T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYUMLU KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRAL UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA ULU AKDAŞ

TEMMUZ 2019

UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYUMLU KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRAL UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA ULU AKDAŞ

TEMMUZ 2019

UŞAK

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma ULU AKDAŞ

UYUMLU KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRAL UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma Ulu AKDAŞ

UŞAK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ Haziran 2019

ÖZET

Uyumlu kesirli türev ve uyumlu kesirli integralin incelendiği bu tez çalışma yedi bölümden oluşmaktadır.

Tezin giriş bölümünde uyumu kesirli türev tanıtılmış ve konunun tarihçesiyle ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanımlar ve örnekler yer almaktadır. Tezin üçüncü bölümünde uyumlu kesirli türev incelenmiştir. Dördüncü bölümde,kesirli integral yer verilmiştir.Beşinci bölümde, kısmi kesirli integrasyon incelenmiştir. Altıncı bölümde, uyumlu kesirli türevin Laplace dönüşümüne değinilmiş ve son olarak da sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu kesirli türev, Uyumlu kesirli integral, Laplace dönüşümleri, Kuvvet seri açılımı, Riemann-Liouville kesirli türev ve integrali

Bilim Kodu: 403.06.01

Sayfa Adedi: 43

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Deniz UÇAR

CONFORMABLE FRACTIONAL DERIVATIVE AND INTEGRAL APPLICATIONS

(M. Sc. Thesis)

Fatma ULU AKDAŞ

UNIVERSITY OF UŞAK GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES JULY 2019

ABSTRACT

This thesis study in which conformable fractional derivative and conformable fractional integral have been examined consists of seven parts.

In the introductory part of the thesis, conformable fractional derivative has been introduced and trace information about the subject has been given. In the second part, there are basic definitions and examples about the subject. In the third part of the thesis, conformable fractional integrals have been examined. In the forth part, the expansions of the power series of the fractional derivative have been given. In the fifth part, the partial integration has been examined. In the sixth part, the Laplace transformation of the compatible fractional derivative has been touched upon, and conclusion and suggestions have been mentioned in the last part.

Keywords : Conformable fractional derivative, Conformable fractional integral, Laplace transform, Power series expansions, Riemann-Liouville fractional derivative and integral

Science Code:403.06.01

Page Number :43

Adviser : Associate Professor Deniz UÇAR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca her adımda bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım, tez çalışmamın her safhasında emeği olan, değerli ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen, danışmanım Doç. Dr. Deniz UÇAR'a en içten dileklerimle teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca bana anlayış gösteren, destek olan, hissettirdikleri sonsuz güven, sabır ve manevi destekten dolayı aileme ve eşime teşekkür ederim.

Fatma ULU AKDAŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

SİMGELER	**AÇIKLAMA**
r(x)	Euler-Gama fonksiyonu
$\beta(x,y)$	Euler-Beta fonksiyonu
$J^{a}f(x)$	$\alpha.$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali
$D_{\alpha}f(t)$	$\alpha.$ mertebeden kesirli türev
$D_{\alpha}^{a}f(t)$	$\alpha.$ mertebeden soldan uyumlu kesirli türev
${}^{a}D_{\alpha}f(t)$	$\alpha.$ mertebeden sağdan uyumlu kesirli türev
I_{α}^{a}	$\alpha.$ mertebeden soldan uyumlu kesirli integral
${}^{a}\mathrm{I}_{\alpha}$	$\alpha.$ mertebeden sağdan uyumlu kesirli integral
$F_{\alpha}^{a}(s)$	$\alpha.$ mertebeden Laplace dönüşümü
${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}$	Caputo kesirli türev
${}_{a}^{GL}D_{t}^{\alpha}f(t)$	Grünwald-Letnikov Kesirli Türev

1. GİRİŞ

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'a yazdığı mektupta geçmektedir. Leibniz'in mektubunda L'Hospital'a sorduğu "Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?" sorusu ile kesirli diferansiyel kavramı ilk olarak ortaya çıkmıştır. [1] Kesirli türev ve integral kavramları 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville gibi birçok matematik de aynı konu üzerinde çalışmıştır.

Kesirli türevin klasik analizden en önemli farkı, klasik analizde olduğu gibi tek bir tanımın olmayışıdır. Başlıca kesirli türev tanımları Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebe türevlerdir. Tanımlar arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklılık gösterirler. Örneğin bir sabitin kesirli türevi Riemann-Liouville kesirli türev için sıfıra eşit olmamaktadır. Caputo ve Riemann-Lioville tanımlarıda bölüm ve çarpım kuralını da sağlamamaktadır. Bundan dolayı bu türev tanımlarının kullanıldığı alanlar farklılık göstermektedir. Genellikle Grünwald-Letnikov tanımı nümerik hesaplamalar için, tanımı hem nümerik hem de analitik hesaplamalar için, Caputo kesirli türev tanımı da analitik hesaplamalar için uygundur.

2014 yılındaki çalışmalarında kesirli türev tanımlarının adi türev ile aralarındaki tek ortak noktasının lineer olma özelliğidir diyen Khalil [3], adi türeve uyumuyla dikkat çeken bir tanım ortaya atmıştır. Bu tanım diğer kesirli türevlerin sağlamadığı çarpım ve bölüm kuralını sağlamaktadır. Bu tanımada uyumlu (conformable) kesirli türev olarak adlandırılmaktadır.

2015 yılında Abdeljawad [4] uyumlu kesir türev tanımını kullanarak $0 \leq \alpha \leq 1$ aralığı için seri açılımı, Taylor eşitsizliği ve Laplace dönüşümlerini eklemiştir.

Bu tezde ilk olarak uyumlu kesirin tarihçesi hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde genel tanım ve özellikler yer verilmiştir. Üçüncü bölümde uyumlu kesirli türevin genel özelliklerinden bahsedilmiş ve Rolle Teoremi, ortalama değer teoremi, genelleştirilmiş ortalama değer teoreminin uyumlu kesirli türev ilişkisi üzerinde durulmuştur. Aynı zamanda Taylor eşitsizliği ve zincir kuralına değinilmiştir.

Dördüncü bölümde uyumlu kesirli integralden bahsedilmektedir. Beşinci bölümde kısmi integrasyona yer verilmiştir. Altıncı bölümde ise uyumlu kesirin Laplace dönüşümü incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE ÖRNEKLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılan tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1 (Gamma Fonksiyonu): $n > 0$ için;

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

olarak tanımlanır. Aynı zamanda;

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$$

integraline geçiş yapmak mümkündür.

Bu fonksiyonun bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

i. $\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Tanım 2.2 (Beta Fonksiyonu): $\mathbb{R}(x), \mathbb{R}(y) > 0$

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

olarak tanımlanır. Gamma fonksiyonu ve Beta fonksiyonu arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Tanım 2.3: $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere x'ten büyük olmayan en büyük tamsayıya x'in tam değeri denir. x'in tam değeri $[\![x]\!]$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 (Riemann - Liouville Kesirli Türevi): f fonksiyonu (a, x) aralığında sürekli ve differansiyellenebilir olsun. $n \in N^+$, $n-1 \leq a \leq n$ ve $a > 0$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonu a-mertebeden Riemann-Lioville kesirli türevi,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{\alpha+n-1} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5 (Riemann - Liouville Kesirli İntegral): $a \geq 0$ iken a.mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali $f \in C_\mu, (\mu \geq -1)$ olmak üzere, $a > 0$ ve $x > 0$ için,

$$\boldsymbol{J}^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x (x-t)^{a-1} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6 (Caputo Kesirli Türevi): f fonksiyonu n defa sürekli ve türevlenebilir olsun. $a \in (n, n-1)$ olmak üzere Caputo kesirli türev;

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-a)^{n-\alpha-1} f^n(a)da$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.7 (Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegrali): $[a, t]$ aralığında sürekli $f^n(t)$, $(n = 1,2, \dots, k+1)$ türevleri var ve $k < a < k+1$ olacak şekilde bir tam sayı olsun. O halde *f* fonksiyonunun a-mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi $a > 0$ için

$${}_a^{GL} D_t^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t (t-x)^{k-\alpha} f^{(k+1)}(x)dx$$

olarak tanımlanır. İntegrali ise

$${}_a^{GL} D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(a)(t-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_a^t (t-x)^{k+\alpha} f^{(k+1)}(x)dx$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1 (Rolle Teoremi): $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında en az bir c noktası vardır ki bu nokta için $f'(c) = 0$'dır.

Teorem 2.2 (Ortalama Değer Teoremi): $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. O halde (a, b) aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

Teorem 2.3 (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi): $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. O halde (a, b) aralığında

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

Tanım 2.8: $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$D_\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanan *f* fonksiyonun α- kesirli türevi ya da uyumlu türevi denir.

Tanım 2.9: f(x), $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f'in Laplace dönüşümü

$$\mathrm{F(s)} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

integrali ile tanımlanan F fonksiyonu olup

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

ile gösterilir.

3. UYUMLU KESİRLİ TÜREV

Bu bölümde [3], [4] ve [5] makalelerindeki, uyumlu türevin genel özellikleri ve adi türev ile arasındaki ilişki incelenmiştir

Teorem 3.1 : $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $t_0 > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için uyumlu kesirli türevlenebilir ise *f* fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

İspat: *f* fonksiyonu t_0 noktasında α türevlenebilir olduğundan

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon}\varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}[f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon$$

yazılabilir. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ olsun $\varepsilon = h.t_0^{\alpha-1}$

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) - f(t_0) = \lim_{h \to 0}\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h.t_0^{\alpha-1}} \lim_{h \to 0} h.t_0^{\alpha-1}$$

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) - f(t_0) = \frac{1}{t_0^{\alpha-1}} f'(t_0).0$$

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) - f(t_0) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

olduğundan *f* fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

Teorem 3.2 : $\alpha \in (0,1]$ ve f ve g fonksiyonları $t > 0$ noktasında türevlenebilir olsun. O halde

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$D_\alpha(af + bg) = aD_\alpha f(t) + bD_\alpha g(t)$$

olduğunu gösterelim.

$$D_\alpha(af + bg) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{af(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + bg(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - af(t) - bg(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{af(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - af(t)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{bg(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - bg(t)}{\varepsilon}$$

$$= a \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} + b \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}$$

$$= aD_\alpha f(t) + bD_\alpha g(t)$$

ii. $\forall p \in \mathbb{R}$ için

$$D_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$$

olduğunu gösterelim.

$p = 1$ için,

$$D_\alpha(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{t + \varepsilon t^{1-\alpha} - t}{\varepsilon} = t^{1-\alpha}$$

$p = 2$ için,

$$D_\alpha(t^2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})^2 - f(t^2)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{t^2 - 2t\varepsilon t^{1-\alpha} + \varepsilon^2 t^{2-2\alpha} - t^2}{\varepsilon} = 2t^{2-\alpha}$$

$p = n$ için,

$$D_\alpha(t^n) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^n - (t^n)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^n + \binom{n}{1}t^{n-1}\varepsilon t^{1-\alpha} + \binom{n}{2}t^{n-2}\varepsilon^2 t^{2-\alpha} + \cdots + \binom{n}{n}\varepsilon^n t^{n-\alpha n} - t^n}{\varepsilon}$$

$$= nt^{n-\alpha}$$

$p = n+1$ için,

$$D_\alpha(t^{n+1}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^{n+1} - (t^{n+1})}{\varepsilon}$$

$$= n+1t^{n+1-\alpha}$$

iii. Tüm $f(t) = c$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için

$$D_\alpha(c) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c+\varepsilon c^{1-\alpha} - c}{\varepsilon} = 0$$

iv.

$$D_\alpha(fg) = fD_\alpha g(t) + gD_\alpha f(t)$$

olduğunu gösterelim.

$$D_\alpha(fg)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

denklemine $f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})$ eklenip çıkartılırsa,

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\left[\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}\right] + f(t)\left[\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}\right]\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}\ f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})\ -g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})\ D_\alpha f(t)+f(t)D_\alpha g(t)$$

yazılabilir. g fonksiyonu t noktasında sürekli olduğundan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})\ = g(t)$$

olur. O halde

$$D_\alpha(fg) = g(t)D_\alpha f(t) + f(t)D_\alpha g(t)$$

dir.

v.

$$D_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_\alpha(f)-fD_\alpha(g)}{g^2}$$

olduğunu gösterelim.

$$D_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{f(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})}-\dfrac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{g(t)f(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})}}{\varepsilon}$$

denklemine

$$\frac{f(t)g(t)}{g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}\ \varepsilon$$

ekleyip çıkarılırsa,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{g(t)f(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)\ +\ f(t)g(t)-f(t)g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})}}{\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{g(t)[f(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)]-\ f(t)[g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)]}{g(t)g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})}}{\varepsilon}$$

yazılabilir. g fonksiyonu t noktasında sürekli olduğundan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})=g(t)$$

olur. O halde

$$D_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g(t)D_\alpha f(t)-f(t)D_\alpha g(t)}{g^2(t)}$$

elde edilir.

vi. Ayrıca f fonksiyonu türevlenebilir ise

$$D_\alpha f(t)=\ t^{1-\alpha}\frac{df(t)}{dt}$$

dir.

$$D_\alpha f(t)=\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\ \varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}$$

$h=\ \varepsilon t^{1-\alpha}$ olsun. $\varepsilon=ht^{\alpha-1}$

$$=\ \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{ht^{\alpha-1}}$$

$$=\ t^{\alpha-1}\ \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-\ f(t)}{h}$$

$$= \ t^{1-\alpha} f'(t)$$

bulunur.

Örnek 3.1 : $D_\alpha(e^{ct}) = c\, e^{ct}\, t^{1-\alpha}$ olduğunu gösterelim.

$$D_\alpha(e^{ct}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{c(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} - e^{ct}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{ct} e^{c\varepsilon t^{1-\alpha}} - e^{ct}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{ct}\left[e^{c\varepsilon t^{1-\alpha}} - 1\right]}{\varepsilon}$$

$$= e^{ct} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ct^{1-\alpha}\, e^{c\varepsilon t^{1-\alpha}}}{1}$$

$$= c\, e^{ct}\, t^{1-\alpha}$$

bulunur.

Örnek 3.2 : $D_\alpha(\sin bt) = bt^{1-\alpha} \cos(bt)\,, \quad b\epsilon\mathbb{R}$ olduğunu gösterelim.

$$D_\alpha(\sin bt) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin[b\,(t + \varepsilon t^{1-\alpha})] - \sin(bt)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(bt)\ \cos(b\varepsilon t^{1-\alpha}) + \sin(b\varepsilon t^{1-\alpha}) \cos(bt) - \sin(bt)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\sin bt\,(bt^{1-\alpha}) \sin(b\varepsilon t^{1-\alpha}) + bt^{1-\alpha} \cos(bt) \cos(b\varepsilon t^{1-\alpha})}{1}$$

$$= bt^{1-\alpha} \cos(bt)$$

Örnek 3.3 : $D_\alpha(\cos bt) = -bt^{1-\alpha} \sin(bt) \quad b \in \mathbb{R}$ olduğunu gösterelim.

$$D_\alpha(\cos bt) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos b(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - \cos(bt)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos(bt)\cos(b\varepsilon t^{1-\alpha}) - \sin(bt)\sin(b\varepsilon t^{1-\alpha}) - \cos(bt)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\cos(bt)\, bt^{1-\alpha}\ \sin(b\varepsilon t^{1-\alpha}) - \sin(bt)\, bt^{1-\alpha}\ \cos(b\varepsilon t^{1-\alpha})}{1}$$

$$= -bt^{1-\alpha}\ \sin(bt)$$

Örnek 3.4 :

$$D_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\ t^\alpha\right) = 1$$

olduğunu gösterelim.

$$D_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\ t^\alpha\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha}(t + \varepsilon t^{1-\alpha})^\alpha - \frac{1}{\alpha}\ t^\alpha}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha}\ t^{1-\alpha}\ \alpha\ (t + \varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha-1}}{1} = 1$$

Bir *f* fonksiyonu bir noktada α- türevlenebilir ise bu noktada türevi olmayabilir. Örneğin: $f(t) = 2\sqrt{t}$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ ise

$$D_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{t}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\sqrt{t + \varepsilon t^{1/2}} - 2\sqrt{t}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\ \frac{1}{2}\left(t + \varepsilon t^{1/2}\right)^{-\frac{1}{2}}\ t^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} t^{\frac{1}{2}}\left(t + \varepsilon t^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1$$

olarak bulunur.

$D_1 f(t) = f'(t)$ dir.Ancak

$$D_1(2\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

fonksiyonu $t = 0$ için tanımsızdır.

$\alpha \in (0,1)$ olduğunda uyumlu kesirli türev tanımı verildi. $\alpha \in (n, n+1]$, $n \in N$ için genelleştirelim.

Tanım 3.1 : $\alpha \in (n, n+1]$, f fonksiyonu $t > 0$ noktasında n defa türevlenebilir olsun. f fonksiyonunun α. mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$D_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}\left(t + \varepsilon t^{(\llbracket\alpha\rrbracket-\alpha)}\right) - f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}(t)}{\varepsilon}$$

şeklindedir. Burada $\llbracket\alpha\rrbracket$ tam değer fonksiyonudur.

Uyarı: Tanım 3.1'de $\alpha \in (n, n+1]$ ve f fonksiyonu $t > 0$ noktasında $n+1$ defa türevlenebilir ise

$$D_\alpha f(t) == t^{(\llbracket\alpha\rrbracket-\alpha)} f^{(\llbracket\alpha\rrbracket)}(t)$$

yazılabilir.

$$D_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}\left(t + \varepsilon t^{(\llbracket\alpha\rrbracket-\alpha)}\right) - f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}(t)}{\varepsilon}$$

$h = \varepsilon t^{(\llbracket\alpha\rrbracket-\alpha)}$ olsun.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}(t+h) - f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}(t)}{h t^{\alpha-\llbracket\alpha\rrbracket}}$$

$$= t^{(\llbracket\alpha\rrbracket-\alpha)} \lim_{h \to 0} \frac{f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}(t+h) - f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}(t)}{h}$$

$$= t^{(\llbracket\alpha\rrbracket-\alpha)} f^{(\llbracket\alpha\rrbracket)}(t)$$

Teorem 3.3 : (Uyumlu kesirli türevlenebilir fonksiyonlar için Rolle Teoremi)

$a > 0$ ve $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyon verilsin. Bu fonksiyon

i. [a,b] aralığında sürekli,

ii. $\alpha \in (0,1)$ için α türevlenebilir,

iii. $f(a) = f(b)$ şartlarını sağlıyorsa $f^{(\alpha)}(c) = 0$ şeklinde bir $c \in (a, b)$ noktası vardır.

İspat: $f: [a, b]$ aralığında sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğu için bir $c \in (a, b)$ yerel ekstremum noktasına sahiptir. Kolaylık olması için c noktasının bir yerel minimum nokta olduğunu kabul edelim.

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Fakat ilk limit negatif olmayan, ikinci limit ise pozitif olmayandır. O halde $f^{(\alpha)}(c) = 0$'dır.

Teorem 3.4 (Uyumlu kesirli türevlenebilir fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi):

$a > 0$ ve $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyon verilsin. Bu fonksiyon

i. $[a, b]$ aralığında sürekli,

ii. $\alpha \in (0,1)$ için α türevlenebilir.

Bu durumda

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha} a^{\alpha}}$$

olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır.

İspat: $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$g(t) = f(t) + k\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$ şeklinde tanımlansın.

$g(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında α- türevlenebilir olduğu açıktır.

$g(a) = g(b)$ olacak şekilde seçilirse;

$$g(t) = f(t) + k\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$$

$$g(a) = f(a) + k\frac{1}{\alpha}a^{\alpha} \dots .(1)$$

$$g(b) = f(b) + k\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} \dots .(2)$$

(1) ve (2) eşitliklerinde

$$k = -\frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$$

elde edilir. O halde

$$g(t) = f(t) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\frac{1}{\alpha}t^{\alpha} \dots .(3)$$

bulunur. Bu durumda $g(t)$ fonksiyonu Rolle teoreminin bütün şartlarını sağlar. Yani $g^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır. (3) eşitliğinin α. mertebeden uyumlu kesirli türevi alınır.

$$g^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right)^{(\alpha)}$$

bulunur.

$$D_{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = 1$$

olduğundan

$$f^{\alpha}(t) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$$

elde edilir.

Lemma 3.1: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha \in (0,1)$ için α-differansiyellenebilir olsun.

i. $a > 0$ için $f^{(\alpha)}$ fonksiyonu $[a, b]$ sınırlı ise, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında düzgün süreklidir ve sınırlıdır.

ii. $f^{(\alpha)}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı ve a noktasında sürekli ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında düzgün sürekli ve sınırlıdır.

Teorem 3.5 (Uyumlu kesirli türevlenebilir fonksiyonlar için Genişletilmiş Ortalama Değer Teoremi):

$a > 0$ ve $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. *f*, g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\alpha \in (0,1)$ için α- diferansiyellenebilir ise

$$\frac{f^{(\alpha)}(a)}{g^{(\alpha)}(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.

İspat:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)\big(g(x) - g(a)\big)$$

fonksiyonu göz önüne alalım. f ve g fonksiyonları sürekli fonksiyon olduğundan *F* fonksiyonu da $[a, b]$ aralığında süreklidir. Aynı zamanda *F* fonksiyonu (a, b) aralığında α-diferansiyellenebilirdir.

$$F(a) = f(a) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)\big(g(a) - g(a)\big) = 0$$

ve

$$F(b) = f(b) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)\big(g(b) - g(a)\big) = 0$$

olduğundan Rolle teoremine göre $\alpha \in (0,1)$ için $F^{(\alpha)}(c) = 0$ şeklinde bir $c \in (a, b)$ vardır.

F fonksiyonunun α. mertebeden diferansiyeli hesaplanırsa

$$D_\alpha(F)(x) = D_\alpha\left(f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)\left(g(x) - g(a)\right)\right)$$

yazılır.

D_α lineer olduğundan

$$D_\alpha(F)(x) = D_\alpha f(x) - D_\alpha f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left(D_\alpha g(x) - D_\alpha g(a)\right)$$

$$= D_\alpha f(x) - 0 + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} D_\alpha g(x)$$

$$F^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) g^{(\alpha)}(x)$$

$$\frac{f^{(\alpha)}(c)}{g^{(\alpha)}(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

bulunur.

Teorem 3.6 : $\alpha > 0$ ve $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonskiyonu verilsin. f, $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\alpha \in (0,1)$ için f, α-diferansiyellenebilir olsun. Eğer $\forall_x \in (a, b)$ için $f^{(\alpha)}(x) = 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sabittir.

İspat : $\forall_x \in (a, b)$ için $f^{(\alpha)}(x) = 0$ olsun. $[a, b]$ aralığında $x_1 < x_2$ olacak şekilde x_1 ve x_2 seçelim. O halde f fonksiyonu $[x_1, x_2]$ aralığında sürekli, (x_1, x_2) aralığında α-diferensiyellenebilirdir. O halde ortalama değer teoremi gereğince

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{\frac{x_2^\alpha}{\alpha} - \frac{x_1^\alpha}{\alpha}} = 0$$

olacak şekilde $c \in (x_1, x_2)$ vardır.

$f(x_2) = f(x_1) - 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$ elde edilir. x_1,x_2 $\in [a, b]$ keyfi iki nokta olduğundan f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sabittir.

Sonuç 1 : $a > 0$ $F, G: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. $\forall\alpha \in (0,1)$ ve $\forall x \in (a,b)$ için $F^{(\alpha)}(x) = G^{(\alpha)}(x)$ olsun. Bu durumda

$F(x) = G(x) + c$ olacak şekilde bir c sabiti vardır.

İspat : $H(x) = F(x) - G(x)$ fonksiyonu tanımlasın. Bu fonksiyonu $\alpha \in (0,1)$ için α-diferensiyellenebilirse

$$D_\alpha\big(H(x)\big) = D_\alpha\big(F(x)\big) - D_\alpha\big(G(x)\big)$$

yazılabilir.

$$H^{(\alpha)}(x) = F^{(\alpha)}(x) - G^{(\alpha)}(x)$$

$H^{(\alpha)}(x) = 0$ ise Teorem 3.6 gereğince $H(x) = c$ dir.

Teorem 3.7 : $a > 0$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonskiyonu verilsin.

$f: [a,b]$ aralığında sürekli ve $\alpha \in (0,1)$ için α- diferensiyellenebilir olsun. O halde

i. $\forall x \in (a,b)$ için $f^{(\alpha)}(x) > 0$ ise $f, [a,b]$ aralığında artandır.
ii. $\forall x \in (a,b)$ için $f^{(\alpha)}(x) < 0$ ise $f, [a,b]$ aralığında azalandır.

İspat : Ortalama değer teoreminin yardımıyla $[a,b]$ aralığında $x_1 < x_2$ seçelim. O halde

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\frac{x_2^\alpha}{\alpha} - \frac{x_1^\alpha}{\alpha}} = f^{(\alpha)}(c)$$

o şekilde bir c vardır.

i. Eğer $f^{(\alpha)}(c) > 0$ ise $f(x_2) > f(x_1)$ ve $x_1 < x_2$ o halde $x_{1,}x_2$ noktaları $[a,b]$ keyfi noktalar olduğunda f artandır.
ii. Eğer $f^{(\alpha)}(x) < 0$ ise $f(x_2) < f(x_1)$ $x_1 > x_2$ o halde x_1, x_2 noktaları $[a,b]$ keyfi noktalar olduğunda f azalandır.

Teorem 3.8 : f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli, $\alpha \in (0,1)$ için α-diferensiyellenebilir ve $\forall x \in (a,b)$ için $f^{(\alpha)}(x) \le g^{(\alpha)}(x)$ olsun. Bu durumda,

i. $f(a) = g(a)$ ise $\forall x \in (a,b)$ için $f(x) \leq g(x)$

ii. $f(b) = g(b)$ ise $\forall x \in (a,b)$ için $f(x) \geq g(x)$

İspat : $h(x) = g(x) - f(x)$ olarak tanımlansın. O halde h fonskiyonu $[a,b]$ aralığında süreklidir ve $\alpha \in (0,1)$ için α- diferensiyellenebilirdir. h fonksiyonun α- diferensiyeli

$$D_\alpha(h)(x) = D_\alpha\big(g(x) - f(x)\big)$$

$$= D_\alpha\big(g(x)\big) - D_\alpha\big(f(x)\big)$$

yazılabilir. $\forall_x \in (a,b)$ için $f^{(\alpha)}(x) \leq g^{(\alpha)}(x)$ olduğundan
$g^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x) \geq 0$ olacaktır. O halde $h^{(\alpha)}(x) \geq 0$ dır.

Teorem 3.9 : f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli, $\alpha \in (0,1)$ için α-diferensiyellenebilir ve $\forall x \in (a,b)$ için $f^{(\alpha)}(x) \leq g^{(\alpha)}(x)$ olsun. Bu durumda,

i. $f(a) = g(a)$ ise $\forall_x \in (a,b)$ için $f(x) \leq g(x)$

ii. $f(b) = g(b)$ ise $\forall_x \in (a,b)$ için $f(x) \geq g(x)$

şartları sağlanır.

İspat : $h(x) = g(x) - f(x)$ olarak tanımlansın. O halde h fonskiyonu $[a,b]$ aralığında süreklidir ve $\alpha \in (0,1)$ için α- diferensiyellenebilirdir. h fonksiyonun α- diferensiyeli

$$D_\alpha(h)(x) = D_\alpha\big(g(x) - f(x)\big)$$

$$= D_\alpha\big(g(x)\big) - D_\alpha\big(f(x)\big)$$

yazılabilir. $\forall_x \in (a,b)$ için $f^{(\alpha)}(x) - g^{(\alpha)}(x)$ olduğundan
$g^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x) \geq 0$ olacaktır.
$h^{(\alpha)}(x) \geq 0$ dır.

O halde h fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

$a \leq x \leq b$ için h artan olduğundan

i. $h(a) \leq h(x)$ yazılabilir.

$h(a) = g(a) - f(a)$ için $f(a) = g(a)$ ise $h(a) = 0$

$h(x) \geq 0$ ise $g(x) - f(x) \geq 0 \rightarrow g(x) \geq f(x)$ bulunur.

ii. $h(x) \leq h(b)$ yazılabilir.

$h(b) = g(b) - f(b)$ için $f(b) = g(b)$ ise $h(b) = 0$

$h(x) \leq 0$ ise $g(b) - f(b) \leq 0 \rightarrow g(b) \leq f(b)$ bulunur.

Tanım 3.2 : $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $0 < \alpha < 1$ olmak üzere α. mertebeden soldan uyumlu kesirli türevi

$$D_\alpha^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır.

Eğer (a, b) aralığında $D_\alpha^a(f)(t)$ türevi varsa

$$D_\alpha^a(f)(a) = \lim_{t \to a^+} D_\alpha^a f(t)$$

şeklindedir.

Benzer şekilde *f* fonksiyonunun α- mertebeden sağdan uyumlu kesirli türevi

$${}^bD_\alpha(f)(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır.

Eğer (a, b) aralığında ${}^bD_\alpha(f)(t)$ türevi varsa

$${}^bD_\alpha(f)(b) = -\lim_{t \to b^-} {}^bD_\alpha(f)(t)$$

olacaktır.

Uyumlu kesirli sağdan ve soldan türevin adi türev ile ilişkisi şu şekildedir.

Sonuç 3.1 : *f* fonksiyonu türevlenebilir ise

$$D_\alpha^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

yazılabilir.

$h = \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$ olarak seçilirse $\varepsilon = h(t-a)^{\alpha-1}$

$$D_\alpha^a(f)(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h(t-a)^{\alpha-1}} = (t-a)^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$= (t-a)^{1-\alpha}f'(t)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2 : f fonksiyonu türevlenebilir ise

$${}^bD_\alpha(f)(t) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}$$

yazılabilir.

$h = \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}$ olarak seçilirse $\varepsilon = h(b-t)^{\alpha-1}$ olur.

$${}^bD_\alpha(f)(t) = -\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h(b-t)^{\alpha-1}} = -(b-t)^{\alpha-1}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$= -(b-t)^{\alpha-1}f'(t)$$

elde edilir.

Tanım 3.3 : $\alpha \in (n,n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f:(a,\infty] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu α-mertebeden soldan uyumlu kesirli türevi

$$D_\alpha^a(f)(t) = D_\beta^a\left(f^{(n)}\right)(t)$$

olarak tanımlanır.

O halde α-mertebeden soldan uyumlu kesirli türevin var olabilmesi için f fonksiyonunun n. defa differansiyellenebilir olması gerekmektedir.

Benzer şekilde $\alpha \in (n,n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f:[-\infty,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu α-mertebeden sağdan uyumlu kesirli türevi,

$$ {}^{b}D_{\alpha}\,(f)(t) = (-1)^{n+1}\,{}^{b}D_{\alpha}\left(f^{(n)}\right)(t) $$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.10 (Zincir Kuralı) : $f, g(a, \infty) \to \mathbb{R}$ soldan differansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $\alpha \in (0, 1]$ ise

$$ h(t) = f\big(g(t)\big) $$

$h(t)$ soldan α-differansiyellenebilir olsun. $t \neq 0$ ve $g(t) \neq 0$ olduğundan

$$ (D_{\alpha}^{a}h)(t) = (D_{\alpha}^{a}f)\big(g(t)\big)(D_{\alpha}^{a}g)(t)g(t)^{\alpha-1} $$

Eğer $t \neq 0$ ise,

$$ (D_{\alpha}^{a}h)(a) = \lim_{t\to 0}(D_{\alpha}^{a}f)\big(g(t)\big)(D_{\alpha}^{a}g)(t)g(t)^{\alpha-1} $$

yazılabilir.

İspat : $D_{\alpha}h(t) = D_{\alpha}f\big(g(t)\big)$

$$ = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(g(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha} - t\big(g(t)\big)}{\varepsilon} $$

$v = t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$

$\frac{(v-t)}{(t-a)^{1-\alpha}} = \varepsilon \qquad\qquad \varepsilon \to 0, v \to t$

dönüşümleri uygulansın.

$$ = \lim_{v\to t}\frac{f\big(g(v)\big) - f\big(g(t)\big)}{v-t}(t-a)^{1-\alpha} $$

$$ = \lim_{v\to t}\frac{f\big(g(v)\big) - f\big(g(t)\big)}{g(v)-g(t)}(t-a)^{1-\alpha}\lim_{v\to t}\frac{g(v)-g(t)}{v-t}(t-a)^{1-\alpha} $$

$$= \lim_{g(v)\to g(t)} \frac{f(g(v)) - f(g(t))}{g(v) - g(t)} (t-a)^{1-\alpha} \frac{dg}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} f(g(t)) D_\alpha^a(g)(t)$$

$$= (g(t)-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(g(t)) D_\alpha^a g(t) (g(t)-a)^{1-\alpha}$$

$$= D_\alpha^a(f)(g(t))\, D_\alpha^a(g)(t)(g(t))^{\alpha-1}$$

Teorem 3.11: $f\colon [a,\infty) \to \infty$ olacak şekilde iki kez differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $1 < \alpha + \beta \leq 2, 0 < \alpha, \beta \leq 1$ olsun.

$$D_\alpha^a D_\beta^a(f)(t) = D_{\alpha+\beta}^a(f)(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} D_\alpha^a f(t)$$

yazılabilir.

İspat : f iki kez differansiyellenebilir olduğundan,

$$D_\alpha^a D_\beta^a(f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \left(D_\beta^a(f)(t) \right)$$

$$= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \left((t-a)^{1-\beta} \frac{df}{dt} \right)$$

$$= (t-a)^{1-\alpha} \left((1-\beta)(t-a)^{-\beta} \frac{df}{dt} + (t-a)^{1-\beta} \frac{d^2 f}{dt^2} \right)$$

$$= (1-\beta)(t-a)^{-\beta}(t-a)^{1-\alpha} \frac{df}{dt} + (t-a)^{(1-\alpha)+(1-\beta)} \frac{d^2 f}{dt^2}$$

$$= (1-\beta)(t-a)^{1-\alpha} \frac{df}{dt} + (t-a)^{(1-\alpha)+(1-\beta)} \frac{d^2 f}{dt^2}$$

$$= (1-\beta)(t-a)^{-\beta} D_\alpha^a(f)(t) + D_{\alpha+\beta}^a(f)(t)$$

yazılabilir. Eğer $\alpha, \beta \to 1$ ise

$$D_{\alpha}^{a} D_{\beta}^{a}(f)(t) = D_{\alpha}^{a} D_{\beta}^{a}(f)(t) = f''(t)$$

eşitsizliği yazılabilir.

4. UYUMLU KESİRLİ İNTEGRAL

Tanım 4.1 : $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\mathrm{I}_{\alpha}^{a}(f)(t) = \int_{a}^{t} f(x) d_{\alpha}(x,a) = \int_{a}^{t} (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

tanımlansın.

I_{α}^{a} operatörüne α- mertebeden soldan uyumlu kesirli integral denir.

$${}^{b}\mathrm{I}_{\alpha}\,(f)(t) = \int_{t}^{b} f(x) d_{\alpha}(b,x) = \int_{t}^{b} (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

tanımlansın.

${}^{b}\mathrm{I}_{\alpha}$ operatörüne α- mertebeden sağdan uyumlu kesirli integral denir.

Lemma 4.1 : $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. O halde $\forall t > 0$ için

$$D_{\alpha}^{a}\, \mathrm{I}_{\alpha}^{a}(f)(t) = f(t)$$

yazılabilir.

İspat : *f* fonksiyonu sürekli olduğundan, $\mathrm{I}_{\alpha}^{a}(f)(t)$ integrali de differansiyellenebilirdir.

$$D_{\alpha}^{a}\big(\mathrm{I}_{\alpha}^{a}(f)(t)\big) = (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt}\big(\mathrm{I}_{\alpha}^{a}(f)(t)\big)$$

$$= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_{0}^{t} (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

$$= (t-a)^{1-\alpha} \left(\frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}} - 0 \right)$$

$$= f(t)$$

Teorem 4.2 : $\alpha > 0$ ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Herhani bir f fonksiyonunun α. mertebeden uyumlu kesirli integrali ile Riemann – Liouville kesirli integrali arasında

$$(I_\alpha^a f)(t) = J_{n+1}^a\big((t-a)^{\beta-1} f\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

ilişkisi şu şekildedir.

İspat:

$$J_{n+1}^a (t-a)^{\beta-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{n!} \int_a^t (x-a)^{\beta-1} (t-x)^n f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_a^t (x-a)^{\beta-1} (t-x)^n f(x) dx$$

$\alpha = n+1$ ise $\beta = \alpha - n = n+1-n = 1$

$$\mathrm{I}_\alpha^a(f)(t) = J_{n+1}^a f(t)$$

$$= \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n f(x) dx$$

$\alpha > 0$ ve $\alpha = n+1$ için Riemann – Liouville kesirli integrali

$$\mathrm{I}_\alpha^a(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

$$= \mathrm{I}_\alpha^a f(t)$$

Örnek 4.1 : $\alpha, \mu > 0$ ve $\alpha \in (n, n+1]$ için $(t-a)^\mu$ fonksiyonunun α. mertedebeden uyumlu kesirli türevi

$$J_{n+1}^{\alpha}((t-a)^{\mu-1})(t) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\alpha)}\,(t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

olduğunu gösterelim.

$$J((t-a)^{\mu-1})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(t-x)^{\alpha-1}(x-a)^{\mu-1}dx$$

$$x-a = y(t-a) \qquad x : a \to t$$
$$dx = (t-a)dy \qquad y : 0 \to 1$$

dönüşümleri uygulansın.

$$J_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{a}}((t-a)^{\mu-1})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}\big(t-a-y(t-a)\big)^{\alpha-1}y^{\mu-1}(t-a)^{\mu-1}(t-a)dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(1-y)^{\alpha-1}(t-a)^{\alpha-1}y^{\mu-1}(t-a)^{\mu}dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(t-a)^{\alpha+\mu-1}y^{\mu-1}(1-y)^{\alpha-1}dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,(t-a)^{\alpha+\mu-1}\int_{0}^{1} y^{\mu-1}(1-y)^{\alpha-1}dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,(t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}\,(t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}\,(t-a)^{\alpha+\mu-1} \qquad \alpha,\mu > 0$$

$\alpha \in (n, n+1], \mu \in \mathbb{R}, \alpha+\mu-n > 0$ için,

$$\mathrm{I}_{\alpha}^{\alpha}(t-a)^{\mu}(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}\,(t-a)^{\alpha+\mu}$$

$$\mathrm{I}_{\alpha}^{a}(t-a)^{\mu}(t) = \mathrm{I}_{n+1}\left((t-a)^{\beta-1}(t-a)^{\mu}\right)(t)$$

$$= \mathrm{I}_{n+1}(t-a)^{\beta+\mu-1}(t)$$

$$= \mathrm{I}_{n+1}(t-a)^{\alpha+\mu-n-1}(t)$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{a}^{t}(t-x)^{n}(x-a)^{\alpha+\mu-n-1}dx$$

$$x-a = y(t-a) \qquad x: a \to t$$

$$dx = (t-a)dy \qquad y: a \to 1$$

dönüşümleri uygulansın.

$$\mathrm{I}_{\alpha}^{a}(ta)^{\mu}(t) = \frac{1}{n!}\int_{0}^{1}\left(t-a-y(t-a)\right)^{n} y^{\alpha+\mu-n-1}(ta)^{\alpha+\mu-n}\,dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_{0}^{1}(t-a)^{\alpha+\mu}(1-y)^{n}\,y^{\alpha+\mu-n-1}\,dy$$

$$= (t-a)^{\alpha+\mu}\frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_{0}^{1} y^{\alpha+\mu-n-1}\,(1-y)^{(n+1)-1}dy$$

$$= (t-a)^{\alpha+\mu}\frac{1}{\Gamma(n+1)}\beta(\alpha+\mu-n, n+1)$$

$$= (t-a)^{\alpha+\mu}\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)}{\Gamma(\alpha+\mu-1)}(t-a)^{\alpha+\mu}$$

Benzer şekilde sağdan uyumlu kesirli integrali de

$$^{b}\mathrm{I}_{\alpha}(b-t)^{\mu}(t) = {}^{b}J_{n+1}(t-a)^{\mu+\alpha-n-1}(t)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(b-x)^{\alpha+\mu} \qquad \mu \in \mathbb{R}, \qquad \alpha+\mu-n > 0$$

şeklinde gösterilir.

Lemma 4.1: $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon $0<\alpha,\mu\le 1$ ve $1<\alpha+\mu\le 2$ olsun.

$$\mathrm{I}_\alpha \mathrm{I}_\mu(f)(t)=\frac{t^\mu}{\mu}\,\mathrm{I}_\alpha(f)(t)+\frac{1}{\mu}\,\mathrm{I}_{\alpha+\mu}(f)(t)-\frac{t}{\mu}\int_0^t s^{\alpha+\mu-2}f(s)ds$$

yazılabilir.

İspat :

$$\mathrm{I}_\alpha \mathrm{I}_\mu(f)(t)=\mathrm{I}_\mu \mathrm{I}_\alpha(f)(t)=\int_0^t \left(t_1^{\mu-1}\mathrm{I}_\alpha f(t_1)\right)dt_1$$

$$=\int_0^t t_1^{\mu-1}\int_0^{t_1}(s^{\alpha-1}f(s)ds)dt_1$$

$$=\int_0^t s^{\alpha-1}f(s)(\int_s^{t_1} t_1^{\mu-1}dt_1)\,ds$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_0^t s^{\alpha-1}f(s)(t^\mu-s^\mu)ds$$

$$=\frac{t^\mu}{\mu}\int_0^t s^{\alpha-1}f(s)ds-\frac{1}{\mu}\int_0^t s^{\alpha+\mu-1}f(s)ds$$

$$=\frac{t^\mu}{\mu}\,\mathrm{I}_\alpha(f)(t)-\frac{1}{\mu}\int_0^t s^{\alpha+\mu-1}f(s)ds$$

$$=\frac{t^\mu}{\mu}+\frac{1}{\mu}\int_0^t f(s)s^{\alpha+\mu-1}(-1)ds$$

$$=\frac{t^\mu}{\mu}+\frac{1}{\mu}\int_0^t f(s)s^{\alpha+\mu-1}\left(\frac{t}{s}-1-\frac{t}{s}\right)ds$$

$$=\frac{t^\mu}{\mu}+\frac{1}{\mu}\int_0^t f(s)s^{\alpha+\mu-2}(t-s-t)ds$$

$$= \frac{t^{\mu}}{\mu} + \frac{1}{\mu}\left(\int_0^t f(s)s^{\alpha+\mu-2}(t-s)ds - t\int_0^t f(s)s^{\alpha+\mu-2}ds\right)$$

$$= \frac{t^{\mu}}{\mu} + \frac{1}{\mu}\left[\mathrm{I}_{\alpha+\mu}(f)(t) - t\int_0^t f(s)s^{\alpha+\mu-2}ds\right]$$

Q-operatörü kesirli integrali $Qf(t) = f(a+b-t)$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann sağ ve sol kesirli integralleri ,

$$Q\big(Jf(t)\big) = {}^{b}J_{\alpha}Q(f)(b), \qquad \alpha \in (n, n+1],$$

$$Q\big(I_{\alpha}^{a}f(t)\big) = QJ_{n+1}^{a}\left(\left((t-a)^{\beta-1}\right)f(t)\right); \qquad \beta = \alpha - n,$$

$$= J_{n+1}^{a}\left((a+b-t-a)^{\beta-1}f(a+b-t)\right)$$

$$= J_{n+1}^{a}(b-t)^{\beta-1}f(a+b-1)$$

$$= {}^{b}\mathrm{I}_{\alpha}(Qf)(t)$$

şeklindedir.

Lemma 4.2: $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon; $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $a \in (n, n+1]$ olsun. Bu takdirde $\forall t > a$ için

$$D_{\alpha}^{a}\mathrm{I}_{\alpha}^{a}f(t) = f(t)$$

İspat : $D_{\alpha}^{a}f(t)(t) = D_{\beta}^{a}\big(f^{(n)}\big)(t)$ $\qquad \alpha \in (n, n+1],$

$$D_{\alpha}^{a}\mathrm{I}_{\alpha}^{a}(f)(t) = D_{\beta}^{a}\frac{d^n}{dt^n}\big(\mathrm{I}_{\alpha}^{a}(f)(t)\big)$$

$$= D_{\beta}^{a}\left(\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathrm{I}_{n+1}^{a}(t-a)^{\beta-1}f(t)\right)\right)$$

$\beta = 1 \ \rightarrow \alpha = \beta, n = 0$

$$= \ D_{\beta}^{\alpha}\left(\mathrm{I}_{1}^{\alpha}\left((t-a)^{\beta-1}f(t)\right)\right)$$

$$= \ D_{\beta}^{\alpha}\mathrm{I}_{\beta}^{\alpha}\left(\left((t-a)^{\beta-1}f(t)\right)\right)$$

$$= \ D_{\beta}^{\alpha}\mathrm{I}_{\beta}^{\alpha}(f)(t)$$

$$= f(t)$$

$f\colon (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f^{(n)}(t)$ olsun. $\forall t < b$ için

$$^{b}D_{\alpha}{}^{b}\mathrm{I}_{\alpha}f(t) = f(t)$$

olur.

Lemma 4.3 : $f\colon [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differansiyellenebilir, $0 < \alpha \leq 1$ ve $\forall t > a$ olsun.

$$\mathrm{I}_{\alpha}^{a}D_{\alpha}^{a}f(t)(t) = f(t) - f(a)$$

yazılabilir.

İspat :

$$\mathrm{I}_{\alpha}^{a}D_{\alpha}^{a}f(t)(t) = \int_{a}^{t}(x-a)^{\alpha-1}\, D_{\alpha}^{a}f(x)dx$$

$$= \int_{a}^{t}(x-a)^{\alpha-1}(x-a)^{1-\alpha}\, f'(x)dx$$

$$= \ f(x)|_{a}^{t} = f(t) - f(a)$$

olur.

Lemma 4.4 : $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f\colon [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $(n+1)$ defa differansiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall t > a$ için

$$\mathrm{I}_{\alpha}^{a} D_{\alpha}^{a} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\mathrm{I}_{\alpha}^{a} D_{\alpha}^{a} f(t) = J_{n+1}^{a}\left((t-a)^{\beta-1} D_{\beta}^{a} f^{(n)}(t)\right)$$

$$= J_{n+1}^{a}\left((t-a)^{\beta-1}(t-a)^{\beta-1} f^{(n+1)}(t)\right)$$

$$= J_{n+1}^{a}\left(f^{(n+1)}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{a}^{t}(t-x)^{n} f^{(n+1)}(x)dx$$

$$= \frac{1}{n!}\left[(t-x)^{n} f^{(n)}(x) + n\int_{a}^{t}(t-x)^{n-1} f^{(n)}(x)dx\right]$$

$$v = (t-x)^{n} \qquad\qquad dv = f^{(n+1)}(x)dx$$

$$dv = -n(t-x)^{n-1}dx \qquad\qquad v = f^{(n)}(x)$$

dönüşümleri uygulanırsa,

$$= \frac{1}{n!}\left[-f^{(n)}(a)(t-a)^{n} - nf^{(n-1)}(a)(t-a)^{n-1}\right.$$
$$\left. + n(n-\quad 1)\int_{a}^{t}(t-x)^{n-2} f^{(n-1)}(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{n!}\Bigg[-f^{(n)}(a)(t-a)^n - nf^{(n-1)}(a)(t-a)^{n-1}$$
$$- n(n-1)f^{(n-2)}(a)(t-a)^{n-2}$$
$$- n(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(a)(t-a)^{n-3} - \cdots$$
$$- n!\int_a^t f'(x)dx\Bigg]$$

$$= f(t) - \Bigg[f(a) + \cdots + \frac{n(n+1)(n-2)}{n!} f^{(n-3)}(a)(t-a)^{n-3}$$
$$+ \frac{n(n+1)}{n!} f^{(n-2)}(t-a)^{n-2} + \frac{n}{n!} f^{(n-1)}(t-a)^{n-1}$$
$$+ \frac{f^n(a)(t-a)^n}{n!}\Bigg]$$
$$= f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^n}{k!}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\alpha \in (n, n+1]$, $f\colon(-\infty, b] \to \mathbb{R}$ ve $(n+1)$ defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall t < b$ için

$${}^{b}\mathrm{I}_a{}^{b}D_a(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k f^k(b)(b-1)^k}{k!}$$

Eğer $n = 0$ veya $0 < \alpha \le 1$ ise

$${}^{b}\mathrm{I}_a{}^{b}D_a(f)(t) = f(t) - f(b)$$

olur.

5. KISMİ KESİRLİ İNTEGRASYON

Teorem 5.1: $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. O halde

$$\int_a^b f(x)\, D_\alpha^b\,(g)(x)\, d_\alpha\,(x,a) = fg\, |_a^b - \int_a^b g(x)\, D_\alpha^a(f)(x)\, d_\alpha(x,a)$$

olur.

İspat:

$$\int_a^b f(x)\, D_\alpha^b\,(g)(x) d_\alpha\,(x,a) = \int_a^b f(x)\,(x-a)^{1-\alpha}\, g'(x)\,(x-a)^{\alpha-1} dx$$

$$u = f(x) \qquad\qquad dv = g'(x)dx$$

$$du = f'(x)\,dx \qquad\qquad v = g(x)$$

dönüşümleri uygulanırsa,

$$\int_a^b f(x)\, D_\alpha^b\,(g)(x) d_\alpha\,(x,a) = f(x)g(x)\, |_a^b - \int_a^b f(x)\; g'(x)\,dx$$

$$= f(x)g(x)\, |_a^b - \int_a^b f(x)\,(x-a)^{1-\alpha}\, g'(x)\,(x-a)^{\alpha-1}\,dx$$

$$= f(x)g(x)\, |_a^b - \int_a^b g(x)\, D_\alpha^a(f)(x) d_\alpha\,(x,a)$$

Lemma 5.1: $f, g: [a,b] \to R$ ve $\alpha \in (0,1]$ bir fonksiyonu olsun. O halde,

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t)\, g(t) d_\alpha\,(b,t) = \int_a^b f(t) I_\alpha^b(g)\,(t) d_\alpha(t,a)$$

olur.

İspat:

$$\int_a^b (I_\alpha^a f(t))g(t)da\,(b,t) = \int_a^b \left(\int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x)\,dx \right) (\,g)(t) d_\alpha\,(t,a)$$

$$= \int_a^b f(t) \left(\int_t^b g(x)\,(b-x)^{\alpha-1}\,dx \right) (t-a)^{\alpha-1}\,dt$$

Teorem 5.2: $f, g: [a,b] \to R$ differansiyellenebilen fonksiyonlar ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_a^b (D_\alpha^a f)(t)\; g(t) d_\alpha(t,a) = \int_a^b f(t)(D_\alpha^b\, g)(t)\; d_\alpha(b,t) + \; f(t)\; g(t)\; |_a^b$$

olur.

İspat:

$$\int_a^b (D_\alpha^b f(t)\; g(t)da\,(t,a) = \int_a^b D_\alpha^a\,(f(t)g(t) - g(b) + g(b))d_\alpha\,(t,a)$$

$$= \int_a^b (D_\alpha^a f)(t)\;\; {}^bI_\alpha\;\; {}^bD_\alpha g(t)\; d_\alpha(t,a) + g(b) \int_a^b (T_\alpha^a f)(t) d_\alpha\,(t,a)$$

$$= \int_a^b (\,D_\alpha^a f)(t)\, {}^bI_\alpha\;\; {}^bD_\alpha g(t) d_\alpha\,(b,t) + g(b)(f(b) - f(a))$$

$$= \int_a^b f(t)\;\; {}_\alpha^bDg(t) d_\alpha\,(b,t) - f(a)(g(b) - g(a)) + g(b)\big(f(t) - f(a)\big)$$

$$= \int_a^b f(t)(\,{}^bD_\alpha\; g)(t) d_\alpha(b,t) + \; f(t)\; g(t)\; |_a^b$$

Teorem 5.3: f bir fonksiyon ve $\alpha \in (0,1]$ için t_0 noktasında sonsuz defa α-diffrensiyellenebilir olsun.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(D_\alpha^{t_0} f\right)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!} \,, t_0 < t < \, t_0 + R^{\frac{1}{\alpha}}, R > 0$$

ifadesine f fonksiyonunun t_0 noktasında Taylor seri açılımı adı verilir.

İspat:

$$f(t) = \, c_0 + \, c_1(t-a)^{\alpha} + c_2(t-a)^{2\alpha} + c_3(t-a)^{3\alpha} + \, \dots + \, c_n(t-a)^{n\alpha}$$

$$f(0) = c_0$$

olur.

$$(T_\alpha^a\, f)(t) = \, c_1(t-a)^{1-\alpha}.\alpha(t-a)^{\alpha-1} + c_2(t-a)^{1-\alpha}.2\alpha(t-a)^{2\alpha-1} + \cdots$$
$$= \, c_1\, \alpha + 2c_2(t-a)^{\alpha} + \cdots$$

$$(T_\alpha^a\, f)(a) = \, c_1\, \alpha$$

$$c_1 = \frac{T_\alpha^a\,(f)(a)}{\alpha}$$

olur.

$$T_\alpha^{a\,(n)}(f)(a) = \, c_n\, \alpha^n n!$$

$$c_n \, = \frac{T_\alpha^{a\,(n)}(f)(a)}{\alpha^n n!}$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(D_\alpha^{t_0} f\right)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}$$

elde edilir.

Örnek 5.1: $f(t) = \, e^{\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}}$ $\alpha \in (0,1)$ ve $t_0 = 0$ olsun, $(\mathrm{T}_\alpha^{\mathrm{a}}\,\mathrm{f})(\mathrm{t}) = 1$ olduğunu gösterelim.

$$(\mathrm{D}_\alpha^{\mathrm{a}}\mathrm{f})(\mathrm{t}) = \, (t-a)^{1-\alpha}\, \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha}}\right)$$

$$= (t-a)^{1-\alpha} (t-a)^{\alpha-1} e^{\frac{(t-0)^{\alpha}}{\alpha}} \mathrm{I}_{t=a}$$

$$= 1$$

O halde,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}$$

biçimde yazılır.

6. UYUMLU KESİRLİ LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Tanım 6.1: $f:[t_0,\infty)\to\mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon, $t_0\in\mathbb{R}$ ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. α. mertebeden uyumlu Laplace dönüşümü,

$$L_\alpha^{t_0}\{f(t)\}(s)=F_\alpha^{t_0}(s)=\int_{t_0}^{\infty}e^{-s\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}}f(t)\,d_\alpha(t,t_0)$$

$$=\int_{t_0}^{\infty}e^{-s\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}}f(t)\ (t-t_0)^{\alpha-1}\,dt$$

integrali ile tanımlanır.

Teorem 6.1 : $a\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(0,1]$ ve $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ differansiyellenebilen reel değerli bir fonksiyon olsun.

$$L_\alpha^a\{D_\alpha^a(f)(t)\}(s)=sF_\alpha^a(s)-f(a)$$

eşitliği yazılabilir.

İspat:

$$L_\alpha^a\{D_\alpha^a(f)(t)\}(s)=\int_a^{\infty}e^{-s\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}(t-a)^{1-\alpha}f'(t)\,(t-a)^{\alpha-1}dt$$

$f'(t)dt=dv\ \to v=ft$ dönüşümü yapılsın.

$$=\int_a^{\infty}e^{-s\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}(t-a)^{1-\alpha}f'(t)\,(t-a)^{\alpha-1}dt$$

$$=\int_a^{\infty}e^{-s\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}f'(t)\,dt$$

$$v=e^{-s\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}$$

$$dv=-s(t-a)^{\alpha-1}e^{-s\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}\,dt$$

$$=f(t)e^{-s\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}\ \mathrm{I}_a^{\alpha}+s\int_a^{\infty}e^{-s\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}f(t)(t-a)^{\alpha-1}dt$$

$$=sF_\alpha^a(s)-f(a)$$

Lemma 6.1: $f: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$L_\alpha^{t_0}\{f(t)\}(s) = F_\alpha^{t_0}(s)$$

uyumlu Laplace dönüşümünün var olduğu kabul edelim. O halde

$$F_\alpha^{t_0}(s) = L\left\{f\left(t_0 + (\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}(s)$$

yazılabilir.

İspat:

$$F_\alpha^{t_0}(s) = \int_0^\infty e^{-s\frac{(t-)^\alpha}{\alpha}}(t-t_0)^{\alpha-1} f(t)dt$$

$$v = \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} \qquad t_0 + \left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = t$$

$$dv = (t-t_0)^{\alpha-1}dt \qquad t: t_0 \to \alpha \;\Rightarrow v: 0 \to \alpha$$

dönüşümleri uygulansın.

$$F_\alpha^{t_0}(s) = \int_0^\infty e^{-sv} f(a+\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\, dv$$

$$= L\left\{f(t_0 + \alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}(s)$$

$$= L\left\{f t_0 + (at)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}(s)$$

Örnek 6.1: $\mathrm{L}_\alpha^{t_0}\{1\}(\mathrm{s}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}, \mathrm{s} > 0$ olduğunu gösterelim.

$$\mathrm{L}_\alpha^{\boldsymbol{t_0}}\{1\}(\mathrm{s}) = \int_{\boldsymbol{\alpha}}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{dt} = \frac{-1}{s}e^{-st} = \frac{1}{s}$$

Örnek 6.2: $\mathrm{L}_\alpha^{t_0}\{\mathrm{t}\}(\mathrm{s}) = \mathrm{L}\left\{t_0 + (\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}(s) = \frac{t_0}{s} + \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{s^{1+\frac{1}{\alpha}}}$

olduğunu gösterelim.

$$= \int_0^\infty e^{-st}(t_0 + (\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})dt$$

$$= t_0 \int_0^\infty e^{-st}dt + (\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-st} t^{\frac{1}{\alpha}} dt$$

$$= \frac{t_0}{s} + (\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-st} t^{\frac{1}{\alpha}} dt$$

$$= \frac{t_0}{s} + \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})}{s^{1+\frac{1}{\alpha}}} \quad , s > 0$$

Örnek 6.3: $\mathrm{L}_\alpha^{\mathbf{0}}\{t^p\}(\mathrm{s}) = \mathrm{L}\left\{(\alpha t)^{\frac{p}{\alpha}}\right\}(s) = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \frac{\Gamma(1+\frac{p}{\alpha})}{s^{1+\frac{p}{\alpha}}}$ eşitsizliği gösterelim.

$$= \int_0^\infty e^{-st}((\alpha t)^{\frac{p}{\alpha}})dt$$

$$= \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-st} t^{\frac{p}{\alpha}} dt$$

$$= \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \frac{\Gamma(1 + \frac{p}{\alpha})}{s^{1+\frac{p}{\alpha}}}$$

Örnek 6.4: $\mathrm{L}_\alpha^{\mathbf{0}}\left\{e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right\}(\mathrm{s}) = \frac{1}{s-1}$ eşitsizliği gösterelim.

$$= \int_{\mathbf{0}}^\infty \mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-1)\mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{s-1} \quad , s > 1$$

7.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde uyumlu kesirli türev ve integral kavramları incelenmiş ve bazı önemli fonksiyonlar uyumlu kesirli analiz yardımıyla yeniden tanımlanmıştır. Literatürde bilinen bazı temel tanımlar, teoremler ve bazı integral eşitsizlikleri bu yeni uyumlu kesirli integral yardımıyla yeniden incelenip genelleştirilebilir.

KAYNAKÇA

[1] Özarslan, M., 2010, "E. Some generating relations for extended hypergeometric function via generalized fractional derivative operatör"; *Journal of computational and applied mathematics*, 52: 1825-1833

[2] Dalir, M., 2010, "Boshour M. Applications of Fractional Calculus"; *Applied Mathematical Sciences*, 21:1021-1032

[3] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh,M., 2014, "A new definition of fractional derivative"; *Journal of computational and applied mathematics* , 264:65-70

[4] Abdeljawad, T., 2015, "On comformable fractional calculus"; *Journal of computational and applied mathematics*, 279:57-56

[5] Khalil, R., 2014, "Fractional Fourier Series with Applications"; *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, 4(6):187-191

[6] Khalil, R. and Abu Hammad, M., 2014, "Legendre fractional differential equation and Legendre fractional polynomials"; *International Journal of Applied Mathematical Research*, 3(3), 214-219

[7] Miller, K.S. and Ross, B., 1993, "An introduction To Fractional Calculus And Fractional Differential Equations"; *John Wiley and Sons İnc*., 366 p, Canada

[8] Ünal, E., 2015, "Conformable Fractional Derivative and Sequential Linear Differential Equations"; Doktora, *Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Erzurum

[9] Abu Hammad M. and Khalil, R., 2014, " Abel's formula and Wronskian for conformable fractional differential equations"; *International Journal of Differential Equations and Applications*, 13(3), 177-183.

[10] Balcı, M., 2012, Matematik Analiz-1, *Sürat Üniversite Yayınları*, İstanbul, Türkiye

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı Adı :	AKDAŞ ULU Fatma
Uyruğu :	T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri :	06.12.1988 Alaşehir/Manisa
Medeni Hali :	Evli
Telefon :	0506 485 39 50
e-mail :	f.ulu.match@hotmail.com

Eğitim Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Uşak Üniversitesi / Matematik Bölümü	2010
Lise	Alaşehir Yabancı Dil Lisesi /Manisa	2006

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar -

Hobiler

Sinema, Kitap, Bilgisayar, Matematik