup

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in K}} f(t) = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in K}} g(t) = L$$

eşitliği sağlanır. $L \in \Lambda_f$ olup dolayısıyla önermeden $L \in \Gamma_f$ olur.

Şimdi L noktasının Γ_f ‘ in biricik elemanı olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu yüzden

Δ - $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$ olur. $K_1 = \{t \in T : |f(t) - L| < \varepsilon/2\}$ için $\delta_\Delta(K_1) = 1$ olur. L'de Γ_f kümesinin elemanı olsun. $K_2 = \{t \in T : |f(t) - L'| < \varepsilon/2\}$ kümesi için

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{\mu_\Delta(K_2(s))}{\sigma(s) - a} \geq d > 0 \qquad 3.2$$

sağlanır. İddia ediyoruz $K_1 \cap K_2$ kümesi boş kümeden farklıdır. Kabul edelim ki $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ olsun. O zaman $K_1 \subset (K_2)^t$ ve $\delta_\Delta(K_1) = 1$ ve $\delta_\Delta((K_2)^t) = 1$ dir ve bu yüzden $\delta_\Delta(K_2) = 0$ olur. Fakat (3.2) ile çelişir. Her bir $t_0 \in K_1 \cap K_2$ için

$$|L - L'| \leq |L - f(t_0)| + |f(t_0) - L'| < \varepsilon$$

olur. O zaman $L = L'$ eşitliği sağlanır.

Önerme 3.37. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. O zaman Γ_f kümesi kapalıdır [5].

İspat : (L_n) dizisi Γ_f kümesinden alınmış ve $n \to \infty$ iken $L_n \to L$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Yeterince büyük n_0 sayısı için $L - \varepsilon < L_{n_0} < L + \varepsilon$ sağlanır ve $\varepsilon' > 0$ sayısı vardır öyle ki $\left(L_{n_0} - \varepsilon', L_{n_0} + \varepsilon'\right) \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ sağlanır. Bu durumda

$$\left\{t \in \mathbb{T} : \left|f(t) - L_{n_0}\right| < \varepsilon'\right\} \subset \{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| < \varepsilon\}$$

ve

$$\text{limsup}_{s\to\infty} \frac{\mu_\Delta(\left\{t \in \mathbb{T} : \left|f(t) - L_{n_0}\right| < \varepsilon'\right\}(s))}{\sigma(s) - a} = d > 0$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\text{limsup}_{s\to\infty} \frac{\mu_\Delta(\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| < \varepsilon\}(s))}{\sigma(s) - a} > d > 0$$

sağlanır. Bu ise $\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| < \varepsilon\}$ kümesinin Δ- yoğunluğunun sıfır olmadığı anlamına gelir. Dolayısıyla $L \in \Gamma_f$ dir.

Teorem 3.38. $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer Δ-h.h. $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = g(t)$ ise $\Lambda_f = \Lambda_g$ ve $\Gamma_f = \Gamma_g$ sağlanır [5].

İspat : $L \in \Lambda_f$ olsun. O zaman Δ- ince olmayan bir K kümesi vardır,

$\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ t \in K}} f(t) = L$ ve $\text{limsup}_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(K(t))}{\sigma(t)-a} > 0$

$\delta_\Delta(\{t \in \mathbb{T} : f(t) \neq g(t)\}) = 0$ olur. Buradan $\delta_\Delta(\{t \in K : f(t) \neq g(t)\}) = 0$ eşitliği de sağlanır. Demek oluyor ki $\{t \in \mathbb{T} : f(t) = g(t)\}$ kümesi Δ - yoğunluğu sıfır olmayan bir kümedir. Bu yüzden $L \in \Lambda_g$ olup $\Lambda_f \subset \Lambda_g$ kapsama bağıntısı sağlanır. Kolaylıkla $\Lambda_g \subset \Lambda_f$ kapsama bağıntısının sağlandığı da görülebilir.

$L \in \Gamma_f$ olsun. O zaman tanım gereği

$$\text{limsup}_{s\to\infty} \frac{\mu_\Delta\big(\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| < \varepsilon\}(s)\big)}{\sigma(s) - a} > 0$$

sağlanır.

$$\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| < \varepsilon\} \subset \{t \in \mathbb{T} : |g(t) - L| < \varepsilon\} \cup \{t \in \mathbb{T} : f(t) = g(t)\}$$

ilişkisi göz önüne alınır ve limit alınırsa $L \in \Gamma_g$ sağlanır. Yani $\Gamma_f \subset \Gamma_g$ olduğu görülür. Kolaylıkla $\Gamma_g \subset \Gamma_f$ olduğu da görülebilir.

Önerme 3.39. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. f fonksiyonu Δ- ince olmayan bir küme üzerinde sınırlı ise $\Gamma_f \neq \emptyset$ olur [5].

İspat. Kabul edelim ki f fonksiyonu Δ- ince olmayan $K \subset \mathbb{T}$ kümesi üzerinde sınırlı ve $\Gamma_f = \emptyset$ olsun. O zaman her bir $t \in K$ için $f(t)$ noktasının öyle bir

$$\mathrm{N}\left(f(t)\right) = \{y \in R : |y - f(t)| < \varepsilon(t)\}$$

komşuluğu vardır ki $\delta_\Delta\left(f^{-1}\left(\mathrm{N}\left(f(t)\right)\right)\right) = 0$ olur. Diğer taraftan $f(K) \subset \bigcup_{t \in K} \mathrm{N}\left(f(t)\right)$ bağıntısının sağlandığı kolaylıkla görülür. $f(K)$ kümesi kapalı değilse $\overline{f(K)}$ kümesini dikkate alalım. $f(K)$ kümesinin limit noktaları $\beta_i \; (i \in I)$ reel sayıları olmak üzere bu noktaların $f(K)$ kümesine ilave edilmesiyle

$$\overline{f(K)} \subset \left(\bigcup_{t \in K} \mathrm{N}\left(f(t)\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} \mathrm{N}(\beta_i)\right)$$

kapsama bağıntısı yazılabilir. Burada $\mathrm{N}(\beta_i) = \{y \in R : |y - \beta_i| < \varepsilon(i)\}$ olup $\varepsilon(i)$ pozitif reel sayıları $\delta_\Delta\left(f^{-1}(\mathrm{N}(\beta_i))\right) = 0$ olacak şekilde seçilmiştir. $\overline{f(K)}$ kümesi kompakt olduğundan $\{\mathrm{N}\left(f(t)\right)\}_{t \in K} \cup \{\mathrm{N}(B_i)\}_{i \in K}$ sınıfından

$$\overline{f(K)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

kapsama bağıntısı sağlanacak şekilde $B_1, B_2, \ldots, B_n$ kümeleri seçilebilir. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü alınacak olursa

$$K \subset f^{-1}\left(\overline{f(K)}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(B_k)$$

elde edilir. Bu yüzden $\delta_\Delta(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(B_k)) = 0$ olduğundan ve sonuç olarak $\delta_\Delta(K) = 0$ sağlanır. Fakat bu sonuç K nın Δ-ince olmayan küme olmasıyla çelişir. Benzer şekilde $f(K)$ nın kapalı olduğu gösterilebilir.

Aşağıdaki sonuç önerme 2.38. den hemen çıkartılabilir.

Sonuç 3.40. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir ve Δ- sınırlı ise $\Gamma_f \neq \emptyset$ sağlanır [5].

Önerme 3.41. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. f Δ- monoton artan ve Δ- sınırlı ise Δ- yakınsaktır [5].

İspat. Madem ki f Δ- monoton artan , $\delta_\Delta(K_1) = 1$ olacak şekilde $K_1 \subset \mathbb{T}$ bulunabilir ve $\forall\, t_1, t_2 \in K_1$ ve $t_1 < t_2$ için $f(t_1) \leq f(t_2)$ eşitsizliği sağlanır. Eğer f fonksiyonu Δ-sınırlı ise, $A \in \mathbb{R}$ ve $K_2 = \{t \in \mathbb{T} : |f(t)| \leq A\}$ için $\delta_\Delta(K_2) = 1$ sağlanır. $K = K_1 \cap K_2$ ise $\delta_\Delta(K) = 1$ olur. Şimdi

$$f(K) = \{f(t) : t \in K\}$$

kümesini dikkate alalım. β, $f(K)$ kümesinin supremumu olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için $t_0 \in K$ noktası vardır ki

$$\beta - \varepsilon < f(t_0) \leq \beta$$

olur. Monotonluktan dolayı $\forall\, t \in K$ ve $t \geq t_0$ için

$$\beta - \varepsilon < f(t) < \beta + \varepsilon$$

yazılabilir. Sonuç olarak bu ise

$$\Delta - \lim_{t \to \infty} f(t) = \beta$$

olması demektir.

KAYNAKÇA

[1] Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O.,1998, “ Principles of Real Analysis”, *Academic Press*, California.

[2] Bohner, M. and Peterson, A. , 2001, “Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction withy Applications”, *Birkhauser*, Boston.

[3] Guseinov, G. Sh., 2003, “Integration on Time Scales” , *Elseiver Academic Press* , No. 285, pp. 107-127

[4] Seyyidoğlu, M.S. and Tan, N.Ö., 2012, " A note on statistical convergence on time scale ", *Journal of Inequalities and Applications*.

[5] Seyyidoğlu, M.S. and Tan, N.Ö., 2015, "On A generalization of statistical cluster and limit points ", *Journal of Inequalities and Applications*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ONAR, Mustafa

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 21/06/1992 Simav

Medeni hali : Bekar

Telefon : 0542 776 79 89

E-mail : afatsum_onar@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Uşak üniversitesi / Matematik Bölümü	2015
Lise	Kütahya Fatih Anadolu Lisesi	2010
İlköğretim	Simav Atatürk İlköğretim Okulu	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015-2019	Simav Halk Eğitimi Merkezi ve Akşam Sanat Okulu	Usta Öğretici

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Tenis, Futbol, Yürüyüş