T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN BİR DUALLİK TEORİSİ: FENCHEL EŞLENİK TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra ÖZMEN

HAZİRAN 2019
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN BİR DUALLİK TEORİSİ: FENCHEL EŞLENİK TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra ÖZMEN

UŞAK 2019

Kübra ÖZMEN tarafından hazırlanan **KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN BİR DUALLİK TEORİSİ: FENCHEL EŞLENİK TEORİSİ** adlı bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğretim Üyesi Mustafa SOYERTEM ··················
Tez Danışmanı Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma,jürimiz tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalından Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğretim Üyesi Mustafa Seyyit SEYYİDOĞLU ··················
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Dr. Öğretim Üyesi İlknur ATASEVER GÜVENÇ ··················
Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir Teknik Üniversitesi

Dr. Öğretim Üyesi Mustafa SOYERTEM ··················
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih:···/···/2019

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doçent Doktor Murat Kemal KARACAN
··················
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kübra ÖZMEN

KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN BİR DUALLİK TEORİSİ: FENCHEL EŞLENİK TEORİSİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Kübra ÖZMEN

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2019

ÖZET

Bu yüksek lisans tezinde Hamel'in [23] çalışması incelendi. Duallik teorisinin küme değerli fonksiyonlar üzerine bir uygulaması olarak Fenchel eşlenik teorisinden bahsedildi. Bir küme değerli konveks fonksiyonun ne olduğu ve böyle bir fonksiyonun has veya kapalı olma şartlarının neler olabileceğinden bahsedildi. Küme değerli fonksiyonlar için konveks analizin skaler duruma benzer kavramların elde edilmesi, özellikle de fonksiyonun sürekli afin minorantlarının noktasal supremumunun bir küme değerli has kapalı konveks fonksiyon olması durumu araştırıldı. Bu şekilde bir fonksiyonun Fenchel Eşleniği ve Moreau-Fenchel Teoremine uygunluğu değerlendirildi.
Bir önsıralı, ayrık yerel konveks uzayın kuvvet kümesindeki değerlere sahip olan bir has kapalı konveks fonksiyonun küme değerli afin minorantlarının noktasal supremumu olduğu kanıtlandı. Küme değerli fonksiyonlar için yeni bir Legendre-Fenchel kavramı tanımlandı ve Moreau-Fenchel Teoremi ispatlandı. Örnekler ve uygulamalar verildi. Küme değerli konveks risk ölçüleri için bir dual temsil teoremi ifade edildi.

Bilim Kodu	:	403.04.00.TOPOLOJİ
Anahtar Kelimeler	:	Küme değerli fonksiyon, afin minorant, konlineer uzay, konveks risk ölçüsü, eşlenik, küme sıralama bağıntıları
Sayfa Adedi	:	83
Tez Yöneticisi	:	Dr. Öğretim Üyesi Mustafa SOYERTEM

A DUALITY THEORY FOR SET-VALUED FUNCTIONS: FENCHEL CONJUGATION THEORY
(M.Sc. Thesis)

Kübra ÖZMEN

UNIVERSITY OF UŞAK
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
June 2019

ABSTRACT

In this thesis, Hamel's article was studied [23]. Fenchel conjugate theory is taken as a point of view.
A generalized condition of being convex for set-valued maps is recalled. Conditions of being proper and closed for such a set-valued mapping are also studied. The concepts of convex analysis for set-valued functions are obtained similar to do scalar case. It is given that a set-valued closed convex function can be interpreted as the point supremum of the continuous affine minorants of this functions. In this way, the suitability of a function to the Fenchel Conjugate and Moreau-Fenchel Theorem was evaluated.
A preordered, discrete local convex space proved to be the point supremum of set-valued affine minorants of a unique closed convex function having values in the power set. A new Legendre-Fenchel concept for set-valued functions is defined and the Moreau-Fenchel Theorem is proved. Examples and applications were given. Among them, a dual representation theorem for set-valued convex risk measures was also given.

Science Code	:	403.04.00.TOPOLOGY
Keywords	:	Set-valued function, affine minorant, conlinear space, convex risk measure, conjugate, set ordered relations
Number of Page	:	83
Supervisor	:	Dr. Öğretim Üyesi Mustafa SOYERTEM

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve kıymetli tecrübelerinden faydalandığım değerli danışman hocam Doktor Öğretim Üyesi Mustafa SOYERTEM'e, hazırlama aşamasında ve tezin yazımında yardımını esirgemeyen kardeşim Fatma Zeynep ÖZMEN'e ve destekleriyle her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

Kübra ÖZMEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\varnothing$	Boş küme
θ	Vektör sıfır
$X,\ Y,\ Z$	Gerçel lineer uzaylar
C	Konveks koni
$\leqslant_C$	C konisine göre vektör sıralama bağıntısı
$\curlyeqprec_C$	Alttan sıralama bağıntısı
$\preccurlyeq_C$	Üstten sıralama bağıntısı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathcal{P}(Z)$	Z'nin kuvvet kümesi
$\mathcal{P}_C^a(Z)$	$\{A \in \mathcal{P}(Z) : A = A + C\}$
$\mathcal{Q}_C^a(Z)$	$\{A \in \mathcal{P}(Z) : A = co(A + C)\}$
$\mathcal{P}_C^t(Z)$	$\{A \in \mathcal{P}(Z) : A = cl(A + C)\}$
$\mathcal{Q}_C^t(Z)$	$\{A \in \mathcal{P}(Z) : A = cl\ co(A + C)\}$
π_x	x'in izdüşümü
$H(z^*)$	Z'deki kapalı yarı uzay
C^*	C'nin negatif dual konisi
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Olasılık Uzayı
$L_d^p = L_d^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$x : \Omega \to \mathbb{R}^d$ P-ölçülebilir fonksiyonlarının lineer uzayı
$L_d^\infty = L_d^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$x : \Omega \to \mathbb{R}^d$ P-ölçülebilir fonksiyonlarının uzayı
$L^p = L_1^p$	Bir $x \in L_d^p$ elemanı için bileşenleri $x_1, ..., x_d$ olan bir vektör
$\mathbb{1}$	P-hemen hemen kesin değeri 1 olan L_d^p'deki rassal değişkeni
K	$K \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}_+^d \subseteq K$'yı kapsayan bir kapalı konveks polihedral koni
$M \subseteq \mathbb{R}^d$	$M = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{d-m}$ ile tanımlı $\mathbb{R}^d$'nin lineer altuzayı
ϱ	Riskin küme değerli bir ölçüsü,
$E[x] \in \mathbb{R}^d$	$x \in L_d^p$ rastgele değişkeninin beklenen değeri
$\mathcal{M}_{1,d}^P = \mathcal{M}_{1,d}^P(\Omega, \mathcal{F})$	P'ye göre kesin sürekli tüm vektör olasılık ölçülerinin kümesi

1. GİRİŞ

Bir küme değerli konveks fonksiyon nedir ve böyle bir fonksiyon ne zaman has(proper) veya kapalı(closed) olur? Küme değerli fonksiyonlar için konveks analizin skaler duruma paralelliği hangi ölçülerde mümkündür? Özellikle bu fonksiyonların sürekli afin minorantlarının noktasal supremumu küme değerli has kapalı konveks fonksiyon olur mu, böyle bir fonksiyonun Fenchel eşleniği tanımlanabilir mi ve Moreau-Fenchel (ikili eşlenik) teoremi geçerli olur mu?

Bu tezde bu sorulara olumlu cevaplarla yeni bir yaklaşım öneren Andreas H. Hamel'in [21] makalesini inceledik.

Cevapları; haslık gibi kavramların tanımlarına (supremum almak gibi işlemlere), küme değerli afin fonksiyon gibi yapılara ve en önemlisi kullanacağımız dual değişkenlerin kümelerine dayandıracağız. Teori skaler duruma benzer olarak yapılandırıldı (Örnek için [63]'e bakınız.). Bu tezde bir çok skaler sonuç için küme değerli benzerleri verilecektir. Referanslara bakıldığında (örneğin [6, 62]) görüntü uzayı sınırlı varsayımları sağlamazsa sadece vektörel yapılar kullanarak bunun başarılamayacağı açıktır. Bir vektör fonksiyonu için bu fonksiyonun değerlerinin her birine sıralama konisi (veya kapanışı) eklenerek küme değerli yapılırsa burada verilen sonuçlar aynı şekilde kullanılabilir.

Dual yapıların (özellikle subdiferansiyenlerde) uzun referans listesi sıralı bir vektör uzayında değerler alan konveks fonksiyonlar için Breckner ve Kolumban [7], Raffin [46], Valadier [58], Ioffe ve Levin [27], Zowe [59], [15], Brumelle [9] ve Borwein [3] çalışmalarıyla başlar. Rubinov [49]'da; ($+\infty$ ile genişletilmiş) bir sıralı vektör uzayında değerler alan sublineer fonksiyonların açık bir tanımının (sürekli lineer minorantları cinsinden) verilmesi probleminin hala geçerli olduğundan bahseder. Bu problem ile [6]'da yine uğraşıldı. Bu referans (ayrıca diğerleri arasında [15, 60]'a da bakılabilir.) vektör değerli fonksiyonlar için Fenchel eşleniğinin bir tanımını da içerir. Burada supremum, vektör sıralaması anlamında düşünülür.

Bu referansların tümünde kullanılan dual değişkenler sürekli lineer operatörlerdir. Esas problem, sadece görüntü uzayı vektör sıralamsına göre tam sıralı olduğu durumlarda Hahn-Banach-Kantorovietch teoreminin doğru olmasıdır. Dolayısıyla bir Hahn-Banach tipindeki sonuca dayanan dual değişkenler gibi sürekli lineer operatörleri kullanan sonuçlar temel olarak sıralı tam görüntü uzaylarına sınırlandırılmıştır, fonksiyonun vektör veya küme değerli olmasının önemi yoktur. Örnek olarak Zalinescu'nun [62] makalesine bakılabilir. Bu çalışmada en küçük üst sınır özelliğine sahip görüntü uzayı varsayımı altında vektör değerli fonksiyonlar üzerinde lineer operatörleri dual değişkenler olarak kullanıp Fenchel eşleniği için geniş bir analiz elde edildi.

Tam sıralama olmadan ancak hala lineer operatörleri dual değişkenler olarak kullanan sonuçları elde etmek zordur ve uzay ile sıralama konisi üzerinde çıkarılan şartın yerine geçen varsayımları gerektirir. Bu yöndeki çalışmalar için [4, 5, 16, 61]'e bakılabilir. Destekleyen lineer operatörü olmayan (subdiferansiyellenemeyen) sürekli bir sublineer operatör örneği [35]'de bulunabilir.

Daha uzun başka bir referans listesi (ilkinden ayrı değil) vektör optimizasyon problemleri için duallikle ilgilidir, bunların çoğu Fenchel-Rockafellar tipi duallik sonucu içerir. Örneğin [10, 40, 41, 44, 53, 56, 57]. 1998'e kadar referansların çoğunu içeren araştırma [54]'dedir. Bu referansların ortak bir özelliği bir küme değerli eşlenik dönüşümü olmasıdır. Bunun sebebi vektör sıralamasına göre infimumun (benzer şekilde supremumun) var olduğu durumunlarda bile kümeden çok uzak olabilmesidir. Dolayısıyla vektör optimizasyon problemlerinin optimal durumları çoğu durumda minimal (maksimal) olan noktalara tanımlıdır ve bu yüzden dual problem (ve eşlenik), esas problemin amacı ne olursa olsun, küme değerlidir ([41], sf 57). Küme değerli Legendre-Fenchel eşleniklerinde supremum yerine; maksimal noktaların kullanıldığı [41, 50, 57] örnekleri, zayıf maksimal noktaların kullanıldığı [42, 50] örnekleri, (zayıf) supremal noktaların kullanıldığı [43, 44, 54, 56] örnekleri, hatta daha genel yapıya sahip "uygulanmayan (non-submitted) noktaları" içeren [13] örneği de mevcuttur. Tüm durumlarda dual değişkenler sürekli lineer operatörlerdir ve çoğu durumlarda sıralı koninin içinin boş olmadığı varsayımı ortaktır. Üstelik skaler durumda olduğu gibi, eşleniği sürekli afin minorantlarla geometrik olarak özgün bir şekilde ilişkilendiren klasik Moreau-Fenchel vektör değerli (veya hatta küme değerli) durumlara standart bir genişlemesi yoktur.

Daha tutarlı küme değerli fonksiyon kavramı için iki gelişme daha vardır.

Bunlardan biri [1, 2] Azimov'un makalelerinde bulunabilir. Azimov, fazladan bir dual değişkene bağlı skaler fonksiyonlar cinsinden içi boş olmayan sıralama konisine sahip bir sonlu boyutlu uzayın kuvvet kümesinde değerler alan bir fonksiyonun Legendre-Fenchel Eşleniğinin bir tanımını vermiştir. Yine Moreau-Fenchel Teoremi sadece subdiferansiyelleri içeren ek varsayımlar altında ifade edilebilir ve "afin minorant" teoremi yoktur. Ancak bu tezdeki sonuçlarla ilişkili olduğu görülecektir.

İkincisi, Löhne tarafından yazılmıştır [36], [37]. Löhne görüntü uzayının kuvvet kümesinin alt kümesi olacak şekilde bir tam kafesi ve küme değerli fonksiyonların bir Legendre-Fenchel Eşlenikleri tanımı için bu kafes yapılarına göre infimum ve supremumu ilk olarak kullandı. Moreau-Fenchel-Rockafellar tipi duallik teoremi, sonuçlarından bazılarıdır. Bunların ispatları dikkatlice oluşturulmuş skalerizasyon ve gömme süreçleri üzerine kuruludur. Lineer ve lineer olmayan vektör optimizasyon problemlerine bunlar için verilen duallikler üzerine yeni ışık tutan uygulamalar da vardır. Bunun için [24, 25, 39] çalışmalarına da bakılabilir. Özellikle Tanino, Sawaragi, Postolica, Dolecki, Malivert ve diğerlerinin vermiş olduğu infimal/suprimal kümeleri içeren eski kavramlar kümelerin belirli bir tam kafeslerinin infimum ve supremumları cinsinden yeniden formule edilebilir. Bunun için Löhne'nin Teorisinde özel durumlarda uygun bir şekilde seçilen ek bir temel değişken ortaya çıkar. [39]'daki Teorem 5.2'nin ispatında görülebilir. Bu şu anki tezin teorisine göre temel bir farklılık oluşturur.

Bu tezde dual değişkenler tanım uzayının topolojik dualinin ve görüntü uzayının sıralama konisinin dualinin elemanlarından oluşan çiftlerden oluşacaktır. Bu şekildeki her çift, afin minorant teoreminde kullanılacak ve eşlenikleri tanımlayıp yönlendirecek kadar sürekli lineer bir fonksiyonelin özelliklerini bulunduran küme değerli bir dönüşüm üretir.

Hamel'in yaklaşımı, Löhne'ninkine göre klasik konveks analizin geometrik ruhuna daha uygundur. Verilen sıralama konisinin dual konisinin ek dual değişken için tanım kümesi olarak ortaya çıkması görüntü uzayındaki sıralamayı oluşturur. Eğer görüntü uzayı $\mathbb{R}$ ise esas olarak tek mümkün sıralama olacağından ikinci bir değişkene ihtiyaç olmaz.

Hamel'in önerilerinin ikinci özelliği, vektör uzayındaki sıralamaların kuvvet kümelerine genişlemelerinin kullanılmasıdır. Bu yapı, Kuroiwa, Tanaka ve Truang [34] tarafından optimizasyon problemleri kavramında tanımlanmıştır. Ancak, öncesinde de iyi bilinmektedir, örneğin cebirde ve bilgisayar bilimlerinde [8] ve ekonomide [31], [36] ve [37]'de olduğu gibi, bu "küme sıralamalarına" küme değerli fonksiyonlar için uygun görüntü uzayları tanımlamak amacıyla kullanacağız. Burada küme değerli fonksiyonların vektör sıralamasına göre herhangi bir özel varsayım olmaksızın tam kafes olduğu ortaya çıkarılacaktır. Görüntü uzayları vektör uzayları tarafından üretilen bir sıralı yapı olmasının yanı sıra bir cebirsel yapısı da olacaktır. Ancak tabiki bunlar lineer uzay değildir. Bu cebirsel yapı, "konveks" ve "koni" kelimelerinden esinlenilerek bir konlineer uzay olarak isimlerdirilecektir. Bir (konveks) küme değerli dönüşüm örnek olarak [3]'deki gibi (konveks) bir ilişkiden daha fazla bir kafes sıralı konlineer uzayda değerler alan bir fonksiyon olarak anlaşılmalıdır.

Üçüncü özellik, diğer çoğu yaklaşımdan farklı olarak ispatlar için skaler teori, bir araç olarak kullanılmamıştır. Bunun yerine uygun bir çarpım uzayındaki ayırma, araç olarak kullanılacaktır. O kadar ki bu sonuçlar genişletilmiş reel değerli fonksiyonlara uyarlandığında bilinen teoriyi kullanmadan yeniden ortaya koyar. Diğer taraftan bütün teori küme değerli fonksiyonların (ve eşleniklerinin) genişletilmiş reel değerli fonksiyonların bir ailesi ile temsil edildiği bir formda verilebilir. Bu durumda "skalerizasyon", vektör optimizasyon problemleri hakkındaki çoğu referansta olduğu gibi (örneğin [28, 41]) sadece vektör değerli problemlerin yerini alacak reel değerli problemleri bulmak değildir. Aynı zamanda bir küme değerli teorinin gösterilmesinin başka bir yoludur. Bu çalışma derindeki küme değerli olma kavramını ortaya çıkarma denemesi olarak anlaşılabilir.

Bu tez aşağıdaki gibi yapılandırıldı. Sonraki bölümde küme sıralamaları ve yarı sıralı bir lineer uzayın kuvvet kümesinin bazı alt kümeleri verildi. Bu alt kümeler konveks, kapalı ve kapalı konveks küme değerli fonksiyonlar için görüntü uzayları olarak kullanıldı. Haslık kavramı küme değerli fonksiyonlara genişletildi, has olmayan konveks ve kapalı konveks fonksiyonlar incelendi. Sıralı konlineer uzaylarla ilgili tanımlar, temel gerçekler ve bazı bibliyografik uyarılardan da bahsedildi. Üçüncü bölüm afin küme değerli fonksiyonlar için noktasal supremumu hakkındaki temel sonucu, dördüncü bölüm Moreau-Fenchel teoremini ve örneklerini içerir. Son bölümde küme değerli konveks risk ölçüleri için teorinin bir uygulaması olarak bir dual temsil teoremi ifade edildi.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

Z en az iki eleman bulunduran bir gerçel lineer uzay, $C \subseteq Z$ konveks koni (her $c \in C$ ve $\lambda \geqslant 0$ için $\lambda c \in C$), $\theta \in C$ ve $\{\theta\} \neq C \neq Z$ olsun. C konisi Z üzerinde yansıyan, geçişken bir bağıntıyı ($\leqslant_C$),

$$a \leqslant_C b \Leftrightarrow b - a \in C$$

şeklinde üretir. C sıralama konisine bazı kitaplarda **pozitif noktalar kümesi** de denir. Aşağıdaki önermede bu şekilde bir koni yardımı ile sıralamanın nasıl elde edildiği verilmiştir.

Önerme 2.1. *[55]*

a) $\leqslant_C$ *sıralama bağıntısı toplama ile uyumludur.* ($a \leqslant_C b \Leftrightarrow$ *her* $d \in Z$ *için* $a + d \leqslant_C b + d$)

b) $\leqslant_C$ *sıralama bağıntısının çarpma ile uyumlu olması* ($a \leqslant_C b \Rightarrow$ *her* $\alpha > 0$ *için* $\alpha \cdot a \leqslant_C \alpha \cdot b$) *için gerekli ve yeterli bir şart* C*'nin koni olmasıdır.*

c) $\leqslant_C$ *sıralama bağıntısının yansıyan olması için gerekli ve yeterli bir şart* $0 \in C$ *olmasıdır.*

d) $\leqslant_C$ *sıralama bağıntısının anti-simetrik olması için gerekli ve yeterli bir şart* C*'nin sivri(pointed)olmasıdır.* ($C \cap (-C) = \{\theta\}$)

e) $\leqslant_C$ *sıralama bağıntısının geçişken olması için gerekli ve yeterli bir şart* C*'nin konveks olmasıdır.*

Bir koninin konveks olması için gerekli ve yeterli bir şart $C + C = C$ olmasıdır.

$\mathcal{P}(Z)$, Z'nin kuvvet kümesi olmak üzere (bazı kaynaklarda 2^Z ile gösterilir.) $A,\ B \in \mathcal{P}(Z)$, $t \in \mathbb{R}$ için, kümelerin toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla,

$$A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

$$t.A := \{ta : a \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. $t \in \mathbb{R}\backslash\{\theta\}$ için $A + \varnothing = \varnothing + A = \varnothing$ olur. Ayrıca $t \cdot \varnothing = \varnothing$ ve $t = 0$ için $0 \cdot \varnothing = \{\theta\}$, $0 \in \mathbb{R}$, $\theta \in Z$'dir. $A,\ B \in \mathcal{P}(Z)$ ve $z \in Z$ için $\{z\} + A$ yerine kısaca $z + A$, $(-1) \cdot A$ yerine kısaca $-A$, $A + (-1) \cdot B$ yerine kısaca $A - B$ yazacağız.

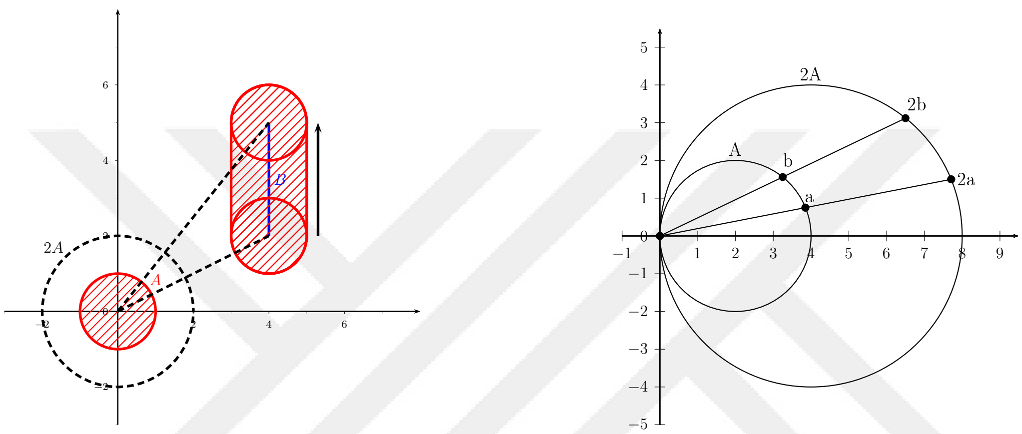
Bir kümenin kendisiyle toplamı daima kümenin iki katına eşit değildir. Aşağıdaki örnek bunu gösterir.

Örnek 2.1. *$A = \{(1,0),(0,1)\}$ kümesini alırsak,*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2A & = & \{(2,0),(0,2)\} \\ A+A & = & \{(2,0),(1,1),(0,2)\} \end{array}\right\} 2A \neq A+A$$

olduğunu görürüz.

Not 2.2. *A kümesi konveks ise $A + A = 2A$ olur.*



(a) İki kümenin Minkowski toplamı (b) A konveks ise $A + A = 2A$ olur.

Şekil 2.1: Küme işlemlerinin geometrisi

Verilen örnekte A kümesi konveks olduğundan $A+A = 2A$ olur. İki kümenin toplamıyla ilgili örnekler 2.1'de gösterilmiştir.

Örnek 2.2. *$\mathbb{R}^2$'de $A = \{0\} \times [0,1)$ ve $B = (0,1] \times \{0\}$ olsun. Buna göre $2A$, $2B$, $\frac{1}{2}A$, $-\frac{1}{2}B$ ve $A + B$ kümelerini Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'de gösterelim.*

(a) $A = \{0\} \times [0,1)$
$B = (0,1] \times \{0\}$

(b) $2A = \{0\} \times [0,2)$
$2B = (0,2] \times \{0\}$

Şekil 2.2: $A, B, 2A, 2B$ kümelerinin $\mathbb{R}^2$'de gösterimi

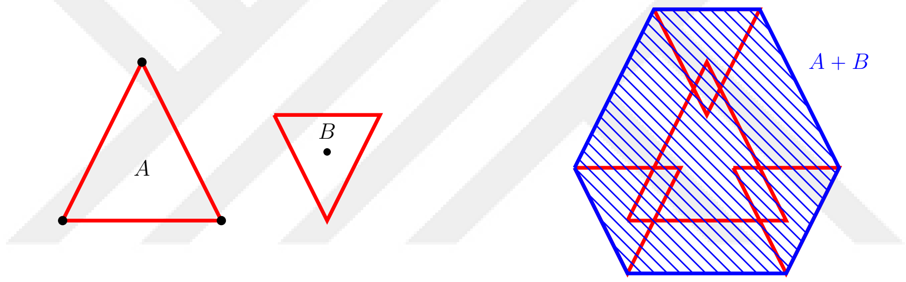
(a) $\frac{1}{2}A = \{0\} \times [0, \frac{1}{2})$
$-\frac{1}{2}B = (0, -\frac{1}{2}] \times \{0\}$

(b) $A + B = (0, 1] \times (0, 1]$

Şekil 2.3: $\frac{1}{2}A$, $-\frac{1}{2}B$ ve $A + B$ kümelerinin $\mathbb{R}^2$'de gösterimi

Aşağıdaki örnek daha genel iki kümenin Minkowski toplamına bir örnek olarak verilmiştir.

Örnek 2.3. *A ve B iki üçgen olmak üzere B'nin ağırlık merkezini A'nın tüm köşelerinin üzerine koyarak üç tane üçgen oluşturalım ve bunları Şekil 2.4'deki gibi birleştirelim.*

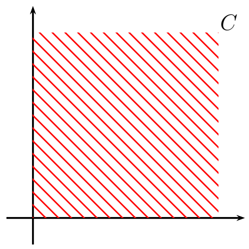


Şekil 2.4: A, B kümeleri ve bu kümelerin toplamı

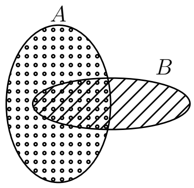
Z üzerindeki $\preccurlyeq_C$ sıralamasının kümelere genişlemelerinden iki tanesi aşağıdaki gibi ifade edilir: [34]

- $A \preccurlyeq_C B \Leftrightarrow B \subseteq A + C$ alttan küme sıralaması, (lower setless order) denk olarak her $b \in B$ için $\exists a \in A$ öyle ki $a \preccurlyeq_C b$ şeklinde de ifade edilebilir.
- $A \preccurlyeq_C B \Leftrightarrow A \subseteq B - C$ üstten küme sıralaması, (upper setless order) denk olarak her $a \in A$ için $\exists b \in B$ öyle ki $a \preccurlyeq_C b$ şeklinde de ifade edilebilir.

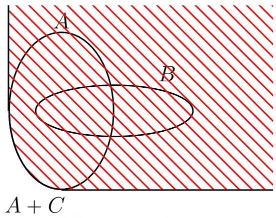
Örnek 2.4. *Şekil 2.5'de verilen A ve B kümelerinin, yukarıdaki küme sıralamalarına uyup uymadığını geometrik olarak kontrol edelim.*



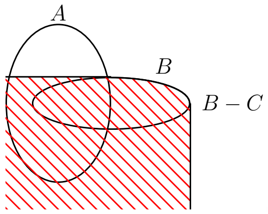
(a) C Sıralama konisi



(b) A ve B kümeleri



(c) $B \subseteq A + C$



(d) $A \nsubseteq B - C$

Şekil 2.5: Sıralama bağıntılarının gösterimi

$B \subseteq A + C$ olduğundan $A \preccurlyeq_C B$ olur. Ancak $A \nsubseteq B - C$ olduğundan $A \not\succcurlyeq_C B$ olur.

Bu iki sıralama arasında

$$A \preccurlyeq_C B \Leftrightarrow -B \preccurlyeq_C -A$$

şeklinde bir ilişkinin olduğu kolayca görülebilir.

Gerçekten, $A \preccurlyeq_C B$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} B \subseteq A + C \quad &\Rightarrow \quad B + C \subseteq A + \underbrace{C + C}_{C} \\ &\Rightarrow \quad B + C \subseteq A + C \\ &\Rightarrow \quad -B - C \subseteq -A - C \\ &\Rightarrow \quad -B \subseteq -A - C \\ &\Rightarrow \quad -B \preccurlyeq_C -A \end{aligned}$$

olur.

C konveks koni olsun. Bu durumda $a, b \in C$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha a + (1-\alpha) \in C$ olur. $\alpha = \frac{1}{2}$ olsun. Buna göre

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \in C \Rightarrow a + b \in C \ \Rightarrow C + C \subset C,$$

$$c \in C \text{ ve } 0 \in C \Rightarrow c = c + 0 \in C + C \Rightarrow C \subset C + C$$

olduğundan $C + C = C$'dir.

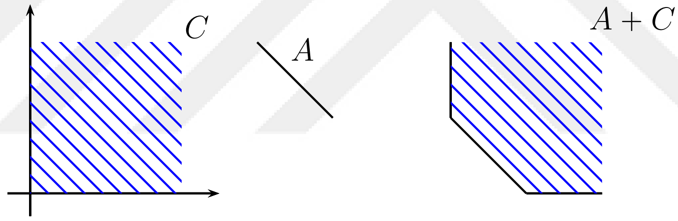
$A, B \in \mathcal{P}(Z)$ için alttan küme sıralamasına göre bir denklik bağıntısı aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} A \sim B \quad &\Leftrightarrow \quad A \preccurlyeq_C B \wedge B \preccurlyeq_C A \\ &\Leftrightarrow \quad B \subseteq A + C \wedge A \subseteq B + C \\ &\Leftrightarrow \quad B + C \subseteq A + \underbrace{C + C}_{C} \wedge A + C \subseteq B + \underbrace{C + C}_{C} \\ &\Leftrightarrow \quad B + C \subseteq A + C \wedge A + C \subseteq B + C \\ &\Leftrightarrow \quad A + C = B + C \end{aligned}$$

$\mathcal{P}^a_C(Z) := \{A \in \mathcal{P}(Z) : A = A + C\}$ şeklinde tanımladığımızda (Şekil 2.6) bu aile yukarıdaki denkliğe göre elde edilen denklik sınıflarından birer tane temsilci bulundurur. Bu aile üzerinde alttan küme sıralaması ile kapsam sıralaması denktir. Yani $A,\ B \in \mathcal{P}^a_C(Z)$ olmak üzere $A \preccurlyeq_C B$ için gerekli ve yeterli bir şart $B \subseteq A$ olmasıdır. Çünkü,

$$\begin{aligned} A \preccurlyeq_C B \quad &\Leftrightarrow \quad B \subseteq A + C \\ &\Leftrightarrow \quad B \subseteq A \end{aligned}$$

dır.



Şekil 2.6: $A + C = B \in \mathcal{P}^a_C(Z)$

$\mathcal{P}^a_C(Z)$ uzayında $0.A = C$ şeklinde tanımlarsak,

- $A \subseteq A \Rightarrow A \preccurlyeq_C A$ (yansıma),
- $A \subseteq B$ ($B \preccurlyeq_C A$) ve $B \subseteq D$ ($D \preccurlyeq_C A$) $\Rightarrow A \subseteq D$ ($D \preccurlyeq_C A$) (geçişme),
- $A \subseteq B$ ($B \preccurlyeq_C A$) ve $B \subseteq A$ ($A \preccurlyeq_C B$) $\Rightarrow A = B$ (ters simetri)

özellikleri sağlandığından $\preccurlyeq_C$, $\mathcal{P}^a_C(Z)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlar.

Bu bölümde tezin geri kalanında sıkça kullanacağımız fonksiyonların konveksliği kavramını hatırlayalım. Gerçel değerli ve değişkenli fonksiyonların konveksliği, bir konveks kümeden bir koni ile sıralı vektör uzaylarında değer alan fonksiyonun konvekliğini hatırladıktan sonra bunların küme sıralamasına göre verilen bir genişlemesini (Şekil 2.7) inceleyelim:

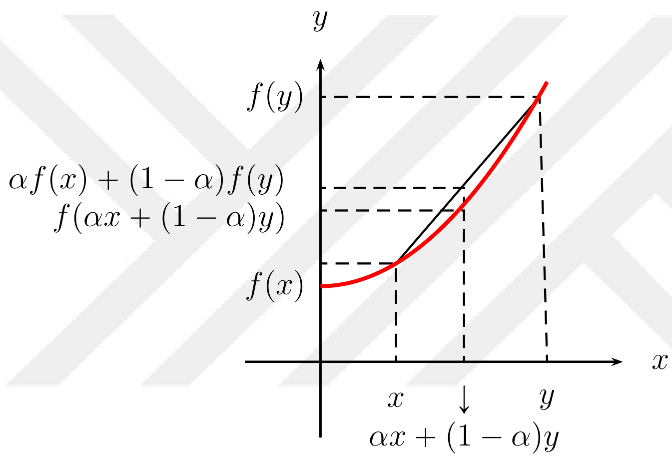
Tanım 2.1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.*

- *Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in [0,1]$ için*

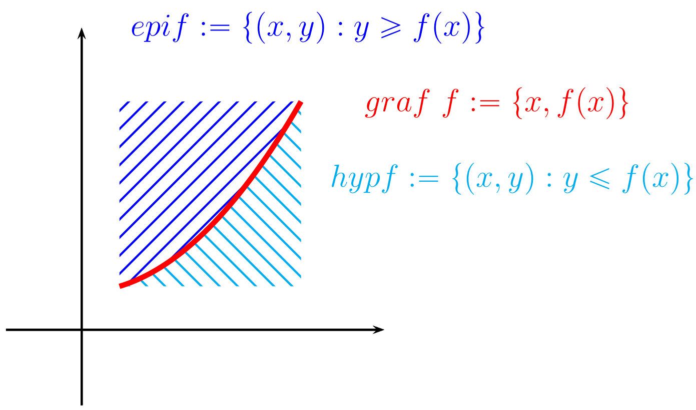
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant (\geqslant) \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

  *şartı sağlanıyorsa f'ye **konveks(konkav) fonksiyon**,*

- *$epif := \{(x,y) : y \geqslant f(x)\}$ kümesine f**'nin epigrafı**,*
- *$graf\ f := \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ kümesine f**'nin grafiği**,*
- *$hypf := \{(x,y) : y \leqslant f(x)\}$ kümesine f**'nin hipografı** denir.*



Şekil 2.7: Konveks bir f fonksiyonunun gösterimi



Şekil 2.8: Bir f fonksiyonunun epigrafı ve hipografının gösterimi

Konveks ve konkav fonksiyonlar arasında aşağıdaki özellikler, pek çok konveks analiz kitabında yer alan temel özelliklerdir.

- f konveks $\Leftrightarrow$ $epif$ konvekstir.
- f konkav $\Leftrightarrow$ $-f$ konvekstir.
- f konkav $\Leftrightarrow$ $hypf$ konvekstir.

Örnek 2.5. *$f : X \to Z$, $f(x) = |x|$ fonksiyonunun konveks olduğunu gösterelim.*

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= |\alpha x + (1-\alpha)y| \\ &\leqslant \alpha|x| + (1-\alpha)|y| \\ &= \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \end{aligned}$$

olduğundan $f(x) = |x|$ fonksiyonu konvekstir.

X ve Z vektör uzayları, $C \subseteq Z$ sıralama konisi olmak üzere $f : X \to (\mathcal{P}(Z), \preccurlyeq_C)$ fonksiyonunun konveks olması için gerekli ve yeterli bir şart her $x, y \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \preccurlyeq_C \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlamasıdır.

Tanım 2.2. *$f : X \to \mathcal{P}(Z)$ bir küme değerli fonksiyon olsun.*

- *Her $x_1, x_2 \in X$ için,*

  $$f(tx_1 + (1-t)y) \preccurlyeq_C tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

  şartını sağlıyorsa bu fonksiyona ***konvekstir****,*

- *$epi\ f = \{(x,z) \in X \times Z : z \in f(x) + C\}$ kümesine f* ***küme değerli foksiyonunun epigrafı****,*

- *$graf\ f = \{(x,z) \in X \times Z : z \in f(x)\}$ kümesine f* ***küme değerli foksiyonunun grafiği****,*

- *$hyp\ f = \{(x,z) \in X \times Z : z \in f(x) - C\}$ kümesine f* ***küme değerli foksiyonunun hipografı*** *denir.*

Önerme 2.3. *Bir $f : X \to \mathcal{P}(Z)$ fonksiyonunun konveks olması için gerekli ve yeterli bir şart $epif = \{(x,z) \in X \times Z : z \in f(x) + C\}$ kümesinin konveks olmasıdır.*

Kanıt. Bu önermenin ispatı için [41]'de sf 29'daki Önerme 6.2'ye, [29]'da sf 376'daki Lemma 14.8'e ve [12]'de sf 25'e bakılabilir. □

C konveks olduğu durumda konveks fonksiyonlar için geçerli olan epigrafın konveks olması özelliği, küme değerliler için de devam eder.

Önerme 2.4. *Her* $x \in X$ *için* $\tilde{f}(x) = f(x) + C$ *şeklinde tanımlanan* $\tilde{f} : X \to (\mathcal{P}^a_C(Z), \supseteq)$ *küme değerli dönüşümü* f *küme değerli fonksiyonu konveks ise konvekstir. (Boş küme de olabilir.)*

Kanıt. Her $t \in (0,1)$ ve $x_1, x_2 \in X$ için,

$$\begin{array}{rccl} & f(tx_1 + (1-t)x_2) & \preccurlyeq_C & tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \\ \Rightarrow & tf(x_1) + (1-t)f(x_2) & \subset & f(tx_1 + (1-t)x_2) + C \\ \Rightarrow & t(f(x_1) + C) + (1-t)(f(x_2) + C) & \subset & \tilde{f}(tx_1 + (1-t)x_2) \\ \Rightarrow & t\tilde{f}(x_1) + (1-t)\tilde{f}(x_2) & \subset & \tilde{f}(tx_1 + (1-t)x_2) \end{array}$$

olur. □

Örnek 2.6. $f(x) = A \subseteq Z$ *sabit küme değerli fonksiyonunun konveks olması için gerekli ve yeterli bir şart* $A + C$*'nin konveks olmasıdır. (*A*'nın konveks olması gerekli değildir.) Reel sayılarda bunu görmek için* $Z = \mathbb{R}$ *alırsak ve* $C = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ *için,* $A \neq \emptyset$ *olmak üzere* $A + C$ *bir ışındır ve konvekstir.*

Bir $f : X \to (\mathcal{P}(Z), \preccurlyeq_C)$ küme değerli konveks fonksiyonunun görüntü uzayı,

$$\mathcal{Q}^a_C(Z) = \{A \in \mathcal{P}(Z) : A = co(A + C)\}$$

ile tanımlanan Z'nin alt kümelerinin bir ailesidir. Biz bu aileyi üstten konveks alt kümelerin ailesi olarak isimlendireceğiz. Burada $coA := \bigcap_{\substack{B \text{ konveks} \\ A \subseteq B}} B$ kümesi, **A'nın konveks örtüsü** olarak isimlendirilir. A ve B üstten konveks ise $A + B$ ve $t > 0$ için $t \cdot A$ da üstten konveks olur. Gerçekten,

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & co(A + C) + co(B + C) \\ & = & co(A + B + C) \\ t \cdot A & = & t \cdot co(A + C) \\ & = & co(tA + C) \end{array}$$

dir.

2.1 Konlineer Uzaylar

Aşağıdaki tanım, konlineer uzayların yapısal özellikleri hakkında daha fazla bilginin bulunduğu [21]'den alınmıştır.

Tanım 2.3. $+ : W \times W \to W$ *ve* $. : \mathbb{R}_+ \times W \to W$ *iki cebirsel işlemle verilen boştan farklı bir* W *kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa konlineer(conlinear) uzaydır:*

(C1) $(W,+)$ *nötr bir* θ *elemanına sahip olan bir değişmeli monoiddir.*

(C2) *(i)Her* $\omega_1,\ \omega_2 \in W$, *her* $r \in \mathbb{R}_+ : r(\omega_1+\omega_2) = r\cdot\omega_1 + r\cdot\omega_2$,
(ii)Her $\omega \in W$, *her* $r,\ s \in \mathbb{R}_+ : s\cdot(r\cdot\omega) = (r\cdot s)\cdot\omega$,
(iii)Her $\omega \in W : 1\cdot\omega = \omega$,
(iv) $0\cdot\theta = \theta$

Bir $(W,+,.)$ *konlineer uzayı* W *üzerindeki bir* $\preceq$ *kısmi sıralaması(yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahip bir bağıntı) ile birlikte aşağıdaki özellikleri de sağlıyorsa* ***sıralı konlineer uzay*** *olarak isimlendirilir:*
(v)Her $\omega,\omega_1,\ \omega_2 \in W,\ \omega_1 \preceq \omega_2$ *ise* $\omega_1+\omega \preceq \omega_2+\omega$ *sağlanır,*
(vi) $\omega_1,\ \omega_2 \in W,\ \omega_1 \preceq \omega_2,\ r \in \mathbb{R}_+$ *ise* $r\cdot\omega_1 \preceq r\cdot\omega_2$ *sağlanır.*

Konlineer uzayın aksiyomları, konvekslik kavramının genel olarak lineer olmamasına rağmen böyle bir uzaya tanımlanabilecek şekilde tasarlanmıştır. Konlineer bir uzayın bir U altkümesinin, konveks olması için gerekli ve yeterli bir şart $r \in (0,1)$ ve $u_1,\ u_2 \in U$ olduğunda $r\cdot u_2 + (1-r)\cdot u_1 \in U$ olmasıdır.

[18]'deki "konveks koniler" kavramı ile [19]'daki "hemen hemen lineer uzaylar(almost linear)" kavramları ile buradakiler arasındaki farklılığa dikkat edin. Bunlar için ikinci dağılabilme yasası bir aksiyom olarak gereklidir. $\mathcal{P}(Z)$ ile birlikte, $P(Z)$'nin altkümeleri olan $\mathcal{P}_C^a$ ve $\mathcal{Q}_C^a$ Minkowski toplam ve negatif olmayan reellerle çarpma işlemleri ile birlikte konlineer uzaylardır, ancak sadece $\mathcal{Q}_C^a$ hemen hemen lineer [19] ve konveks konidir [18]. Eğer toplam, $\oplus$ işlemine göre ve buna bağlı olarak çarpım da değişirse,((1) ifadesine bakın). $\mathcal{P}_C^t$ ve $\mathcal{Q}_C^t$ konlineerdir. Ancak sadece $\mathcal{Q}_C^t$, hemen hemen bir lineer uzaydır ve bir konveks konidir. Konlineer uzayların başka önemli örnekleri, üstten kapalı kümelerin infimal kümelerinin ailesidir([37, 39]'ye bakabilirsiniz).

Pozitif sayılarla çarpma işleminin ikinci dağılma özelliğinin de sağlandığı değişmeli yarı gruplar için Rubinov "Yarı lineer uzay (semilinear space)" ifadesini kullanmıştır [49]. Ancak sıfır elemanı için bir şart belirtmemiştir.

$\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}_C^t$'de supremum ve infimum için kurallar aşağıdaki önermede verilmiştir. $(\mathcal{P}_C^a, \supseteq)$ ve $(\mathcal{Q}_C^a, \supseteq)$ için kurallar benzer şekilde elde edilebilir.

Tanım 2.4. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ *olsun.*

- *Bir* $M \in \mathcal{P}(Z)$, *her* $A \in \mathcal{A}$ *için* $M \preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C) A$ *ve her* $K \preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C) M$ *olacak şekilde* $K \preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C) A$ *şartını sağlıyorsa* M*'ye* $\mathcal{A}$*'nın* $\preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C)$ *sıralamasına göre* ***en büyük alt sınırı*** *denir,* $\inf(\mathcal{A}, \preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C))$ *ile gösterilir.*
- *Bir* $M \in \mathcal{P}(Z)$, *her* $A \in \mathcal{A}$ *için* $A \preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C) M$ *ve* $M \preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C) K$ *olacak şekilde her* K *için* $A \preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C) K$ *oluyorsa* M*'ye* $\mathcal{A}$*'nın* $\preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C)$ *sıralamasına göre* ***en küçük üst sınırı*** *denir,* $\sup(\mathcal{A}, \preccurlyeq_C (\curlyeqprec_C))$ *ile gösterilir.*

Önerme 2.5. *(i)*$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ *ve* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ *verisin. O halde,*

$$\inf\{\mathcal{A}, \preccurlyeq_C\} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A + C, \quad \sup\{\mathcal{A}, \preccurlyeq_C\} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A+C),$$

ve

$$\inf\{\mathcal{B}, \preccurlyeq_C\} = \bigcap_{B\in\mathcal{B}} (B - C), \quad \sup\{\mathcal{B}, \preccurlyeq_C\} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B - C.$$

(ii)$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}_C^t$ *olsun. O halde*

$$\inf\{\mathcal{A}, \supseteq\} = cl\ co \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A, \quad \sup\{\mathcal{A}, \supseteq\} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Eğer $\mathcal{A}$, $\mathcal{Q}_C^t$ *konlineer uzayının bir konveks altkümesi ise konveks örtü infimum formülünden çıkarılabilir.*

Kanıt. Kanıt için [37]'ye bakabilirsiniz. Kanıtlar kolayca sonlu boyutlu uzaylara aktarılır. □

Tüm infimum ve supremum kümeleri (değerleri) bu uzayların elemanlarıdır. Örnek olarak $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}_C^t$ olduğunda $\inf\{\mathcal{A}, \supseteq\}$, $sup\{\mathcal{A}, \supseteq\} \in \mathcal{Q}_C^t$ olur. Diğerleri de benzer şekilde görülebilir. Dolayısıyla Önerme 2.5'deki formüller, $(\mathcal{Q}_C^t, \supseteq)$'nin bir tam kafes (lattice) olduğunu gösterir.

$(\mathcal{Q}_C^a(Z), \supseteq)$, $\mathcal{P}_C^a$'nın sıralı konlineer alt uzayıdır. Önerme 2.6 ışığında bir $f : X \to (\mathcal{P}(Z), \preccurlyeq_C)$ fonksiyonunun konveks örtüsünü $co\ f : X \to \mathcal{Q}_C^a(Z)$ ile tanımlarsak $epi(co\ f) = co(epi\ f)$ şartını sağlar. Yani,

$$z \in epi(co\ f)(x) \Leftrightarrow (x, z) \in co(epi\ f)$$

olur. Bu işlem, küme değerli bir f fonksiyonu verildiğinde üstten konveks değerlere sahip bir fonksiyon üretir.

Aşağıdaki tanımda küme değerli fonksiyonlar için sublineerlik tanımının bir genellemesi verilmiştir.

Tanım 2.5. $f : X \to (\mathcal{P}_C^a(Z), \supseteq)$ *olmak üzere,*

- *Her* $x_1, x_2 \in X$ *için* $f(x_1 + x_2) \supseteq f(x_1) + f(x_2)$ *oluyorsa,* f *fonksiyonu* ***alt toplamsaldır*** *denir.*
- *Her* $t > 0$, $x \in X$ *için* $f(tx) \supseteq tf(x)$ *oluyorsa,* f *fonksiyonu* ***pozitif homojendir*** *denir.*
- *Alt toplamsal ve pozitif homojen ise,* f *fonksiyonu* ***sublineerdir*** *denir.*

Örnek 2.7. *Mutlak değerin üst kısmı (*$C = [0, \infty)$ *olmak üzere* $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f(x) = [|x|, \infty)$*) fonksiyonu alttoplamsal ve pozitif homojendir.Dolayısıyla sublineerdir.*

$f : X \to (\mathcal{P}_C^a(Z), \supseteq)$ pozitif homojen olması için gerekli ve yeterli bir şart her $t > 0$ ve $x \in X$ için $f(tx) = tf(x)$ olmasıdır. Gerçekten, pozitif homojenlik maddesinde önce t

yerine $\frac{1}{t}$, sonrasında da $y = \frac{x}{t}$ alırsak diğer kapsamı elde ederiz. Yani;

$$f\left(\frac{x}{t}\right) \supseteq \frac{f(x)}{t} \Rightarrow tf\left(\frac{x}{t}\right) \supseteq f(x) \Rightarrow tf(y) \supseteq f(ty)$$

olur.

Tanım 2.5'deki kavramların $f(0)$ kümesine ve f'nin grafiğine etkileri aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.6. *$f : X \to \mathcal{P}_C^a(Z)$ olmak üzere,*

a) f pozitif homojen ise $f(0)$ bir konidir.

b) f alt toplamsal ise $f(0)$ toplama işlemine göre kapalıdır.

c) f sublineer ise $f(0)$, her $x \in domf$ için $f(0) \subset 0^+ \cdot f(x)$ şartını sağlayan bir konveks konidir.

d) Bir $f : X \to \mathcal{P}_C^a(Z)$ fonksiyonunun sublineer olması için gerekli ve yeterli bir şart

$$graf\ f = \{(x,z) \in X \times Z : z \in f(x)\}$$

kümesinin konveks koni olmasıdır.

Kanıt. a) $t \geqslant 0$ ve $x = 0$ için,

$$f(t0) = tf(0) \Rightarrow f(0) = tf(0)$$

olur.

b) $y_1, y_2 \in f(0)$ alalım:

$$y_1 + y_2 \in f(0) + f(0) \subset f(0) \Rightarrow y_1 + y_2 \in f(0)$$

olur, o halde $f(0)$ toplama işlemine göre kapalıdır.

c) f sublineer olsun. Bu durumda f alt toplamsal ve pozitif homojendir. f pozitif homojen olduğundan $f(0)$ bir konidir ((a)'dan). Alt toplamsallıktan $y_1, y_2 \in f(0)$ ve $\alpha > 0$ için

$$\underbrace{\alpha y_1}_{\in f(0)} + \underbrace{(1-\alpha)y_2}_{\in f(0)} \in f(0) \Rightarrow f(0) \text{ konveks}$$

dir. O halde $f(0)$ konveks konidir.

d) $(\Rightarrow) : (x,z) \in graf\ f,\ t > 0$ için pozitif homojenlikten,

$$t \cdot f(x) = f(tx) \Rightarrow t \cdot z \in f(tx) \Rightarrow (tx, tz) \in graf\ f$$

olur. Bu da $graf\ f$'nin koni olduğunu gösterir.

$$(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in graf\ f \Rightarrow z_1 \in f(x_1), z_2 \in f(x_2)$$

olduğundan ve alt toplamsallıktan,

$$z_1 + z_2 \in f(x_1) + f(x_2) \subseteq f(x_1 + x_2)$$

olur. Dolayısıyla,

$$(x_1 + x_2, z_1 + z_2) \in graf\ f \Rightarrow graff + graf\ f \subseteq graf\ f$$

dir. Yani $graff$ konvekstir.
$(\Leftarrow)$: $graf\ f = \{(x, z) \in X \times Z : z \in f(x)\}$ konveks koni ve $x_1,\ x_2 \in X$ olsun:

$$\underbrace{f(x_1)}_{z_1 \in f(x_1)} + \underbrace{f(x_2)}_{z_2 \in f(x_2)} \subseteq f(x_1 + x_2)$$

olur. $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in graf\ f$ olacak şekilde,

$$\begin{aligned} (x_1, z_1) + (x_2, z_2) &= (x_1 + x_2, z_1 + z_2) \in graf\ f + graf\ f \\ &= (x_1 + x_2, z_1 + z_2) \in graf\ f \\ z_1 + z_2 &\in f(x_1) + f(x_2) \subseteq f(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

olur. O halde f fonksiyonu sublineerdir.

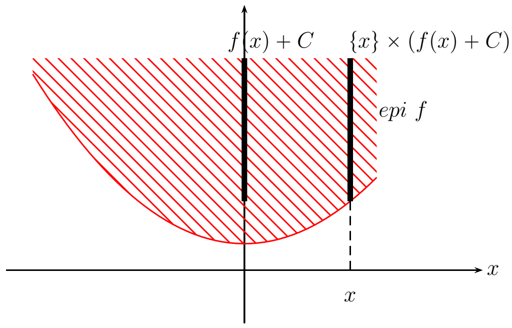
□

Bundan sonraki kısımda X ve Z ayrılmış $(x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists x^* \in X^*, x^*(x) \neq x^*(y))$, yerel konveks (uzayın her elemanının (veya denk olarak θ'nın) konveks bir komşuluk tabanı vardır.) topolojik vektör uzayları olsun. Bu uzayların topolojik dualleri sırasıyla X^* ve Z^* olsun. $X^* : X \to \mathbb{R}$ tanımlı sürekli lineer dönüşümlerin uzayıdır. Z^* da benzer şekilde elde edilir. $x^* \in X^*$ fonksiyonunun $x \in X$'teki değeri $x^*(x)$ ve $z^* \in Z^*$ fonksiyonunun $z \in Z$'deki değeri $z^*(z)$'dır.

Tanım 2.6. *$f : X \to (\mathcal{P}(Z), \preccurlyeq_C)$ fonksiyonu, $epif$, $X \times Z$ çarpım topolojisine göre kapalı küme ise f fonksiyonuna **kapalıdır** denir.*

Önerme 2.7. *$f : X \to (\mathcal{P}(Z), \preccurlyeq_C)$ fonksiyonu kapalı ise her $x \in X$ için $f(x) + C$ kapalıdır.*

Kanıt. $(\{x\} \times Z) \cap epif = \{x\} \times (f(x) + C)$
$\{x\}$ tek nokta kümesi kapalıdır, Z uzayı kapalıdır. Dolayısıyla $\{x\} \times Z$ kapalıdır. Kapalı kümelerin kesişimi kapalı olduğundan $\{x\} \times (f(x) + C)$ kapalıdır. Buradan $(f(x) + C)$ izdüşümün çarpım topolojisine göre sürekliliğinden kapalıdır.(Şekil 2.9'da da görülebilir.)



Şekil 2.9: $(\{x\}\times Z)\cap epi\ f = \{x\}\times(f(x)+C)$ eşitliğinin geometrisi

$\square$

Üstten konveks küme ailesine benzer şekilde üstten kapalı alt kümelerin ailesini de tanımlayabiliriz. $f : X \to (\mathcal{P}^a_C(Z), \preccurlyeq_C)$ kapalı bir fonksiyon ise f'nin değerleri $A = cl(A+C)$ olacak şekildeki $A \subseteq Z$ kümeleridir. Dolayısıyla Z'nin üstten kapalı alt kümelerinin ailesi,

$$\mathcal{P}^t_C(Z) = \{A \in \mathcal{P}(Z) : A = cl(A+C)\}$$

şeklinde tanımlanır.

$A + B \in \mathcal{P}^t_C(Z)$ için Minkowski toplamını ve $0 \in \mathbb{R}$ ile çarpımını sırasıyla,

$$A \oplus B = cl(A+B),\ \ 0\cdot A = cl\ C \tag{2.1}$$

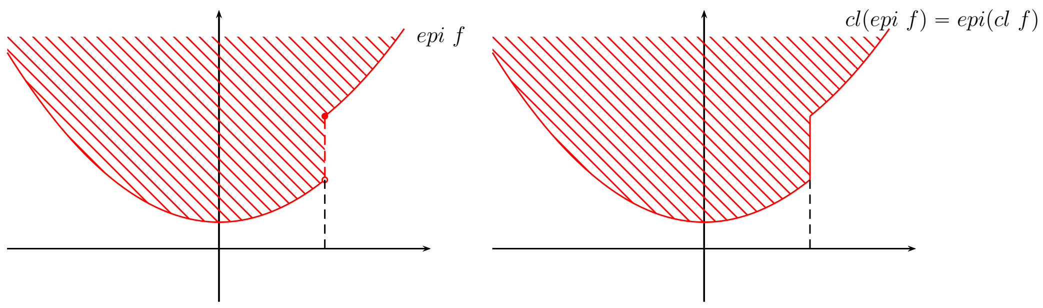
olacak şekilde kabul edelim.

$(\mathcal{P}^t_C(Z), \supseteq)$ negatif olmayan reel sayılar ile çarpma ve toplama işlemini bu şekilde tanımladığımızda sıralı konlineer uzay olur.

Küme değerli bir $f : X \to (\mathcal{P}(Z), \preccurlyeq_C)$ fonksiyonun kapanışı fonksiyonu $cl\ f : X \to \mathcal{P}^t_C(Z)$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda

$$epi(clf) := cl(epif)$$

eşitliği sağlanır. Yani $z \in (clf)(x) \Leftrightarrow (x,z) \in cl(epif)$ elde edilir (Şekil 2.10'da gösterilmiştir.). Bu işlemler üstten kapalı değerleri olan bir fonksiyon üretir. Bunu grafik üzerinde görelim.



Şekil 2.10: $epi\ f$ ve $cl(epi\ f)$ kümeleri

$f : X \to (\mathcal{P}(Z), \preccurlyeq_C)$ kapalı konveks fonksiyonunun $f(x) = cl\ co(f(x) + C)$'yi sağlayan değerleri vardır. Dolayısıyla Z'nin üstten kapalı konveks altkümelerinin ailesini,

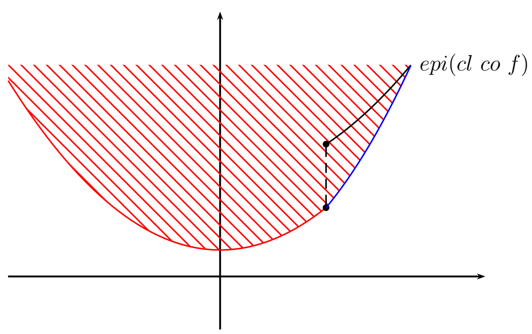
$$\mathcal{Q}_C^t(Z) = \{A \in \mathcal{P}(Z) : A = cl\ co(A + C)\}$$

ile tanımlarız. $(\mathcal{Q}_C^t(Z), \supseteq), (\mathcal{P}_C^t(Z), \supseteq)$'nın sıralı konlineer alt uzayıdır.

Bir $f : X \to (\mathcal{P}(Z), \preccurlyeq_C)$ fonksiyonunun kapalı konveks örtüsü,

$$epi(cl\ cof) = cl\ co(epif)$$

ile tanımlanır (Şekil 2.11'de gösterilmiştir.). Yani, $z \in epi(cl\ co\ f)(x) \Leftrightarrow (x, z) \in cl\ co\ (epi\ f)$ olur. Bu işlem üstten kapalı konveks değerli fonksiyon üretir.



Şekil 2.11: $epi(cl\ co\ f)$ kümesi

Uyarı 2.8. *Bir $f : X \to \mathcal{P}(Z)\backslash\{\varnothing\}$ fonksiyonu verildiğinde(tek değerli olsa bile) fonksiyonun co, cl, cl co işlemleri değer kümeleri sırasıyla $\mathcal{Q}_C^a(Z)$, $\mathcal{P}_C^t(Z)$ ve $\mathcal{Q}_C^t(Z)$ olan fonksiyonları üretir.*

Tanım 2.7. *[49] $E = (E, \leqslant)$ ve $F = (F, \leqslant)$ tam kafes olsun. Her bir I indeks kümesi için ($I = \varnothing$ de dahil) $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq E$ olmak üzere*

$$\Delta\left(\inf_{i \in I} x_i\right) = \sup_{i \in I} \Delta(x_i)$$

*ise $\Delta : E \to F$ dönüşümüne bir **duallik** denilir.*

Tanım 2.8. *[49] E, F tam kafes ve $\Delta : E \to F$ bir dönüşüm olsun. Δ **dönüşümünün duali** $\Delta' : F \to E$,*

$$\Delta'(z) = \inf\{x \in E | \Delta(x) \leqslant z\} \quad (z \in F)$$

ile tanımlanır.

Uyarı 2.9. *$f : X \to \mathcal{P}(Z)$ fonksiyonunun konvekslik gibi özellikleri C konisi ile ilişkilidir. Basitçe, bir f fonksiyonu konveks bir C konisine göre konveks iken(kapalıyken ve ya has(proper) iken) başka bir C konisine göre konveks olmayabilir. Ek olarak, $f : X \to \mathcal{Q}_C^a(Z)$ konveks ise $(-f)(x) = -f(x)$ şeklinde tanımlanan $-f$ fonksiyonu*

$$\mathcal{Q}_a^C(Z) := \{A \in \mathcal{P}(Z) : A = co(A - C)\}$$

değer kümesi ve $\subseteq$ sıralaması ile konkav bir fonksiyondur.

Burada (-1) ile çarpım [51]'deki Tanım-5.1 ile $\Delta : \mathcal{Q}_C^a \to \mathcal{Q}_a^C$ bir ikilik şeklinde anlaşılabilir.

$$A \in \mathcal{Q}_C^a(Z) \Leftrightarrow -A \in \mathcal{Q}_a^C(Z)$$

olur. $A = co(A + C)$ ise $-A = co(-A - C)$'dir.

Bundan sonraki kısımda $\mathcal{P}_C^a(Z)$'yi $\mathcal{P}_C^a$ olarak kısaltıp $\mathcal{P}(Z)$'nin diğer konlineer alt uzayları için de benzer kısaltmaları kullanacağız. $f : X \to (\mathcal{P}_C^a, \supseteq)$ fonksiyonu için etkin tanım kümesini,

$$dom\ f = \{x \in X | f(x) \neq \varnothing\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlayacağız. $\varnothing$'nin $\mathcal{P}_C^a$'nin en büyük elemanı olduğuna dikkat ediniz.

Bu bölüme küme değerli fonksiyonlar için haslık kavramı ile devam edelim.

Tanım 2.9. *Bir $f : X \to (\mathcal{P}_C^a, \supseteq)$ fonksiyonu verilsin. $dom\ f \neq \varnothing$ ve her $x \in domf$ için $f(x) \neq Z$ ise f'ye **has(proper) fonksiyon** denir. $dom\ f \neq \varnothing$ ve her $x \in domf$ için $(f(x) - C) \backslash f(x) \neq \varnothing$ ise f'ye C**-has(C-proper) fonksiyon** denir.*

C üretici(generating, $C - C = Z$) olduğu durumda ise bu iki has kavramı aynıdır.

Burada aşağıdaki önermede kullanacağımız göreceli iç (relative interior) kavramından biraz bahsedilebilir. $A \subseteq Z$ için

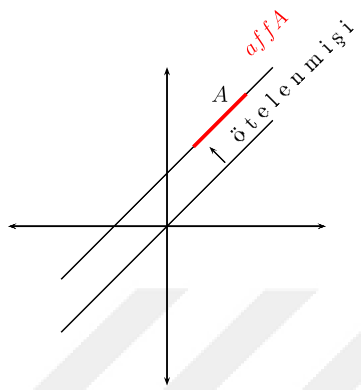
$$aff\ A = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha + \beta = 1,\ x, y \in A\}$$

kümesine A'nın **afin (affine) örtüsü** denir. Bir kümenin afin örtüsü o kümeyi kapsayan en dar afin uzaydır. Kümenin bu uzaya indirgenen topolojiye göre içi yani

$$ri\ A = \{x : \exists\ \mathcal{E} \text{ öyleki } (B(x, \mathcal{E}) \cap aff\ A) \subset A\}$$

kümesi **göreceli iç** olarak tanımlanır. A konveks ise riA boş değildir. Bu özellikler ile ilgili daha fazla bilgi için konveks analiz kitaplarına bakılabilir [26, 48].

Şekil 2.12'de bir kümenin göreceli içi geometrik olarak da görebilmiştir. Şekilde A'nın iç noktaları kümesi boş kümedir. A'nın uç noktaları hariç, aradaki tüm noktalar, göreceli içtir. (A'nın afin örtüsündeki iç noktalar olduğundan)



Şekil 2.12: ri A'nın geometrik gösterimi

Önerme 2.10. *$f : X \to (\mathcal{Q}_C^t, \supseteq)$ konveks ve $K \subseteq Z$ bir koni olsun. $f(x_0) + K \subseteq f(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in dom\ f$ varsa her $x \in ri(dom\ f)$ için, $f(x) + K \subseteq f(x)$ olur.*

Kanıt. $x \in ri(dom\ f)$ alalım. O halde öyle bir $r > 0$ vardır ki

$$x' = x + r(x - x_0) = (1 - r)x + rx_0 \in dom\ f$$

olur. Buradan, $s := \frac{r}{1+r}$ olarak tanımlarsak $s \in (0, 1)$ elde ederiz. Dolayısıyla f'nin konveksliğinden,

$$f(x) \supseteq sf(x_0) + (1 - s)f(x') \supseteq sf(x_0) + (1 - s)f(x') + K$$

olur. $f(x') \neq \emptyset$ olduğundan $z' \in f(x')$ alabiliriz. O halde bir $z_0 \in f(x_0)$ için

$$sz_0 + (1 - s)z' + K \subseteq f(x)$$

olur. K bir konidir ve $f(x)$ konvekstir. Her $t \in (0, 1)$ ve $z \in f(x)$ için,

$$t[sz_0 + (1 - s)z' + K] + (1 - t)z = t[sz_0 + (1 - s)z'] + (1 - t)z + K \subseteq f(x)$$

olur. Her $z \in f(x)$, $t \to 0$ için limit alınırsa $z + K \subseteq f(x)$ olur. Çünkü $f(x)$ kapalıdır. Dolayısıyla $f(x) + K \subseteq f(x)$ olur.

Önerme 2.10 gösterir ki; $\mathcal{Q}_C^t$'ye tanımlı bir konveks fonksiyon için fonksiyonun değerlerinin asimptotik konisi(recession cone) (A'nın asimptotik konisi $A_\infty = \{k \in Z : \forall t > 0,\ \forall a \in A \text{ için } a + tk \in A\}$) tüm $ri(dom\ f)$ üzerinde aynıdır

([38]'e bakabilirsiniz.). Ek olarak, buradaki fonksiyon bir $x_0 \in X$ için $f(x_0) = Z$ olacak şekilde ise her $x \in ri(dom\ f)$ için $f(x) = Z$ ($K = Z$ durumu) olur. $\square$

Önerme 2.11. *$K \subseteq Z$ bir koni, $f : X \to (\mathcal{Q}_C^t, \supseteq)$ konveks bir fonksiyon ve $graf\ f$, $X \times Z$'de dizisel kapalı olsun. $f(x_0) + K \subseteq f(x_0)$ olacak şekilde bir $x_0 \in dom\ f$ varsa her $x \in dom\ f$ için $f(x) + K \subseteq f(x)$ olur.*

Kanıt. $z_0 \in f(x_0),\ x \in dom\ f,\ z \in f(x)$ ve $k \in K$ olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(x, z) \in graf\ f \text{ ve } (x_0, z_0 + nk) \in graf\ f$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $graf\ f$'in konveksliğinden,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n}(x_0, z_0 + nk) + (1 - \tfrac{1}{n})(x, z) &= \tfrac{1}{n}(x_0, z_0 + nk) + \tfrac{n-1}{n}(x, z) \\ &= (\tfrac{1}{n}x_0 + \tfrac{n-1}{n}x, \tfrac{1}{n}z_0 + \tfrac{n-1}{n}z + k) \in graf\ f \end{aligned}$$

$$n \to \infty \quad \text{iken} \quad \left(\underbrace{\frac{1}{n}x_0}_{\to\theta} + \underbrace{\frac{n-1}{n}x}_{\to x},\ \underbrace{\frac{1}{n}z_0}_{\to\theta} + \underbrace{\frac{n-1}{n}z}_{\to z} + k \right) \in graf\ f$$

ve dolayısıyla $(x, z + k) \in graf\ f$ olur. Yani her $z \in f(x)$ ve her $k \in K$ için $f(x) + K \subseteq f(x)$ olur. $\square$

Örnek 2.8. *$M \subseteq \mathcal{Q}_C^t$, bir $M \subseteq X$ kümesinin $\mathcal{I}_M : X \to \mathcal{Q}_C^t$, $\mathcal{Q}_C^t$-değerli işaret fonksiyonu;*

$$\mathcal{I}_M(x) = \begin{cases} clC, & x \in M \\ \emptyset, & x \notin M \end{cases}$$

olmak üzere,

a) $\mathcal{I}_M(x)$ fonksiyonunun has fonksiyon olması için gerekli ve yeterli bir şart $M \neq \emptyset$ olmasıdır,

b) $\mathcal{I}_M(x)$ fonksiyonunun C-has fonksiyon olması için gerekli ve yeterli bir şart $M \neq \emptyset$ olması ve C'nin bir lineer alt uzay olmamasıdır,

c) $\mathcal{I}_M(x)$ fonksiyonunun kapalı olması için gerekli ve yeterli bir şart M'nin kapalı olmasıdır.

d) $\mathcal{I}_M(x)$ fonksiyonunun konveks olması için gerekli ve yeterli bir şart M'nin konveks olmasıdır.

Şimdi bu maddelerin doğru olduğunu gösterelim:

a) ($\Rightarrow$): Kabul edelim ki $\mathcal{I}_M(x)$ fonksiyonu has fonksiyon ve $M = \emptyset$ olsun. $M = \emptyset$ ise her $x \in X$ için $\mathcal{I}_M(x) = \emptyset$ olur. Yani $\mathcal{I}_M(x)$ has fonksiyon değildir.

O halde $M \neq \varnothing$ *olmalıdır.*
$(\Leftarrow) : M \neq \varnothing$ *olsun. Bu durumda* $\mathcal{I}_M(x)$ *fonksiyonunun has fonksiyon olduğunu gösterelim.*
$M \neq \varnothing$ *ise* $\exists x \in X$ *için* $\mathcal{I}_M(x) = cl\ C \neq Z$
$\mathcal{I}_M(x) \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in dom(\mathcal{I}_M) \neq \varnothing$ *ve* $\mathcal{I}_M(x) \neq Z$ *olduğundan* $\mathcal{I}_M(x)$ *has fonksiyondur.*

b) C*-has fonksiyon tanımından* $dom(\mathcal{I}_M) = M$*'dir.*
$\mathcal{I}_M$ *fonksiyonu* C*-has olsun. O halde* $dom(\mathcal{I}_M) \neq \varnothing$ *ve* $\exists x \in dom(\mathcal{I}_M)$ *için* $(\mathcal{I}_M(x) - C)\backslash\{\mathcal{I}_M(x)\} \neq \varnothing$*'dir.*
$(\Rightarrow) : \mathcal{I}_M,$ C*-has fonksiyon olsun. Bu durumda* $dom(\mathcal{I}_M) \neq \varnothing$ *olur. Kabul edelim ki* C *lineer alt uzay olsun.* C *bir koni olduğu durumda*

$$C \text{ lineer alt uzay } \Leftrightarrow C = -C$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda

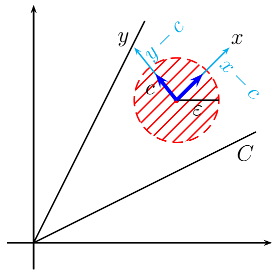
$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_M(x) - C)\backslash\{\mathcal{I}_M(x)\} &= (cl\ C - C)\backslash\{cl\ C\}\ (C = -C \text{ olduğundan})\\ &= (\underbrace{cl\ C + C}_{cl\ C})\backslash\{cl\ C\}\ (C \text{ konveks koni olduğundan})\\ &= cl\ C\backslash cl\ C\\ &= \varnothing\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla C *lineer alt uzay olamaz.*
$(\Leftarrow) : M \neq \varnothing$ *olsun ve* C *lineer alt uzay olmasın.* $M \neq \varnothing$ *olduğundan* $dom(\mathcal{I}_M) \neq \varnothing$ *olur.* C *lineer alt uzay olmadığından* $C \neq -C$*'dir.* C *konveks* $\Leftrightarrow ri\ C \neq \varnothing$ *olduğundan* $\exists c \in ri\ C\backslash(-C)$ *öyle ki*

$$\underbrace{\theta - c}_{\in cl\ C - C} \notin cl\ C \Rightarrow -c \in (cl\ C - C)\backslash\{cl\ C\} \neq \varnothing$$

olur. Dolayısıyla $(\theta - c) \in (cl\ C - C)$ *olur.*

$c \in ri\ C \cap (-C)$ *olsun. Bu durumda* $\exists\ \varepsilon > 0$ *öyle ki* $B(c, \varepsilon) \cap aff\ C \subset C$ *olur. Burada* $aff\ C = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in C\}$*'dır.*
C *koni ise* $aff\ C$ *bir alt uzaydır.*
($x \in C$ *ise* $x = y$ *ve* $\alpha = -\beta$ *alırsak* $\alpha x + \beta y = \alpha x - \alpha x = \theta \in aff\ C$ *olduğundan* $aff\ C$ *bir alt uzaydır.)*



Şekil 2.13: $\frac{y-c}{\|y-c\|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{x-c}{\|x-c\|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$ vektörlerinin elde edilişi

$(\alpha x+\beta y)\in aff\ C, x, y\in C$ *için*
$\frac{y-c}{\|y-c\|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{x-c}{\|x-c\|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\in B(x,\varepsilon)\cap aff\ C$ *olur. (Şekil 2.13'den görülebilir.)*

$t=\frac{\alpha\varepsilon}{\|x-c\|\cdot 2}$ *ve* $k=\frac{\beta\varepsilon}{\|y-c\|\cdot 2}$ *diyelim.*

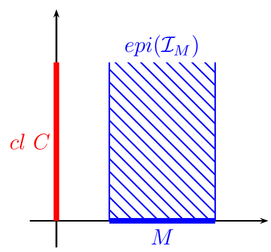
$t\cdot t_x+k\cdot k_y=(\alpha x+\beta y)\in C$
Dolayısıyla C bir alt uzaydır.
$x\in M$ *için* $-c\in(cl\ C\backslash C)\backslash(cl\ C)$ *olduğundan* $(cl\ C\backslash C)\backslash(cl\ C)\neq\varnothing$ *olur. Yani* $\mathcal{I}_M, C$*-has fonksiyondur.*

c) $(\Rightarrow)$*:* $\mathcal{I}_M$ *kapalı olsun. Her* $x\in M$ *için* $\mathcal{I}_M(x)=cl\ C$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} epi\ f &= \{(x,z)\in X\times Z : z\in \underbrace{f(x)}_{cl\ C}+C\}\\ &= \{(x,z)\in X\times Z : z\in \underbrace{cl\ C+C}_{cl\ C}\}\\ &= \{(x,z)\in X\times Z : z\in cl\ C\}\\ &= \underbrace{M}_{kapalı}\times\underbrace{cl\ C}_{kapalı}\end{aligned}$$

kapalı ve $\pi_x(epi\ f)=M$ *(π_x iz düşüm fonksiyonu) olur. Yani epi f ve cl C kapalı olduğundan M de kapalıdır. (Şekil 2.14'de gösterilmiştir.)*

$(\Leftarrow)$ *: M kapalı olsun. Kapalı kümelerin kartezyen çarpımları kapalı olduğundan* $M=\pi_x(epi\ f)=M\times cl\ C$ *kapalı olur. Bu durumda epi f, dolayısıyla da $\mathcal{I}_M$ kapalı olur.*



Şekil 2.14: $M\times cl\ C$ geometrik gösterimi

d) $(\Rightarrow): \mathcal{I}_M$ *konveks olsun. Her* $x_1, x_2 \in M,\ t \in (0,1)$ *için,*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_M(tx_1 + (1-t)x_2) &\preccurlyeq_C t\mathcal{I}_M(x_1) + (1-t)\mathcal{I}_M(x_2) \\ \underbrace{t\mathcal{I}_M(x_1) + (1-t)\mathcal{I}_M(x_2)}_{cl\ C} &\subseteq \underbrace{\mathcal{I}_M(tx_1 + (1-t)x_2)}_{\varnothing} + C \\ cl\ C &\subseteq \varnothing + C \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \in M, t \in (0,1)$ *için* $tx_1 + (1-t)x_2 \in M$ *olduğunu gösterelim:*
$x_1, x_2 \in M,\ t \in (0,1)$ *için* $tx_1 + (1-t)x_2 \notin M$ *olsun. Bu durumda* $\mathcal{I}_M(tx_1 + (1-t)x_2) = \varnothing$ *olur. O halde,*

$$t \cdot \mathcal{I}_M(x_1) + (1-t)\mathcal{I}_M(x_2) \subset \varnothing + C$$

elde ederiz. Bu ise bir çelişkidir. Yani,

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in M$$

olur. Dolayısıyla M *konvekstir.*
$(\Leftarrow): M$ *konveks,* $x_1, x_2 \in X$ *ve* $t \in (0,1)$ *olsun.*
$x_1, x_2 \notin M$ *için* $\mathcal{I}_M(x_1) = \varnothing$ *ve* $\mathcal{I}_M(x_2) = \varnothing$ *olduğundan,*

$$t \cdot \mathcal{I}_M(x_1) + (1-t)\mathcal{I}_M(x_2) = \varnothing \subset \varnothing,$$

$x_1 \in M$ *ve* $x_2 \notin M$ *için* $\mathcal{I}_M(x_1) = cl\ C$ *ve* $\mathcal{I}_M(x_2) = \varnothing$ *olduğundan,*

$$t \cdot \mathcal{I}_M(x_1) + (1-t)\mathcal{I}_M(x_2) = \varnothing,$$

$x_1, x_2 \in M$ *için* $\mathcal{I}_M(x_1) = cl\ C$ *ve* $\mathcal{I}_M(x_2) = cl\ C$ *olduğundan*

$$t \cdot \mathcal{I}_M(x_1) + (1-t)\mathcal{I}_M(x_2) = cl\ C \tag{2.3}$$

elde ederiz.
$x_1, x_2 \in M$ *ise* M *konveks olduğundan* $tx_1 + (1-t)x_2 \in M$ *olur.*

$$\mathcal{I}_M(tx_1 + (1-t)x_2) = cl\ C \tag{2.4}$$

olur. (2.3) ve (2.4)'den

$$t \cdot \underbrace{\mathcal{I}_M(x_1) + (1-t)\mathcal{I}_M(x_2)}_{cl\ C} \subseteq \underbrace{\underbrace{\mathcal{I}_M(tx_1 + (1-t)x_2)}_{cl\ C} + C}_{cl\ C}$$

olur. Dolayısıyla $\mathcal{I}_M$ *konvekstir.*

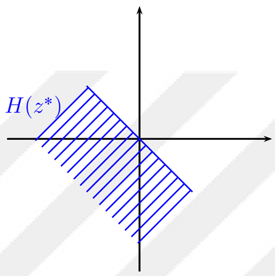
X reel vektör uzayı,

- $f : X \to \mathbb{R}$ ve f lineer $\Leftrightarrow f \in X^*$(cebirsel dual)
- $f : X \to \mathbb{R}$ ve f lineer, sınırlı(sürekli) $\Leftrightarrow f \in X^*$(dual=topolojik dual)

X üzerinde reel değerli sürekli lineer fonksiyoneller için küme değerli yeni bir fonksiyon kümesi tanımlayalım. $z^* \in Z^* \backslash \{\theta\}$ olsun.

$$H(z^*) = \{z \in Z : z^*(z) \leqslant 0\}$$

ifadesi Z'de bir kapalı yarı uzaydır. z^* sürekli, $H(z^*) = (z^*)^{-1}((-\infty, 0])$ kapalı olduğundan $(z^*)^{-1} = \{z \in Z : z^*(z) \in (-\infty, 0]\}$ olur. Bu durumda $z \in H(z^*)$ veya $-z \in H(z^*)$'dır. Bu nedenle yarı alt uzaydır. (Şekil 2.15'de gösterilmiştir.)



Şekil 2.15: $\{z \in \mathbb{R}^2 :< z, z^* >\leqslant 0\}$

C konisinin negatif duali,

$$C^* = \{z^* \in Z^* : \forall z \in C : z^*(z) \leqslant 0\}$$

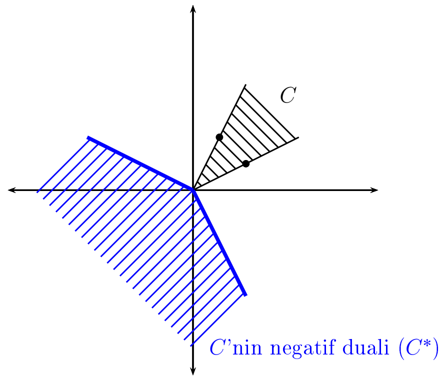
kümesidir.

C^*'ın koni olduğunu gösterelim:

$z_1^* \in C^*$ ve $\lambda > 0$ için $\lambda z_1^* \in C^*$ olur. Yani, her $z \in C$ için $z^*(z) \leqslant 0$'dır. Dolayısıyla $(\lambda z_1^*)(z) = \lambda(z_1^*(z)) \leqslant 0$ olur. O halde $\lambda z_1^* \in C^*$'dır.

C^*'ın konveks olduğunu gösterelim:

$z_1^*, z_2^* \in C^*, \lambda \in (0,1)$ için $z \in C$ ise $(\lambda z_1^* + (1-\lambda)z_2^*)(z) = \lambda z_1^*(z) + (1-\lambda)z_2^*(z) \leqslant 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda z_1^* + (1-\lambda)z_2^* \in C^*$ olur. O halde C^* konvekstir.



Şekil 2.16: C'nin dualinin geometrik gösterimi

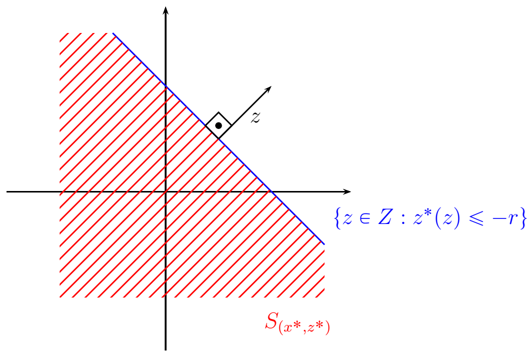
C'nin negatif duali Şekil 2.16'da gösterilmiştir.

Örnek 2.9. *X üzerinde reel değerli sürekli lineer fonksiyoneller için küme değerli yeni bir fonksiyon kümesi tanımlayalım. $(x^*, z^*) \in X^* \times (Z^* \backslash \{\theta\})$ olarak verilsin. $S_{(x^*,z^*)} : X \to \mathcal{P}(Z)$ fonksiyonu*

$$S_{(x^*,z^*)}(x) := \{z \in Z : x^*(x) + z^*(z) \leqslant 0\} \tag{2.5}$$

ile tanımlansın. (Şekil 2.17'de gösterilmiştir.) $x^*(x) = r \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned} S_{(x^*,z^*)}(x) &= \{z \in Z : r + z^*(z) \leqslant 0\} \\ &= \{z \in Z : z^*(z) \leqslant -r\} \\ &= (z^*)^{-1}((-\infty, -r]) \\ &= (z^*)^{-1}((-\infty, -x^*(x)]) \end{aligned}$$



Şekil 2.17: $S_{(x^*,z^*)}$'ın geometik gösterimi

Önerme 2.12. $(x^*, z^*) \in X^* \times (Z^* \backslash \{\theta\})$ *olsun. O halde,*

i) Her $x \in X$ *için* $\{\theta\} = 0 \cdot S_{(x^*,z^*)}(x) \subseteq S_{(x^*,z^*)}(\theta) = H(z^*)$ *olur.*

ii) Her $x \in X$ *ve her* $t > 0$ *için,* $S_{(x^*,z^*)}(tx) = t \cdot S_{(x^*,z^*)}(x)$ *olur.*

iii) Her $x_1, x_2 \in X$ *için,* $S_{(x^*,z^*)}(x_1 + x_2) = S_{(x^*,z^*)}(x_1) \oplus S_{(x^*,z^*)}(x_2)$ *ve ayrıca,*

$$\begin{aligned} S_{(x^*,z^*)}(x) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-x) &= S_{(x^*,z^*)}(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x) \\ &= S_{(x^*,z^*)}(\theta) \\ &= H(z^*) \end{aligned}$$

olur.

iv) $(x^*, z^*) \in X^* \times (Z^* \backslash \{\theta\})$ *olsun ve* $z^*(\widehat{z}) = -1$ *olacak şekilde* $\widehat{z} \in Z$ *olsun. O halde*

$$\forall x \in X : S_{(x^*,z^*)}(x) = x^*(x)\widehat{z} + H(z^*) \tag{2.6}$$

olur.

Kanıt.

i) $S_{(x^*,z^*)}(x) \neq \emptyset$ ve $\exists z \in S_{(x^*,z^*)}$ öyleki $0 \cdot z = \theta$ olur. Dolayısıyla

$$\{\theta\} \subseteq 0 \cdot S_{(x^*,z^*)}(x)$$

olur. Kabul edelim ki $z \neq 0$ ve $z \in 0 \cdot S_{(x^*,z^*)}(x)$ olsun. Bu durumda $\exists z' \in S_{(x^*,z^*)}(x)$ öyleki $z = 0 \cdot z'$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

$S_{(x^*,z^*)}(\theta) = H(z^*)$ olduğunu gösterelim: x^* doğrusal, sınırlı(sürekli) olduğundan $x^*(0) = 0$ olur.

$$\begin{aligned} S_{(x^*,z^*)}(\theta) &= \{z \in Z : \underbrace{x^*(0)}_{0} + z^*(z) \leqslant 0\} \\ &= \{z \in Z : z^*(z) \leqslant 0\} \\ &= H(z^*) \end{aligned}$$

$\{0\} \subset S_{(x^*,z^*)}(\theta)$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} z^*(\theta) = 0 \leqslant 0 &\Rightarrow \theta \in H(z^*) \\ &\Rightarrow \{\theta\} \subset H(z^*) \end{aligned}$$

ii) $x \in X$ ve $t > 0$ alalım.($y = \frac{z}{t}$ olsun.)

$$\begin{aligned}
S_{(x^*,z^*)}(tx) &= \{z \in Z : x^*(tx) + z^*(z) \leqslant 0\} \text{ (lineerlikten t dışarı çıkabilir.)}\\
&= \{z \in Z : tx^*(x) + tz^*(\tfrac{z}{t}) \leqslant 0\} \text{ (z'yi t ile çarpıp bölelim.)}\\
&= \{z \in Z : x^*(x) + z^*(\tfrac{z}{t}) \leqslant 0\} \text{ (her tarafı t ile bölelim.)}\\
&= \{ty \in Z : x^*(x) + z^*(y) \leqslant 0\}\\
&= t\{y \in Z : x^*(x) + z^*(y) \leqslant 0\}\\
&= t \cdot S_{(x^*,z^*)}(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

iii) $x_1, x_2 \in X$ olsun.

$$\begin{aligned}
S_{(x^*,z^*)}(x_1 + x_2) &= \{z \in Z : x^*(x_1 + x_2) + z^*(z) \leqslant 0\}\\
&= \{z_1 + z_2 \in Z : x^*(x_1 + x_2) + z^*(z_1 + z_2) \leqslant 0\}\\
&= \{z_1 + z_2 \in Z : x^*(x_1) + x^*(x_2) + z^*(z_1) + z^*(z_2) \leqslant 0\}\\
&= \{z_1 \in Z : x^*(x_1) + z^*(z_1) \leqslant 0\} + \{z_2 \in Z : x^*(x_2) + z^*(z_2) \leqslant 0\}\\
&= S_{(x^*,z^*)}(x_1) + S_{(x^*,z^*)}(x_2)\\
&= cl\{S_{(x^*,z^*)}(x_1) + S_{(x^*,z^*)}(x_2)\}\\
&= S_{(x^*,z^*)}(x_1) \oplus S_{(x^*,z^*)}(x_2)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte $x_1 = x$ ve $x_2 = -x$ alırsak,

$$\begin{aligned}
S_{(x^*,z^*)}(x) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-x) &= S_{(x^*,z^*)}(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x)\\
&= S_{(x^*,z^*)}(0)\\
&= H(z^*)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

iv)

$$\begin{aligned}
S_{(x^*,z^*)}(x) &= \{z \in Z : x^*(x) + z^*(z) \leqslant 0\}\\
&= \{z \in Z : -z^*(\widehat{z}) \cdot x^*(x) + z^*(z) \leqslant 0\}\\
&= \{z \in Z : z^*(z - x^*(x) \cdot \widehat{z}) \leqslant 0\} \text{ } (y = z - x^*(x)\widehat{z} \text{ olsun})\\
&= \{(x^*(x) \cdot \widehat{z} + y) \in Z : z^*(y) \leqslant 0\}\\
&= x^*(x) \cdot \widehat{z} + \{y \in Z : z^*(y) \leqslant 0\}\\
&= x^*(x) \cdot \widehat{z} + H(z^*)
\end{aligned}$$

olur. □

Önerme 2.13. *$z^* \in Z^*\backslash\{\theta\}$ sabit olsun. $x^*, x_1^*, x_2^* \in X^*$, $t \in \mathbb{R}$ için,*

$$\{S_{(x^*,z^*)} : x^* \in X^*\}$$

kümesi,

$$S_{(x_1^*,z^*)} + S_{(x_2^*,z^*)} = S_{(x_1^*+x_2^*,z^*)}$$

ve

$$t \cdot S_{(x^*,z^*)} = S_{(t \cdot x^*,z^*)}$$

cebirsel işlemlerini sağlayan X^*'a izomorfik olan lineer bir uzaydır. Bu uzaydaki 0 elemanı her $x \in X$ için $x \mapsto H(z^*)$ sabit dönüşümüdür.

Kanıt. $x \in X, x^*, x_1^*, x_2^* \in X^*$ için,

$$\begin{aligned}
S_{(x_1^*,z^*)}(x) + S_{(x_2^*,z^*)}(x) &= \{z_1 \in Z : x_1^*(x) + z^*(z_1) \leqslant 0\} + \{z_2 \in Z : x_2^*(x) + z^*(z_2) \leqslant 0\} \\
&= \{z_1 + z_2 \in Z : x_1^*(x) + z^*(z_1) \leqslant 0,\, x_2^*(x) + z^*(z_2) \leqslant 0\} \\
&= \{z_1 + z_2 \in Z : x_1^*(x) + x_2^*(x) + z^*(z_1) + z^*(z_2) \leqslant 0\} \\
&= \{\underbrace{z_1 + z_2}_{z} \in Z : (x_1^* + x_2^*)(x) + z^*(\underbrace{z_1 + z_2}_{z}) \leqslant 0\} \\
&= \{z \in Z : (x_1^* + x_2^*)(x) + z^*(z) \leqslant 0\} \\
&= S_{(x_1^*+x_2^*,z^*)}(x)
\end{aligned}$$

olur.

$x^* \in X^*$ ve $t \in \mathbb{R}$ alalım. $t = 0$ olduğunda,

$$t \cdot S_{(x^*,z^*)} := \theta = H(z^*) = S_{(\theta,z^*)}$$

elde ederiz. $t \neq 0$ olduğunda,

$$\begin{aligned}
t \cdot S_{(x^*,z^*)} &= t \cdot \{z \in Z : x^*(x) + z^*(z) \leqslant 0\} \\
&= \{tz \in Z : x^*(x) + z^*(z) \leqslant 0\} \ (tz = y \text{ olsun.}) \\
&= \{y \in Z : x^*(x) + z^*(\tfrac{y}{t}) \leqslant 0\} \ (t \text{ ile çarparsak,}) \\
&= \{y \in Z : tx^*(x) + z^*(y) \leqslant 0\} \\
&= S_{(tx^*,z^*)}(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz. □

Önerme 2.14. *$F : X \to Z$ sürekli lineer operatör olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $Fx \in S_{(x^*,z^*)}$ olması için gerekli ve yeterli bir şart $x^* = -F^*z^*$ olmasıdır. (Burada F^*, F'in adjoint operatörüdür.)*

Kanıt.

($\Rightarrow$): $Fx \in S_{(x^*,z^*)}$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $x^*(x) + z^*(Fx) \leqslant 0$ olur. Lineerlikten $(x^* + z^*(F))(x) \leqslant 0$ şeklinde yazabiliriz.(Başka bir x değeri için $\leqslant 0$ olabilir. Bu yüzden sıfıra eşit olmalıdır.) Dolayısıyla,

$$\forall x \in X \text{ için } (x^* + z^*(F))(x) = 0$$

olur, yani

$$\begin{aligned} x^* + z^*(F) &= \theta \\ x^* &= -z^*(F) \\ x^* &= -F^* z^* \end{aligned}$$

olur.

$(\Leftarrow)$: $x^* = -F^* z^* = -z^*(F)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x^* + z^*(F) &= \theta \\ (x^* + z^*(F))(x) &= 0 \\ x^*(x) + z^*(Fx) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $Fx \in S_{(x^*,z^*)}$ olur. $\square$

Önerme 2.15. *$x^* \in X^*, z^* \in Z^* \backslash \{\theta\}$ için aşağıdaki koşullar denktir:*

i) Her $x \in X$ için $S_{(x^*,z^*)}(x) \in \mathcal{Q}_C^t$'dir. Yani, $S_{(x^*,z^*)}(.)$, X'i $\mathcal{Q}_C^t$'ye dönüştürür.

ii) $z^* \in C^*$'dır. Ek olarak $z^* \in C^* \backslash \{\theta\}$ ise $S_{(x^*,z^*)} : X \to \mathcal{Q}_C^t$ has kapalı konvekstir.

Kanıt.

(i⇒ii): $S_{(x^*,z^*)}(x) \in \mathcal{Q}_C^t$ olduğundan,

$$cl\ co(S_{(x^*,z^*)}(x) + C) \subset S_{(x^*,z^*)}(x)$$

olur. $c \in C$ için, $x = 0$ ve $z = 0$ ise $z \in S_{(x^*,z^*)}(x)$'dır. Yani,

$$0 + c \in S_{(x^*,z^*)}(\theta) + C \subseteq S_{(x^*,z^*)}(\theta)$$

$$x^*(\theta) + z^*(c) \leqslant 0 \Rightarrow z^* \in C^*$$

olur.

(ii⇒i): $z^* \in C^*$ olsun. $z \in S_{(x^*,z^*)}(x) + C$ olduğunda $\tilde{z} \in S_{(x^*,z^*)}$ ve $c \in C$ için $z = \tilde{z} + c$ olur. O halde, $x^*(x) + z^*(\tilde{z}) \leqslant 0$ ve $z^*(c) \leqslant 0$'dır. Bu iki ifadeyi taraf tarafa toplarsak lineerlikten;

$$x^*(x) + z^*(\underbrace{\tilde{z} + c}_{z}) \leqslant 0$$

olur. Bu da bize $z \in S_{(x^*,z^*)}(x)$ olduğunu verir. Dolayısıyla,

$$S_{(x^*,z^*)}(x) + C \subseteq S_{(x^*,z^*)}(x)$$

olur.

Her $x \in X$ için, $S_{(x^*,z^*)}(x)$ konvekstir:

$z_1, z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(x)$, $\lambda \in (0,1)$ için

$$\lambda(x^*(x) + z^*(z_1)) \leqslant 0$$

$$(1-\lambda)(x^*(x) + z^*(z_2)) \leqslant 0$$

eşitsizliklerini taraf tarafa topladığımızda,

$$\underbrace{\lambda x^*(x) + (1-\lambda)x^*(x)}_{x^*(x)} + \lambda z^*(z_1) + (1-\lambda)z^*(z_2) \leqslant 0$$

olur. Eşitsizliği düzenlersek ve z^*'ın lineerliğini de göz önüne alırsak,

$$x^*(x) + z^*(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \leqslant 0$$

elde ederiz. Buradan, $\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(x)$ olur.

$S_{(x^*,z^*)}(x)$ kapalıdır: $f(\cdot) = x^*(x) + z^*(\cdot)$ süreklidir. f'i bu şekilde tanımlarsak,

$$S_{(x^*,z^*)}(x) = f^{-1}((-\infty, 0])$$

olduğundan $S_{(x^*,z^*)}(x)$ kapalıdır.(Kapalı kümelerin sürekli fonksiyonlar altındaki ters görüntüleri kapalı olduğundan) $\square$

$z^* \in C^* \backslash \{\theta\}$ olsun. *dom* $f \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim: $\theta \in S_{(x^*,z^*)}(\theta) \neq \emptyset$ olduğundan $x = \theta \in dom(S_{(x^*,z^*)})$ olur. $f(x) \neq Z$ olduğunu gösterelim: $z^* \in C^* \backslash \{\theta\}$ olduğundan $\exists z \in Z$ için $z^*(z) \neq 0$ olur. Bu durumda ya $z^*(z) > 0$ ya da $z^*(z) < 0$'dır. $z^*(z) > 0$ şeklindeki z için $z \notin S_{(x^*,z^*)}(\theta)$ olur. Diğer durumda da $-z \neq S_{(x^*,z^*)}(\theta)$ olur. Diğer x'ler ve $z^* \in C^* \backslash \theta$ için $S_{(x^*,z^*)}(x)$, $S_{(x^*,z^*)}(\theta)$'nın kaydırılmışı olacağından (Önerme 2.12(iv)) bunlar da uzaya eşit değildir.

Önerme 2.16. *$S_{(x^*,z^*)}$'ın $\mathcal{Q}_C^t$'de bir fonksiyon olarak C-has olması için gerekli ve yeterli bir şart $z^* \in C^* \backslash (-C^*)$ olmasıdır.*

Kanıt. Önerme 2.15'den $S_{(x^*,z^*)}$, $\mathcal{Q}_C^t$'de değer alan bir fonksiyon olduğundan $z^* \in C^*$ olacağı açıktır. $S_{(x^*,z^*)} \in \mathcal{Q}_C^t$ olduğundan,

$$cl\ co(S_{(x^*,z^*)}(x) + C) \subset S_{(x^*,z^*)}(x)$$

olur. Dolayısıyla $z^* \in C^*$'dır.

($\Rightarrow$): $S_{(x^*,z^*)}, C$-has ve $z^* \notin C^* \backslash (-C^*)$ olsun. O halde $z^* \in C^* \cap (-C^*)$ olur. Buradan,

$$S_{(x^*,z^*)}(x) = S_{(x^*,z^*)}(x) - C$$

olur. Buradan da her x için,

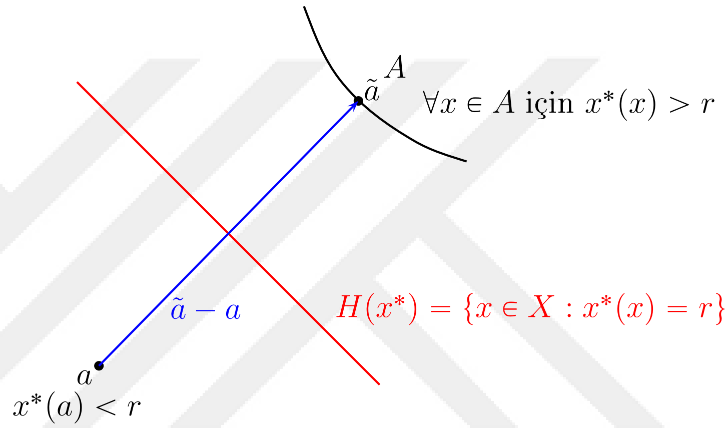
$$(S_{(x^*,z^*)}(x) - C) \backslash S_{(x^*,z^*)}(x) = \varnothing$$

olur. Bu ise C-has olması ile çelişir.

($\Leftarrow$): $z^* \in C^* \backslash (-C^*)$ olsun. O halde $\exists c \in C$ öyle ki $z^*(-c) > 0$ olur. Dolayısıyla $-c \in S_{(x^*,z^*)}(\theta) - C$ olur. $z^*(-c) > 0$ olduğundan $-c \notin S_{(x^*,z^*)}(\theta)$'dır. Yani $-c \in (S_{(x^*,z^*)}(\theta) - C) \backslash S_{(x^*,z^*)}(\theta) \neq \varnothing$ olur. $\square$

3. KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLARIN AFİN MİNORANTLARI

Konveks analizin klasik bir başlangıç noktası, bir has kapalı fonksiyonun afin minorantlarının noktasal supremumu olduğunu kanıtlamaktır. (Örnek için [14]'teki Önerme-3.1'e bakılabilir.) Temel araç, $X \times \mathbb{R}$'de fonksiyonun epigrafı ile epigrafın dışındaki uygun bir noktaya güçlü bir ayırma teoremi uygulanmasıdır. (Şekil 3.1'de gösterilmiştir.)



Şekil 3.1: Bir nokta ile bir kümenin doğrusal bir x^* fonksiyonuyla ayrılmasının geometrik gösterimi

Bu duruma uyum sağlayan bu yaklaşımda, son bölümde tanımlanan $S_{(x^*,z^*)}$ fonksiyonunu kullanacağız. Eğer bir $x^* \in X^*$ ve $z^* \in Z^* \backslash \{\theta\}$ olmak üzere,

$$\forall x \in X \text{ için } S_{(x^*,z^*)}(x) + z \preccurlyeq_C f(x)$$

ise bir $x \mapsto S_{(x^*,z^*)}(x) + z$ şeklinde tanımlanan fonksiyon ($\preccurlyeq_C$'ye göre), f'nin bir afin minorantıdır. $z^* = \theta$ durumu çıkarılmıştır. Çünkü has olmayan minorantlar ortaya çıkar. Temel sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1. *Bir $f : X \to (\mathcal{P}^a_C, \supseteq)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir:*

i) f, C-has afin minorantlarının noktasal supremumudur.

ii) f, X'den $\mathcal{Q}^t_C$'ye kapalı konvekstir ve C-has fonksiyondur ya da $f \equiv Z$ ya da $f \equiv \varnothing$'dir.

Yukarıdaki ifadede C-has yerine has yazıldığında da denklik geçerlidir.

Kanıt. Her iki durumda da afin fonksiyonların bir boş ailesinin supremumu Z sabit fonksiyonuyla aynıdır. Eğer afin fonksiyonları ailesi boştan farklı ise noktasal supremumu kapalı konvekstir. Çünkü epigrafı, afin fonksiyonların kapalı konveks epigraflarının kesişimidir. Bu durumda $f \not\equiv Z$ ve afin minorantların biri C-has ise supremumdur ya da $\varnothing$'dir. Bu ise $(i) \Rightarrow (ii)$'yi ispatlar.

Her bir $(x_0, z_0) \notin graf\ f$ noktası için, $graf\ f \subseteq graf\ g$ ve $(x_0, z_0) \notin graf\ g$ olacak şekilde bir C-has (ama has değil) g afin minorantının var olduğunu gösterelim. $graff$ kapalı ve konveks olduğu için

$$\forall (x, z) \in graf\ f : x_0^*(x) + z_0^*(z) \leqslant \alpha < x_0^*(x_0) + z_0^*(z_0) \tag{3.1}$$

olacak şekilde $x_0^* \in X^*$, $z_0^* \in Z^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ elde ederek $\{(x_0, z_0)\}$'dan $graf\ f$'yi ayırabiliriz (konveks kümelerin ayrılmasından) Bu yüzden $domf \neq \varnothing$ ve f, $\mathcal{Q}_C^t$'ye dönüştüğü için $z^* \in C^*$ olur. (Önerme 2.15'den)

İlk olarak f'nin C-has ve $z_0^* \in C^* \backslash (-C^*)$ (2.15'den) olduğunu varsayalım. Bu durumda $z_0^*(\widehat{z}) = \alpha$ olacak şekilde $\widehat{z} \in Z$ vardır. (3.1)'den

$$\forall x \in X : f(x) \subseteq \widehat{z} + S_{(x_0^*, z_0^*)}(x)$$

ifadesine denk olarak

$$\forall (x, z) \in graf\ f : x_0^*(x) + z_0^*(z - \widehat{z}) \leqslant 0$$

olur. Diğer yandan (3.1)'de $\{(x_0, z_0)\}$'ın $x \mapsto g(x) : \widehat{z} + S_{(x_0^*, z_0^*)}(x)$ afin fonksiyonunun grafiğinin elemanı olmadığını gösterir.

$z_0^* \in C^* \cap (-C^*)$ olsun. (3.1)'den her $(x, z) \in graf\ f$ için

$$\forall (x, z) \in graf\ f : x_0^*(x) + z_0^*(z) \leqslant x_0^*(x_0) + z_0^*(z_0) - \beta \tag{3.2}$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısı vardır.

$x_1 \in domf$, $z_1 \in f(x_1)$ ve $z_1 - c \notin f(x_1)$ olacak şekilde $(x_1, z_1) \in X^* \times Z^*$ ve $c \in C$ alalım. f, C-has olduğundan bu mümkündür. Yine bir ayırma aracı ile

$$\forall (x, z) \in graf\ f : x_1^*(x) + z_1^*(z) \leqslant \gamma < x_1^*(x_1) + z_1^*(z_1 - c) \tag{3.3}$$

olacak şekilde $(x_1^*, z_1^*) \in X^* \times Z^*$, $\gamma \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan $z_1^* \in C^* \backslash (-C^*)$ elde ederiz. Gerçekten, diğer durumda $z_1^*(c) = 0$ olurdu ve (3.3)'de $(x, z) = (x_1, z_1) \in graf\ f$ seçebilirdik. Bu ise (3.3) ile bir çelişki verirdi.

$$s > maks \left\{ 0, \frac{1}{\beta}(\gamma - x_1^*(x_0) - z_1^*(z_0)) \right\}$$

seçelim ve (3.2)'yi s ile çarpalım, sonuca (3.3)'ü ekleyelim. Buradan s'nin tanımı ile birlikte

$$\begin{aligned}\forall (x,z) \in graf\ f \quad &: \quad (x_1^* + sx_0^*)(x) + (z_1^* + sz_0^*)(z) \\ &\leqslant \quad \gamma + s(x_0^*(x_0) + z_0^*(z_0) - \beta) \\ &< \quad (x_1^* + sx_0^*)(x) + (z_1^* + sz_0^*)(z)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla x_0^*, z_0^*, α'yı sırasıyla $x_1^* + sx_0^*$, $z_1^* + sz_0^*$, $\gamma + s(x_0^*(x_0) + z_0^*(z_0) - \beta)$ ifadeleriyle yer değiştirerek (3.1) elde edilir. $z_1^* + sz_0^* \in C^* \backslash (-C^*)$ olduğu için istenilen sonuç önceki bölümde olduğu gibi elde edilir.

İkinci olarak kabul edelim ki f has olsun ancak $C-$has olmasın. $C-$has durumuna benzer şekilde f'nin bir afin minorantını $z^* \in C^* \backslash \{\theta\}$ ile elde ederiz. Burada $z^* = 0$ durumu; $x_1 \in dom\ f$ ve $z_1 \notin f(x_1)$ olacak şekildeki (x_1, z_1) elemanına ikinci ayırma teoremi uygulandığında çıkarılabilir. Geriye kalan kanıtlanması gereken ifade bu durumda, z_0^* (veya $z_0^* + sz_0^*$), $C^* \cap (-C^*)$'ın elemanıdır. Gerçekten $z_0^* \in C^* \cap (-C^*)$ olduğunu kabul edelim. Önerme 2.11'den f, $C-$has olmadığından her $x \in dom\ f$ için $f(x) - C \subseteq f(x)$ elde ederiz. $z_0^*(c) < 0$ olacak şekilde $c \in C$ alalım ve bir $x \in dom\ f$'yi, $z \in f(x)$'i sabitleyelim. (3.1)'den

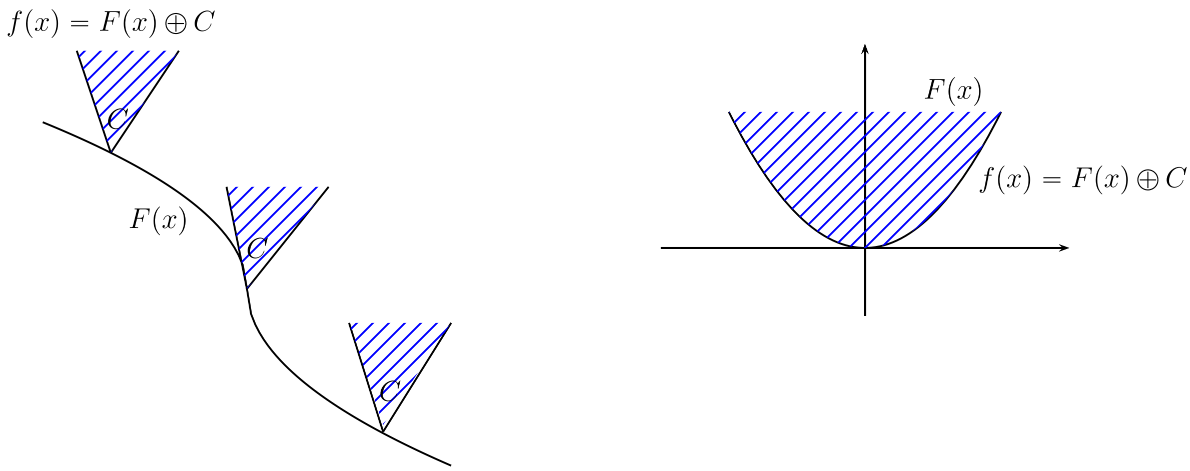
$$\forall t > 0 \text{ için } x_0^*(x) + z_0^*(z - tc) < x_0^*(x_0) + z_0^*(z_0)$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Bu kesinlikle mümkün değilidir. Sonuç olarak f'ni her afin minorantı için $z_0^* \in C^* \cap (-C^*)$ olur.

□

Uyarı 3.2. *Bir f fonksiyonu Teorem 3.1'deki şartları sağlıyorsa $\mathcal{Q}_C^t$'ye bir dönüşümdür.*

Uyarı 3.3. *$F : X \to Z \cup \{+\infty\}$ bir en büyük elemanla genişletilen Z'ye bir fonksiyon olsun. $F(x_0) \in Z$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, F fonksiyonu has fonksiyondur. F has ise her $x \in X$ için $f(x) = F(x) \oplus C$ (Şekil 3.2'de gösterilmiştir.) şeklinde tanımlanan $f : X \to \mathcal{Q}_C^t$ fonksiyonunun ($F(x) = +\infty$ ise $f(x) = \varnothing$ olmak üzere) has olması için gerekli ve yeterli bir şart cl $C \neq Z$ olmasıdır. Bununla birlikte f'nin C-has olması için gerekli ve yeterli bir şart cl C'nin lineer alt uzay olmamasıdır.*



Şekil 3.2: $f(x) = F(x) \oplus C$'nin geometrik gösterimi

Her $x \in X$, her $z \in f(x)$ için $F(x) \leqslant_C z$ olur. $z - F(x) \in C$ olduğundan $graf\ f = epi\ F$ olur. Ek olarak F'yi küme değerli düşünürsek File f'nin afin minorantları aynıdır.

Sonuç 3.4. *$f : X \to (\mathcal{Q}_C^t, \supseteq)$ konveks olsun. Bu durumda,*

i) $cl\ f$ konvekstir ve $\mathcal{Q}_C^t$'ye bir dönüşümdür.

ii) $h : X \to (\mathcal{Q}_C^t, \supseteq)$, her $x \in X$ için $h(x) \supseteq f(x)$ olacak şekilde kapalı konveks ise

$$h(x) \supseteq (cl\ f)(x)$$

olur.

iii) Her $x \in X$ için $(cl\ f)(x) \neq Z$ (veya $(cl\ f)(x) - C \backslash (cl\ f)(x) \neq \emptyset$) olması için gerek ve yeterli bir şart,

$$S_{(x^*,z^*)}(x) + z \supseteq (cl\ f)(x)$$

olacak şekilde bir $(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}$ (veya $(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash (-C^*)$) ve bir $z \in Z$'nin var olmasıdır.

iv) $(cl\ f)(x_0) = Z$ (veya $(cl\ f(x_0) - C \subseteq (cl\ f)(x_0)))$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa her $x \in dom\ cl\ f \supseteq dom\ f$ için $(cl\ f)(x) = Z$ (veya $(cl\ f)(x) - C \subseteq (cl\ f)(x))$ olur.

Kanıt.

i) Konveks kümelerin kapanışları da konveks olduğundan

$$cl(graf\ f) = graf(cl\ f)$$

konvekstir.

ii) $graf\ f \subset graf\ h$ ve $graf\ h$ kapalı olduğundan

$$cl(graf\ f) = graf(cl\ f) \subset graf\ h$$

olur.

iii) $cl\ f$ has ise Teorem 3.1'den sonuç elde edilir. $cl\ f$ has değil ise $x^* = 0, z^* \in C^* \backslash \{\theta\}$ ve $z = 0$ için $cl\ f \equiv \varnothing$ olacağından bir minorant üretir. Tersini (ii)'de h'ı afin minorant olarak seçersek elde ederiz.

iv) Önerme 2.11'dan açıktır. $\square$

4. LEGENDRE-FENCHEL EŞLENİKLERİ

4.1 Tanımlar ve İkili Eşlenik Teoremleri

$x^* \in X^*, z^* \in C^* \backslash \{\theta\}$ ve $z \in Z, f : X \to \mathcal{P}(Z)$ fonksiyonunun bir afin minorantını $\leqslant_C$'ye göre üretsin. Yani her $x \in X$ için,

$$S_{(x^*,z^*)}(x) + z \supseteq f(x)$$

olsun. Bu durumda,

$$\bigcup_{x \in X} \left[f(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x) \right] \subseteq z + H(z^*)$$

dır. Bu kapsamın her iki tarafının da yarı uzay olduğuna, özel olarak konveks olduğuna dikkat ediniz. Sol tarafı kapalı olmayabilir. Bu kapsamı reel sayılarda inceleyelim: $Z = \mathbb{R},\ C = \mathbb{R}_+, \varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ve $z^* = -1$ ise $H(z^*) = \mathbb{R}_+$ olur. Yukarıdaki kapsam $f(x) = \varphi(x) + C$'ye uygulanırsa,

$$\begin{aligned} S_{(x^*,-1)}(-x) &= \{z : x^*(-x) - z \leqslant 0\} \\ &= \{z : -x^*(x) \leqslant z\} \\ &= [-x^*(x), \infty) \\ &= -x^*(x) + \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bigcup_{x \in X} \Big(\varphi(x) + \mathbb{R}_+ - x^*(x) + \mathbb{R}_+ \Big) \subseteq z + \mathbb{R}_+ \quad &\Rightarrow \quad \inf_{x \in X} (\varphi(x) - x^*(x)) + \mathbb{R}_+ \subseteq z + \mathbb{R}_+ \\ &\Rightarrow \quad \forall x \in X \text{ için } z \leqslant \varphi(x) - x^*(x) \\ &\Rightarrow \quad \forall x \in X \text{ için } \varphi(x) \geqslant z + x^*(x) \end{aligned}$$

olduğundan her $x \in X$ için

$$\varphi(x) - x^*(x) \geqslant z,\ \ z \in \mathbb{R}$$

ifadesine denk olur.

Sonuç olarak, φ'nin $x^*(x)+z$ şeklinde afin minorantı varsa $-\varphi^*(x^*) : \inf_{x\in X}(\varphi(x)-x^*(x))$ bir reel sayı veya $+\infty$'dur.

Tanım 4.1. *$f : X \to \mathcal{P}(Z)$ bir fonksiyon olsun.*

$$-f^*(x^*, z^*) := cl\Big(\bigcup_{x\in X}\big[f(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x)\big]\Big) \tag{4.1}$$

*şeklinde tanımlanan $-f^* : X^* \times C^*\backslash\{\theta\} \to \mathcal{P}(Z)$ fonksiyonu f**'nin eşleniği (konveks eşleniği)** olarak isimlendirilir.*

$$f^{**}(x) = \bigcup_{(x^*,z^*)\in X^*\times C^*\backslash\{\theta\}}\big[-f^*(x^*, z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)\big] \tag{4.2}$$

*şeklinde tanımlanan $f^{**} : X \to \mathcal{P}(Z)$ fonksiyonu f**'nin ikinci eşleniği (konveks ikinci eşleniği)** olarak isimlendirilir.*

Uyarı 4.1. *(4.1) denkleminde $-f^*$'ın eksi işareti, sembolün bir parçası olarak görülmelidir. $f+C$ ve $-f^*$'ın görüntü uzayları ($\mathcal{P}^a_C$) aynı olduğundan f^* yerine $-f^*$'ı tercih ediyoruz.*

$f : X \to \mathcal{P}(Z)$ ve $z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ için $\varphi_{f,z^*} : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonunu, her $x \in X$ için

$$\varphi_{f,z^*}(x) = \inf_{z\in f(x)}(-z^*(z)) \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlayalım.

$z^* \mapsto \varphi_{f,z^*}(x)$ eşlemesini yapan fonksiyon, f'nin değerlerinin genişletilmiş reel değerli destek fonksiyonunun negatifidir([63], s 79). Makalenin devamında ana fikir x'e bağımlı olduğundan yukarıdaki gösterim kullanılacaktır.
φ_{f,z^*}'ın klasik Fenchel-Legendre (konveks) eşleniği

$$\varphi^*_{f,z^*}(x^*) := (\varphi_{f,z^*})^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{x^*(x) - \varphi_{f,z^*}(x)\}$$

olur(Örnek için [63], s 75'e bakabilirsiniz). Ve bu

$$\varphi^*_{f,z^*}(x^*) = \sup_{x\in X,\ z\in f(x)}\{x^*(x) + z^*(z)\} = \sigma_{graf\ f}(x^*, z^*) \tag{4.4}$$

eşitliğini sağlar.

$$\sup_{x\in X,\ z\in f(x)}(x^*, z^*)(x, z) = \sup_{x\in X,\ z\in f(x)}\{x^*(x) + z^*(z)\}$$

dir. Burada $\sigma_{graf\ f} : X^* \times Z^* \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu f küme değerli fonksiyonunun

grafiğinin destek fonksiyonudur.
Aşağıdaki sonuç $\sigma_{graf\ f}$ ile $-f^*$'ı ilişkilendirir.

Lemma 4.2. *$f : X \to \mathcal{P}(Z)$ ve $x^* \in X^*$, $z^* \in C^* \backslash \{\theta\}$ için*

$$-f^*(x^*, z^*) = \{z \in Z : z^*(z) \leqslant \sigma_{graf\ f}(x^*, z^*)\} \tag{4.5}$$

olur ve her $x \in X$ için

$$f^{**}(x) = \bigcap_{(x^*,z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}} \{z \in Z : x^*(x) + z^*(z) \leqslant \sigma_{graf\ f}(x^*, z^*)\} \tag{4.6}$$

sağlanır.

Kanıt. Öncelikle

$$\{z \in Z : z^*(z) < \varphi^*_{f,z^*}(x^*)\} \subseteq \bigcup_{x \in X} \left[f(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x)\right]$$

olur. Gerçekten $z^*(z) < \varphi^*_{f,z^*}(x^*)$ ise $z^*(z) \leqslant x^*(x) + z^*(z')$ olacak şekilde $(x, z') \in graf\ f$ vardır ((4.4) denkleminden yazdık). $z' \in f(x)$ ve $z - z' \in S_{(x^*,z^*)}(-x)$ olduğundan iddia geçerlidir.
İkinci olarak

$$\bigcup_{x \in X} \left[f(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x)\right] \subseteq \left\{z \in Z : z^*(z) \leqslant \varphi^*_{f,z^*}(x^*)\right\}$$

olur. Gerçekten $x \in dom\ f$, $z' \in f(x)$ ve $z'' \in S_{(x^*,z^*)}(-x)$ aldığımızda

$$-\varphi_{f,z^*}(x) = \sup_{z \in f(x)} z^*(z)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} z^*(z) &\leqslant -\varphi_{f,z^*}(x) \\ z^*(z') &\leqslant \varphi^*_{f,z^*}(x^*) \end{aligned}$$

olur ve $S_{(x^*,z^*)}(x)$ tanımından

$$\begin{aligned} x^*(-x) + z^*(z) &\leqslant 0 \\ z^*(z) &\leqslant x^*(x) \\ z^*(z'') &\leqslant x^*(x) \end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak $z = z' + z''$ için

$$z^*(z) \leqslant x^*(x) - \varphi_{f,z^*}(x) \leqslant \varphi^*_{f,z^*}(x^*)$$

olur.

$z \in f^{**}(x)$ ve $x^* \in X^*$, $z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ olsun. Bun durumda $z_1 \in -f^*(x^*, z^*)$ ve $z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(x)$ vardır öyle ki $z = z_1 + z_2$ olur((4.2) denkleminden).
(4.5) denkleminden $z^*(z_1) \leqslant \sigma_{graf\ f}(x^*, z^*)$ olur ve $S_{(x^*,z^*)}$'ın tanımından $x^*(x) + z^*(z_2) \leqslant 0$ olur. Bu iki ifadeyi taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned} x^*(x) + z^*(z_1) + z^*(z_2) &\leqslant \sigma_{graf\ f}(x^*, z^*) \\ x^*(x) + z^*(z) &\leqslant \sigma_{graf\ f}(x^*, z^*) \end{aligned}$$

olur. Tersine, son ilişki $x^* \in X^*$ ve $z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ için sağlansın. Bu durumda $x^*(x) + z^*(z_2) \leqslant 0$ olacak şekilde $z_2 \in Z$ vardır. Sonuç olarak

$$x^*(x) + z^*(z - z_2) \leqslant \sigma_{graf\ f}(x^*, z^*)$$

olur. Bu da eşitlik (4.6)'da $\supseteq$ kapsamını gösterir ve lemmanın kanıtını bitirir. $\square$

$z \in -f^*(x^*, z^*)$ olması için gerekli ve yeterli bir koşulun

$$\sup_{x \in X} \left\{ x^*(x) - \inf_{w \in f(x)} (-z^*(w)) \right\} = \varphi^*_{f,z^*}(x^*) \leqslant -z^*(z)$$

olduğuna dikkat ediniz. Bu ifade [1, 2]'de bulunabilecek özel bir durum için verilen eşlenik tanımıdır.

Önerme 4.3. *$f : X \to \mathcal{P}(Z)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

i) $-f^* : X^* \times C^*\backslash\{\theta\} \to \mathcal{Q}^t_C$ olur. Bununla birlikte $-f^*(x^*, z^*)$ bir $z \in Z$ için $z + H(z^*)$ şeklindedir veya $\{Z, \varnothing\}$ kümesinin bir elemanıdır.

ii) $f^{**} : X \to \mathcal{Q}^t_C$ kapalı konvekstir.

Kanıt.

i) (4.5) eşitliğinden $-f^*(x^*, z^*) \in \mathcal{Q}^t_C$ olur.

ii) $f^{**}(x) \in \mathcal{Q}^t_C$, (4.6) eşitliğinin bir sonucudur. Yine (3.6) eşitliğinden $graf\ f^{**}$,

$$x \mapsto \{z \in Z : x^*(x) + z^*(z) \leqslant \sigma_{graf\ f}(x^*, z^*)\}$$

şeklindeki fonksiyonların kapalı konveks grafiklerinin kesişimi olduğundan sonuç elde edilir. $\square$

Uyarı 4.4. *$f : X \to \mathcal{P}(Z)$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için*

$$f(x) \subseteq g(x) \subseteq (cl\ co\ f)(x)$$

şartını sağlayan her $g : X \to \mathcal{P}(Z)$ fonksiyonunun $-f^*$'a eşit bir eşleniği vardır. Özel olarak $g = cl\ co\ f$ seçersek $-f^* = -(cl\ co\ f)^*$ olur. Gerçekten, $graf\ f$'nin destek fonksiyonu $cl\ co(graf\ f)$'in destek fonksiyonuna eşittir. Lemma 4.2'den sonuç elde edilir.

Uyarı 4.5. *C^*'ın bir B^* tabanı varsa(bu durumda sivri(pointed)) ve $C^*\backslash(-C^*) = C^*\backslash\{\theta\}$ olmalıdır. ([29]'da Lemma-1.1.14'e bakılabilir.)*

f^{**}'ın tanımında $C^*\backslash\{\theta\}$ yerine B^* kullanmak daha uygun olur. [20]'de; Teorem-2.1.15 ve Teorem-2.2.12'ye bakılabilir. Bu durumda

$$f^{**}(x) = \bigcap_{(x^*,z^*)\in X^*\times B^*} \left[-f^*(x^*,z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)\right]$$

olur.

$$\left\{S_{(x^*,z^*)} : x^* \in X^*, z^* \in C^*\backslash\{\theta\}\right\} = \left\{S_{(x^*,z^*)} : x^* \in X^*, z^* \in B^*\right\}$$

olduğundan bu sağlanır. Çünkü her $t > 0$ için,

$$S_{(x^*,\frac{1}{t}z^*)} = S_{(tx^*,z^*)}$$

olur.

Young-Fenchel eşitsizliği doğrudan tanımdan elde edilir.

Önerme 4.6. *Her $x \in X$, $x^* \in X^*$ ve $z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ için,*

$$-f^*(x^*,z^*) \supseteq f(x) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-x) \tag{4.7}$$

$$S_{(x^*,z^*)}(x) \oplus -f^*(x^*,z^*) \supseteq f^{**}(x) \tag{4.8}$$

sağlanır.

Kanıt. Tanım 4.1'den kolaylıkla çıkar.

$$\begin{aligned} S_{(x^*,z^*)}(x) \oplus -f^*(x^*,z^*) &= cl\left(S_{(x^*,z^*)}(x) + -f^*(x^*,z^*)\right) \\ &\supseteq S_{(x^*,z^*)}(x) + -f^*(x^*,z^*) \\ &\supseteq \bigcap_{(x^*,z^*)\in X^*\times B^*} \left(S_{(x^*,z^*)}(x) + -f^*(x^*,z^*)\right) \\ &\supseteq f^{**}(x) \end{aligned}$$

olur. Yani sonuç olarak,

$$S_{(x^*,z^*)}(x) \oplus -f^*(x^*,z^*) \supseteq f^{**}(x)$$

elde ederiz. □

$f_1,\ f_2 : X \to \mathcal{P}(Z)$ fonksiyonlarının noktasal sıralamasını,

$$f_1 \preccurlyeq_C f_2 :\Leftrightarrow \forall x \in X : f_1(x) \preccurlyeq_C f_2(x)$$

olarak,
$-f_1^*,\ -f_2^* : X^* \times C^*\{\theta\} \to \mathcal{Q}_C^t$ fonksiyonlarının noktasal sıralamasını,

$$\begin{aligned} -f_1^* \preccurlyeq -f_2^* : \ &\Leftrightarrow \ \forall (x^*, z^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\} : -f_1^*(x^*, z^*) \supseteq -f_2^*(x^*, z^*) \\ &\Leftrightarrow \ \forall (x^*, z^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\} : -f_1^*(x^*, z^*) \preccurlyeq_C -f_2^*(x^*, z^*) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $\preccurlyeq_C$ sıralaması, yansımalı ve geçişmelidir, $\preceq$ ise kısmi sıralamadır. Dolayısıyla aşağıdaki ilişkiyi elde ederiz.

Önerme 4.7. *$f, f_1, f_2 : X \to \mathcal{P}(Z)$ olsun. Bu durumda,*

i) $f_1 \preccurlyeq_C f_2$ *ise* $-f_1^* \preceq -f_2^*$,

ii) $-f_1^* \preceq -f_2^*$ *ise* $f_1^{**} \preceq_C -f_2^{**}$,

iii) $-f^* = -(cl\ f)^* = -(cl\ co\ f)^*$,

iv) $f^{**} \preccurlyeq_C cl\ co\ f \preccurlyeq_C cl\ f \preccurlyeq_C f$,

v) $-(f^{**})^* = -f^*$, *dır.*

Kanıt. (i) ve (ii) Tanım 4.1'in doğrudan sonuçlarıdır. (4.1) eşitliğini kullanarak her $x \in X$ ve her $(x^*, z^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\}$ için,

$$\begin{aligned} f_1 &\preccurlyeq_C f_2 \\ f_1(x) &\preccurlyeq_C f_2(x) \\ f_2(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x) &\subseteq f_1(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x) + C \\ cl \bigcup_{x \in X} \big(f_2(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x)\big) &\subseteq cl \bigcup_{x \in X} \big(f_1(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x) + C\big) \\ -f_2^*(x^*, z^*) &\subseteq -f_1^*(x^*, z^*) + C \\ -f_2^*(x^*, z^*) + C &\subseteq -f_1^*(x^*, z^*) + C + C \\ -f_2^*(x^*, z^*) + C &\subseteq -f_1^*(x^*, z^*) + C \\ -f_2^*(x^*, z^*) &\subseteq -f_1^*(x^*, z^*) \\ -f_2^* &\preceq -f_1^* \end{aligned}$$

dır.

ii) Her $(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}$ için,

$$\begin{array}{rcl}
-f_2^* & \preceq & -f_1^* \\
-f_2^*(x^*, z^*) & \subseteq & -f_1^*(x^*, z^*) \\
-f_2^*(x^*, z^*) + S_{(x^*,z)}(x) & \subseteq & -f_1^*(x^*, z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x) \\
\bigcup\limits_{(x^*,z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}} \big(-f_2^*(x^*, z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)\big) & \subseteq & \bigcap\limits_{(x^*,z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}} \big(-f_1^*(x^*, z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)\big) \\
f_2^{**}(x) & \subseteq & f_1^{**}(x) \\
f_2^{**}(x) & \subseteq & f_1^{**}(x) + C \\
f_1^{**} & \preceq_C & f_2^{**}
\end{array}$$

iii) $\sigma_A(x^*) = \sup\limits_{a \in A} x^*(a) = \sup\limits_{a \in \ cl \ A} x^*(a) = \sup\limits_{a \in \ co \ A} x^*(a)$ ve $\sigma_A = \sigma_{cl \ co \ A}$
olduğundan,

$$\begin{array}{rcl}
\sigma_{graf \ f}(x^*, z^*) & = & \sigma_{graf(cl \ f)}(x^*, z^*) \\
& = & \sigma_{graf(cl \ co \ f)}(x^*, z^*)
\end{array}$$

elde ederiz. Lemma 4.2'deki (4.5) ifadesini düzenlersek,

$$\begin{array}{rcl}
-f^*(x^*, z^*) & = & \{z \in Z : z^*(z) \leqslant \sigma_{graf \ f}(x^*, z^*)\} \\
& = & \{z \in Z : z^*(z) \leqslant \sigma_{graf(cl \ f)}(x^*, z^*)\} \\
& = & -(cl \ f)^*(x^*, z^*) \\
& = & \{z \in Z : z^*(z) \leqslant \sigma_{graf(cl \ co \ f)}(x^*, z^*)\} \\
& = & -(cl \ co \ f)^*(x^*, z^*)
\end{array}$$

iv) (iii) ve Tanım 4.1'den,

$$f(x) \subset cl \ f(x) \subset cl \ co \ f(x)$$

olduğundan,

$$f^{**} = (cl \ co \ f)^{**}$$

olur.

$$f(x) \preccurlyeq_C f^{**}(x) \Leftrightarrow f(x) + C \subset f^{**}(x)$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Lemma 4.2'deki (4.5)'den,

$$f^{**}(x) = \bigcap_{(x^*,z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}} \{z \in Z : x^*(x) + z^*(z) \leqslant \sigma_{graf \ f}(x^*, z^*)\}$$

dır. Bir $(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}$ için $\tilde{z} \in f(x)$, $c \in C$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x^*(x) + z^*(\tilde{z} + c) &= x^*(x) + z^*(\tilde{z}) + z^*(c) \text{ (lineerlikten ayırabiliriz.)} \\ &\leqslant x^*(x) + z^*(\tilde{z}) \\ &\leqslant \sup_{(x,z) \in graf\ f} \{x^*(x) + z^*(z)\} \\ &\leqslant \sigma_{graf\ f}(x^*, z^*) \end{aligned}$$

elde ederiz.
$\tilde{z} + c \in f^{**}(x)$ ve $f(x) + C \subset f^{**}(x)$ olur.

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &\supseteq f(x) + C \\ cl\ co\ f^{**}(x) &\supseteq (cl\ co\ f)(x) + C \\ f^{**}(x) &\supseteq (cl\ co\ f)(x) + C \end{aligned}$$

olur.($f(x) \subset cl\ f(x) \subset cl\ co\ f(x)$ olduğundan)

v) (iv)'den $f^{**} \preccurlyeq_C f$ olduğunu biliyoruz. (i)'de f_1 yerine f^{**} ve f_2 yerine f yazdığımızda $-(f^{**})^* \preceq -f^*$ elde ederiz. (4.1) ifadesinde f yerine f^{**} yazalım. (4.2) ifadesini de yerine yazalım. $x^* \to u^*$ ve $z^* \to w^*$ iken

$$\begin{aligned} -f^{**}(u^*, w^*) &= cl \bigcup_{x \in X} \left\{ \bigcap_{(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}} \left[-f^*(x^*, z^*) + S_{(x^*, z^*)}(x)\right] + S_{(u^*, w^*)}(-x) \right\} \\ &\subseteq cl \bigcup_{x \in X} \left\{-f^*(u^*, w^*) + S_{(u^*, w^*)}(x) + S_{(u^*, w^*)}(-x)\right\} \\ &\subseteq cl \bigcup_{x \in X} \{-f^*(u^*, w^*) + H(w^*)\} \end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$S_{(u^*, w^*)}(x) + S_{(u^*, w^*)}(-x) = H(w^*)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $z \in H(w^*)$ alalım.$w^*(z) \leqslant 0$ ve $u^* \in X^*$ ve $x \in X$ için $u^*(x) = -u^*(-x)$ olur. Kabul edelim ki $u^*(x) \geqslant 0$ olsun. Bu durumda $u^*(-x) \leqslant 0$ olur. Buradan

$$u^*(x) + u^*(-x) + w^*(z) \leqslant 0$$

$z_1,\ z_2 \in Z$ ve $z_1 + z_2 = z$ olmak üzere,

$$u^*(x) + u^*(-x) + w^*(z_1) + w^*(z_2) \leqslant 0$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} z &\in S_{(u^*, w^*)}(x) + S_{(u^*, w^*)}(-x) \\ z &\in z_1 + z_2 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} f^{**}(u^*,w^*) &= cl \bigcup_{x\in X} \{-f^*(u^*,w^*) + H(w^*)\} \\ &= cl\,(-f^*(u^*,w^*) + H(w^*)) \\ &= -f^*(u^*,w^*) \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$-f^*(u^*,w^*) \subseteq cl\,(-f^*(u^*,w^*) + H(w^*))$$

dır. Şimdi de

$$-f^*(u^*,w^*) \supseteq cl\,(-f^*(u^*,w^*) + H(w^*))$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $z \in -f^*(u^*,w^*)$ ve $\tilde{z} \in H(w^*)$ alalım. ((4.5)'den)

$$\begin{aligned} w^*(z) &\leqslant \sigma_{graf}(u^*,w^*) \\ w^*(\tilde{z}) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

ifaderini taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} w^*(z) + w^*(\tilde{z}) &\leqslant \sigma_{graf}(u^*,w^*) \\ w^*(z+\tilde{z}) &\leqslant \sigma_{graf}(u^*,w^*) \end{aligned}$$

olduğundan $z + \tilde{z} \in -f^*(u^*,w^*)$ olur. □

Teorem 4.8. *Bir $f : X \to \mathcal{Q}_C^t$ has fonksiyonunun kapalı ve konveks olması için gerekli ve yeterli bir şart her $x \in X$ için $f^{**}(x) = f(x)$ olmasıdır. Dahası, f, C-has ise,*

$$\forall x \in X : f^{**}(x) = \bigcap_{(x^*,z^*)\in X^*\times C^*\setminus(-C^*)} \left[-f^*(x^*,z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)\right]$$

f has ancak C-has değil ise,

$$\forall x \in X : f^{**}(x) = \bigcap_{(x^*,z^*)\in X^*\times (C^*\cap(-C^*))\setminus\{\theta\}} \left[-f^*(x^*,z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)\right]$$

olur.

Kanıt. Önce f has kapalı konveks olsun. Ayrıca f'nin her afin minorantı f^{**}'ın da bir afin minorantıdır. Gerçekten $x^* \in X^*$, $z^* \in C^*\setminus\{\theta\}$, $z \in Z$ olsun öyle ki her $x' \in X : f(x') \subseteq z + S_{(x^*,z^*)}(x')$ olur. Her iki tarafa $S_{(x^*,z^*)}(x')$ ekleyip $x' \in X$ üzerinden birleşimini alalım ve tekrar her iki tarafa $S_{(x^*,z^*)}(x)$ ekleyelim.

$$
\begin{aligned}
f(x') &\subseteq z + S_{(x^*,z^*)}(x') \\
f(x') + S_{(x^*,z^*)}(-x') &\subseteq z + S_{(x^*,z^*)}(x') + S_{(x^*,z^*)}(-x') \\
f(x') + S_{(x^*,z^*)}(-x') &\subseteq z + H(z^*) \\
\bigcup_{x'\in X} \left(f(x') + S_{(x^*,z^*)}(x')\right) &\subseteq \bigcup_{x'\in X} (z + H(z^*)) \\
\bigcup_{x'\in X} \left(f(x') + S_{(x^*,z^*)}(x')\right) &\subseteq z + H(z^*) \text{ (Tanım 4.1'den)} \\
-f(x^*, z^*) &\subseteq z + H(z^*)
\end{aligned}
$$

Her $x \in X$ için,

$$
\begin{aligned}
-f^*(x^*, z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x) &\subseteq z + \underbrace{H(z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)}_{S_{(x^*,z^*)}(x)} \\
&= z + S_{(x^*,z^*)}(x)
\end{aligned}
$$

olur. Burada her iki tarafın $x^* \in X^*,\ z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ üzerinden kesişimini alalım.

$$
\begin{aligned}
\bigcap_{x^*\in X^*,\ z^*\in C^*\backslash\{\theta\}} \left(-f^*(x^*, z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)\right) &\subseteq \bigcap_{x^*\in X^*,\ z^*\in C^*\backslash\{\theta\}} \left(\{z\} + S_{(x^*,z^*)}(x)\right) \\
f^{**}(x) &= f(x) \\
f^{**}(x) &\subseteq f(x)
\end{aligned}
$$

(Teorem 3.1'den afin minorantların kesişimi $f(x)$'e eşit olduğundan)
Sonuç 3.4'den f'nin has afin minorantlarının kümesi boştan farklıdır ve Teorem 3.1'den böyle minorantların noktasal supremumu f'tir. Önerme 4.7 (iv)'den $f(x) \subseteq f^{**}(x)$ olur. Sonuç olarak $f^{**}(x) = f(x)$ olur. Tersine Önerme 4.3 (ii)'den f^{**} kapalı konvekstir. Geriye kalan formüller Teorem 3.1'in sonuçlarıdır. Bu da ispatı tamamlar. □

Uyarı 4.9. *f kapalı konveks ise f'nin has fonksiyon olması için gerekli ve yeterli bir şart her $(x^*, z^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\}$ için $-f^*(x^*, z^*) \neq \emptyset$ olması ve $-f^*(x_0^*, z_0^*) \neq Z$ olacak şekilde bir $(x_0^*, z_0^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\}$ ikilisinin var olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$:f kapalı konveks ve has olsun. En az bir tane $(x^*, z^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\}$ için $-f^*(x^*, z^*) = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.8'den $f^{**}(x) = \emptyset$ olur. Bu da f'nin has fonksiyon olması ile çelişir.
f, kapalı konveks ve has olsun. Her $(x_0^*, z_0^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\}$ için $-f^*(x_0^*, z_0^*) = Z$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.8'den,

$$
\begin{aligned}
f^{**}(x) &= \bigcap_{(x^*,z^*)\in X^*\times C^*\backslash\{\theta\}} \left[-f(x^*, z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)\right] \\
&= Z
\end{aligned}
$$

olur. Bu da yine f'nin has fonksiyon olması ile çelişir.

($\Leftarrow$): Her $(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}$ için $-f(x^*, z^*) \neq \varnothing$ ve en az bir $(x_0^*, z_0^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}$ için $-f^*(x_0^*, z_0^*) \neq Z$ olsun.

$$\left(\begin{array}{rcl} (4.2) \text{ ifadesinden } \forall x \in X \text{ için } f^{**}(x) & \neq & \varnothing \text{ ve} \\ f^{**}(x) & \neq & Z \text{ olur.} \end{array} \right)$$

Her $x \in X$ için $f(x) \neq 0$ olsun.

$$\begin{aligned} -f^*(x^*, z^*) &= \bigcup_{x \in X} \left[-f(x) + S_{(x^*, z^*)}(-x) \right] \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

olur.

$$-f^*(x^*, z^*) = \varnothing \Rightarrow \exists \tilde{x} \in X : f(\tilde{x}) \neq \varnothing$$

olur. Dolayısıyla,

$$-f^*(x^*, z^*) = \varnothing \Leftrightarrow \tilde{x} \in dom\ f \neq \varnothing$$

olur. Her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= cl \left(\bigcap_{(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}} \left[-f(x^*, z^*) + S_{(x^*, z^*)}(x) \right] \right) \\ &\subsetneq Z \end{aligned}$$

Önerme 4.7'nin (iv).maddesinden $f(\tilde{x}) \subset f^{**}(\tilde{x}) \subsetneq Z$'dir. Bu durumda f has fonksiyondur. □

Teorem 4.10. *$f : X \to (\mathcal{P}_C^a, \supseteq)$ bir fonksiyon ve $dom\ f \neq \varnothing$ olsun. O halde,*

i) $cl\ co\ f$ has fonksiyon ise, $f^{**} = cl\ co\ f$;
$cl\ co\ f$ has fonksiyon değil ise $f^{**} \equiv Z$ olur.

ii) f konveks ve bir $x_0 \in X$ için $f(x_0) = (cl\ f)(x_0) \neq \varnothing$ ise $f^{**}(x_0) = f(x_0)$ olur. Ek olarak $f(x_0) \neq Z$ ise $cl\ f$ has ve $f^{**} = cl\ f$ olur. Bu durumda $cl\ f$; $(f(x_0) - C) \backslash f(x_0) \neq \varnothing$ ise C-has olur ve $(f(x_0) - C) \backslash f(x_0) = \varnothing$ ise has ama C-has değildir.

Kanıt. *i*) Uyarı 4.4'den $-f^* = (cl\ co\ f)^*$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \bigcap_{(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}} \left[-f^*(x) + S_{(x^*, z^*)}(x) \right] \\ &= \bigcap_{(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}} \left[-(cl\ co\ f)^*(x) + S_{(x^*, z^*)}(x) \right] \\ &= cl\ co\ f^{**}(x) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $f^{**} = cl\ co\ f^{**}$ olur.
$cl\ co\ f$ kapalı konveks olduğundan, has olduğu durumda Teorem 4.8'i uygularsak,

$$cl\ co\ f = (cl\ co\ f)^{**} = f^{**}$$

olur.
$h := cl\ co\ f$ has olmasın. O halde $x_0 \in X$ vardır öyle ki $h(x_0) = Z$ olsun. Dolayısıyla Uyarı 4.4'e göre, her $x^* \in X^*,\ z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ için,

$$\begin{aligned} -f^*(x^*, z^*) &= -(cl\ co\ f)^*(x^*, z^*) \\ &= -h^*(x^*, z^*)\ (h = cl\ co\ f \text{ olduğundan}) \\ &= Z \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \bigcap_{(x^*,z^*)\in X^*\times C^*\backslash\{\theta\}} \left[-f^*(x^*, z^*) + S_{(x^*,z^*)}(-x)\right] \\ &= Z \end{aligned}$$

olur.
$ii)$$cl\ f$ has değil ise $\exists x_0 \in dom(cl\ f)$ öyle ki $cl\ f(x_0) = Z$ olur. Önerme 2.11'den f, $dom(cl\ f)$ üzerinde Z değerine sahiptir. Yani, her $x \in dom(cl\ f)$ için $cl\ f(x) = Z$ olur. Özellikle $f(x) = cl\ f(x) \neq \emptyset$ ise $x \in dom(cl\ f)$ olacağından $f(x) = (cl\ f)(x) = Z$'dir. $i)$'den $f^{**} \equiv Z$ olduğundan $f^{**}(x_0) = f(x_0) = Z$ olur.
$cl\ f$ has ise Teorem 4.8'i kullanarak

$$f(x) = (cl\ f)(x) = (cl\ f)^{**}(x) = f^{**}(x)$$

elde ederiz.
$f(x_0) = (cl\ f)(x_0) \neq Z$ ise $cl\ f$, Önerme 2.11'dan has fonksiyondur. Dolayısıyla Teorem 4.8'den $cl\ f = f^{**}$ olur. □

$Z = \mathbb{R},\ C = \mathbb{R}_+,\ f(x) = \varphi(x) + \mathbb{R}_+$ olarak alındığında $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonlarına uygun sonuçlar kolaylıkla keşfedilebilir ([63], s 78'e bakılabilir). Bu bölümde, genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar için verilen Fenchel-Moreou Teoremi'ni kullanarak Teorem 4.8'i farklı bir yolla kanıtlayacağız. $f : X \to (\mathcal{Q}^t_C, \supseteq)$ bir fonksiyon olsun. O halde her bir $f(x)$ fonksiyon değeri, bu değeri içeren Z'deki kapalı yarı uzayların kesişimidir. Bu((4.3)'e bakılabilir.)

$$\forall x \in X : f(x) = \bigcap_{z^*\in C^*\backslash\{\theta\}} \{z \in Z : -z^*(z) \geqslant \varphi_{f,z^*}(x)\} \tag{4.9}$$

anlamına gelir.
Diğer yandan, f konveks ise φ_{f,z^*}, x'e göre konveks bir fonksiyondur ve f has ise φ_{f,z^*} has olacak şekilde bir $z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ vardır. f'nin kapalı olması φ_{f,z^*}'ın kapalı olmasını gerektirmez. Ancak kapalı konveks has bir f için,

$$\forall x \in X : f(x) = \bigcap_{\substack{z^*\in C^*\backslash\{\theta\} \\ cl\varphi_{f,z^*} \text{ has}}} \{z \in Z : -z^*(z) \geqslant cl\varphi_{f,z^*}(x)\}$$

olduğunu göstermek mümkündür. $cl\varphi_{f,z^*}$ has olduğunda $cl\varphi_{f,z^*} = \varphi^{**}_{f,z^*}$ olur. Yukarıdaki kesişimde $cl\varphi_{f,z^*}$ yerine φ^{**}_{f,z^*} yazarsak (4.2) ifadesinde tanımlanan $f^{**}(x)$'i buluruz. (Teorem 3.1'in ispatındaki) $X \times Z$ çarpım uzayındaki ayırma yerine $X \times \mathbb{R}$'deki bir ayırma kavramı ($cl\varphi_{f,z^*}$'a skaler ikili eşlenik teoreminin uygulanışının ispatı için) ve (4.9) ifadesini göstermek için Z'deki başka bir ayırma kullanılmıştır. Burada verilen kanıt $S_{(x^*,z^*)}$ sürekli lineer fonksiyonellerinin yerine kullanıldığından daha kolay görülebilir.(Örnek olarak $-f^*$'ın tanımında)

4.2 Örnekler

Örnek 4.1. *(Karakteristik Fonksiyon) $M \subseteq X$ olsun. $\mathcal{Q}^t_C$ değerli $\mathcal{I}_M$ karakteristik fonksiyonunun (Örnek 2.8) eşleniği,*

$$-q_M(x^*,z^*) := -(\mathcal{I}_M)^*(x^*,z^*) = cl \bigcup_{x\in M} S_{(x^*,z^*)}(-x)$$

olur. Tanım 5'deki (4.1) ifadesinde f yerine $\mathcal{I}_M$ yazarsak,

$$-\mathcal{I}_M(x^*,z^*) = cl \bigcup_{x\in X} \left[\mathcal{I}_M(x^*,z^*) + S_{(x^*,z^*)}(-x)\right]$$

elde ederiz. $x \notin M$ için,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_M(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x) &= \varnothing + S_{(x^*,z^*)}(-x)\\ &= \varnothing\end{aligned}$$

olacağından birleşimden bu x'leri çıkarabiliriz. Bu durumda birleşimi X yerine M üzerinden alabiliriz. $x \in M$ olduğunda ise

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_M(x^*,z^*) + S_{(x^*,z^*)}(-x) &= cl\ C + S_{(x^*,z^*)}(-x)\\ &= S_{(x^*,z^*)}(-x)\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$-(\mathcal{I}_M)^*(x^*,z^*) = cl \bigcup_{x\in M} S_{(x^*,z^*)}(-x)$$

elde edilir.

$c \in cl\ C,\ z \in S_{(x^*,z^*)}(-x),\ \forall z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ için

$$z^*(c) \leqslant 0$$

$$x^*(-x) + z^*(z) \leqslant 0$$

ifadelerini taraf tarafa toplarsak, z^*'ın doğrusallığından,

$$x^*(-x) + z^*(z + c) \leqslant 0$$

olur. Bu durumda $c + z \in S_{(x^*,z^*)}(-x)$'dir.

Skaler durumda $x \to \sup\limits_{x \in M} x^*(-x) = \inf\limits_{x \in M} x^*(-x)$ dönüşümüne eşit olacağından $-q_M$ fonksiyonuna $M \subseteq X$'in küme değerli **negatif destek fonksiyonu** denir. $M = K \subseteq X$, negatif dual konisi K^* olan bir dual koni ise,

$$(\mathcal{I}_K)^*(x^*, z^*) = \begin{cases} H(z^*) & : -x^* \in K^* \\ Z & : -x^* \notin K^* \end{cases}$$

olur. Gerçekten de $-x^* \in K^*$ ise $\sigma_{graf\ \mathcal{I}_K}(x^*, z^*) = 0$ ve $-x^* \notin K^*$ ise $\sigma_{graf\ \mathcal{I}_K}(x^*, z^*) = +\infty$ olur. Yukarıda ki eşitlik, Lemma 4.2'deki (4.5) ifadesinin bir sonucudur.

Örnek 4.2. *(Sürekli Lineer Operatör)*
$F : X \to Z$ bir sürekli lineer operatör ve $F^* : Z^* \to X^*$, F'nin adjoint operatörü olsun. $f(x) = \{F_x\} \oplus C$ ile tanımlı $f : X \to \mathcal{Q}_C^t$ fonksiyonunun eşleniği ile ilgileneceğiz.

$$\sigma_{graf\ f}(x^*, z^*) = \sup_{x \in X} \left(x^* + F^* z^*\right)(x)$$

olduğu durumda Lemma 4.2'deki (4.5) ifadesinden $x^* \in X^*$, $z^* \in C^* \backslash \{\theta\}$ için $F^* z^* = -x^*$ olduğu durumda,

$$\begin{aligned} -f^*(x^*, z^*) &= \{z \in Z : z^*(z) \leqslant \sup_{x \in X}(x^* + F^* z^*)(x)\} \\ &= \{z \in Z : z^*(z) \leqslant \sup_{x \in X}(x^* - x^*)(x)\} \\ &= \{z \in Z : z^*(z) \leqslant 0\} \\ &= H(z^*) \end{aligned}$$

$F^* z^* \neq -x^*$ olduğu durumda,

$$\begin{aligned} -f^*(x^*, z^*) &= \{z \in Z : z^*(z) \leqslant \sup_{x \in X}(x^* + F^* z^*)(x)\} \\ &= \{z \in Z : z^*(z) \leqslant +\infty\} \\ &= Z \end{aligned}$$

olur. Yani her $x^* \in X^*$, $z^* \in C^* \backslash \{\theta\}$ için,

$$-f^*(x^*, z^*) = \begin{cases} H(z^*) & : \ F^* z^* = -x^* \\ Z & : \ F^* z^* \neq -x^* \end{cases}$$

olur.

Örnek 4.3. *(Konlineer Fonksiyonlar)*
$x_0^* \in X^*$, $z_0^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ *alalım.* $f(x) = S_{(x_0^*, z_0^*)}(x)$ *ile tanımlı* $f : X \to \mathcal{Q}_C^t$ *fonksiyonunun eşleniğini bulalım.* $z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ *alalım.* $z^* \notin \mathbb{R}_+\{z_0*\}$ *ise (*z^*, z_0^**'ın bir pozitif katı değil ise),* $z^*(z') > 0$ *ve* $z_0^*(z') < 0$ *olacak şekilde* $z' \in Z$ *vardır. Buradan,*

$$\begin{aligned}\sigma_{graf\ f}(x^*, z^*) &= \sup_{(x,z)\in graf\ S_{(x_0^*, z_0^*)}} \{x^*(x) + z^*(z)\} \\ &\geqslant \sup_{t>0} \{x^*(x) + tz^*(z)\} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla (4.5) ifadesinde $-f^*(x^*, z^*) = Z$ *olur. Benzer şekilde* $x^* \notin \mathbb{R}_+\{x_0^*\}$ *ise,*

$$-f^*(x^*, z^*) = \begin{cases} H(z_0^*) & : \quad bir\ s > 0\ için\ z^* = sz_0^*,\ x^* = sx_0^* \\ Z & : \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olur.

Son iki örnekte görüldüğü gibi; (Önerme 2.14'den) X üzerinde x_0^* gibi bir sürekli lineer dönüşüm alırsak bunun eşleniği $\{x_0^*\}$ kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

4.3 Sublineer Fonksiyonlar ve Vektörel Normlar

Genişletilmiş reel değerli, has kapalı sublineer fonksiyonlar, dual uzayın boştan farklı zayıf altkümelerinin destek fonksiyonlarıdır. Küme değerli fonksiyonlar için buradan benzer bir sonuç çıkaracağız. $p : X \to \mathcal{Q}_C^t$ sublineer olsun ve

$$M_p := \{(x^*, z^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\} : \forall x \in X,\ S_{(x^*, z^*)}(x) \supseteq p(x)\}$$

ile tanımlansın.

Önerme 4.11. $p : X \to \mathcal{Q}_C^t$ *has kapalı ve sublineer olsun. O halde* $(x^*, z^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\}$, $x \in X$ *için,*

$$-p^*(x^*, z^*) = -\mathcal{I}_{M_p}(x^*, z^*)\ \ ve\ p(x) = \bigcap_{(x^*, z^*)\in M_p} S_{(x^*, z^*)}(x)$$

olur. Burada

$$-\mathcal{I}_{M_p}(x^*, z^*) = \begin{cases} H(z^*) & : \ (x^*, z^*) \in M_p \\ Z & : \ (x^*, z^*) \notin M_p \end{cases}$$

dir.

Kanıt. $(x^*, z^*) \in M_p$ alalım. Her $x \in X$ için $S_{(x^*,z^*)}(x) \supseteq p(x)$'de $x = 0$ alırsak,

$$\begin{aligned}
S_{(x^*,z^*)}(x) &\supseteq p(0) \\
\{z \in Z : x^*(0) + z^*(z) \leqslant 0\} &\supseteq p(0) \\
\{z \in Z : z^*(z) \leqslant 0\} &\supseteq p(0) \\
H(z^*) &\supseteq p(0)
\end{aligned}$$

O halde $p(0) \subseteq H(z^*)$ olur. Bunu, $-p^*$'ın ve M_p'nin tanımlarını kullanarak

$$H(z^*) \supseteq -p^*(x^*, z^*) \supseteq H(z^*)$$

sonucuna aşağıdaki şekilde ulaşabiliriz:

$$\begin{aligned}
-p^*(x^*, z^*) &= cl\left(\bigcup_{x\in X}(p(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x))\right) \\
&\subseteq cl\left(\bigcup_{x\in X}(S_{(x^*,z^*)}(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x))\right) \\
&= cl\left(\bigcup_{x\in X} H(z^*)\right) \\
-p^*(x^*, z^*) &\subseteq H(z^*)
\end{aligned}$$

ve $x = 0$ iken ($p(0) \subseteq H(z^*)$ ve $S_{(x^*,z^*)}(0) = H(z^*)$ olduğundan)

$$\begin{aligned}
-p^*(x^*, z^*) &= cl\left(\bigcup_{x\in X}(p(0) + S_{(x^*,z^*)}(0))\right) \\
&\supseteq cl\left(\bigcup_{x\in X} H(z^*)\right) \\
-p^*(x^*, z^*) &\supseteq H(z^*)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$H(z^*) \supseteq -p^*(x^*, z^*) \supseteq H(z^*)$$

olur. Dolayısıyla,

$$-p^*(x^*, z^*) = H(z^*)$$

dır.

$(x^*, z^*) \notin M_p$ ise $\bar{z} \in S_{(x^*,z^*)}(\bar{x})$ olacak şekilde $(\bar{x}, \bar{z}) \in graf\ p$ vardır. Yani $x^*(\bar{x}) + z^*(\bar{z}) > 0$ olur. p sublineer olduğundan, $graf\ p$ konveks bir konidir. Yani

$$\sigma_{graf\ f}(x^*, z^*) \geqslant \sup_{t>0}\{x^*(t\bar{x}) + z^*(t\bar{z})\} = +\infty$$

elde ederiz. Dolayısıyla (4.5) ifadesinden $-p^*(x^*, z^*) = Z$'dir. $-p^*$ için formül aşağıdadır:

$$\begin{aligned} p^{**}(x) &= p(x) \\ &= \bigcap_{(x^*,z^*)\in X^*\times C^*\setminus\{\theta\}} \left[-p^*(x^*,z^*) + S_{(x^*,z^*)}(x)\right] \\ &= \bigcap_{(x^*,z^*)\in M_p} S_{(x^*,z^*)}(x) \\ &= \sup_{(x^*,z^*)\in M_p} S_{(x^*,z^*)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da önermenin ispatını tamamlar. □

Skaler durum; $x \mapsto \bigcap_{(x^*,z^*)\in M} S_{(x^*,z^*)}(x)$ fonksiyonlarının bir $M \subseteq X^* \times C^*\setminus\{\theta\}$ kümesini destek fonksiyonu olduğunu düşünmemizi sağlar:

$$\underbrace{S_{(x_1^*,z_1^*)}(x)}_{A_1} \subseteq \underbrace{S_{(x_2^*,z_2^*)}(x)}_{A_2} \Leftrightarrow S_{(x_1^*,z_1^*)}(x) \leqslant_C S_{(x_2^*,z_2^*)}(x)$$

$$\sup(A_1, A_2) = A_1 \cap A_2 \text{ ve } \sigma_{A*}(x^*) = \sup_{x\in A} x^*(x)$$

olduğundan M kümesinin bir destek fonksiyonudur. Yani

$$\sigma_M(x) = \sup_{(x^*,z^*)\in M} S_{(x^*,z^*)}(x) = \bigcap_{(x^*,z^*)\in M} S_{(x^*,z^*)}(x)$$

dır. Başka bir özel küme değerli fonksiyonlar sınıfı Kantorovich'in [32]'sinde([29]'a bakılabilir.) tanımlanan vektörel normlardan meydana gelebilir.

Tanım 4.2. *[28, 29] X ve Z reel lineer uzaylar ve C, Z'de bir konveks koni olsun. Buna göre $\|.\| : X \to C$ vektörel normu her x, $y \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşullar sağlanır:*

a) $\|x\| = \theta$ *gerekli ve yeterli bir şart* $x = \theta$ *olmasıdır.*

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

c) $\|x + y\| \leqslant_C \|x\| + \|y\|$

$Y = \mathbb{R}$ *ve* $C_Y = \mathbb{R}_+$ *olduğunda* $\|.\|$ *bir normdur. (a) koşulu sağlanmazsa seminormdur.*

$\|.\| : X \to C$ vektörel bir norm ve $n : X \to \mathcal{Q}_C^t$'ye $n(x) := \{\|x\|\} \oplus C$ ile tanımlı bir sublineer fonksiyon olsun.

$$\|x^*\|_{z^*} = \sup\{x^*(x) : z^*(\|x\|) = -1\}$$

olduğunda

$$-n^*(x^*, z^*) = \begin{cases} H(z^*) & : \ \|x^*\|_{z^*} \leqslant 1 \text{ ve } z^*(\|x\|) = 0 \Rightarrow x^*(x) = 0 \\ Z & : \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğunu iddia ediyoruz. İddiayı ispatlamak için öncelikle Önerme 4.11 ve n fonksiyonunun özelliklerine dikkat edelim.

$$M_n = \{(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\} : \forall x \in X, x^*(x) + z^*(\|x\|) \leqslant 0\}$$

olduğunu gösterelim. Önerme 4.11'den

$$M_n := \{(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\} : \forall x \in X, S_{(x^*, z^*)}(x) \supseteq n(x)\}$$

dir. Yani,

$$M_n := \{(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\} : \forall x \in X, S_{(x^*, z^*)}(x) \supseteq \{\|x\|\} \oplus C\}$$

olur. $0 \in C$ olduğundan $\|x\| \in S_{(x^*, z^*)}(x)$ olur. Dolayısıyla

$$M_n \subseteq \{(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\} : \forall x \in X, x^*(x) + z^*(\|x\|) \leqslant 0\}$$

olur. Şimdi

$$\{(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\} : \forall x \in X, x^*(x) + z^*(\|x\|) \leqslant 0\} \subseteq M_n$$

olduğunu gösterelim.

$$z \in \{\|x\|\} \oplus C \subseteq S_{(x^*, z^*)}(x)$$

ve

$$\exists c \in C \text{ için } z = \|x\| + c$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} x^*(x) + z^*(\|x\| + c) &\leqslant x^*(x) + z^*(\|x\|) + \underbrace{z^*(c)}_{\leqslant 0} \\ &\leqslant x^*(x) + z^*(\|x\|) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece ikinci kapsamın da sağlandığı görülür.

$(x^*, z^*) \in M_n$ alalım. Bu durumda

$$x^*(x) + z^*(\|x\|) \leqslant 0 \tag{4.10}$$

ifadesi

$$\begin{aligned} x^*(x) \leqslant 1 \quad &\Rightarrow \quad \sup\{x^*(x) : z^*(\|x\|) = -1\} \leqslant 1 \\ &\Rightarrow \quad \|x\|_{z^*} \leqslant 1 \end{aligned}$$

sağlar.
M_n'de x'in uzaydan seçimi serbesttir. $z^*(\|x\|) \leqslant 0$ olacak şekilde bir x için $x^*(x) < 0$ olsun. Bu durumda $-x \in X$ olacaktır. $z^*(\|-x\|) = 0$ olacağından $x^*(-x) > 0$ olur. Bu da bir çelişkidir. Bu yüzden $z^*(\|x\|) = 0$ olduğunda $x^*(x) = 0$'dır.

$$\begin{aligned} z^*(\|x\|) = 0 \quad & \text{için } (x^*, z^*) \in M_n \text{ olur.} \\ z^*(\|x\|) < 0 \quad & \text{ve } \exists\lambda \in [0, \infty] \text{ olsun.} \\ z^*(\|\lambda x\|) = -1 \quad & \text{olur.} \\ x^*(\lambda x) \leqslant \|\lambda x\|_{z^*} \leqslant 1 \quad & = -z^*(\|\lambda x\|) \\ \tfrac{\lambda x^*(x)}{\lambda(-z^*(\|\lambda x\|))} \leqslant 1 & \\ \tfrac{x^*(x)}{-z^*(\|\lambda x\|)} \leqslant 1 & \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (4.10) ifadesinden $(x^*, z^*) \in M_n$ olur. Bu durumda

$$-n^*(x^*, z^*) = \begin{cases} H(z^*) & : \ (x^*, z^*) \in M_n \\ Z & : \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur.

Uyarı 4.12. *$x^* \mapsto \|x^*\|_{z^*}$ fonksiyonu $z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ için X^* üzerinde bir seminormdur. Bu seminorm X üzerinde $x \mapsto -z^*(\|x\|)$ seminormunun dualidir. Bu durumda yukarıdaki iddia Banach uzayının bir genelleştirmesidir. Sonuç olarak normun Fenchel eşleniği, dual birim yuvarın karakteristik fonksiyonudur. $\{\|.\|_{z^*} : z^* \in C^*\backslash\{\theta\}\}$ seminorm ailesinin ürettiği topoloji başka bir çalışma konusudur.*

Ayrık yerel konveks bir uzayın topolojisi ([33]'de bahsedilen) uygun bir görüntü uzayına sahip bir tek vektörel norm ile üretilebilir. Belli bir mantıkta bir vektörel normun küme değerli eşleniğinin, dual uzaydaki birim yuvarların bir ailesinin karakteristik fonksiyonlarının bir sınıfı olması şaşırtıcı değildir.

4.4 Eşlenikler için Analiz

Bu bölümde eşlenikler için bazı özellikler incelenecektir.

A) Y başka bir yerel konveks uzay olsun. $F : X \to Y$ lineer homeomorfizma, $r > 0$ bir reel sayı, $y_0 \in Y$ olsun. $g : Y \to \mathcal{Q}^t_C$ bir fonksiyon ve $f : X \to \mathcal{Q}^t_C$ olmak üzere

$x \in X$ için $f(x) = rg(Fx + y_0)$ ile tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$-f^*(x^*, z^*) = r\left(-g^*\left(\frac{1}{r}F^{-1*}x^*, z^*\right)\right) + S_{(x*,z*)}(F^{-1}y_0)$$

olur. Gerçekten Tanım 4.1'de (4.1) ifadesinde $y = F_x + y_0$ ve $x = F^{-1}(y - y_0)$ seçersek,

$$\begin{aligned}
-f^*(x^*, z^*) &:= cl \bigcup_{x\in X} \left[rg(F_x + y_0) + S_{(x*,z*)}(-F^{-1}(y - y_0)\right] \\
&= cl \bigcup_{x\in X} \left[rg(y) + S_{(x*,z*)}(-F^{-1}(y)) + S_{(x*,z*)}(-F^{-1}y_0)\right] \\
&= r\ cl \bigcup_{x\in X} \left[g(y) + S_{(\frac{1}{r}F^{-1}x*,z*)}(-y) + S_{(x*,z*)}(F^{-1}y_0)\right] \\
&= r\left(-g^*\left(\tfrac{1}{r}F^{-1}x^*, z^*\right)\right) + S_{(x*,z*)}(F^{-1}y_0)
\end{aligned}$$

olur. Bu da bize istenilen sonucu verir. Yukarıda 2. satırdan 3. satıra geçiş

$$\begin{aligned}
x^*(F^{-1} - y) &= k \\
< x^*, F^{-1} - y > &= k \\
< (F^{-1})^*x^*, -y > &= k \\
(F^{-1})^*x^*(-y) &= k
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
z \in \tfrac{1}{r}S_{(x*,z*)}(-F^{-1}y) &\Leftrightarrow rz \in S_{(x*,z*)}(-F^{-1}y) \\
&\Leftrightarrow x^*(F^{-1}y) + z^*(rz) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \tfrac{1}{r}(F^{-1})^*x^*(-y) + z^*(z) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow z \in S_{((\frac{1}{r}F^{-1})x*,z*)}(-y)
\end{aligned}$$

ile gösterilir.

B) $(x_0^*, z_0^*) \in X^* \times C^*\backslash\{\theta\}$ olsun. $f : X \to \mathcal{Q}_C^t$ ve $g : X \to \mathcal{Q}_C^t$ olmak üzere

$$f(x) = g(x) \oplus S_{(x_0^*,z_0^*)}(x)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $x^* \in X^*,\ z^* \in C^*\backslash\{\theta\}$ için

$$-f^*(x^*, z^*) = \begin{cases} -g^*\left(x^* - \frac{1}{s}x_0^*, z_0^*\right) & : \ \exists s > 0 \text{ için } z^* = \frac{1}{s}z_0^* \\ Z & : \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur. Gerçekten $\exists s > 0$ öyleki $z^* = \frac{1}{s}z_0^*$ olsun.

$$\begin{aligned}
S_{(x_0^*,sz*)}(x) &= \{z : x_0^*(x) + sz^*(z) \leqslant 0\} \\
&= \{z : \tfrac{1}{s}x_0^*(x) + z^*(z) \leqslant 0\} \\
&= S_{(\frac{1}{s}x_0^*,z*)}(x)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi her $s > 0$ için $z^* \neq \frac{1}{s}z_0^*$ ise $Z = S_{(x_0^*,z_0^*)}(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x)$ olduğunu gösterelim. $z_1 \in S_{(x_0^*,z_0^*)}(x)$ ve $z_2 \in S_{(x_0^*,z_0^*)}(-x)$ olmak üzere

$$x_0^*(x) + z_0^*(z_1) \leqslant 0 \Rightarrow z_0^*(z_1) \leqslant -x_0^*(x)$$

$$x^*(-x) + z^*(z_2) \leqslant 0 \Rightarrow z^*(z_2) \leqslant x^*(x)$$

ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned} z_0^*(z_1) + z^*(z_2) &\leqslant -x_0^*(x) + x^*(x) \\ &= \underbrace{(x^* - x_0^*)}_{\to +\infty}(x) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade $z_1,\ z_2 \in Z$ için sağlanır. z^* ile z_0^* arasında bir ilişki yoksa x^* ile x_0^* arasında da bir ilişki yoktur. O yüzden x^* ile x_0^*'da farklı değer alan bir $x \in X$ vardır. Bu nedenle sağ taraftaki değeri istenildiği kadar büyütebiliriz.

$$S_{(\frac{1}{s}x_0^*,z^*)}(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x) \subseteq S_{(x^*-\frac{1}{s}x_0^*,z^*)}(-x)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $z_1 \in S_{(\frac{1}{s}x_0^*,z^*)}(x)$ ve $z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(-x)$ olsun.

$$\frac{1}{s}x_0^*(x) + z^*(z_1) \leqslant 0$$

$$-x^*(x) + z^*(z_2) \leqslant 0$$

ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$\left(\frac{1}{s}x_0^* - x^*\right)(x) + z^*(z_1 + z_2) \leqslant 0$$

elde ederiz. Bu ise

$$(z_1 + z_2) \in S_{(x^*-\frac{1}{s}x_0^*,z^*)}(x)$$

olduğunu gösterir.

$$S_{(\frac{1}{s}x_0^*,z^*)}(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x) \supseteq S_{(x^*-\frac{1}{s}x_0^*,z^*)}(-x)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $z \in S_{(x^*-\frac{1}{s}x_0^*,z^*)}(x)$ olsun. Yani

$$\left(x^* - \frac{1}{s}x_0^*\right)(x) + z^*(z) \leqslant 0$$

$$x^*(x) - \frac{1}{s}x_0^*(x) + z^*(z) \leqslant 0$$

olur. En az bir z_1 vardır öyle ki $z_1 \in S_{(x^*,z^*)}(-x)$ ve $z^*(z_1) = x^*(x)$ olsun.

$z_2 = z - z_1$ olur.. $z_2 \in S_{(\frac{1}{s}x_0^*, z^*)}(x)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{s}x_0^*(x) + z^*(z_2) &= \tfrac{1}{s}x_0^*(x) + z^*(z) - z^*(z_1) \\ &= \tfrac{1}{s}x_0^*(x) - x^*(x) + z^*(z) \\ &= \left(\tfrac{1}{s}x_0^* - x^*\right)(x) + z^*(z) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

olur. Yani $z_2 \in S_{(\frac{1}{s}x_0^* - x^*, z^*)}(x)$'dir. Dolayısıyla, $z = (z_2 + z_1) \in S_{(\frac{1}{s}x_0^*, z^*)}(x) + S_{(x^*, z^*)}(-x)$ olur.
$x^* = x_1^* + x_2^*$ ise

$$S_{(x_1^*, z^*)}(x) + S_{(x_2^*, z^*)}(x) = S_{(x_1^* + x_2^*, z^*)}(x)$$

eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını gösterelim. Bunun için $z_1 \in S_{(x_1^*, z^*)}(x)$ ve $z_2 \in S_{(x_2^*, z^*)}(x)$ alalım.

$$\begin{aligned} x_1^*(x) + z^*(z_1) + x_2^*(x) + z^*(z_2) &\leqslant 0 \\ (x_1^* + x_2^*)(x) + z^*(z_1 + z_2) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$(z_1 + z_2) \in S_{(x_1^* + x_2^*, z^*)}(x)$$

elde ederiz.

$z \in S_{(x_1^* + x_2^*, z^*)}(x)$ olsun. Buradan,

$$(x_1^* + x_2^*)(x) + z^*(z) \leqslant 0$$

olur. $z^*(z_1) = -x^*(x)$ olacak şekilde $z_1 \in S_{(x_1^*, z^*)}(x)$ ve $z_2 = z_1 - z$ olarak alalım. Buradan

$$\begin{aligned} x_2^*(x) + z^*(z_2) &= x_2^*(x) + z^*(z) - z^*(z_1) \\ &= x_2^*(x) + z^*(z) + x_1^*(x) \\ &= (x_1^* + x_2^*)(x) + z^*(z) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

olur. O halde,

$$S_{(x_1^*, z^*)}(x) + S_{(x_2^*, z^*)}(x) = S_{(x_1^* + x_2^*, z^*)}(x)$$

elde ederiz. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
-f^*(x^*,z^*) &= cl\bigcup_{x\in X}\left[g(x)+S_{(x_0^*,z_0^*)}(x)+S_{(x^*,z^*)}(-x)\right]\\
&= cl\bigcup_{x\in X}\left[g(x)+S_{(x_0^*,sz^*)}(x)+S_{(x^*,z^*)}(-x)\right]\\
&= cl\bigcup_{x\in X}[g(x)+\underbrace{S_{(\frac{1}{s}x_0^*,z^*)}(x)+S_{(x^*,z^*)}(-x)}_{S_{(x^*-\frac{1}{s},z^*)}(x)}]\\
&= cl\bigcup_{x\in X}\left[g(x)+S_{(x^*-\frac{1}{s},z^*)}(x)\right]\\
&= -g^*\left(x^*-\tfrac{1}{s}x_0^*,z^*\right)
\end{aligned}$$

olur. Bir $s>0$ için $z^*=\frac{1}{s}z_0^*$ olması için gerekli ve yeterli bir şart $H(z_0^*)=H(z^*)$ olmasıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
z\in H(z^*) &\Leftrightarrow z^*(z)\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow \tfrac{1}{s}z_0^*\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow z_0^*(z)\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow z\in H(z_0^*)
\end{aligned}$$

dır.

C) $f_1,\ f_2: X\to\mathcal{P}_C^a$ fonksiyonlarının infimal sarmalı olan $f_1\,\square\, f_2: X\to\mathcal{Q}_C^t$ fonksiyonu

$$(f_1\,\square\, f_2)(x)=cl\ co\bigcup_{x_1+x_2=x}[f_1(x_1)+f_2(x_2)]$$

ile tanımlanır. Buradan f_1 ve f_2 konveks ise tanımdaki konveks örtü eklemesi çıkarılabilir.

Lemma 4.13. *$f_1,\ f_2: X\to\mathcal{P}_C^a$ ise $-(f_1\,\square\, f_2)^*=-f_1^*\oplus -f_2^*$ olur.*

Kanıt. $x^*\in X^*,\ z^*\in C^*\backslash\{\theta\}$ olmak üzere ((4.1) ifadesini kullanalım)

$$\begin{aligned}
-(f_1\,\square\, f_2)^*(x^*,z^*) &= cl\bigcup_{x\in X}\left[(f_1\,\square\, f_2)(x)+S_{(x^*,z^*)}(-x)\right]\\
&= cl\bigcup_{x\in X}\left[cl\ co\bigcup_{x_1+x_2=x}(f_1(x_1)+f_2(x_2))+S_{(x^*,z^*)}(-x)\right]\\
&\qquad \text{(Uyarı 4.4'den)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= cl \bigcup_{x\in X} \left[\bigcup_{x_1+x_2=x} (f_1(x_1)+f_2(x_2)) + S_{(x^*,z^*)}(-x) \right] \\
&= cl \bigcup_{x_1\in X} \bigcup_{x_2\in X} \left[f_1(x_1)+f_2(x_2)+S_{(x^*,z^*)}(-x_1-x_2) \right] \\
&\quad \text{(Önerme 2.13'den)} \\
&= cl \bigcup_{x_1\in X} \bigcup_{x_2\in X} \left[f_1(x_1)+S_{(x^*,z^*)}(-x_1)+f_2(x_2)+S_{(x^*,z^*)}(-x_2) \right] \\
&= cl \bigcup_{x_1\in X} \left[f_1(x_1)+S_{(x^*,z^*)}(-x_1) \right] + cl \bigcup_{x_2\in X} \left[f_2(x_2)+S_{(x^*,z^*)}(-x_2) \right] \\
&= \bigcup_{x_1\in X} \left[f_1(x_1)+S_{(x^*,z^*)}(-x_1) \right] \oplus \bigcup_{x_2\in X} \left[f_2(x_2)+S_{(x^*,z^*)}(-x_2) \right] \\
&= -f_1^* \oplus -f_2^*
\end{aligned}
$$

olur. $(f_1 \square f_2)$'den 2.eşitlik doğrudur. $x \mapsto \bigcup_{x_1+x_2=x} (f_1(x_1)+f_2(x_2))$ fonksiyonunda aynı eşleniği kullandık. $\square$

D) Y (A maddesindeki gibi) başka bir yerel konveks uzay olsun. $g : Y \to \mathcal{P}_C^a$ bir küme değerli fonksiyon ve $F : Y \to X$ bir sürekli lineer operatör olsun.

$$
(Fg)(x) = \inf\{g(y) : Fy = x\} = cl\ co \bigcup_{\{y\in Y: Fy=x\}} g(y) \tag{4.11}
$$

ile g konveks olduğunda konveks olan bir $Fg : X \to \mathcal{Q}_C^t$ fonksiyonu tanımlanabilir. Konvekslik durumunda, tanımdan konveks örtü çıkarılabilir.

Lemma 4.14. *$g : Y \to \mathcal{P}_C^a$ ise her $(x^*, z^*) \in X^* \times C^* \backslash \{\theta\}$ için*

$$
-(Fg)^*(x^*, z^*) = -g^*(F^*x^*, z^*)
$$

olur.

Kanıt. (4.1) ifadesinde f yerine Fg yazarsak;

$$
\begin{aligned}
-(Fg)^*(x^*, z^*) &= cl \bigcup_{x\in X} \left[(Fg)(x) + S_{(x^*,z^*)}(-x) \right] \\
&= cl \bigcup_{x\in X} \left[cl\ co \bigcup_{y\in Y} g(y) + S_{(x^*,z^*)}(-Fy) \right] \\
&= cl\ co \bigcup_{y\in Y} \left[g(y) + S_{(F^*x^*,z^*)}(-y) \right] \\
&= -g^*(F^*x^*, z^*)
\end{aligned}
$$

$\square$

5. KONVEKS RİSK ÖLÇÜLERİNİN DUAL TEMSİLİ

Bundan sonraki bölümde $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı olsun.

$$1 \leqslant p \leqslant \infty \text{ ve } \int_{\Omega} \|x(\omega)\|^P dP < \infty$$

olacak şekildeki tüm $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ P-ölçülebilir fonksiyonlarının lineer uzayını $L_d^P = L_d^P(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ile,

$$ess \sup_{\omega \in \Omega} \|x(\omega)\| < \infty \; (ess \; \sup\|x\| := \inf\{M \in \mathbb{R} : P(\|x\| > M) = 0\})$$

olacak şekildeki tüm $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ P-ölçülebilir fonksiyonlarının uzayını $L_d^{\infty} = L_d^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ile gösterelim. Burada $\|.\|$, $\mathbb{R}^d$'de belirli bir normdur. Her iki durumda da fonksiyonların eşitliği, P ölçüsü sıfır olan kümeler üzerinde farklı olması, kümelerin eşitliğini etkilemeyecek şekilde kabul edilir. Böylece L_d^p, $1 < p < \infty$ için yansımalı bir Banach uzayı olur. $L^p = L_1^p$ ise bir $x \in L_d^p$ elemanı için bileşenleri $x_1, ..., x_d$ olan bir vektördür. $\mathbb{1}$ sembolü P-hemen hemen kesin değeri 1 olan L_d^p'deki rassal değişkeni simgeler.

Bir $x \in L_d^p$ elemanı bir yatırımın gelecekteki rastgele bir geri ödemesi olarak anlaşılır. Amaç; referans araçları bakımından riski ölçmektir. Örnek olarak; referans araçları arasında geçiş maliyetlerinin varlığı durumunda d farklı para birimindeki yatırım verilebilir. Risk ölçümü $P(\mathbb{R}^d)$'de değer alan bir fonksiyon aracılığıyla yapılacaktır. Finansal altyapı hakkında daha fazla bilgi için [30]'a bakılabilir. $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}_+^d \subseteq K$'yı kapsayan bir kapalı konveks polihedral koni olsun. K konisi, piyasalar arasındaki oransal anlaşmazlıkları modeller ve $\mathbb{R}_+^d$'deki pozisyonlara(geçiş maliyetlerini ödeyerek) transfer edilebilen referans vektörlerini içerir. K konisi bir doğruyu kapsıyorsa d farklı piyasada aralarında geçiş ücreti olmayan en az iki tane araç vardır. Eğer $K = \mathbb{R}_+^d$ ise araçlar arasında değişiklik mümkün değildir.

$1 \leqslant p \leqslant \infty$ için,

$$L_d^p(K) = \{x \in L_d^p : P(\{\omega \in \Omega : x(\omega) \in K\}) = 1\} \tag{5.1}$$

kümesi L_d^p'de bir kapalı konveks konidir. $L_d^p(\mathbb{R}_+^d)$ yerine $(L_d^p)_+$ yazacağız.

$M \subseteq \mathbb{R}^d$, $1 \leqslant m \leqslant d$ için $M = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{d-m}$ ile tanımlı $\mathbb{R}^d$'nin lineer alt uzayı olsun. M, bir yatırımcının veya bir düzenleyicinin başlangıçta(genelliği kaybetmeksizin) m referans araçlarını güvenlik yatırımları veya risk bedeli kabul eder. ([22, 30]'a bakılabilir.) $K_M = K \cap M$ kümesi M'de bir kapalı konveks polihedral konidir. $int\ K_M$, M'deki

K_M'nin içidir. $\mathbb{R}^d_+ \subseteq K$ olduğundan $\mathbb{R}^m_+ \times \{0\}^{d-m} \subset K_M$, dolayısıyla $int\ K_M \neq \emptyset$ olur.

Tanım 5.1. *$\varrho : L^p_d \to \mathcal{Q}^t_M := \mathcal{Q}^t_{K_M}(M)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa **riskin küme değerli bir ölçüsü** adını alır:*

(R0) Normalleştirilme:

$$K_M \subseteq \varrho(0) \text{ ve } \varrho(0) \cap -int\ K_M = \emptyset,$$

(R1) M'deki kaydırılabilme (ilk m para birimindeki nakit değişmezliği):

$$\forall x \in L^p_d, \forall z \in M : \varrho(x + z\mathbb{1}) = \varrho(x) - z, \tag{5.2}$$

(R2) $L^p_d(K)$ monotonluk:

$$x^2 - x^1 \in L^p_d(K) \text{ ile } \varrho(x^2) \supseteq \varrho(x^1).$$

*Eğer ϱ, (R0),(R1) ve (R2)'yi sağlıyorsa ve konveks ise bir **(küme değerli) konveks risk ölçüsü** denir.*
*Eğer ϱ, (R0), (R1) ve (R2)'yi sağlıyorsa ve sublineer ise bir **(küme değerli) tutarlı risk ölçüsü** denir.*

$\varrho : L^p_d \to \mathcal{Q}^t_M$ risk ölçüsünün kabul kümesi

$$A_\varrho = \{x \in L^p_d : 0 \in \varrho(x)\} = \{x \in L^p_d : K_M \subseteq \varrho(x)\}$$

olarak tanımlanır.

(R0)'daki ilk koşul $(0,0) \in graf\ \varrho$ olmasına denktir. Bunun anlamı hiçbirşey yapmamanın bir bedelini olmamasıdır. Yani sıfır portfolyodur. (R1), $L = \{(\mathbb{1}, 1)z \in L^p_d \times M : z \in M\}$ kümesinin L^p_d'nin bir sonlu boyutlu (dolayısıyla kapalı) alt uzay olmak üzere (R1), $graf\ \varrho + L = graf\ \varrho$ olmasına denktir. (R2), $graf\ \varrho + (L^p_d(K) \times \{0\}) = graf\ \varrho$ olmasına denktir.

Risk ölçülerinin nakit değişmezliği teorisinde, risk ölçüsünün Fenchel eşitliğini de dikkate alacak şekilde dual gösterimini bulmak önemlidir. Bunun için bir kaç sembole daha ihtiyaç duyuldu. $P-$olasılık ölçüsüne göre $x \in L^p_d$ rastgele değişkeninin $\mathbb{R}^d-$değerli beklentisini $E[x]$ ile göstereceğiz. $E[x]$, x'in bileşenlerinin beklentilerinin vektörüdür. Bunun yanında $K^* + M^\perp$ ifadesinin M'ye ortogonal $\mathbb{R}^d$'nin alt uzayı olan $M^\perp = \{0\}^{d-m}$'ye sahip olan $\mathbb{R}^d$'deki K_M'nin dual koni(polihedral olduğu için kapalı) olduğuna dikkat edelim. Ayrıca M'deki K_M'nin dual konisi olan

$$K^*_M = \{u \in M : \text{ her } z \in K_M \text{ için } u^T z \leqslant 0\}$$

olmasını istiyoruz. $p \in [1, \infty]$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlasın. $p = 1$ için $q = \infty$ veya $p = \infty$ için $q = 1$ olur.

Önerme 5.1. *$\varrho : L_d^p \to \mathcal{Q}_M^t$ bir risk ölçüsü ve $u \in K_M^* \backslash \{\theta\}$ olsun. O halde*

$$\varrho^*(y,u) = \begin{cases} -q_{A_\varrho}(y,u) & : \; y \in L_d^q(K^*), \; u \in (E[y] + M^\perp) \cap K_M^* \backslash \{\theta\} \\ M & : \; \textit{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{5.3}$$

olur. Burada

$$-q_{A_\varrho}(y,u) = -\left(\mathcal{I}_{A_\varrho}\right)^*(y,u)$$

olacak şekilde(Örnek 4.1'deki gibi) ϱ'nun A_ϱ kabul kümesinin küme değerli negatif destek fonksiyonudur.

Kanıt.

$$\begin{aligned} -\varrho^*(y,u) &\supseteq cl \bigcup_{x \in A_\varrho} \left(\varrho(x) + S_{(y,u)}(-x)\right) \\ &\supseteq cl \bigcup_{x \in A_\varrho} S_{(y,u)}(-x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla her $y \in L_d^q$ ve $u \in \mathbb{R}^d$ için,

$$-\varrho^*(y,u) \supseteq -q_{A_\varrho}(y,u)$$

olur.(Örnek 4.1'den)

$y \notin L_d^p(K)^* = L_d^q(K^*)$ ise $E[\bar{x}^T y] > 0$ olacak şekilde $\bar{x} \in L_d^p(K)$ vardır. $L_d^p(K) \subseteq A_\varrho$ olduğunu gözlemleyerek ve $t > 0$ için

$$S_{(y,u)}(-t\bar{x}) = \{z \in M : E[-t\bar{x}^T y] + u^T z \leqslant 0\}$$

kümesini kullanarak, $E[-t\bar{x}^T y] = -t\, E[\bar{x}^T y] \leqslant 0$ olduğundan her u ve z için $E[-t\bar{x}^T y]$'yi yeterince küçültebiliriz. Bu nedenle

$$\begin{aligned} -q_{A_\varrho}(y,u) &\supseteq cl \bigcup_{x \in L_d^p(K)} S_{(y,u)}(-x) \\ &\supseteq \bigcup_{t>0} S_{(y,u)}(-t\bar{x}) \\ &= M \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $y \notin L_d^q(K^*)$ olduğundan

$$-\varrho^*(y,u) \supseteq -q_{A_\varrho}(y,u) = M$$

olur. Şimdi $u \notin E[y] + M^{\perp}$ olduğunu kabul edelim ve $v \in M$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
S_{(y,u)}(-x - v\mathbb{1}) &= \{z \in M : E[(-x - v\mathbb{1})^T y] + u^T z \leqslant 0\} \\
&= \{z \in M : E[-x^T y] - E[y]^T v + u^T z \leqslant 0\} \\
&= \{z \in M : E[-x^T y] \leqslant -u^T z + E[y]^T v\} \\
&= \{z \in M : E[-x^T y] \leqslant -u^T (z - v + v) + E[y]^T v\} \\
&= \{z \in M : E[-x^T y] \leqslant -u^T (z - v) - u^T v + E[y]^T v\} \\
&= \{z \in M : E[-x^T y] \leqslant -u^T (z - v) + (E[y] - u)^T v\} \\
&= \{z - v \in M : E[-x^T y] \leqslant -u^T (z - v) + (E[y] - u)^T v\} + v \\
&= \{z \in M : E[-x^T y] \leqslant -u^T (z) + (E[y] - u)^T v\} + v
\end{aligned}$$

olur. Her $z \in M$ için $E[y] - u \notin M^{\perp}$ olduğundan

$$E[-x^T y] \leqslant -u^T z + (E[y] - u)^T v$$

olacak şekilde $v \in M$ bulabiliriz. Dolayısıyla

$$\bigcup_{v \in M} S_{(y,u)}(-x - v\mathbb{1}) = M$$

olur. Yani,

$$-\varrho^*(y,u) = cl \bigcup_{x \in L^p_d,\ v \in M} \big(\varrho(x, v\mathbb{1}) + S_{(y,u)}(-x - v\mathbb{1})\big) = M$$

dir. Geriye $y \in L^q_d(K^*)$ ve $u \in E[y] + M^{\perp}$ için

$$-\varrho^*(y,u) \subseteq -q_{A_\varrho}(y,u)$$

olduğunu göstermek kalır. Gerçekten $z \in \varrho(x)$ alırsak (R1) ile $x + z\mathbb{1} \in A_\varrho$ ve

$$\begin{aligned}
cl \bigcup_{x \in A_\varrho} S_{(y,u)}(-x) &= -q_{A_\varrho}(y,u) \\
&\supseteq S_{(y,u)}(-x - v\mathbb{1}) \\
&= S_{(y,u)}(-x) + z
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $u \in E[y] + M^{\perp}$ olduğundan $E[y] - u \in M^{\perp}$ olur. $z \in M$ alırsak $(E[y] - u)^T \cdot z = 0$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
S_{(y,u)}(-x - z\mathbb{1}) &= \{z \in M : E[-x^T y] \leqslant -u^T z\} + z \\
&= S_{(y,u)}(-x) + z
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla her $x \in L_d^p$ için

$$\varrho(x) + S_{(y,u)}(-x) \subseteq -q_{A_\varrho}(y,u)$$

$$cl \bigcup_{x \in L_d^p} \left(\varrho(x) + S_{(y,u)}(-x)\right) \subseteq -q_{A_\varrho}(y,u)$$

sonucunu elde ederiz. □

Bileşenleri P'ye göre kesin sürekli olan tüm vektör olasılık ölçülerinin kümesini $\mathcal{M}_{1,d}^P = \mathcal{M}_{1,d}^P(\Omega, \mathcal{F})$ ile gösterelim. Yani $\mathcal{Q}_i : \Omega \to [0,1]$, i=1,...,d için $\frac{d\mathcal{Q}_i}{dP} \in L_d^1$ koşulunu sağlayan $(\Omega, \mathcal{F})$ üzerinde bir olasılık ölçüsü olur. $\mathcal{Q}$ vektör olasılık ölçüsüne göre $x \in L_d^p$'nin vektörel beklentisini

$$E^{\mathcal{Q}}[x] = (E^{\mathcal{Q}_1}[x], ..., E^{\mathcal{Q}_d}[x])^T$$

ile göstereceğiz. Ayrıca $K^+ = -K^*$ notasyonunu kullanacağız.

Sonuç 5.2. *$\varrho : L_d^p \to \mathcal{Q}_M^t$ bir has kapalı ($p = \infty$ ise $\sigma(L_d^\infty, L_d^1)$-kapalı) konveks risk ölçüsü ise $(\mathcal{Q}, v) \in \mathcal{M}_{1,d}^P \times K^+ \backslash M^\perp$ için*

$$-\alpha(\mathcal{Q}, v) = (-\alpha(\mathcal{Q}, v) \oplus G(v)) \cap M$$

yi sağlayan $-\alpha : \mathcal{M}_{1,d}^P \times K^+ \backslash M^\perp \to \mathcal{Q}_M^t$ vardır.

$$\mathcal{W} = \{(\mathcal{Q}, v) \in \mathcal{M}_{1,d}^P \times K^+ \backslash M^\perp : diag(v)\frac{d\mathcal{Q}_i}{dP} \in L_d^p(K^+)\}$$

kümesi üzerinde $-\alpha(\mathcal{Q}, v)$, M'ye eşit değildir. ($M \neq -\alpha(\mathcal{Q}, v)$) Bu durumda her $x \in L_d^p$ için,

$$\varrho(x) = \bigcap_{(\mathcal{Q},v) \in \mathcal{W}} \{-\alpha(\mathcal{Q}, v) + \left(E^{\mathcal{Q}}[-x] + G(v)\right) \cap M\} \tag{5.4}$$

yazılabilir. Ek olarak $-\alpha$ yerine $-\alpha_{\min}(\mathcal{Q}, v) = cl \left(\bigcup_{x' \in A_\varrho} E^{\mathcal{Q}}[x'] + G(v) \right) \cap M$ yazdığımızda (5.4) ifadesini sağlayan her bir $-\alpha$ fonksiyonu, her $(\mathcal{Q}, v) \in \mathcal{W}$ için $-\alpha(\mathcal{Q}, v) \subseteq -\alpha_{\min}(\mathcal{Q}, v)$ sağlanır.

Kanıt. Önerme 5.1 ve Teorem 4.8'den

$$\underbrace{\varrho^{**}(x)}_{\varrho(x)} = \bigcap_{\substack{y \in L_d^q(K^*), \\ u \in (E[y]+M^\perp) \cap K_M^* \backslash \{\theta\}}} \left[-\underbrace{\varrho^*(y,u)}_{-q_{A_\varrho}(y,u)} + S_{(y,u)}(x) \right]$$

olur. Yani,

$$\varrho(x) = \bigcap_{\substack{y \in L_d^q(K^*),\\ u \in (E[y]+M^{\perp}) \cap K_M^* \backslash \{\theta\}}} \left[-q_{A_\varrho}(y,u) + S_{(y,u)}(x)\right] \tag{5.5}$$

elde ederiz.
$y \in L_d^q(K^*)$ ve $v = E[-y] \in K^+$ alalım. Burada $K^* = \{y \in \mathbb{R}^d : \forall k \in K,\ k^T y \leqslant 0\}$ olduğundan $y \in L_d^q(K^*)$, $\forall \omega \in \Omega$ için $y(\omega) \in K^*$ olur. Dolayısıyla $E[y] \in K^*$ ise $E[-y] \in K^+$'dır. Bu durumda y,

$$-y_i = v_i \tilde{y}_i,\ i = 2, ..., d$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\tilde{y} \in (L_d^p)_+$ ve $E[\tilde{y}] = (1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^d$'dir. Bu $v_i > 0$ ise $\tilde{y}_i = -\frac{1}{v_i} y_i$ ve $E[y_i] = 0$ ise $E[\tilde{y}_i] = 1$ seçerek $\tilde{y}_i \in (L_d^p)_+$ oluşturulabilir. $\tilde{y}$ fonksiyonu $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,d}^P$ olacal şekilde $i = 1, ..., d,\ \Omega' \in \mathcal{F}$ için

$$\mathcal{Q}_i(\Omega') = \int_{\Omega'} \tilde{y}_i(\omega) dP$$

şeklinde $\mathcal{F}$ üzerinde bir $\mathcal{Q}$ vektör olasılık ölçüsünü üretir. Bu durumda

$$-y = diag(v) \frac{d\mathcal{Q}}{dP} \in L_d^q(K^+) \text{ ve } E[x^T y] = v^T E^{\mathcal{Q}}[-x]$$

olur. $u \in -v + M^{\perp}$ olduğundan $v \notin M^{\perp}$ elde ederiz. Çünkü diğer durumlarda $u \in M^{\perp}$ olur ki bu, $u \in K_M^* \backslash \{\theta\} \subseteq M \backslash \{\theta\}$ olacağından mümkün değildir. Üstelik $u = -v - u_{M^{\perp}}$ olacak şekilde $u_{M^{\perp}} \in M^{\perp}$ vardır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
S_{(y,u)}(x) &= \{z \in M : E[x^T y] + u^T z \leqslant 0\} \\
&= \{z \in M : v^T E^{\mathcal{Q}}[-x] - v^T z \leqslant 0\} \\
&= \{z \in M : v^T (z - E^{\mathcal{Q}}[-x]) \geqslant 0\} \\
&= \big(\{z - E^{\mathcal{Q}}[-x] \in M : v^T (z - E^{\mathcal{Q}}[-x]) \geqslant 0\} + E^{\mathcal{Q}}[-x]\big) \cap M \\
&= \big(\{z : v^T z \geqslant 0\} + E^{\mathcal{Q}}[-x]\big) \cap M \\
&= \left(\underbrace{H(v)}_{G(v)} + E^{\mathcal{Q}}[-x]\right) \cap M \\
&= \big(E^{\mathcal{Q}}[-x] + G(v)\big) \cap M
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla her bir $(y,u) \in L_d^q(K^*) \times (E[y] + M^{\perp}) \cap K_M^* \backslash \{\theta\}$ ikilisi

$$S_{(y,u)}(x) = \big(E^{\mathcal{Q}}[x] + G(v)\big) \cap M$$

olacak şekilde bir $(\mathcal{Q}, v) \in \mathcal{W}$ elemanı üretir. $(\mathcal{Q}, v)$ ile verilen ifadeleri (5.5) ifadesindeki $S_{(y,u)}$'nun yerine yazarak (5.4) ifadesini elde ederiz.

Son eşitsizlik $-\varrho^*$ ve $\varrho^{**} = \varrho$ için Young-Fenchel eşitsizliğinden çıkar. Eşitliğin sağ tarafının $-q_{A_\varrho}$'ya denk olduğu görülebilir. $\square$

Uyarı 5.3. *Skaler durumda bazen dual gösterim için eşleniği kullanmak işe yaramayabilir. Bu durumda ceza fonksiyonu kullanılabilir.* $-\alpha$ *fonksiyonu hakkında bilgi edinmek için [17],s 165'e bakabilirsiniz.*

Uyarı 5.4. $p = \infty$ *durumunda* ϱ*'nun,* L_d^p *üzerindeki zayıf topolojiye göre kapalı olması için yeterli(ve gerekli) koşullar verilebilir. Bu tür koşullar, küme değerli durumların genişletilmiş reel değerli fonksiyonları için Fatou özelliğinin genellemeleridir. [22]*

Uyarı 5.5. *Küme değerli bir risk ölçüsünün dual gösterimi dual değişkenlerin iki kümesini gerektirir. Bunlardan biri, skaler durumun genelleştirilmesinde yatırımcının ya da düzenleyicinin* P *fiziksel ölçüsüne alternatif olarak düşünebileceği vektör olasılık ölçülerinin bir kümesi ve olası* Ω*'ların bileşenleri, yatırımcıların ilgili pazardaki riske karşı tutumunu yansıtır. Diğeri ise bu makalede genel teoriye uygun olarak, görüntü uzayındaki bir dual değişken kümesidir. Bunlar iç ağırlık(veya fiyat) vektörleri olarak düşünülebilir. Bu vektörün bileşenleri ile ilgili yatırım aracının riskine karşılık yatırımcının ya da düzenleyicinin tutumunu yansıtır.* $diag(v)\frac{dQ}{dP} \in L_d^q(K^+)$ *bir birleştirme koşuludur:* $d-$*boyutlu bir piyasa tutumu seçilir seçilmez, referans araçlara yönelik tutumu seçmede belirli, ancak sınırsız olmayan bir özgürlük derecesi vardır. Diğer yönde mümkündür: Piyasa tutumu seçildiyse, birleştirme koşulu, yatırımcının ilgili piyasalarda riske girme tutumu için kesin, ancak sınırsız olmayan bir hareket alanı sağlar.*

Bu nedenle, dual değişkenlerin lineer fonksiyonellerin ikilileri olarak seçilmesi sadece vektör ve küme değerli konveks fonksiyon için tatmin edici bir duallik teorisi ortaya koymaz, aynı zamanda ilgili uygulama açısından yorumlanabilecek sonuçlar ortaya koyar.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Küme değerli optimizasyon vektör optimizasyona göre yeni ve daha karmaşık bir yapıya sahip olduğu için vektör optimizasyona göre kullanılabilecek araçlar daha az ve çözümlerinin bulunması daha zordur. Bu amaçla vektör optimizasyonda kullanılan pek çok yöntemin küme değerlilere genişlemeleri araştırılmaktadır. Bu çalışmada vektör optimizasyon problemlerinde oldukça fayda sağlayan eşlenik duallik kavramının küme değerlilere bir genişlemesi çalışıldı. Bu tez yeni gelişmekte olan küme değerli optimizasyonda eşleniklik kavramı ile ilgili anlaşılır bir Türkçe kaynak oluşturdu. Küme değerli optimizasyonun uygulaması açısından da örnek bir çalışmadır. Benzer küme değerli optimizasyon problemleri ve çözüm yöntemleri açısından yol göstericidir.

KAYNAKLAR

[1] Azimov, A.Y.: Duality of multiobjective problems. Math. USSR Sbornik 59(2), 515–531 (1988)

[2] Azimov,A.Y.: Duality for set-valuedmultiobjective optimization problems, part 1: mathematical programming. J. Optim. Theory Appl. 137, 61–74 (2008)

[3] Borwein, J.M.: A Lagrange multiplier theorem and a sandwich theorem for convex relations. Math. Scand. 48, 189–204 (1981)

[4] Borwein, J.M.: Continuity and differentiability properties of convex operators. Proc. London Math. Soc., 44(3), 420–444 (1982)

[5] Borwein, J.M.: Subgradients of convex operators. Math. Oper.forsch. Stat. Ser. Optim. 15(2), 179–191 (1984)

[6] Borwein, J., Penot, J.P., Thera, M.: Conjugate convex operators. J. Math. Anal. Appl. 102, 399– 414 (1984)

[7] Breckner, W.W., Kolumbán, I.: Konvexe Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen. Math. Scand. 25, 227–247 (1969)

[8] Brink, C.: Power structures. Algebra Univers. 30, 177–216 (1993)

[9] Brumelle, S.L.: Convex operators and supports. Math. Oper. Res. 3(2), 171–175 (1978)

[10] Brumelle, S.L.: Duality for multiple objective convex programs. Math. Oper. Res. 6(2), 159–172 (1981)

[11] Cascos, I., Molchanov, I.: Multivariate risks and depth-trimmed regions. Finance Stoch. 11, 373– 397 (2007)

[12] Chen, G., Huang, X., Yang, Y.: Vector optimization. In: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, no. 541. Springer, Berlin Heidelberg New York (2005)

[13] Dolecki, S., Malivert, C.: General duality in vector optimization. Optimization 27(1–2), 97–119 (1993)

[14] Ekeland, I., Temam, R.: Convex analysis and variational problems. In: Studies in Mathematics and its Applications, vol. 1. North Holland, Elsevier (1976)

[15] Elster, K.-H., Nehse, R.: Konjugierte operatoren und subdifferentiale. Math. Oper.forsch. Stat. 6(4), 641–657 (1975)

[16] Fel'dman, M.M.: On sufficient conditions for the existence of supports to sublinear operators. Sib. Math. J. 16(1), 106–111 (1975), [translation from Sib. Mat. Zh. 16, 132–138 (1975)]

[17] Föllmer, H., Schied, A.: Stochastic finance. In: de Gruyter Studies in Mathematics, Extended Edition, vol. 27. Walter de Gruyter, Berlin (2004)

[18] Fuchssteinert, B., Lusky, W.: Convex cones. In: Mathematics Study, vol. 58. North Holland, Amsterdam (1981)

[19] Godini, G.: A framework for best simultaneous approximation: normed almost linear spaces. J. Approx. Theory 43, 338–358 (1985)

[20] Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C., Zălinescu, C.: Variational methods in partially ordered spaces. In: CMS Books in Mathematics, vol. 17. Springer, New York (2003)

[21] Hamel, Andreas H. "A duality theory for set-valued functions I: Fenchel conjugation theory." Set-Valued and Variational Analysis 17.2 (2009): 153-182.

[22] Hamel, A.H.: Variational principles on metric and uniform spaces. Habilitationsschrift. Martin - Luther - Universität Halle - Wittenberg. http://sundoc.bibliothek.uni-halle.de/habil-online/ 05/05H167/habil.pdf (2005)

[23] Hamel, A.H., Heyde, F., Höhne, M.: Set-valued measures of risk. In: Report on Optimization and Stochastics 15. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. http://www. mathematik. uni-halle. de/ reports/ sources/ 2007/ 07-15report. pdf (2007)

[24] Heyde, F., Löhne, A.: Geometric duality in multiple objective linear programming. Report on optimization and stochastics 15. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. http://ito. mathematik.uni-halle.de/ loehne/pdf/ (2006)

[25] Heyde, F., Löhne, A., Tammer, C.: Set-valued duality theory for multiple objective linear programs and application to mathematical finance. Report on optimization and stochastics 4.Martin- Luther-Universität Halle-Wittenberg. http://ito.mathematik.uni-halle.de/ loehne/pdf/ (2007)

[26] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste, and Claude Lemaréchal. Fundamentals of convex analysis. Springer Science & Business Media, 2012.

[27] Ioffe, A.D., Levin, V.L.: Subdifferentials of convex functions. Tr. Mosk. Mat. Obs. 26, 3–73 (1972)

[28] Jahn, J.: Scalarization in vector optimization. Math. Program. 29(2), 203–218 (1984)

[29] Jahn, J.: Vector optimization. In: Theory, Applications, and Extensions. Springer, Berlin (2004)

[30] Jouini, E., Meddeb, M., Touzi, N.: Vector-valued coherent risk measures. Finance Stoch. 8(4), 531–552 (2004)

[31] Kannai, Y., Peleg, B.: A note on the extension of an order on a set to the power set. J. Econom. Theory 32(1), 172–175 (1984)

[32] Kantorovitch, L.: The method of successive approximations for functional equations. ActaMath. 71, 63–97 (1939)

[33] Kasahara, S.: On formulations of topological linear spaces by topological semifields. Math. Japon. 19, 121–134 (1974)

[34] Kuroiwa, D., Tanaka, T., Truong, X.D.H.: On cone convexity of set-valued maps. Nonlinear Anal. 30(3), 1487–1496 (1997)

[35] Linke, Yu.È.: Sublinear operators without subdifferentials. Sibirsk. Mat. Zh. 32(3), 219–221 (1991)

[36] Löhne, A.: Optimization with set relations. Ph.D. thesis, Martin-Luther-Universität Halle- Wittenberg (2005)

[37] Löhne,A.: Optimization with set relations: conjugate duality. Optimization 54(3), 265–282 (2005)

[38] Löhne, A.: On convex functions with values in conlinear spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 7(1), 115–122 (2006)

[39] Löhne, A., Tammer, C.: A new approach to duality in vector optimization. Optimization 56(1) (2007)

[40] Luc, D.T.: On duality theory in multiobjective programming. J. Optim. Theory Appl. 43(4), 557– 582 (1984)

[41] Luc, D.T.: Theory of Vector Optimization. In: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 319. Springer, Berlin (1989)

[42] Malivert, C.: Fenchel duality in vector optimization. In: Advances in Optimization (Lambrecht, 1991). Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, vol. 382, pp. 420–438. Springer, Berlin (1992)

[43] Postolică, V.: A generalization of Fenchel's duality theorem. Ann. Sci. Math. Québec 10(2), 199– 206 (1986)

[44] Postolică, V.: Vectorial optimization programs with multifunctions and duality. Ann. Sci. Math. Québec 10(1), 85–102 (1986)

[45] Pshenichnyi, B.N.: Convex multivalued mappings and their conjugates. Kibernetika 3, 94–102 (1972)

[46] Raffin, C.: Sur les programmes convexes définis dans des espaces vectoriels topologiques. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20, 457–491 (1970)

[47] Rockafellar, R.T., Wets, R.J.-B.: Variational Analysis. Springer, Berlin Heidelberg New York (1998)

[48] Rockafellar, Ralph Tyrell. Convex analysis. Princeton university press, 2015.

[49] Rubinov, A.M.: Sublinear operators and their applications. Russian Math. Surveys 32(4), 115– 175 (1977) (translation from Usp. Mat. Nauk)

[50] Sawaragi, Y., Nakayama, H., Tanino, T.: Theory of multiobjective optimization. In:Mathematics in Science and Engineering, vol. 176. Academic, Orlando (1985)

[51] Singer, I.: Abstract convex analysis. In: Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. Wiley, New York (1997)

[52] Song,W.: Conjugate duality in set-valued vector optimization. J. Math. Anal. Appl. 216(1), 265– 283 (1997)

[53] Song, W.: A generalization of fenchel duality in set-valued vector optimization. Math. Methods Oper. Res. 48(2), 259–272 (1998)

[54] Song, W.: Duality in set-valued optimization. Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 375, 69 (1998)

[55] Soyertem, M., 2012, "Vektör ve Küme Değerli Dönüşümler için Yönlü Türev ve Uygulamaları", Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 7-9.

[56] Tanino T.: Conjugate duality in vector optimization. J. Math. Anal. Appl. 167, 84–97 (1992)

[57] Tanino T., Sawaragi, Y.: Conjugate maps and duality in multiobjective optimization. J. Optim. Theory Appl. 31(4), 473–499 (1980)

[58] Valadier, M.: Sous-différentiabilité de fonctions convexes à valeurs dans un espace vectoriel ordonné. Math. Scand. 30, 65–74 (1972)

[59] Zowe, J.: Subdifferentiability of convex functions with values in an ordered vector space. Math. Scand. 34, 69–83 (1974)

[60] Zowe, J.:Aduality theorem for a convex programming problem in order complete vector lattices. J. Math. Anal. Appl. 50, 273–287 (1975)

[61] Zowe, J.: Sandwich theorems for convex operators with values in an ordered vector space. J. Math. Anal. Appl. 66(2), 282–296 (1978)

[62] Zălinescu, C.: Duality for vectorial nonconvex optimization by convexification and applications. An. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi XXIX, 16–34 (1983)

[63] Zălinescu, C.: Convex Analysis in General Vector Spaces. World Scientific, Singapore (2002)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	:	ÖZMEN, Kübra
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	:	02/10/1991, Uşak
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	(543) 434 35 92
Faks	:	(543) 434 35 92
e-mail	:	ozmenkubra@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Uşak Üniversitesi /Matematik Bölümü	2016
Lise	Uşak Necati Özen Anadolu Lisesi	2009

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2018	Uşak Şehit Tuncay Durmuş M.T.A.L.	Ücretli Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce