T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CEYDA ÇELİK

HAZİRAN 2019
UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CEYDA ÇELİK

UŞAK 2019

Kabul ve Onay Sayfası

Ceyda Çelik tarafından hazırlanan Kesirli İntegral Eşitsizlikleri adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Deniz UÇAR ……………………………….
(Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı)

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Deniz UÇAR ……………………………….
(Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi)

Doç. Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ ……………………………….
(Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi)

Dr. Öğr. Üyesi Veysel Fuat HATİPOĞLU ……………………………….
(Matematik Anabilim Dalı, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi)

Tarih: 28/06/2019

Bu tez ile U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

……………………………….

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ceyda ÇELİK

KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Ceyda ÇELİK

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Kesirli analiz kavramının tanıtıldığı ve bazı önemli kesirli integral eşitsizliklerinin incelendiği bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Tezin giriş bölümünde kesirli analiz kavramı tanıtılmış ve konunun tarihçesiyle ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanımlar ve teoremler yer almaktadır. Tezin üçüncü bölümünde uyumlu kesirli türevin bazı yeni özellikleri ve uygulamaları daha detaylı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde, farklı türden fonksiyonlar için yeni kesirli integral eşitsizliklerine yer verilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise bazı fonksiyon türleri için uyumlu kesirli integral eşitsizlikleri incelenmiş ve son olarak da sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Bilim Kodu : 403.06.01

Anahtar Kelimeler : Hermite-Hadamard eşitsizliği, konveks fonksiyon türleri, Riemann-Liouville kesirli integrali, Uyumlu kesirli integrali

Sayfa Adedi : 55

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Deniz UÇAR

FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES

(M. Sc. Thesis)

Ceyda ÇELİK

UNIVERSITY OF UŞAK

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

This thesis, in which the fractional calculus is explained and some important fractional integral inequalities are examined, consists of five sections. The fractional calculus has been introduced in the introduction of the thesis and some information has been given about the history of the subject. In the second chapter, basic definitions and theorems are given. In the third part of the thesis, some new features and applications of comformable fractional derivative are examined in more detail. In the fourth chapter, new fractional integral inequalities for different function types were given.

In the fifth and the last part, comformable fractional integral inequalities for some types of functions have been examined and finally result and suggestions were given.

Science Code : 403.06.01

Keywords : Hermite-Hadamard inequality, convex function, Riemann-Liouville fractional integral, Comformable fractional integral

Page Number : 55

Adviser : Associate Professor Deniz UÇAR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının her aşamasında benden destek ve yardımlarını esirgemeyen, göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Deniz UÇAR'a sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen annem, babam ve abilerime yürekten teşekkür ederim.

Ceyda ÇELİK

Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

SİMGELER	AÇIKLAMA
$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x})$	Euler-Gamma fonksiyonu
$\mathrm{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	Euler-Beta fonksiyonu
$\boldsymbol{I}$	$\mathbb{R}$'de bir aralık
$\boldsymbol{I}^{\circ}$	I'nın içi
$\boldsymbol{J}^{\alpha}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali
$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{a}^{+}}^{\boldsymbol{\alpha}}$	α. mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali
$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{b}^{-}}^{\boldsymbol{\alpha}}$	α. mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali
$\boldsymbol{L}_{\mathbf{1}}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{SV}$	h −konkav fonksiyon sınıfı
$\boldsymbol{SX}$	h −konveks fonksiyon sınıfı
$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{a}}$	α. mertebeden soldan uyumlu kesirli integrali
${}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α. mertebeden sağdan uyumlu kesirli integrali

1. GİRİŞ

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Riemann Liouville tarafından ortaya atılmıştır. Kesirli hesabın tarihi 17. yüzyıla dayanmaktadır. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları, 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville gibi bir çok matematikçinin kesirli analiz için diferansiyel ve integrasyonunun genelleştirilmesine dayanan çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır.

Bu tez çalışmasında bazı kesirli türev ve integral tanımları ile bu tanımların genişletilmiş hallerine yer verilmiştir. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramları, tamsayılı mertebeli türev ve n-katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır.

Kesirli diferensiyel teorisi, çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman kesirli türevler için önemli bir avantaj olmuştur. Kesirli türevler nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisinde, elektrik devrelerinde, elektro-analitik kimya gibi diğer birçok alanda kullanılmaktadır.

Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewod ve P$\acute{o}$lya tarafından "Inequalities" [1] adlı kitapta toplanmıştır. "Inequalities" adlı kitapta yeni eşitsizlikler ve uygulamaları ile ilgili konular geniş çapta ele alınmaktadır. 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni değişik eşitsizlikleri içeren "Inequalities" [2] adlı yeni bir kitap 1961 yılında E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından tekrardan yazılmıştır. Daha sonra 1970 yılında Mitrinovi$\acute{c}$ "Analitic Inequalities"[3] adlı kitap ile o güne kadar yapılmış tüm yeni eşitsizlikleri bir başlık altında toplamıştır. 1993 yılında Mitrinovi$\acute{c}$, Pe$\check{c}$ari$\acute{c}$ ve Fink daha genel olan "Classical and New Inequalities in Analysis"[4] adlı kitabı yazmışlardır.

Günümüzde kesirli integral eşitsizlikler üzerine çok sayıda araştırma yapılmaktadır. Bu konuda araştırma yapan bilim insanları ve yaptıkları çalışmalarla ilgili ayrıntılı bilgi [5-17] nolu çalışmalarda incelenebilir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde sıkça kullanılacak temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1 (Gamma Fonksiyonu) : Bu fonksiyon $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

şeklinde tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun önemli özellikleri aşağıdaki gibidir.

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Tanım 2.2 (Beta Fonksiyonu) : Beta fonksiyonu $m, n > 0$ için,

$$\mathrm{B}(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) : $f \in C_\mu$ $(\mu \geq -1)$ olmak üzere $t > 0$ ve $\alpha \geq 0$ iken α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Riemann-Liouville kesirli integrali operatörü için $\alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere, yarı-grup özelliği

$$J^{\alpha}J^{\beta}f(t) = J^{\alpha+\beta}f(t)$$

ve değişme özelliği

$$J^{\alpha}J^{\beta}f(t) = J^{\beta}J^{\alpha}f(t)$$

sağlanır. (2.1) de $f(t) = t^{\mu}$ alınırsa $\alpha > 0,\ \mu > -1,\ t > 0$ için,

$$J^{\alpha}t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}t^{\alpha+\mu} \tag{2.2}$$

eşitliği elde edilir.

İspat : (2.1) eşitliğinde $f(t) = t^{\mu}$ alınır ve $t > 0,\ \alpha > 0, \mu > -1$ için,

$$J^{\alpha}t^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\mu}d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left[t\left(1-\frac{\tau}{t}\right)\right]^{\alpha-1}\tau^{\mu}d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t t^{\alpha-1}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\tau^{\mu}\frac{t^{\mu}}{t^{\mu}}d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t t^{\alpha+\mu-1}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}d\tau$$

bulunur. Bu eşitlikte $\frac{\tau}{t} = v$, $d\tau = tdv$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t t^{\alpha+\mu-1}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha+\mu-1}(1-v)^{\alpha-1}v^{\mu}tdv$$

$$= \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}v^{\mu}dv = \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\beta\big((\mu+1),\alpha\big)$$

bulunur. $\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ bu eşitlikten yararlanarak,

$$\frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}\big((\mu+1),\alpha\big) = \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} = \frac{t^{\alpha+\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.4 : $\alpha > 0$ ve $y > a$ için,

$$J_{a^+}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{y} (y-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanan kesirli integrale $\alpha.$ mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali denir. $\alpha > 0$ ve $y < b$ için,

$$J_{b^-}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{y}^{b} (\tau - y)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanan kesirli integrale ise $\alpha.$ mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali denir.

Tanım 2.5 (Caputo Türev) : m pozitif bir tam sayı olmak üzere $m-1 < \alpha < m$ için Caputo Türevi,

$${}_{\alpha}D_{z}^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{m}-\alpha)} \int_{\alpha}^{z} (z-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)} dt$$

şeklindedir.

Tanım 2.6 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) : $f: I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, I ise reel sayıların bir alt aralığı , $u, v \in I$ ve $u < v$ için,

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_{u}^{v} f(x) dx \leq \frac{f(u)+f(v)}{2} \tag{2.3}$$

şeklinde sağlanan eşitsizliğe Hermite-Hadamard eşitsizliği denir.

İspat : f fonksiyonu $[u, v]$ aralığında konveks ise,

- f fonksiyonu (u, v) aralığında süreklidir.
- f fonksiyonu $[u, v]$ aralığında sınırlıdır.

Yukarıdaki iki özellikten dolayı f fonksiyonu $[u, v]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyondur.

$t \in [0,1]$ için $x = u(1-t) + vt$ denkleminde konvekslik özelliği kullanılırsa,

$$\int_u^v f(x)dx = \int_0^1 f(u(1-t)+vt)(v-u)dt = (v-u)\int_0^1 f(u(1-t)+vt)dt$$

$$\leq (v-u)\int_0^1 [(1-t)f(u)+tf(v)]dt = (v-u)\left[f(u)\int_0^1 (1-t)dt + f(v)\int_0^1 tdt\right]$$

$$= (v-u)\left[f(u)\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + f(v)\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1\right] = (v-u)\left(\frac{f(u)}{2}+\frac{f(v)}{2}\right)$$

elde edilir.

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v f(x)dx \leq \left(\frac{f(u)+f(v)}{2}\right)$$

bulunur ve (2.3) eşitsizliğinin sağ tarafı ispatlanmış olur.

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v f(x)dx = \frac{1}{(v-u)}\left[\int_u^{\frac{u+v}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{u+v}{2}}^v f(x)dx\right]$$

yukarıdaki eşitliğin sağ kısmının birinci integralinde $x = u + t\left(\frac{v-u}{2}\right)$ dönüşümü, ikinci kısımda $x = v - t\left(\frac{v-u}{2}\right)$ dönüşümü yapılarak ve konvekslik özelliği kullanılarak,

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v f(x)dx$$

$$= \frac{1}{(v-u)}\left[\left(\frac{v-u}{2}\right)\int_0^1 f\left(u+t\left(\frac{v-u}{2}\right)\right)dt\right.$$

$$\left.+\left(\frac{v-u}{2}\right)\int_0^1 f\left(v-t\left(\frac{v-u}{2}\right)\right)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(u+t\left(\frac{v-u}{2}\right)\right)dt+\int_0^1 f\left(v-t\left(\frac{v-u}{2}\right)\right)dt\right]$$

$$\geq \int_0^1 f\left(\frac{u}{2}+\frac{v}{2}\right) = f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

eşitsizliğin sol tarafı bulunur.

Tanım 2.7 (Minkowski Eşitsizliği) : f ile g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında reel değerli fonksiyonlar ve $p>1$ olmak şartı ile $|f|^p$ ve $|g|^p$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\left[\int_a^b |f(y)+g(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b |f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.8 (Comformable (uyumlu) türev) : $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $t>0$ ve $\alpha\in(0,1)$ için

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}$$

ifadesine, f fonksiyonunun α-kesirli türevi veya uyumlu türevi denir.

Tanım 2.9 : $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere α.mertebeden soldan uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $T_\alpha^a(f)(t)$ türevi varsa

$$T_\alpha^a(f)(a) = \lim_{t \to 0^+} T_\alpha^a f(t)$$

şeklindedir. Benzer şekilde f fonksiyonunun α.mertebeden sağdan uyumlu kesirli türevi,

$$^{b}T_\alpha(f)(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\big(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}\big) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.10 : $x_1, x_2, \dots, x_m$ gibi m değişkenli f fonksiyonu verilsin. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere f fonksiyonunun x_i değişkenine göre uyumlu kesirli kısmi türevi,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial_{x_i}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_1, \dots x_{i-1}, x_i + \varepsilon\, {x_i}^{1-\alpha}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.11 : Uyumlu türevin bazı temel özellikleri şu şekildedir.

1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g), \forall a, b \in \mathbb{R}$.
2. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$
3. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R}$.
4. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$
5. $T_\alpha(c) = 0, c$ sabit.

Tanım 2.12 (Comformable (uyumlu) integral) : $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için,

$$I_\alpha^a f(t) = \int_a^t x^{\alpha - 1} f(x) dx$$

integraline, f fonksiyonunun α-uyumlu kesirli integrali denir. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere f fonksiyonunun α.mertebeden soldan uyumlu kesirli integrali,

$$I_\alpha^a f(t) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx$$

şeklindedir. Benzer şekilde f fonksiyonunun α.mertebeden sağdan uyumlu kesirli integrali,

$${}^bI_\alpha(f)(t) = \int_t^b (b-x)^{\alpha-1} f(x)dx$$

şeklindedir.

Tanım 2.13 (Konvekslik) : $f: [u,v] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in [u,v]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

Tanım 2.14 : Negatif olmayan $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda} \tag{2.4}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $Q(I)$ sınıfındandır denir.

Tüm negatif olmayan monoton ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar bu sınıfa dahildir.

Eğer, $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0 \tag{2.5}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.5) eşitsizliği (2.4) eşitsizliğine denktir. Böylece $Q(I)$ sınıfının tanımı yerine kullanılabilir.

Tanım 2.15 : f negatif olmayan bir fonksiyon ve $\forall x, y \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$ aralığı için

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq f(x)+f(y) \tag{2.6}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu P fonksiyonudur veya $P(I)$ sınıfına aittir, denir.

$x\ ve\ y$ pozitif sayıların r. mertebeden kuvvet ortalaması

$$M_r\,(x,y;\lambda)=\begin{cases}(\lambda x^r+(1-\lambda)y^r)^{\frac{1}{r}} & , \quad r\neq 0\\ x^\lambda y^{1-\lambda} & , \quad r=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Pearce ve diğerleri bu eşitsizliği, $\forall x,y\in[a,b]$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq M_r(f(x),f(y),\lambda)=\begin{cases}(\lambda[f(x)]^r+(1-\lambda)[f(y)]^r)^{\frac{1}{r}} & , \quad r\neq 0\\ [f(x)]^\lambda[f(y)]^{1-\lambda} & , \quad r=0\end{cases}$$

$[a,b]$ aralığında tanımlı r-konveks pozitif f fonksiyonuna genelleştirmişlerdir.

Tanım 2.16 : $h: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir pozitif fonksiyon olsun. $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x,y\in I$ ve $\lambda\in(0,1)$ için

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq h(\lambda)f(x)+h(1-\lambda)f(y) \tag{2.7}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonu h-konveks fonksiyondur veya $SX(h,I)$ sınıfındandır, denir. Eşitsizlik ters çevrilirse f, h-konkavdır denir ve $f\in SV(h,I)$ ile gösterilir.

$h(\lambda)=\lambda$ olarak seçilirse, tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h,I)$ sınıfındandır ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h,I)$ sınıfındandır.

$h(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ alınırsa $SX(h,I)=Q(I)$ sınıfından olacaktır.

$h(\lambda)=1$ alınırsa $SX(h,I)\supseteq P(I)$ sınıfından olacaktır.

3. UYUMLU TÜREVİN BAZI YENİ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, uyumlu kesirli türevin bazı yeni özellikleri ve uygulamaları daha detaylı bir şekilde incelenecektir. Ayrıca bazı yeni tanımlar ve çok kullanılan bazı yeni teoremler ispatlanacaktır [16].

İyi bilinen Riemann-Liouville kesirli türevi, Caputo kesirli türevi gibi kesirli türev tanımları bazı temel özellikleri sağlamamaktadır. Burada Comformable (uyumlu) türevi için Taylor serisini ve bu türevin sağladığı bazı temel özellikleri incelenecektir.

Teorem 3.1 : f fonksiyonu a noktasında sonsuz diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda f fonksiyonunun a noktasında Taylor serisine açılımı,

$$FT\big(f(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(n-n\alpha)}(x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada $f^{(n)}(a), f$ fonksiyonunun a noktasında n defa adi türevidir.

İspat : f fonksiyonu a noktasında sonsuz diferensiyellenebilir olduğundan, uyumlu kesirli türev tanımı yardımıyla,

$$T_\alpha\big(f(a)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon a^{1-\alpha}) - f(a)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. $k = \varepsilon a^{1-\alpha}$ olarak seçilirse $\varepsilon = k a^{\alpha-1}$ yazılır ve düzenlenirse,

$$T_\alpha\big(f(a)\big) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a+k)-f(a)}{k a^{\alpha-1}} = a^{1-\alpha}\lim_{k\to 0}\frac{f(a+k)-f(a)}{k} = a^{1-\alpha} f'(a) \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) eşitsizliği genelleştirilirse $m \geq 1$ için

$$T_{m\alpha}\big(f(a)\big) = a^{m-m\alpha}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

şeklindedir. Bu eşitlik tümevarım yöntemiyle ispatlanırsa,

$m = 1$ için $T_\alpha\big(f(a)\big) = a^{1-\alpha}\frac{f'(a)}{1!}$ olduğu açıktır.

$m = k$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$T_{k\alpha}\big(f(a)\big) = a^{k-k\alpha}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Bu durumda $m = k + 1$ için doğru olduğu gösterilsin.

$$T_{(k+1)\alpha}\big(f(a)\big) = T_\alpha\left(T_{k\alpha}\big(f(a)\big)\right) = T_\alpha\left(a^{k-k\alpha}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right) = a^{1-\alpha}a^{k-k\alpha}\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}$$
$$= a^{(k+1)-(k+1)\alpha}\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}$$

bulunur ve böylece ispat biter.

Teorem 3.2 : f ve g fonksiyonları diferensiyellenebilir ve ayrıca g fonksiyonu herhangi bir t noktasında, f fonksiyonu ise herhangi bir $g(t)$ noktasında diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha\big(f \circ g(x)\big) = x^{1-\alpha}g(x)^{\alpha-1}T_\alpha\big(f(t)\big)\big|_{t\,=\,g(x)}$$

zincir kuralını sağlar.

İspat : g fonksiyonu herhangi bir t noktasında, f fonksiyonu herhangi bir $g(t)$ noktasında diferensiyellenebilir olduğundan uyumlu kesir türev tanımı yardımıyla,

$$T_\alpha\big(f \circ g(x)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f \circ g(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f \circ g(x)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. $\varepsilon x^{1-\alpha} = h$ olsun. O halde

$$T_\alpha\big(f \circ g(x)\big) = \lim_{h\to 0}\frac{f \circ g(x+h) - f \circ g(x)}{hx^{\alpha-1}} = x^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f \circ g(x+h) - f \circ g(x)}{h}$$
$$= x^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+h) - f\big(g(x)\big)}{h}$$

elde edilir. $h = \varepsilon g(x)^{1-\alpha}$ ise,

$$T_\alpha\big(f \circ g(x)\big) = x^{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(g(x) + \varepsilon g(x)^{1-\alpha}) - f\big(g(x)\big)}{\varepsilon g(x)^{1-\alpha}}$$
$$= x^{1-\alpha}g(x)^{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(g(x) + \varepsilon g(x)^{1-\alpha}) - f\big(g(x)\big)}{\varepsilon}$$
$$= x^{1-\alpha}g(x)^{\alpha-1}T_\alpha\big(f(t)\big)\big|_{t\,=\,g(x)}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3 : $0 < \alpha, \beta < 1$ olacak şekilde α, β pozitif sabitlerini göz önüne alalım. f fonksiyonu (a, b) aralığında 2 defa diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde uyumlu kesirli türev için

$$T_{\alpha+\beta}\big(f(x)\big) \neq T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right)$$

kuralı sağlanır.

İspat : f fonksiyonu diferensiyellenebilir olduğundan,

$$T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right) = T_\alpha\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon x^{1-\beta}) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

yazılabilir. $h = \varepsilon x^{1-\beta}$ olarak alınırsa,

$$T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right) = T_\alpha\left(x^{1-\beta}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = T_\alpha\left(x^{1-\beta}\frac{df}{dx}\right)$$

bulunur. İki fonksiyonun çarpımının uyumlu kesirli türevi kullanılarak,

$$T_\alpha\big(x^{1-\beta}f'(x)\big) = T_\alpha(x^{1-\beta})f'(x) + x^{1-\beta}T_\alpha\big(f'(x)\big) \tag{3.3}$$

yazılabilir.

$$T_\alpha(x^{1-\beta}) = x^{1-\alpha}\frac{d}{dx}(x^{1-\beta}) = x^{1-\alpha}(1-\beta)x^{-\beta} = (1-\beta)x^{1-\alpha-\beta}$$

ve

$$T_\alpha\big(f'(x)\big) = x^{1-\alpha}f''(x)$$

olduğundan bulunan ifadeler (3.3) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T_\alpha\big(x^{1-\beta}f'(x)\big) &= (1-\beta)x^{1-\alpha-\beta}f'(x) + x^{1-\beta}x^{1-\alpha}f''(x) \\ &= x^{1-\alpha-\beta}[(1-\beta)f'(x) + xf''(x)] \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$T_{\alpha+\beta}\big(f(x)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f'(x+\varepsilon x^{2-\alpha-\beta}) - f'(x)}{\varepsilon}$$

$h = \varepsilon x^{2-\alpha-\beta}$ olarak alınırsa,

$$T_{\alpha+\beta}\big(f(x)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{hx^{\alpha+\beta-2}} = x^{2-\alpha-\beta} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = x^{2-\alpha-\beta} f''(x)$$

bulunur. Böylece $T_{\alpha+\beta}\big(f(x)\big) \neq T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right)$ olduğu yazılabilir.

Sonuç 3.1 : $0 < \alpha < 1, \beta = 1$ olacak şekilde α, β sabitlerini göz önüne alalım. f fonksiyonu (a, b) aralığında 2 defa diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde uyumlu kesirli türev için

$$T_{\alpha+\beta}\big(f(x)\big) = T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right)$$

kuralı sağlanır.

İspat : Teorem 3.3 de $\beta = 1$ alınırsa sağlanır.

f fonksiyonu diferensiyellenebilir olduğundan,

$$T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right) = T_\alpha\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon x^{1-\beta}) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

yazılabilir. $h = \varepsilon x^{1-\beta}$ olarak alınırsa,

$$T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right) = T_\alpha\left(x^{1-\beta} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = T_\alpha\left(x^{1-\beta} \frac{df}{dx}\right)$$

$\beta = 1$ alınırsa,

$T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right) = T_\alpha\big(f'(x)\big) = x^{1-\alpha} f''(x)$ bulunur.

Diğer taraftan,

$$T_{\alpha+\beta}\big(f(x)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f'(x+\varepsilon x^{2-\alpha-\beta}) - f'(x)}{\varepsilon}$$

$h = \varepsilon x^{2-\alpha-\beta}$ olarak alınırsa,

$$T_{\alpha+\beta}\big(f(x)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{hx^{\alpha+\beta-2}} = x^{2-\alpha-\beta} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = x^{2-\alpha-\beta} f''(x)$$

$\beta = 1$ alınırsa,

$T_{\alpha+\beta}\big(f(x)\big) = x^{1-\alpha} f''(x)$ bulunur.

Böylece Teorem 3.3 de $\beta = 1$ alınırsa,

$$T_{\alpha+\beta}\big(f(x)\big) = T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür ve ispat biter.

Teorem 3.4 : $0 < \alpha, \beta < 1$ olacak şekilde α, β pozitif sabitlerini göz önüne alalım. f fonksiyonu (a, b) aralığında 2 defa diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde uyumlu kesirli türev için

$$T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right) \neq T_\beta\big(T_\alpha f(x)\big)$$

koşulu sağlanır.

İspat : Uyumlu kesirli türev tanımı ve Teorem 3.3 deki ispata benzer şekilde,

$$\begin{aligned} T_\alpha\left(T_\beta f(x)\right) &= T_\alpha\big(x^{1-\beta} f'(x)\big) = T_\alpha(x^{1-\beta}) f'(x) + x^{1-\beta} T_\alpha\big(f'(x)\big) \\ &= x^{1-\alpha-\beta}[(1-\beta) f'(x) + x f''(x)] \end{aligned} \tag{3.4}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} T_\beta\big(T_\alpha f(x)\big) &= T_\beta\big(x^{1-\alpha} f'(x)\big) = T_\beta(x^{1-\alpha}) f'(x) + x^{1-\alpha} T_\beta\big(f'(x)\big) \\ &= x^{1-\beta-\alpha}[(1-\alpha) f'(x) + x f''(x)] \end{aligned} \tag{3.5}$$

yazılabilir. (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5 : f fonksiyonu (a, b) aralığında m-defa $(m \geq 2)$ diferensiyellenebilir olsun. Uyumlu kesirli türev için

$$T_\alpha\left(T_\alpha \ldots \big(T_\alpha f(x)\big)\right) \neq T_{m\alpha}\big(f(x)\big)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat : $m = 2$ için $T_\alpha\left(T_\alpha\big(f(x)\big)\right) \neq T_{2\alpha}\big(f(x)\big)$ olduğunu gösterelim.

$$T_\alpha\left(T_\alpha(f(x))\right) = T_\alpha(x^{1-\alpha}f'(x)) = T_\alpha(x^{1-\alpha})f'(x) + x^{1-\alpha}T_\alpha(f'(x))$$
$$= x^{1-2\alpha}[(1-\alpha)f'(x) + xf''(x)]$$

$$T_{2\alpha}(f(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f'(x+\varepsilon x^{2-2\alpha}) + f'(x)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. $h = \varepsilon x^{2-2\alpha}$ olarak alınırsa,

$$T_{2\alpha}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) + f'(x)}{hx^{2\alpha-2}} = x^{2-2\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = x^{2-2\alpha}f''(x)$$

bulunur. Dolayısıyla $m = 2$ için için $T_\alpha\left(T_\alpha(f(x))\right) \neq T_{2\alpha}(f(x))$ olduğu görülür.

Birçok fiziksel problem kısmi türevli denklemlerle ifade edilebilir. Uyumlu kesirli kısmi türev yardımıyla da pek çok fiziksel problem daha uygun bir şekilde modellenebilir.

Teorem 3.6 : $f(x,y)$ fonksiyonu için $\partial_x^\alpha\left[\partial_y^\beta(f(x,y))\right]$ ve $\partial_y^\beta[\partial_x^\alpha(f(x,y))]$ türevleri var ve $D \subset \mathbb{R}_2$ bölgesinde sürekli olsun.

$$\partial_x^\alpha\left[\partial_y^\beta(f(x,y))\right] = \partial_y^\beta[\partial_x^\alpha(f(x,y))]$$

eşitliği sağlanır.

İspat : Uyumlu kesirli kısmi türev tanımından,

$$\partial_x^\alpha[\partial_y^\beta(f(x,y))] = \partial_x^\alpha\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x,y+\varepsilon y^{1-\beta}) - f(x,y)}{\varepsilon}\right]$$

yazılabilir. $h = \varepsilon y^{1-\beta}$ alınırsa,

$$\partial_x^\alpha[\partial_y^\beta(f(x,y))] = \partial_x^\alpha\left[y^{1-\beta}\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}\right] = y^{1-\beta}\partial_x^\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$$
$$= y^{1-\beta}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\varepsilon x^{1-\alpha},y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\varepsilon}$$

elde edilir. $k = \varepsilon x^{1-\alpha}$ alınırsa,

$$\partial_x^\alpha[\partial_y^\beta(f(x,y))] = y^{1-\beta}x^{1-\alpha}\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+k,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{k} = y^{1-\beta}x^{1-\alpha}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$$

bulunur. f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\partial_y^\beta\left[\partial_x^\alpha\big(f(x,y)\big)\right] = \partial_y^\beta\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon x^{1-\alpha},y)-f(x,y)}{\varepsilon}\right]$$

yazılabilir. $h = \varepsilon x^{1-\alpha}$ olarak alınırsa,

$$\partial_y^\beta\left[\partial_x^\alpha\big(f(x,y)\big)\right] = \partial_y^\beta\left[x^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right] = x^{1-\alpha}\partial_y^\beta\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]$$

$$= x^{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+\varepsilon y^{1-\beta})-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\varepsilon}$$

elde edilir. $k = \varepsilon y^{1-\beta}$ olarak alınırsa,

$$\partial_y^\beta\left[\partial_x^\alpha\big(f(x,y)\big)\right] = x^{1-\alpha}y^{1-\beta}\left[\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{k}\right] = x^{1-\alpha}y^{1-\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$$

bulunur. f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$$

olacaktır. Böylece ispat biter.

4. FARKLI TÜRDEN FONKSİYONLAR İÇİN YENİ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli integrali kullanılarak, farklı türden konveks dönüşümler için bazı yeni integral eşitsizlikleri incelenmiştir [17].

$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon $a, b \in I \; ve \; a < b$ olsun.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.1}$$

eşitsizliği Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.

f fonksiyonu konkav olduğunda eşitsizlikler ters yönde de sağlanır.

Teorem 4.1 : $f \in Q(I), \quad a, b \in I \; ve \; a < b \quad f \in L_1[a,b]$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f \in Q(I)$ olduğundan,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

yazılabilir. $\forall x, y \in I \; ve \; \lambda = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa,

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq 2f(x) + 2f(y)$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2\big(f(x) + f(y)\big)$$

bulunur. $x = ta + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$ alınırsa,

$$2\left[f(ta + (1-t)b) + f\big((1-t)a + tb\big)\right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$2\left(\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f\big((1-t)a + tb\big)dt\right) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (4.3)$$

yazılabilir.

$$I_1 = \int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt$$

I_1 integralinde $x = ta + (1-t)b\,, dx = (a-b)dt\,,\ t = 0 \to x = b,\ t = 1 \to y = a$ dönüşümü yapılırsa,

$$I_1 = \int_b^a f(x)\frac{1}{a-b}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

elde edilir.

$$I_2 = \int_0^1 f\big((1-t)a + tb\big)dt$$

I_2 integralinde $y = (1-t)a + tb,\ dy = (-a+b)dt,\ t = 0 \to x = a, t = 1 \to y = b$ yazılırsa,

$$I_2 = \int_a^b f(y)\frac{dy}{-a+b} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy$$

bulunur. Elde edilen $I_1\ ve\ I_2$ integralleri (4.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa istenilen elde edilebilir.

Teorem 4.2 : $f \in P(I)$, $a, b \in I$ ve $a < b, f \in L_1[a,b]$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq 2[f(a)+f(b)] \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f \in P(I)$ olduğundan

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

sağlanır. $x = ta + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta + (1-t)b) + f\big((1-t)a + tb\big)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse birinci eşitsizlik ispatlanmış olur.

$f \in P(I)$ olduğundan $x = a$ ve $y = b$ alınırsa,

$$f\big(a\lambda + b(1-\lambda)\big) \leq f(a) + f(b)$$

yazılabilir. Her iki taraf $[0,1]$ aralığında λ ya göre integrallenirse,

$$\int_0^1 f\big(a\lambda + b(1-\lambda)\big)\,d\lambda \leq \int_0^1 f\big(f(a) + f(b)\big)\,d\lambda$$

eşitsizliğin sol tarafında $x = a\lambda + b(1-\lambda)$, $dx = (a-b)d\lambda$, $\lambda = 0 \to x = b$, $\lambda = 1 \to y = a$ olduğundan,

$$\frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx \leq f(a) + f(b)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \; f(a)+f(b)$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3 : $f:[a,b]\to(0,\infty)$ ve r-konveks bir fonksiyon olsun. $0<r\leq 1$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \left(\frac{r}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}\left(f^r(a)+f^r(b)\right)^{\frac{1}{r}} \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f:[a,b]\to(0,\infty)$ ve r-konveks bir fonksiyon olduğundan,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq(\lambda[f(x)]^r+(1-\lambda)[f(y)]^r)^{\frac{1}{r}}$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^1 f(\lambda a+(1-\lambda)b)d\lambda\leq\int_0^1(\lambda[f(a)]^r+(1-\lambda)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}d\lambda$$

Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\int_0^1(\lambda[f(a)]^r+(1-\lambda)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}d\lambda\leq\left[\left(\int_0^1\lambda^{\frac{1}{r}}f(a)d\lambda\right)^r+\left(\int_0^1(1-\lambda)^{\frac{1}{r}}f(b)d\lambda\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$=\frac{\lambda^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1}\Bigg|_0^1-\frac{(1-\lambda)^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1}\Bigg|_0^1=\left[\left(\frac{r}{r+1}f(a)\right)^r+\left(\frac{r}{r+1}f(b)\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$=\left(\frac{r}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}\left(f^r(a)+f^r(b)\right)^{\frac{1}{r}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 : $f \in SX(h,I), a,b \in I, a < b \; ve \; f \in L_1[a,b]$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(\alpha)d\alpha \qquad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f \in SX(h,I)$ olduğundan

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. $x = ta + (1-t)b, y = (1-t)a + tb \; ve \; \alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$f\left(\frac{1}{2}(ta+(1-t)b) + \frac{1}{2}\big((1-t)a+tb\,\big)\right)$$
$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right) f(ta+(1-t)b) + h\left(\frac{1}{2}\right) f\big((1-t)a+tb\big)$$

eşitsizliği düzenlenirse,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(ta+(1-t)b) + f\big((1-t)a+tb\big)\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallinirse,

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)dt\right]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_b^a \frac{f(x)}{a-b}dx + \int_a^b \frac{f(y)}{b-a}dy\right] = h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_a^b \frac{f(x)}{b-a}dx + \int_a^b \frac{f(y)}{b-a}dy\right]$$
$$= h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

elde edilir.

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq h(\alpha)f(x)+h(1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliğinde $x=a, y=b$ yazarak eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 f(\alpha x+(1-\alpha)y)d\alpha \leq f(a)\int_0^1 h(\alpha)\, d\alpha + f(b)\int_0^1 h(1-\alpha)d\alpha$$

$$\int_b^a \frac{f(x)}{a-b}dx \leq f(a)\int_0^1 h(\alpha)d\alpha + f(b)\int_1^0 -h(u)du = f(a)\int_0^1 h(\alpha)d\alpha + f(b)\int_0^1 h(u)du$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(\alpha)\, d\alpha$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5 : $0\leq a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pozitif fonksiyon ve $f\in L_1[a,b]$ olsun.$\alpha>0$ $için$ f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathrm{b}-\mathrm{a})^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right]\leq \frac{\mathrm{f(a)+f(b)}}{2} \tag{4.7}$$

kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ eşitsizliğinde $\lambda=\frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq \frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$

elde edilir. $x=ta+(1-t)b, y=(1-t)a+tb$ ve eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\propto-1}$ ile çarpılırsa,

$$2t^{\propto-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq t^{\propto-1}f(ta+(1-t)b)+t^{\propto-1}f\big((1-t)a+tb\big)$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{\alpha-1}dt \leq \int_0^1 f(ta+(1-t)b)\, t^{\alpha-1}dt + \int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)t^{\alpha-1}dt$$

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{\alpha} \leq \int_b^a f(x)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{a-b}dx + \int_a^b f(y)\left(\frac{a-y}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{b-a}dy$$

$$\leq \frac{1}{(a-b)^{\alpha}}\int_b^a (x-b)^{\alpha-1} f(x)dx - \frac{1}{(a-b)^{\propto}}\int_a^b (a-y)^{\alpha-1}f(y)\,dy$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left[\int_a^b (x-b)^{\alpha-1} f(x)dx + \int_a^b (y-a)^{\alpha-1}f(y)\,dy\right]$$

$$\frac{2}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right] \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathrm{b}-\mathrm{a})^{\propto}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right]$$

elde edilir ve eşitsizliğin birinci kısmının ispatı tamamlanmış olur. f konveks fonksiyon olduğundan

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

$$f(at+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

$$f\big((1-t)a+tb\big) \leq (1-t)f(a)+tf(b)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$f(at+(1-t)b)+\ f\big((1-t)a+tb\big) \leq f(a)+f(b)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\propto-1}$ ile çarpılır $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 t^{\propto-1}f(at+(1-t)b)+\ f\big((1-t)a+tb\big)dt \leq f(a)\int_0^1 t^{\propto-1}dt + f(b)\int_0^1 t^{\propto-1}dt$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\propto}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right] \leq \frac{\mathrm{f(a)+f(b)}}{2}$$

elde edilir ve böylece eşitsizliğin ikinci kısmı da ispatlanmış olur.

Teorem 4.6 : $f \in Q(I),\ a,b \in I,\ 0 \leq a < b\ ve\ f \in L_1[a,b]$ olsun.$\alpha > 0$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right] \tag{4.8}$$

kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f \in Q(I)$ olduğundan,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(y)}{1-\lambda}$$

yazılabilir ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2[f(x)+f(y)]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $x = ta+(1-t)b, y = (1-t)a+tb$ yazılır ve eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\propto-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$2\int_0^1 t^{\propto-1}\big[f(ta+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\big]dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{\propto-1}dt$$

$$2\int_0^1 t^{\propto-1}\ f(ta+(1-t)b)dt+2\int_0^1 t^{\propto-1}f\big((1-t)a+tb\big)dt \geq \frac{1}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$2\int_b^a \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{f(x)}{a-b}dx+2\int_a^b \left(\frac{a-y}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{f(y)}{a-b}dy \geq \frac{1}{\alpha}\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{2}{(b-a)^\alpha}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}f(x)\,dx + \frac{2}{(b-a)^\alpha}\int_a^b (y-a)^{\alpha-1}f(y)dy \geq \frac{1}{\alpha}\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{2}{(b-a)^\alpha}\Gamma(\alpha)J_{a^+}^{\alpha}(b) + \frac{2}{(b-a)^\alpha}\Gamma(\alpha)J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a}) \geq \frac{1}{\alpha}\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\alpha\Gamma(\alpha)\frac{2}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b) + J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right] \geq\; f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b) + J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.1 : (4.8) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınırsa (4.8) eşitsizliği (4.2) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.7 : $f \in P(I),\; a, b \in I,\; a < b\; ve\; f \in L_1[a,b]$ olsun.$\alpha > 0$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b) + J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right] \leq 2[\mathrm{f(a)} + \mathrm{f(b)}] \tag{4.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f \in P(I)$ olduğundan,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizlikte $\lambda = t,\; x = a,\; y = b$ alınırsa,

$$f(at + (1-t)b) \leq f(a) + f(b)$$

elde edilir. $\lambda = 1 - t,\; x = b,\; y = a$ olarak seçilirse,

$$f\big((1-t)a + tb\big) \leq f(b) + f(a)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa,

$$f(at + (1-t)b) + f\big((1-t)a + tb\big) \leq 2[\mathrm{f(a)} + \mathrm{f(b)}]$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\propto-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 t^{\propto-1} f(at+(1-t)b)dt + \int_0^1 t^{\propto-1} f\big((1-t)a+tb\big)dt \leq 2\int_0^1 t^{\propto-1}\,[\mathrm{f(a)+f(b)}]\mathrm{dt}$$

$$\frac{1}{(b-a)^\alpha}\Gamma(\alpha)J_{a^+}^{\alpha}(b) + \frac{1}{(b-a)^\alpha}\Gamma(\alpha)J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a}) \leq \frac{2}{\alpha}[\mathrm{f(a)+f(b)}]$$

$$\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right] \leq 2[\mathrm{f(a)+f(b)}]$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right] \leq 2[\mathrm{f(a)+f(b)}]$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.2 : (4.9) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınırsa (4.9) eşitsizliği (4.4) deki eşitsizliğe dönüşür.

Teorem 4.8 : $f\colon [a,b] \to (0,\infty)$ fonksiyonu $0 < r \leq 1$ *ve* $a < b$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında r-konveks fonksiyon olsun. O halde

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right]$$

$$\leq \left[\left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{r}}\right)^{r}[\mathrm{f(a)}]^{r} + \mathrm{B}\left(\alpha,\frac{r+1}{r}\right)^{r}[\mathrm{f(b)}]^{r}\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$+\left[\mathrm{B}\left(\alpha,\frac{r+1}{r}\right)^{r}[\mathrm{f(a)}]^{r} + \left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{r}}\right)^{r}[\mathrm{f(b)}]^{r}\right]^{\frac{1}{r}} \tag{4.10}$$

kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : $r > 0$ ve f fonksiyonu r-konveks olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için,

$$f(ta+(1-t)b) \leq (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}$$

$$f\big((1-t)a+tb\big) \leq \big((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r\big)^{\frac{1}{r}}$$

yazılabilir. Elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} &f(at+(1-t)b) + f\big((1-t)a+tb\big) \\ &\qquad \leq (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}} + \big((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r\big)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\propto-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{\propto-1} f(at+(1-t)b)dt \\ &\qquad + \int_0^1 t^{\propto-1} f\big((1-t)a+tb\big)dt \leq \int_0^1 t^{\propto-1}\,(t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}dt \\ &\qquad + \int_0^1 t^{\propto-1}\big((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r\big)^{\frac{1}{r}}dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\big[J_{a^+}^\alpha(b) + J_{b^-}^\alpha(\mathrm{a})\big] \\ &\qquad \leq \int_0^1 t^{\propto-1}\,(t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}dt \\ &\qquad + \int_0^1 t^{\propto-1}\big((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r\big)^{\frac{1}{r}}dt \end{aligned}$$

elde edilir. Minkowski eşitsizliği yardımıyla,

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\big[J_{a^+}^\alpha(b) + J_{b^-}^\alpha(\mathrm{a})\big] \leq \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$$

$$I_1 = \int_0^1 t^{\propto -1} \left(t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^{(\alpha-1)r} t[f(a)]^r + t^{(\alpha-1)r}(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} dt$$

yine Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\leq \left[\left(\int_0^1 \left(t^{(\alpha-1)r} t[f(a)]^r\right)^{\frac{1}{r}} dt\right)^r + \left(\int_0^1 \left(t^{(\alpha-1)r}(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} dt\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left[\left(\int_0^1 t^{\alpha-1}\, t^{\frac{1}{r}} f(a) dt\right)^r + \left(\int_0^1 \left(t^{(\alpha-1)r}(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} dt\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left[\left(f(a) \int_0^1 t^{\alpha+\frac{1}{r}-1}\, dt\right)^r + \left(\int_0^1 t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\frac{1}{r}} f(b) dt\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left[[f(a)]^r \left(\left.\frac{t^{\alpha+\frac{1}{r}}}{\alpha+\frac{1}{r}}\right|_0^1\right)^r + [f(b)]^r \left(\beta\left(\alpha, \frac{1}{r}+1\right)\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left[[f(a)]^r \left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{r}}\right)^r + [f(b)]^r \left(\beta\left(\alpha, \frac{1}{r}+1\right)\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

bulunur. Benzer şekilde I_2 de Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$I_2 = \left[[f(a)]^r \left(\beta\left(\alpha, \frac{1}{r}+1\right)\right)^r + [f(b)]^r \left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{r}}\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

bulunur. I_1 ve I_2 yerine yazılırsa,

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right]$$

$$\leq\left[\left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{r}}\right)^{r}[f(a)]^{r}+\beta\left(\alpha,\frac{r+1}{r}\right)^{r}[f(b)]^{r}\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$+\left[\beta\left(\alpha,\frac{r+1}{r}\right)^{r}[f(a)]^{r}+\left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{r}}\right)^{r}[f(b)]^{r}\right]^{\frac{1}{r}}$$

istenilen elde edilmiş olur ve böylece ispat biter.

Uyarı 4.3 : (5.10) eşitsizliğinde $\alpha=1$ alınırsa (4.10) eşitsizliği (4.5) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.9 : $f\in SX(h,I),a,b\in I\ ile\ a<b\ ve\ f\in L_1[a,b]$ olsun. h-konveks bir fonksiyon ise,

$$\frac{1}{\alpha h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right]$$

$$\leq[f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1}[h(t)+h(1-t)]\,dt \tag{4.11}$$

kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq h(\lambda)f(x)+h(1-\lambda)f(y)$ eşitsizliğinde

$x=ta+(1-t)b,y=(1-t)a+tb$ ve $\lambda=\frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq h\left(\frac{1}{2}\right)f(ta++(1-t)b)+h\left(\frac{1}{2}\right)f\big((1-t)a+tb\big) \tag{4.12}$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(ta++(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\right]$$

bulunur. (4.12) eşitsizliği $t^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{\propto-1}dt$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 t^{\propto-1}f(ta++(1-t)b)dt+h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 t^{\propto-1}f\big((1-t)a+tb\big)dt$$

$$\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\int_b^a\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{f(x)}{a-b}dx+h\left(\frac{1}{2}\right)\int_a^b\left(\frac{a-y}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{f(y)}{a-b}dy$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}f(x)\,dx$$

$$+h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b(y-a)^{\alpha-1}\,f(y)dy$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(b-a)^\alpha}\Gamma(\alpha)J_{a^+}^{\alpha}(b)+h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(b-a)^\alpha}\Gamma(\alpha)J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})$$

$$\frac{1}{\alpha h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\right]$$

bulunur. Eşitsizliğin birinci kısmının ispatı tamamlanmış olur.

$f\in SX(h,I)$ olduğundan,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq h(\lambda)f(x)+h(1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$f(tx+(1-t)y)\leq h(t)f(x)+h(1-t)f(y)$$

$$f\big((1-t)x+ty\big)\leq h(1-t)f(x)+h(t)f(y)$$

yazılabilir. Elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$f(tx+(1-t)y)+f\big((1-t)x+ty\big)$$
$$\leq h(t)f(x)+h(1-t)f(y)+h(1-t)f(x)+h(t)f(y)$$
$$\leq [h(t)+h(1-t)][f(x)+f(y)]$$

bulunur. $x=a$ ve $y=b$ yazılırsa,

$$f(ta+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\leq [h(t)+h(1-t)][f(x)+f(y)]$$

elde edilir. Bulunan eşitsizlik $t^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\big[f(ta+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\big]dt$$
$$\leq \int_0^1 t^{\alpha-1}\,[h(t)+h(1-t)][f(x)+f(y)]dt$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\big[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(\mathrm{a})\big]\leq [\mathrm{f(a)+f(b)}]\int_0^1 \mathrm{t}^{\alpha-1}[\mathrm{h(t)+h(1-t)}]\,\mathrm{dt}$$

bulunur. Böylece eşitsizliğin ikinci kısmının ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 4.4 :

- (4.11) eşitsizliğinde $h(t)=t$ alınırsa(4.11) eşitsizliği (4.7) eşitsizliğine dönüşür.
- (4.11) eşitsizliğinde $\alpha=1$ alınırsa (4.6) eşitsizliği elde edilir.
- $\alpha=1$ olsun. (4.11) eşitsizliğinde $h(t)=t$ ve $h(t)=1$ alınırsa (4.11) eşitsizliği sırasıyla (4.1) ve (4.4) eşitsizliklerine dönüşür.

5. FARKLI TÜRDEN FONKSİYONLAR İÇİN UYUMLU KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde uyumlu kesirli integral yardımıyla farklı fonksiyon türleri için bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Teorem 5.1 : $f \in Q(I),\ a,b \in I,\ 0 \leq a < b\ ve\ f \in L_1[a,b]$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{(b-a)^{\alpha}} n! \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} \left[I_{\alpha}^{a} f(b) + {}^{b}I_{\alpha} f(a)\right] \tag{5.1}$$

uyumlu kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f \in Q(I)$ olduğundan,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğinde $\lambda = \frac{1}{2}$ seçilirse $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2\big(f(x) + f(y)\big)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{n!} f\left(\frac{x+y}{2}\right) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \leq \frac{2}{n!}\big(f(x)+f(y)\big) t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$$

bulunur. Elde edilen eşitsizlik $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 f\left(\frac{x+y}{2}\right) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \leq \frac{2}{n!}\int_0^1 \big(f(x)+f(y)\big) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$$\leq \frac{2}{n!}\int_0^1 f(x)\, t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt + \frac{2}{n!}\int_0^1 f(y)\, t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

elde edilir.

$$x = at + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$$

yazılarak dönüşüm uygulanırsa,

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$$\leq \frac{2}{n!}\int_0^1 f(at + (1-t)b)\, t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$$+ \frac{2}{n!}\int_0^1 f\big((1-t)a + tb\big)\, t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \leq I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{2}{n!}\int_0^1 f(at + (1-t)b)\, t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$$u = at + (1-t)b, du = (a-b)dt, t = \frac{b-u}{b-a}, t = 0 \to u = b, t = 1 \to u = a$$

olmak üzere,

$$I_1 = \frac{2}{n!}\int_b^a f(u) \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^n \left(1 - \frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} \frac{du}{a-b}$$

$$= \frac{2}{n!}\int_a^b f(u) \frac{(b-u)^n}{(b-a)^n} \frac{(u-a)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}} \frac{1}{b-a} du$$

$$= \frac{2}{n!}\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b f(u)\, (b-u)^n (u-a)^{\alpha-n-1} du = \frac{2}{(b-a)^\alpha}(I_\alpha^a f)(b)$$

$$I_2 = \frac{2}{n!}\int_0^1 f\big((1-t)a + tb\big)\, t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$$u=(1-t)a+tb, du=(b-a)dt, t=\frac{u-a}{b-a}, t=0\rightarrow u=a, t=1\rightarrow u=b$$

olmak üzere,

$$I_2=\frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\left(\frac{u-a}{b-a}\right)^n\left(1-\frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\frac{du}{b-a}$$

$$=\frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\frac{(u-a)^n}{(b-a)^n}\frac{(b-u)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}}\frac{du}{b-a}$$

$$=\frac{2}{n!}\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b f(u)(u-a)^n(b-u)^{\alpha-n-1}\,du=\frac{2}{(b-a)^\alpha}\ {}^{b}I_\alpha f(a)$$

$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ olduğundan,

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\,dt=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\mathrm{B}(n+1,\alpha-n)$$

$$=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\leq\frac{2}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a f(b)+\ {}^{b}I_\alpha f(a)\right]$$

bulunur. Elde edilenler düzenlenirse,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{2}{(b-a)^\alpha}n!\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}\left[I_\alpha^a f(b)+\ {}^{b}I_\alpha f(a)\right]$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2 : $f\in P(I),\ a,b\in I,\ a<b\ ve\ f\in L_1[a,b],\ \beta>0$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{2}{(b-a)^\alpha}n!\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}\left[I_\alpha^a f(b)+\ {}^{b}I_\alpha f(a)\right]$$
$$\leq 2[f(a)+f(b)] \qquad (5.2)$$

uyumlu kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : Teorem 5.1 deki ispata benzer şekilde

$$2\left[f(at+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\frac{2}{n!}\int_0^1 f(at+(1-t)b)\, t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt + \frac{2}{n!}\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\, t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$
$$\geq \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$

$$I_1+I_2 \geq \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$

$$I_1=\frac{2}{n!}\int_0^1 f(at+(1-t)b)\, t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$

$$u=at+(1-t)b, du=(a-b)dt, t=\tfrac{b-u}{b-a}, t=0 \rightarrow u=b, t=1 \rightarrow u=a$$

olmak üzere,

$$I_1=\frac{2}{n!}\int_b^a f(u)\left(\frac{b-u}{b-a}\right)^n\left(1-\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\frac{du}{a-b}$$
$$=\frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\frac{(b-u)^n}{(b-a)^n}\frac{(u-a)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}}\frac{1}{b-a}du$$
$$=\frac{2}{n!}\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b f(u)\,(b-u)^n(u-a)^{\alpha-n-1}du=\frac{2}{(b-a)^\alpha}(I_\alpha^a f)(b)$$

$$I_2 = \frac{2}{n!}\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\, t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$$u = (1-t)a+tb, du = (b-a)dt,\ t = \tfrac{u-a}{b-a}, t = 0 \to u = a,\ t = 1 \to u = b$$

olmak üzere,

$$I_2 = \frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\left(\frac{u-a}{b-a}\right)^n \left(1-\frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} \frac{du}{b-a}$$

$$= \frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\frac{(u-a)^n}{(b-a)^n}\frac{(b-u)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}}\frac{du}{b-a}$$

$$= \frac{2}{n!}\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b f(u)(u-a)^n (b-u)^{\alpha-n-1}\, du = \frac{2}{(b-a)^\alpha}\ {}^{b}I_\alpha f(a)$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\beta(n+1,\alpha-n) \le \frac{2}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a f(b) + {}^{b}I_\alpha f(a)\right]$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \le \frac{2}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a f(b) + {}^{b}I_\alpha f(a)\right]$$

elde edilir ve böylece birinci kısım ispatlanmış olur.

$f \in P(I)$ olduğundan,

$$f(at+(1-t)b) \le\ f(a)+f(b)$$

$$f\big((1-t)a+tb\big) \le f(a)+f(b)$$

eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$f(at+(1-t)b) + f\big((1-t)a+tb\big) \le 2\big(f(a)+f(b)\big)$$

elde edilir. Eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\frac{2}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a f(b)+\ {}^bI_\alpha f(a)\right]\leq \frac{2}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left(f(a)+f(b)\right)dt$$

$$\leq \frac{2}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left(f(a)+f(b)\right)dt$$

$$\leq \frac{2\left(f(a)+f(b)\right)}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\,dt$$

$$\leq \frac{2\left(f(a)+f(b)\right)}{n!}\beta(n+1,\alpha-n)\leq \frac{2\left(f(a)+f(b)\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\frac{2}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a f(b)+\ {}^bI_\alpha f(a)\right]\leq \frac{2\left(f(a)+f(b)\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.3 : $f:[a,b]\to(0,\infty)$, $[a,b]$ üzerinde r-konveks bir fonksiyon ve $0<r\leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)^\alpha}&\left[I_\alpha^a f(b)+\ {}^bI_\alpha f(a)\right]\\ &\leq \frac{f(a)}{n!}\beta\left(n+\frac{1}{r}+1,\alpha-n\right)+\frac{f(b)}{n!}\beta\left(n+1,\alpha+n+\frac{1}{r}\right)\\ &+\frac{f(a)}{n!}\beta\left(n+1,\alpha-n+\frac{1}{r}\right)+\frac{f(b)}{n!}\beta\left(n+1+\frac{1}{r},\alpha-n\right)\end{aligned}\qquad (5.3)$$

uyumlu kesirli integral eşitsizlikleri sağlanır.

İspat : f fonksiyonu r-konveks ve $r>0$ olduğundan $t\in[0,1]$ için

$$f(at+(1-t)b)\leq \left(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$f(a(1-t)+tb)\leq \left((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$f(at+(1-t)b)+f(a(1-t)+tb)$$
$$\leq \left(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}[f(at+(1-t)b)+f(a(1-t)+tb)]$$
$$\leq \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left[\left(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}\right.$$
$$\left.+\left((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

$$\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(at+(1-t)b)dt$$
$$+\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(a(1-t)+tb)dt$$
$$\leq \int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}dt$$
$$+\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}dt$$

elde edilir. Burada Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$I_1=\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}dt$$

$$I_2=\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}dt$$

olmak üzere,

$$I_1 \leq \left(\int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} t^{\frac{1}{r}} f(a) dt \right)^r + \left(\int_0^1 \frac{1}{n!} t^n \, (1-t)^{\alpha-n-1} (1-t)^{\frac{1}{r}} f(b) dt \right)^r$$

$$I_1^* = \int_0^1 \frac{1}{n!} t^{n+\frac{1}{r}} (1-t)^{\alpha-n-1} \, f(a) dt = \frac{f(a)}{n!} \int_0^1 t^{n+\frac{1}{r}} \, (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$
$$= \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n + \frac{1}{r} + 1, \alpha - n\right)$$

$$I_1^{**} = \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1+\frac{1}{r}} f(b) dt = \frac{f(b)}{n!} \int_0^1 t^n \, (1-t)^{\alpha-n-1+\frac{1}{r}}$$
$$= \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n + 1, \alpha - n + \frac{1}{r}\right)$$

$$I_1 \leq \left(\frac{f(a)}{n!} \beta\left(n + \frac{1}{r} + 1, \alpha - n\right) \right)^r + \left(\frac{f(b)}{n!} \beta\left(n + 1, \alpha - n + \frac{1}{r}\right) \right)^r$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$I_2 \leq \left(\int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} (1-t)^{\frac{1}{r}} f(a) dt \right)^r + \left(\int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} t^{\frac{1}{r}} f(b) dt \right)^r$$

$$I_2^* = \frac{f(a)}{n!} \int_0^1 \mathrm{t}^{\mathrm{n}} \, (1-\mathrm{t})^{\alpha-\mathrm{n}-1+\frac{1}{\mathrm{r}}} \mathrm{dt} = \frac{\mathrm{f(a)}}{\mathrm{n!}} \beta\left(\mathrm{n} + 1, \alpha - \mathrm{n} + \frac{1}{\mathrm{r}}\right)$$

$$I_2^{**} = \frac{f(b)}{n!} \int_0^1 t^{n+\frac{1}{r}} \, (1-t)^{\alpha-n-1} dt = \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n + 1 + \frac{1}{r}, \alpha - n\right)$$

bulunur.

$$I_2 \leq \left(\frac{\mathrm{f(a)}}{\mathrm{n!}} \beta\left(\mathrm{n} + 1, \alpha - \mathrm{n} + \frac{1}{\mathrm{r}}\right) \right)^r + \left(\frac{f(b)}{n!} \beta\left(n + 1 + \frac{1}{r}, \alpha - n\right) \right)^r$$

elde edilir. O halde

$$\int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(at+(1-t)b)dt$$

$$+\int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(a(1-t)+tb)dt \leq \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n+\frac{1}{r}+1, \alpha-n\right)$$
$$+\frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1, \alpha-n+\frac{1}{r}\right)+\frac{\mathrm{f(a)}}{\mathrm{n!}} \beta\left(\mathrm{n}+1, \alpha-\mathrm{n}+\frac{1}{\mathrm{r}}\right)$$
$$+\frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n\right)$$

elde edilir. Teorem 5.2 deki I_1 ve I_2 den

$$\frac{1}{(b-a)^\alpha} I_\alpha^a(f(b))+\frac{1}{(b-a)^\alpha}\, {}^b I_\alpha f(a)=\frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a(f(b))+ {}^b I_\alpha f(a)\right]$$
$$\leq \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n+\frac{1}{r}+1, \alpha-n\right)+\frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1, \alpha-n+\frac{1}{r}\right)$$
$$+\frac{f(a)}{n!} \beta\left(n+1, \alpha-n+\frac{1}{r}\right)+\frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n\right)$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.4 : $f \in SX(h, I)$, $a, b \in I$, $a<b$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. h-konveks fonksiyonlar için,

$$f(a+b) \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha-n)(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a(f(b))+ {}^b I_\alpha f(a)\right]$$
$$\leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha-n)}[f(a)+f(b)] \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}[h(t)$$
$$+h(1-t)] dt \qquad (5.4)$$

uyumlu kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : f fonksiyonu h-konveks olduğundan,

$x=at+(1-t)b, y=(1-t)a+tb\ ve\ \alpha=\frac{1}{2}$ seçilirse,

$$f\left(\frac{at+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)f(at+(1-t)b)+h\left(\frac{1}{2}\right)f\big((1-t)a+tb\big)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(at+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\right]$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt\le\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\,h\left(\frac{1}{2}\right)f(at+(1-t)b)dt$$
$$+\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\,h\left(\frac{1}{2}\right)f\big((1-t)a+tb\big)dt$$

Teorem 5.1 deki ispata benzer şekilde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{\beta(n+1,\alpha-n)}{n!}\le\frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^\alpha}I_\alpha^a\big(f(b)\big)+\frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^\alpha}\ {}^bI_\alpha f(a)$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\le\frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a\big(f(b)\big)+\ {}^bI_\alpha f(a)\right]$$

bulunur. Böylece eşitsizliğin birinci kısmı ispatlanmış olur.

$f\in SX(h,I)$ olduğundan

$$f(ta+(1-t)b)\le h(t)f(a)+h(1-t)f(b)$$

$$f\big((1-t)a+tb\big)\le h(1-t)f(a)+h(t)f(b)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$f(ta+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)$$
$$\le h(t)f(a)+h(1-t)f(b)+h(1-t)f(a)+h(t)f(b)$$

$$f(ta+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\leq [h(t)+h(1-t)][f(a)+f(b)]$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(ta+(1-t)b)dt \\ +\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\big((1-t)a+tb\big)dt \\ \leq \int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}[h(t)+h(1-t)][f(a)+f(b)]dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)^\alpha}I_\alpha^a\big(f(b)\big)+\frac{1}{(b-a)^\alpha}\ {}^bI_\alpha f(a) \\ \leq \frac{f(a)+f(b)}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\,[h(t)+h(1-t)]dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(a+b)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a\big(f(b)\big)+\ {}^bI_\alpha f(a)\right] \\ \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)[f(a)+f(b)]}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\,[h(t)+h(1-t)]dt\end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde bazı önemli kesirli türev ve integral tanımlarına yer verilmiştir. Bu tanımlar yardımıyla özel tipten fonksiyonlar için önemli kesirli integral eşitsizlikleri incelenmiştir.

Tezde Riemann-Liouville ve uyumlu (conformable) kesirli integrali kullanılarak bazı önemli eşitsizlikler araştırılmıştır. Tezde bulunan bu eşitsizlikler farklı yeni kesirli integral tanımları kullanılarak genişletilerek yeni araştırma alanları oluşturulabilir.

.

7. KAYNAKLAR

[1] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya G., 1942, "Inequalities, 2nd edition", *Cambridge University Press,* Cambridge.

[2] Beckenbach, E. F., Bellman, R., 1961, "Inequalities", *Springer-Verlag,* Berlin, Heidelberg.

[3] Mitrinoviç, D. S., 1970, "Analytic inequalities", *Springer-Verlag,* Berlin, Heidelberg, New York.

[4] Mitrinoviç, D. S., Pečarić, J. E. and Fink, A. M., 1993, "Mathematics and its applications series; volume:61", *Kluwer Academic Publishers,* Dordrecht, Boston.

[5] Pecaric, J. E., 1987, "Convex functions: inequalities", *Serbocroatian,* Beograd.

[6] Dragomir, S. S. and Agarwal, R. P., 1988, "Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula", *Appl Math. Lett.,* 11(5): 91-95.

[7] Anastassiou, G. A., 2010, "Principles of delta fractional calculus on time scales and inequalities", *Mathematical and Computer Modelling,* 52: 556-566.

[8] Çetin, Y., Özdemir, M. E., Kavurmaci Önalan, H., 2017, "Fractional integral inequalities via s-convex functions", *Turkish Journal of Analysis and Number Theory,* 5(1): 18-22.

[9] Kırmacı, U. S., Bakula, M. K., Özdemir, M. E. and Pečarić J., 2007, "Hadamard-type inequalities for s-convex functions", *Appl. Math. Comput.,* 193: 26-35.

[10] Set, E., Sarikaya, M. Z., Özdemir, M. E. and Yıldırım, H., 2004, "The Hadamard's inequality for some convex functions via fractional integrals and related results", *Jour. of Appl. Math., Statis. Infor.,* 10 (2): 69-83.

[11] Özdemir, M. E., Dragomir, S. S. and Yıldız, Ç., 2013, "The Hadamard's inequality for convex function via fractional.

[12] Sarikaya, M. Z., Set, E., Yaldız, H., Başak, N., 2013, "Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities", *Math Comput. Modell.,* 57: 2403-2407.

[13] Belarbi, S., Dahmani, Z., 2009, "On some new fractional integral inequalities", *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,* 10(3): 86-90.

[14] Abdeljawad, T., 2015, "On conformable fractional calculus", *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 279: 57-66.

[15] Khalil, R., Al Horani,M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014, “A New Definition of Fractional Derivative”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264: 65-70.

[16] Atangana, A., Baleanu, D. and Alsaedi, A., 2015, “New properties of conformable derivative”, *Open Math.* (13): 889-898.

[17] Yıldız, C., Özdemir, M. E. and Onelan, H. K., 2015, “Fractional integral inequalities for different functions”, *New Trends in Matematical Sciences*(3), 2: 110-117.

8. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı Adı :	ÇELİK Ceyda
Uyruğu :	T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri :	12.06.1991 Uşak
Medeni Hali :	Bekar
Telefon :	0506 769 85 86
e-mail :	ccelik91@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Uşak Üniversitesi / Matematik Bölümü	2014
Lise	Necati Özen Lisesi /Uşak	2009

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2016-2017	Özel Uşak İyi Dersler Özel Öğretim Kursu	Matematik Öğretmeni
2017-2019	Özel Şafak Öncü Koleji	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Resim, seyahat, kitap, yüzme.