T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MULTİPLİKATİF BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN ÇOK ADIMLI YÖNTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EVRİM ÇALIŞKAN

TEMMUZ 2019
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MULTIPLIKATIF BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN ÇOK ADIMLI YÖNTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EVRİM ÇALIŞKAN

UŞAK 2019

Evrim ÇALIŞKAN tarafından hazırlanan Multiplikatif Başlangıç Değer Problemlerinin Nümerik Çözümleri İçin Çok Adımlı Yöntemler adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Yusuf GÜREFE ....

Tez Danışmanı Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR ....

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Yusuf PANDIR ....

Matematik Anabilim Dalı, Yozgat Bozok Üniversitesi

Doç. Dr. Yusuf GÜREFE ....

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih: 24/07/2019

Bu tez ile U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Evrim ÇALIŞKAN

MULTIPLIKATIF BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN ÇOK ADIMLI YÖNTEMLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Evrim ÇALIŞKAN

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2019

ÖZET

Bu tez çalışmasında multiplikatif başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümlerini hesaplamak için koşulsuz kararlı multiplikatif harmonik ve kontra harmonik ortalamaya dayanan çok adımlı yöntemler geliştirilmiştir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü olarak adlandırılan birinci bölümde, araştırmanın konusu hakkında gerekli olan literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde, multiplikatif cebirsel işlemler, türev, integral ve multiplikatif nümerik analiz ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ise, multiplikatif başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümlerini elde etmek için multiplikatif harmonik ve kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemleri geliştirilmiştir. Ayrıca, bu bölümde kararlılık analizi ve bazı sayısal uygulamalar yapılmıştır. Böylece koşulsuz kararlı ve hatanın çok daha minimize edilmesini sağlayan yöntemlerin ortaya konulduğu söylenebilir.

Bilim Kodu : 403.03.01
Anahtar Kelimeler : Multiplikatif başlangıç değer problemi, multiplikatif harmonik ortalama, multiplikatif kontra harmonik ortalama, multiplikatif çok adımlı yöntemler, kararlılık analizi
Sayfa Adedi : **47**
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Yusuf GÜREFE

MULTI STEP METHODS FOR NUMERICAL SOLUTIONS OF MULTIPLICATIVE INITIAL VALUE PROBLEMS

(M.Sc. Thesis)

Evrim ÇALIŞKAN

UŞAK UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
July 2019

ABSTRACT

In this thesis, multi-step methods based on unconditionally stable multiplicative harmonic and counter-harmonic means are developed in order to calculate numerical solutions of multiplicative initial value problems.

This thesis consists of four chapters. In the first part, which is called the introduction part, the literature information about the subject of the research is given. In the second part, some basic concepts about multiplicative algebraic operations, derivative, integral and multiplicative numerical analysis are given. In the third chapter, Runge-Kutta methods based on multiplicative harmonic and counter-harmonic means have been developed in order to obtain numerical solutions of multiplicative initial value problems. In addition, stability analysis and some numerical applications are performed in this section. Thus, it can be said that unconditionally stable and error minimizing methods are introduced.

Code **:** 403.03.01
Key Words : Multiplicative initial value problem, multiplicative harmonic mean, multiplicative contra harmonic mean, multiplicative multi step methods, stability analysis
Page Number : 47
Adviser **:** Assoc. Prof. Dr. Yusuf GÜREFE

TEŞEKKÜR

Bu bilimsel çalışmanın hazırlanma sürecinde,bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen, hoşgörüsü,çalışma azmi ve düşünceleriyle beni destekleyen değerli hocam Sayın Doç.Dr.Yusuf GÜREFE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte desteğini her zaman hissettiğim çok kıymetli bilim insanı Yrd.Doç.Dr.Nejla GÜREFE'ye teşekkür ederim.Bugünlere gelmemde emeklerini ödeyemeyeceğim çok değerli ailem başta babam Remzi ÇALIŞKAN'a,kıymetlim sevgili annem Yüksel ÇALIŞKAN'a, sevgili abim Evren ÇALIŞKAN'a,canımdan öte olan çok değerli ikizim Ebru AKINCI'ya sonsuz teşekkür ederim.Son olarakta her zaman yanıbaşımda olan sevgi ve desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarım Merve SEVİNÇ'e ve Bircan ŞİMŞİR'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

1 GİRİŞ

Uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan gerçek hayat problemlerinin modellenerek bir matematik problemine dönüştürülmesi ve bu problemlerin çözümüne yönelik yeni yaklaşımların geliştirilmesi büyük bir öneme sahiptir. Doğal olaylar sonucunda oluşan bu tür problemler bir değişim içermek ile beraber değişen nicelikleri de ifade eden denklemler tanımlanarak modellenebilir. Bunun için genellikle diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Birçok diferansiyel denklem analitik olarak çözülebilse de çözüm için gerekli hesaplamalardaki zorluk ve bazen de hiçbir yaklaşım ile çözüme ulaşılamaması nümerik çözüm yöntemlerine ilgi duyulmasını sağlamaktadır. Özellikle adi diferansiyel denklemler üzerine tanımlanan başlangıç veya sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri için literatürde birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlere yeni bir bakış sunabileceği düşünülen non-Newtonian analiz olarak da ifade edilen Volterra tipi multiplikatif analiz (Volterra and Hostinsky, 1938) ve multiplikatif analiz (Grossman and Katz, 1972; Grossman, 1983; Grossman et al., 1983; Stanley, 1999; Campbel, 1999) tanımlanmıştır. Volterra tipi multiplikatif analiz konusunda multiplikatif dinamik sistemler ve uygulamaları üzerine bazı makaleler yayımlanmıştır (Rybaczuk and Stoppel, 2000; Rybaczuk et al., 2001; Rybaczuk and Zielinski, 2001; Kasprzak et al., 2004; Aniszewska and Rybaczuk, 2005, 2008). Diğer taraftan, Ayrıca, Volterra tipi başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümlerine yönelik Volterra tipi multiplikatif Runge-Kutta yöntemleri tanımlanmış ve çok yüksek değerler için oldukça yakınsak nümerik çözümler elde edilmiştir (Aniszewska, 2007).

İlk olarak Michael Grossman ve Robert Katz tarafından 1967 yılında ortaya konulan multiplikatif analiz fikri Bashirov ve ark. (2008) tarafından tekrar çalışılmıştır. Bu çalışmada multiplikatif analizdeki bazı temel kavramlar verilmiştir. Ardından sırasıyla multiplikatif sınır değer problemlerine multiplikatif sonlu farklar yöntemi (Riza et al., 2009), multiplikatif ileri ve geri fark Newton interpolasyonları (Misirli and Ozyapici, 2009; Ozyapici, 2009), multiplikatif başlangıç değer problemlerine multiplikatif Adams Bashforth-Moulton yöntemleri (Gürefe, 2009; Misirli and Gurefe, 2011), multiplikatif anlamda yeni bir büyüme dağılımı (Englehardt et al., 2009), kompleks multiplikatif analiz (Uzer, 2010; Bashirov and Rıza, 2011) konularında çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Öte yandan literatürde multiplikatif analizin birçok farklı uygulaması da bulunmaktadır (Bashirov et al., 2011; Mora et al., 2012; Florack and Assen, 2012; Bashirov, 2013; Cakmak and Başar, 2012; Tekin and Başar, 2013; Ozyapici et al., 2014; Riza and Aktöre, 2015; Özyapıcı and Bilgehan, 2015; Lepe et al., 2018).

Bu tez çalışmasında ise multiplikatif başlangıç değer problemleri için sırasıyla multiplikatif harmonik ortalama yöntemleri ve multiplikatif kontra harmonik ortalama yöntemleri geliştirilmiş ve ayrıca bu yöntemlerin çeşitli problemlere uygulamaları verilmiştir. Elde edilen sonuçların literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılarak tanımlanan yöntemlerin etkinliği üzerine tartışılmıştır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, multiplikatif analiz ve multiplikatif nümerik analiz için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde ise, multiplikatif başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümlerine yönelik 2., 3. ve 4. mertebe multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemleri, 2., 3. ve 4. mertebe multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemleri tanımlanmıştır. Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde geliştirilen yöntemlerin kararlılık analizleri ve bazı multiplikatif başlangıç değer problemlerine uygulamaları sunulmuştur.

2 MULTİPLİKATİF ANALİZİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde multiplikatif analiz için temel teşkil eden bazı kavramlar tanıtılacaktır. Aritmetik fonksiyon ile tanımlanan multiplikatif cebirsel işlemler ve özellikleri verilmiş olup bu işlemler yardımıyla multiplikatif anlamda tanımlı süreklilik, mutlak değer, türev, integral gibi kavramlar ile bu kavramların çeşitli özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca multiplikatif nümerik analizin bazı temel teoremlerine yer verilmiştir.

2.1 Multiplikatif Cebirsel İşlemler

Üstel (*exp*) fonksiyon ile oluşturulan aritmetik işlemler multiplikatif cebirsel işlemler olarak adlandırılabilir. Aşağıda multiplikatif aritmetik tablosu verilmiştir.

$\forall x,\ y \in R^{+}$ olmak üzere;

Üreteç fonksiyonu	$\rightarrow$ *exp*
Reel sayılar	$\rightarrow$ Tüm pozitif sayıların kümesi
Multiplikatif sıfır	$\rightarrow \exp(0)=1$
Multiplikatif bir	$\rightarrow \exp(1)=e$
Multiplikatif toplama	$\rightarrow x \oplus^{*} y = e^{\ln x+\ln y} = xy$
Multiplikatif çıkarma	$\rightarrow x \Theta^{*} y = e^{\ln x-\ln y} = x/y$
Multiplikatif çarpma	$\rightarrow x \otimes^{*} y = e^{\ln x \ln y} = e^{\ln x \oplus^{*} \ln y} = y^{\ln x} = x^{\ln y}$
Multiplikatif bölme	$\rightarrow x \varnothing^{*} y = e^{\ln x/\ln y} = e^{\ln x \Theta^{*} \ln y} = x^{1/\ln y},\ (y \neq 1)$
Multiplikatif pozitif sayılar	$\rightarrow$ 1’ den büyük sayılar
Multiplikatif negatif sayılar	$\rightarrow$ 1’ den küçük pozitif sayılar

2.2 Multiplikatif Türev ve İntegral

Bu bölümde multiplikatif türev, integral kavramları ve bazı temel özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.2.1 (Bashirov et al., 2008; Özyapıcı, 2009; Gürefe, 2009) Herhangi bir f fonksiyonunun x değişkeni için multiplikatif türev kavramı $f^*(x)$ sembolü ile ifade edilir. $A \subseteq R$ üzerindeki tüm x değerleri için $f^*(x)$ fonksiyonu $f^*(x): A \to R$ ile tanımlıdır. Böylece, pozitif bir f fonksiyonun multiplikatif türevi

$$f^*(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

olarak tanımlıdır. Diğer taraftan bazı temel işlemler kullanılarak

$$f^*(x) = e^{(\ln f(x))'}$$

eşitliği yazılabilir.

Tanım 2.2.2 (Bashirov et al., 2008; Özyapıcı, 2009; Gürefe, 2009) Eğer, f^* fonksiyonu multiplikatif anlamda türevlenebiliyor ise ikinci mertebeden multiplikatif türevi de vardır ve f^{**} ile gösterilir. Benzer şekilde f fonksiyonunun *n.* mertebeden multiplikatif türevi var ise $f^{*(n)}$ ile gösterilir. Pozitif tanımlı f fonksiyonunun bir x noktasındaki *n.* mertebeden multiplikatif türevi

$$f^{*(n)}(x) = e^{(\ln f(x))^{(n)}}$$

biçiminde tanımlıdır.

Teorem 2.2.3 (Özyapıcı, 2009) Pozitif tanımlı bir f fonksiyonu herhangi bir x noktasında multiplikatif diferansiyellenebiliyorsa klasik anlamda diferansiyellenebilir ve

$$f'(x) = f(x) \ln f^*(x)$$

eşitliği mevcuttur.

Tanım 2.2.4 (Bashirov et al., 2008; Özyapıcı, 2009; Gürefe, 2009) Pozitif bir a reel sayısının multiplikatif mutlak değeri $|a|^*$ formülü ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$|a|^* = \begin{cases} a, & a \geq 1 \\ \frac{1}{a}, & a < 1 \end{cases}$$

Ayrıca, multiplikatif mutlak değerin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

$i)$ $\forall a \in R^+$ için $1 \leq |a|^*$,

$ii)$ $\forall a, b \in R^+$ için $|a \oplus^* b|^* \leq |a|^* \oplus^* |b|^*$ veya $|ab|^* \leq |a|^* |b|^*$,

$iii)$ Eğer $p \geq 1$ için $1/p \leq a \leq p$ ise $|a|^* \leq p$.

Teorem 2.2.5 (Bashirov et al., 2008; Özyapıcı, 2009; Gürefe, 2009) f ve g multiplikatif anlamda diferansiyellenebilir iki fonksiyon ve c bir sabit iken cf, fg, $f+g$, f/g, f^g fonksiyonları da multiplikatif diferansiyellenebilir ve aşağıdaki gibi verilebilir:

1. $(cf)^*(x) = f^*(x)$,
2. $(fg)^*(x) = f^*(x) g^*(x)$,
3. $(f+g)^*(x) = f^*(x)^{\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}} g^*(x)^{\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}}$,
4. $(f/g)^*(x) = f^*(x) / g^*(x)$,
5. $(f^g)^*(x) = f^*(x)^{g(x)} f(x)^{g'(x)}$.

Önerme 2.2.6 (Özyapıcı, 2009; Gürefe, 2009) g multiplikatif diferansiyellenebilir ve h klasik diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

ise f fonksiyonun multiplikatif türevi aşağıdaki gibidir:

$$f^*(x) = \left[g^*(h(x)) \right]^{h'(x)}.$$

Tanım 2.2.7 (Özyapıcı, 2009) Eğer pozitif tanımlı herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$' da multiplikatif sürekli ise (a,b)' da aşağıdaki gibi multiplikatif integrallenebilir

$$\int_a^b f(x)^{dx} = e^{\int_a^b \ln(f(x))dx}.$$

Teorem 2.2.8 (Özyapıcı, 2009) f ve g $[a,b]$' da multiplikatif integrallenebilir, (a,b)' da pozitif ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere $k \in R$, $a \le c \le b$ için $e^k \otimes^* f$, $f \oplus^* g$, $f \Theta^* g$ fonksiyonları multiplikatif anlamda diferansiyellenebilir ise

1. $\int_a^b \left(e^k \otimes^* f(x)\right)^{dx} = e^k \otimes^* \int_a^b \left(f(x)\right)^{dx}$ veya $\int_a^b \left(f(x)^k\right)^{dx} = \left(\int_a^b (f(x))^{dx}\right)^k$,

2. $\int_a^b \left(f(x) \oplus^* g(x)\right)^{dx} = \int_a^b \left(f(x)\right)^{dx} \oplus^* \int_a^b \left(g(x)\right)^{dx}$

$$\int_a^b \left(f(x)g(x)\right)^{dx} = \int_a^b \left(f(x)\right)^{dx} \int_a^b \left(g(x)\right)^{dx},$$

3. $\int_a^b \left(f(x) \Theta^* g(x)\right)^{dx} = \int_a^b \left(f(x)\right)^{dx} \Theta^* \int_a^b \left(g(x)\right)^{dx}$

$$\int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{dx} = \frac{\int_a^b \left(f(x)\right)^{dx}}{\int_a^b \left(g(x)\right)^{dx}},$$

4. $\int_a^b f(x)^{dx} = \int_a^c f(x)^{dx} \oplus^* \int_c^b f(x)^{dx}$ veya $\int_a^b f(x)^{dx} = \int_a^c f(x)^{dx} \int_c^b f(x)^{dx}$

şeklindeki eşitlikler sağlanır.

Önerme 2.2.9 (Özyapıcı, 2009; Gürefe, 2009) f, $[a,b]$ aralığında multiplikatif integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) $\int_a^b f(x)^{dx} = e^{-1} \otimes^* \int_b^a f(x)^{dx}$ veya $\int_a^b f(x)^{dx} = \left(\int_b^a f(x)^{dx}\right)^{-1}$

b) $\int_a^a f(x)^{dx} = 1.$

Teorem 2.2.10 (Özyapıcı, 2009) f , $[a,b]$' da pozitif tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ise f ' in multiplikatif antitürevlerinden biri F , $[a,b]$' da $a \leq x \leq b$ için

$$F(x) = \int_a^x f(x)^{dx}$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan $G(x)$, f fonksiyonunun $[a,b]$' da herhangi bir terstürevi ise aşağıdaki gibidir

$$\int_a^b f(x)^{dx} = \frac{G(b)}{G(a)}.$$

Teorem 2.2.11 (Multiplikatif Kısmi İntegral) (Bashirov et al., 2008; Özyapıcı, 2009; Gürefe, 2009) $f:[a,b] \to R^+$ ve $g:[a,b] \to R^+$ fonksiyonları multiplikatif diferansiyellenebilir olsun. Böylece $f \otimes^* e^g = f^g$ fonksiyonu da multiplikatif anlamda diferansiyellenebilir ve

$$\int_a^b \left(f^*(x) \otimes^* e^{g(x)} \right)^{dx} = \left\{ \left(f(b) \otimes^* e^{g(b)} \right) \Theta^* \left(f(a) \otimes^* e^{g(a)} \right) \right\} \Theta^* \int_a^b \left(f^*(x) \otimes^* e^{g'(x)} \right)^{dx}$$

şeklinde veya klasik cebirsel işlemler ile

$$\int_a^b \left(f^*(x)^{g(x)} \right)^{dx} = \frac{f(b)^{g(b)}}{f(a)^{g(a)}} \frac{1}{\int_a^b \left(f(x)^{g'(x)} \right)^{dx}}$$

olarak yazılabilir.

2.3 Multiplikatif Nümerik Analizin Bazı Temel Kavramları

Bu bölümde multiplikatif nümerik analiz konusunda bazı temel kavramlar verilmiştir. Bu kavramlar sırasıyla multiplikatif limit, süreklilik, yakınsaklık, türevlenebilme, Rolle teoremi, ortalama değer teoremi, genelleştirilmiş Rolle teoremi, diferensiyel denklem, Weierstrass teoremi ve Taylor teoremi şeklindedir.

Tanım 2.3.1 (Özyapıcı ve Mısırlı, 2009) $\forall \varepsilon > 1$ iken $\exists \delta(\varepsilon) > 1$ değeri ve $\left|\frac{x}{x_0}\right|^* < \delta(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan her x için $\left|\frac{f(x)}{\ell}\right|^* < \varepsilon$ ise ℓ sayısına f ' in x_0 noktasındaki limit değeri denir. Ayrıca, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2 $f(x)$, $A \subseteq R^+$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ iken f ' in x_0 noktasında multiplikatif anlamda sürekli olması için gerek ve yeter şart $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ olmasıdır. Eğer f, $\forall x \in A$ için sürekli ise, f ' e A cümlesi üzerinde multiplikatif süreklidir denir. Ayrıca, $f(x) \in C^*(A)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.3.3 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, reel değerler içeren bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 1$ için $\left|\frac{x_n}{x}\right|^* < \varepsilon$ olacak biçimde sadece ε değerine bağlı $n > N(\varepsilon) > 1$ var ise bu dizi x ' e multiplikatif yakınsaktır denir.

Tanım 2.3.4 Eğer $f(x)$, x_0 noktasının yer aldığı bir açık aralıkta tanımlı ise bu fonksiyonun x_0 noktasındaki multiplikatif türevi

$$f^*(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{f(x_0)} \right)^{\frac{1}{x - x_0}}$$

olarak tanımlanır. Herhangi bir fonksiyonun $A \subseteq R^+$ cümlesinin her noktasında multiplikatif türevi var ise bu fonksiyona, A üzerinde multiplikatif türevlenebilir denir.

Teorem 2.3.5 (Multiplikatif Rolle Teoremi): (Özyapıcı ve Mısırlı, 2009) Herhangi bir f fonksiyonu $[a,b]$ ' da multiplikatif sürekli, (a,b) ' da multiplikatif türevlenebilir, pozitif ve $f(a) = f(b)$ ise $f^*(c) = 1$ olacak biçimde bir $c \in (a,b)$ vardır.

Teorem 2.3.6 (Multiplikatif Ortalama Değer Teoremi): (Özyapıcı ve Mısırlı, 2009) Herhangi bir f fonksiyonu $[a,b]$' da multiplikatif sürekli, (a,b)' da multiplikatif türevlenebilir ve pozitif ise

$$f^{*}(c)=\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

olacak biçimde bir $c\in(a,b)$ vardır.

Teorem 2.3.7 (Genelleştirilmiş Multiplikatif Rolle Teoremi): $[a,b]$' da multiplikatif sürekli, (a,b)' da n defa multiplikatif türevlenebilir pozitif bir fonksiyon olan $f(x)$, $x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$ için $f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)=1$ ise, $f^{*(n)}(c)=1$ olacak biçimde $\exists\, c\in(a,b)$ vardır.

Tanım 2.3.8 Pozitif reel G fonksiyonu için n. mertebeden bir multiplikatif diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir

$$G\left(x,y,y^{*},\ldots,y^{*(n-1)},y^{*(n)}(x)\right)=1,\quad (x,y)\in R\times R^{+}\ .$$

f, bir I reel aralığındaki tüm x değerleri için tanımlı ve n defa multiplikatif anlamda diferansiyellenebilir pozitif reel bir fonksiyon ise $G\left(x,f,f^{*},\ldots,f^{*(n-1)},f^{*(n)}\right)$ tanımlanmış ve tüm $x\in I$ değerleri için $G\left(x,f,f^{*},\ldots,f^{*(n-1)},f^{*(n)}\right)=1$ oluyor ise f, multiplikatif diferansiyel denklemin bir explicit çözümü olarak ifade edilir. Ayrıca denklemin bir implicit çözümü de $g(x,y)=0$ formuna sahiptir. O en azından reel bir f fonksiyonunu tanımlar ki bu fonksiyon multiplikatif diferansiyel denklemin bir explicit çözümü olur.

Tanım 2.3.9 Bir bağımsız değişken ile ilgili bir veya daha fazla bağımlı değişkenin multiplikatif türevini içeren diferansiyel denkleme multiplikatif diferansiyel denklem denir. Örneğin, 1. mertebeden multiplikatif diferansiyel denklem, y'nin multiplikatif türevini içeren

$$y^{*}(x)=f\left(x,y(x)\right)$$

şeklindeki diferansiyel denklem olarak tanımlanır. Ayrıca bu multiplikatif diferansiyel denklem $y(x_0)=y_0$ koşulu ile tanımlı ise oluşan probleme multiplikatif başlangıç değer problemi denir.

Teorem 2.3.10 (Özyapıcı ve Mısırlı, 2009) $[a,b]$' da tanımlı, pozitif değerli ve multiplikatif sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b f(x)^{dx} = f(c)^{b-a}$$

eşitliğini sağlayan bir $c\in[a,b]$ vardır.

Teorem 2.3.11 (Multiplikatif Weierstrass Teoremi): $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$' da pozitif tanımlı ve multiplikatif sürekli olsun. $\varepsilon>1$ ise, $[a,b]$' da tanımlı ve $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|\frac{f(x)}{E(x)}\right|^{*} < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $E(x)$ fonksiyonu vardır.

Teorem 2.3.12 (Multiplikatif Taylor Teoremi): (Bashirov et al., 2008) $n\geq 0$ bir tamsayı, $f^{*(n)}$ ise $[a,b]$' da multiplikatif sürekli ve (a,b)' da multiplikatif anlamda türevlenebilir pozitif bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x_0\in[a,b]$ olmak üzere $\forall\, x\in[a,b]$ için

$$f(x)=E_n(x)R_n(x)$$

olacak biçimde x_0 ile x değerleri arasında bir $\eta(x)$ mevcuttur. Bu fonksiyonlar sırası ile

$$E_n(x)=\prod_{i=0}^{n}\left(f^{*(i)}(x_0)\right)^{\frac{(x-x_0)^i}{i!}} = f(x_0)\left(f^{*}(x_0)\right)^{x-x_0}\left(f^{**}(x_0)\right)^{\frac{(x-x_0)^2}{2!}}\cdots\left(f^{*(n)}(x_0)\right)^{\frac{(x-x_0)^n}{n!}},$$

$$R_n(x)=\left(f^{*(n+1)}(\eta(x))\right)^{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada, $E_n(x)$ fonksiyonuna *n.* dereceden multiplikatif anlamda Taylor polinomu ve $R_n(x)$ fonksiyonuna da multiplikatif Taylor açılımının kalan terimi veya hata terimi denir.

3 MULTİPLİKATİF HARMONİK VE KONTRA HARMONİK ORTALAMAYA DAYALI YÖNTEMLER

Bu bölümde, multiplikatif diferansiyel denklemler ile tanımlı multiplikatif başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümlerini elde etmek için yeni yöntemler geliştirilmiş, bazı problemlere uygulanarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve değerlendirilmiştir.

3.1 Multiplikatif Runge-Kutta Yöntemleri

Multiplikatif Runge-Kutta yöntemleri tanımlanması için multiplikatif başlangıç değer problemi

$$y^* = f\left(x, y\right), \qquad y\left(x_0\right) = y_0. \tag{1}$$

şeklinde ele alınabilir. Ayrıca multiplikatif Runge-Kutta yöntemleri

$$y_{n+1} = y_n\left(\Phi\left(x_n, y_n, h\right)\right)^h \tag{2}$$

şeklinde genel forma sahip tek adımlı yöntemlerin özel bir durumu olarak bilinmektedir.

Tanım 3.1.1 $y\left(x\right)$ başlangıç değer probleminin bir analitik çözümü iken, yukarıdaki yöntem p . mertebeye sahiptir denir ve ayrıca

$$\frac{y\left(x+h\right)}{y\left(x\right)\left(\Phi\left(x, y, h\right)\right)^h} = O\left(h^{p+1}\right) \tag{3}$$

şeklindeki bağıntı yazılabilir.

Bununla birlikte, $q = 1, 2, \cdots, \left(p-1\right)$ için $f^{*(q)}\left(x, y\right) \equiv \dfrac{d^{*q} f\left(x, y\right)}{d^* x^q}$ iken p . mertebeden multiplikatif Taylor açılımı

$$\Phi\left(x, y, h\right) = \Phi_T\left(x, y, h\right) \equiv f\left(x, y\right)\left(f^*\left(x, y\right)\right)^{\frac{h}{2!}}\left(f^{**}\left(x, y\right)\right)^{\frac{h^2}{3!}} \ldots \left(f^{*(p-1)}\left(x, y\right)\right)^{\frac{h^{p-1}}{p!}} \tag{4}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 3.1.2 $R \times R^+$ 'nın bir G alt cümlesindeki $\left(x, y^*, h\right)$, $\left(x, y, h\right)$ gibi tüm noktalar için aşağıdaki multiplikatif Lipschitz şartını sağlayan $\Phi\left(x, y, h\right)$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\left|\frac{\Phi\left(x,y^{*},h\right)}{\Phi\left(x,y,h\right)}\right|^{*}\leq M^{\left|y^{*}-y\right|}$$

Buradan multiplikatif Runge-Kutta yöntemlerinin tanımı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\Phi\left(x_n,y_n,h\right)=\prod_{r=1}^{R}k_r^{c_r}\ , \tag{5}$$

$$k_1=f\left(x_n,y_n\right), \tag{6}$$

$$k_r=f\left(x_n+a_rh,y_n\left(1+\ln\left(\prod_{s=1}^{r-1}k_s^{b_{rs}}\right)^{h}\right)\right),\quad r=2,3,...,R\,, \tag{7}$$

$$a_r=\sum_{s=1}^{r-1}b_{rs},\quad r=2,3,...,R. \tag{8}$$

Burada, multiplikatif Runge-Kutta yöntemlerini tanımlamak için bir $f\left(x,y\right)$ fonksiyonunun 1., 2. ve 3. mertebeden multiplikatif türevleri hesaplanmalıdır. İki değişkenli fonksiyonların multiplikatif kısmi türev tanımından

$$\frac{d^{*}f\left(x,y\right)}{dx}=\left(f\left(x,y\right)\right)^{*}=\left(f_y^{*}\right)^{y\ln f}=F\ , \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^{**}f\left(x,y\right)}{dx}&=\left(f\left(x,y\right)\right)^{**}=\left(\left(f\left(x,y\right)\right)^{*}\right)^{*}\\&=\left(\frac{d^{*}f\left(x,y\right)}{dx}\right)^{*}\\&=\frac{d^{*}}{dx}\left(\frac{d^{*}f\left(x,y\right)}{dx}\right)\\&=\frac{d^{*}}{dx}\left(\left(f_y^{*}\right)^{y\ln f}\right)\\&=\left(\left(f_y^{*}\right)^{y\ln f}\right)^{y\ln f_y^{*}}\left(f_{yy}^{*}\right)^{\left(y\ln f\right)^{2}}\end{aligned}$$

elde edilir. $G=\left(f_{yy}^{*}\right)^{\left(y\ln f\right)^{2}}$ için

$$\left(f\left(x,y\right)\right)^{**}=F^{\,y\ln f_y^{*}}G \tag{10}$$

bağıntısı bulunur. Ayrıca $f\left(x,y\right)$ fonksiyonunun 3. mertebe multiplikatif türevi

$$\begin{aligned}
\frac{d^{***}f(x,y)}{dx} &= \left(f(x,y)\right)^{***} \\
&= \left(\left(f(x,y)\right)^{**}\right)^{*} \\
&= \left(\frac{d^{**}f(x,y)}{dx}\right)^{*} \\
&= \frac{d^{*}}{dx}\left(\frac{d^{**}f(x,y)}{dx}\right) \\
&= \frac{d^{*}}{dx}\left(\left(\left(f_y^{*}\right)^{y\ln f}\right)^{y\ln f_y^{*}}\left(f_{yy}^{*}\right)^{(y\ln f)^2}\right) \\
&= \left\{\left(f_y^{*}\right)^{y\ln f}\right\}^{y^2\ln^2 f_y^{*}+3y^2\ln f\ln f_{yy}^{*}}\left\{\left(f_{yy}^{*}\right)^{(y\ln f)^2}\right\}^{y\ln f_y^{*}} \\
&\times\left\{\left(f_{yyy}^{*}\right)^{y^3\ln^3 f}\right\}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $H=\left(f_{yyy}^{*}\right)^{y^3\ln^3 f}$ için

$$\left(f(x,y)\right)^{***}=F^{y^2\ln^2 f_y^{*}+3y^2\ln f\ln f_{yy}^{*}}G^{y\ln f_y^{*}}H \tag{11}$$

bağıntısı yazılabilir. Multiplikatif Taylor açılımından

$$\Phi_{T^*}(x,y,h)=f\left(f^{*}\right)^{\frac{h}{2}}\left(f^{**}\right)^{\frac{h^2}{6}}\left(f^{***}\right)^{\frac{h^3}{24}}O\left(h^4\right), \tag{12}$$

buradan da

$$\Phi_{T^*}(x,y,h)=f\,F^{\frac{h}{2}}\left(F^{y\ln f_y^{*}}G\right)^{\frac{h^2}{6}}\left(F^{y^2\ln^2 f_y^{*}+3y^2\ln f\ln f_{yy}^{*}}G^{y\ln f_y^{*}}H\right)^{\frac{h^3}{24}}O\left(h^4\right) \tag{13}$$

bağıntısı elde edilir. $R=4$ için $k_1=f\left(y_n\right)=f$ iken k_2, k_3 ve k_4 fonksiyonları iki değişkenli fonksiyonlarda multiplikatif Taylor açılımı kullanılarak sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(y+a_1hy\ln k_1\right) \\
&= f\left\{\left(f_y^{*}\right)^{y\ln f}\right\}^{a_1h}\left\{\left(f_{yy}^{*}\right)^{y^2\ln^2 f}\right\}^{\left(a_1^2h^2\right)/2}\left\{\left(f_{yyy}^{*}\right)^{y^3\ln^3 f}\right\}^{\left(a_1^3h^3\right)/6} \\
&= f\,F^{a_1h}G^{\left(a_1^2h^2\right)/2}H^{\left(a_1^3h^3\right)/6},
\end{aligned} \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
k_3 &= f\left(y + a_2 hy \ln k_1 + a_3 hy \ln k_2\right) \\
&= f\left\{\left(f_y^*\right)^{y \ln f}\right\}^{(a_2+a_3)h + a_1 a_3 h^2 y \ln f_y^* + a_1(a_2+a_3)a_3 h^3 y^2 \ln f \ln f_{yy}^*} \left\{\left(f_{yy}^*\right)^{y^2 \ln^2 f}\right\}^{\left((a_2+a_3)^2 h^2\right)/2 + \left(a_1^2 a_3 h^3 y \ln f_y^*\right)/2} \\
&\quad \times \left\{\left(f_{yyy}^*\right)^{y^3 \ln^3 f}\right\}^{\left((a_2+a_3)^3 h^3\right)/6} \\
&= f\, F^{(a_2+a_3)h + a_1 a_3 h^2 y \ln f_y^* + a_1(a_2+a_3)a_3 h^3 y^2 \ln f \ln f_{yy}^*}\, G^{\left((a_2+a_3)^2 h^2\right)/2 + \left(a_1^2 a_3 h^3 y \ln f_y^*\right)/2}\, H^{\left((a_2+a_3)^3 h^3\right)/6} \qquad (15) \\
&= f\, F^{(a_2+a_3)h}\, F^{a_1 a_3 h^2 y \ln f_y^*}\, F^{a_1(a_2+a_3)a_3 h^3 y^2 \ln f \ln f_{yy}^*}\, G^{\left((a_2+a_3)^2 h^2\right)/2}\, G^{\left(a_1^2 a_3 h^3 y \ln f_y^*\right)/2}\, H^{\left((a_2+a_3)^3 h^3\right)/6} \\
&= f\, F^{(a_2+a_3)h}\, F^{a_1 a_3 h^2 y \ln f_y^*}\, G^{a_1 a_3 (a_2+a_3) h^3 y \ln f_y^*}\, G^{\left((a_2+a_3)^2 h^2\right)/2}\, G^{\left(a_1^2 a_3 h^3 y \ln f_y^*\right)/2}\, H^{\left((a_2+a_3)^3 h^3\right)/6} \\
&= f\, F^{(a_2+a_3)h} \left(F^{a_1 a_3 y \ln f_y^*}\, G^{(a_2+a_3)^2/2}\right)^{h^2} \left(G^{\left(a_1^2 a_3/2 + a_1 a_3 (a_2+a_3)\right) y \ln f_y^*}\, H^{(a_2+a_3)^3/6}\right)^{h^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= f\left(y + a_4 hy \ln k_1 + a_5 hy \ln k_2 + a_6 hy \ln k_3\right) \\
&= f\left\{f_x^*\left(f_y^*\right)^{y \ln f}\right\}^{(a_4+a_5+a_6)h + \left(a_1 a_5 + (a_2+a_3)a_6\right)h^2 y \ln f_y^* + a_1 a_3 a_6 h^3 y^2 \ln^2\left(f_y^*\right) + \left(a_1 a_5 (a_4+a_5+a_6) + a_6 (a_2+a_3)(a_4+a_5+a_6)\right)h^3 y^2 \ln f \ln f_{yy}^*} \\
&\quad \times \left\{\left\{\left(f_{yy}^*\right)^{y^2 \ln^2 f}\right\}\right\}^{\left((a_4+a_5+a_6)^2 h^2\right)/2 + \left(\left(a_1^2 a_5 + a_6 (a_2+a_3)^2\right)h^3 y \ln f_y^*\right)/2} \left\{\left(f_{yyy}^*\right)^{y^3 \ln^3 f}\right\}^{\left((a_4+a_5+a_6)^3 h^3\right)/6} \\
&= f\, F^{(a_4+a_5+a_6)h + \left(a_1 a_5 + (a_2+a_3)a_6\right)h^2 y \ln f_y^* + a_1 a_3 a_6 h^3 y^2 \ln^2\left(f_y^*\right) + \left(a_1 a_5 (a_4+a_5+a_6) + a_6 (a_2+a_3)(a_4+a_5+a_6)\right)h^3 y^2 \ln f \ln f_{yy}^*} \\
&\quad \times G^{\left((a_4+a_5+a_6)^2 h^2\right)/2 + \left(\left(a_1^2 a_5 + a_6 (a_2+a_3)^2\right)h^3 y \ln f_y^*\right)/2}\, H^{\left((a_4+a_5+a_6)^3 h^3\right)/6} \\
&= f\, F^{(a_4+a_5+a_6)h}\, F^{\left(a_1 a_5 + (a_2+a_3)a_6\right)h^2 y \ln f_y^*}\, F^{a_1 a_3 a_6 h^3 y^2 \ln^2\left(f_y^*\right)}\, F^{\left(a_1 a_5 (a_4+a_5+a_6) + a_6 (a_2+a_3)(a_4+a_5+a_6)\right)h^3 y^2 \ln f \ln f_{yy}^*}\, G^{\left((a_4+a_5+a_6)^2 h^2\right)/2} \\
&\quad \times G^{\left(\left(a_1^2 a_5 + a_6 (a_2+a_3)^2\right)h^3 y \ln f_y^*\right)/2}\, H^{\left((a_4+a_5+a_6)^3 h^3\right)/6} \\
&= f\, F^{(a_4+a_5+a_6)h}\, F^{\left(a_1 a_5 + (a_2+a_3)a_6\right)h^2 y \ln f_y^*}\, F^{a_1 a_3 a_6 h^3 y^2 \ln^2\left(f_y^*\right)}\, G^{\left(a_1 a_5 (a_4+a_5+a_6) + a_6 (a_2+a_3)(a_4+a_5+a_6)\right)h^3 y \ln f_y^*}\, G^{\left((a_4+a_5+a_6)^2 h^2\right)/2} \\
&\quad \times G^{\left(\left(a_1^2 a_5 + a_6 (a_2+a_3)^2\right)h^3 y \ln f_y^*\right)/2}\, H^{\left((a_4+a_5+a_6)^3 h^3\right)/6} \\
&= f\, F^{(a_4+a_5+a_6)h} \left(F^{\left(a_1 a_5 + (a_2+a_3)a_6\right) y \ln f_y^*} G^{(a_4+a_5+a_6)^2/2}\right)^{h^2} \left(F^{a_1 a_3 a_6 y^2 \ln^2\left(f_y^*\right)}\, G^{\left(a_1 a_5 (a_4+a_5+a_6) + a_6 (a_2+a_3)(a_4+a_5+a_6) + \frac{a_1^2 a_5 + a_6 (a_2+a_3)^2}{2}\right) y \ln f_y^*}\right)^{h^3} \\
&\quad \times \left(H^{\left((a_4+a_5+a_6)^3\right)/6}\right)^{h^3}
\end{aligned}
$$

(16)

elde edilir.

3.2 Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi

Bu bölümde multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi tanıtılacaktır.

3.1.2 İkinci Mertebe Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi

$$y_{n+1} = y_n \, k_1^{\frac{b_1 h \ln k_2}{\ln(k_1 k_2)}} \tag{17}$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebe multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi için $k_1 = f$ ve $k_2 = f\,F^{a_1 h}$ fonksiyonları yerine yazılarak:

$$y_{n+1} = y_n \left(f^{\frac{b_1 h \ln\left(f\,F^{a_1 h}\right)}{\ln\left(f\,f\,F^{a_1 h}\right)}} \right)$$

$$= y_n \, f^{\left(\frac{b_1 h \ln f + a_1 b_1 h^2 \ln F}{2\ln f + a_1 h \ln F}\right)}$$

elde edilmiştir. Buradan $\dfrac{b_1 h \ln f + a_1 b_1 h^2 \ln F}{2\ln f + a_1 h \ln F}$ ifadesinde polinom bölmesi işlemi ile

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n \left(f^{\frac{b_1 h}{2} + \frac{a_1 b_1 h^2 \ln F}{4\ln f}} \right) \\ &= y_n \, f^{\frac{b_1 h}{2}} F^{\frac{a_1 b_1 h^2}{4}} \end{aligned} \tag{18}$$

denklemi elde edilir. Diğer taraftan (4), (12) ve (13) denklemlerinden yararlanılarak $y(x_{n+1})$ fonksiyonunun y değişkenine göre h^2 mertebeli Taylor serisi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$y_{n+1} = y_n \, f^h F^{\frac{h^2}{2}}. \tag{19}$$

(18) ve (19) denklemlerinin eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$b_1 = 2, \quad a_1 b_1 = 2. \tag{20}$$

(20) sistemi çözülerek

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2 \tag{21}$$

değerleri elde edilir. Bulunan a_1 ve b_1 değerleri h^2 mertebesine göre sırasıyla (6) ve (14) denklemlerinde yerine yazılarak

$$k_1 = f \tag{22}$$

$$k_2 = f\left(y_n + hy \ln k_1\right) \tag{23}$$

şeklindeki algoritmalar elde edilir. Buradan

$$y_{n+1} = y_n \, f\left(y_n\right)^{\frac{2h \ln f\left(y_n + hy \ln k_1\right)}{\ln\left(f\left(y_n\right) f\left(y_n + hy \ln k_1\right)\right)}} \tag{24}$$

ile gösterilen ikinci mertebeden multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi yazılabilir.

3.2.2 Üçüncü Mertebe Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi

$$y_{n+1} = y_n \, k_1^{\frac{b_1 h \ln k_2}{\ln(k_1 k_2)}} \, k_2^{\frac{b_2 h \ln k_3}{\ln(k_2 k_3)}} \tag{25}$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebe multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi için $k_1 = f$, $k_2 = f\, F^{a_1 h} G^{\frac{{a_1}^2 h^2}{2}}$ ve $k_3 = f\, F^{(a_1+a_3)h} \, F^{a_1 a_3 y h^2 \ln f_y^*} G^{\frac{(a_2+a_3)^2 h^2}{2}}$ fonksiyonları yerine yazılarak:

$$y_{n+1} = y_n \, f^{\,h} \, F^{\frac{h^2(2a_1+a_2+a_3)}{4}} F^{\frac{1}{8}\left(6a_1a_3+4a_1a_2-\left(a_1+a_2+a_3\right)^2-a_1^2\right)h^3 y \ln f_y^*} G^{\frac{h^3}{8}\left(2a_1^2+\left(a_2+a_3\right)^2\right)} \tag{26}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4), (12) ve (13) denklemlerinden yararlanılarak $y\left(x_{n+1}\right)$ fonksiyonunun y değişkenine göre h^3 mertebeli Taylor serisi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$y_{n+1} = y_n \, f^{\,h} \, F^{\frac{h^2}{2}} F^{\frac{y h^3 \ln f_y^*}{6}} \, G^{\frac{h^3}{6}}. \tag{27}$$

(26) ve (27) denklemlerinin eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$\frac{1}{4}\left(2a_1 + a_2 + a_3\right) = \frac{1}{2}$$

$$6a_1a_3 + 4a_1a_2 - \left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2 - a_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$2a_1^2 + \left(a_2 + a_3\right)^2 = \frac{4}{3}. \tag{28}$$

(28) sistemi çözülerek

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = -\frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{4}{3}$$

değerleri elde edilir. Bulunan a_1 ve b_1 değerleri h^3 mertebesine göre sırasıyla (6), (14) ve (15) denklemlerinde yerine yazılarak

$$k_1 = f \tag{29}$$

$$k_2 = f\left(y_n + \frac{2}{3}hy\ln k_1\right) \tag{30}$$

$$k_3 = f\left(y_n - \frac{2}{3}hy\ln k_1 + \frac{4}{3}hy\ln k_2\right) \tag{31}$$

şeklindeki algoritmalar elde edilir. Buradan

$$y_{n+1} = y_n\, f(y_n)^{\frac{h\ln f\left(y_n+\frac{2}{3}hy\ln k_1\right)}{\ln\left(f(y_n)f\left(y_n+\frac{2}{3}hy\ln k_1\right)\right)}}\, f\left(y_n + \frac{2}{3}hy\ln k_1\right)^{\frac{h\ln f\left(y_n-\frac{2}{3}hy\ln k_1+\frac{4}{3}hy\ln k_2\right)}{\ln\left(f\left(y_n+\frac{2}{3}hy\ln k_1\right)f\left(y_n-\frac{2}{3}hy\ln k_1+\frac{4}{3}hy\ln k_2\right)\right)}} \tag{32}$$

ile gösterilen üçüncü mertebeden multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi yazılabilir.

3.2.3 Dördüncü Mertebe Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi

$$y_{n+1} = y_n\, k_1^{\frac{b_1 h\ln k_2}{\ln(k_1k_2)}}\, k_2^{\frac{b_2 h\ln k_3}{\ln(k_2k_3)}}\, k_3^{\frac{b_3 h\ln k_4}{\ln(k_3k_4)}} \tag{33}$$

şeklindeki ikinci mertebe multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi için

$$k_1 = f\,,$$

$$k_2 = f\, F^{a_1h} G^{\frac{a_1^2h^2}{2}} H^{\frac{a_1^3h^3}{6}}\,,$$

$$k_3 = f\, F^{(a_1+a_3)h}\, F^{a_1a_3yh^2\ln f_y^*}\, G^{\frac{(a_2+a_3)^2h^2}{2}}\, G^{\left(a_1a_3(a_2+a_3)+\frac{a_1^2a_3h^3}{2}\right)h^3y\ln f_y^*}\, H^{\frac{(a_2+a_3)^3h^3}{6}}\,,$$

$$\begin{aligned} k_4 = {} & f\, F^{(a_4+a_5+a_6)h}\, G^{\frac{(a_4+a_5+a_6)^2h^2}{2}} F^{(a_1a_5+(a_2+a_3)a_6)y\ln f_y^* h^2} F^{a_1a_3a_6y^2\ln^2 f_y^* h^3} \\ & \times G^{\left(a_1a_5(a_4+a_5+a_6)+a_6(a_2+a_3)(a_4+a_5+a_6)+\frac{a_1^2a_5+a_6(a_2+a_3)^2}{2}\right)y\ln f_y^* h^3} H^{\frac{(a_4+a_5+a_6)^3h^3}{6}} \end{aligned}$$

fonksiyonları yerine yazılarak

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = y_n\, & f^{\frac{h}{2}(b_1+b_2+b_3)}\, F^{h^2\left(\frac{b_1a_1}{4}+\frac{b_2}{4}(a_1+a_2+a_3)+\frac{b_3}{4}(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\right)} \\
& \times F^{\left(\frac{b_2}{2}\left(\frac{a_1a_3}{2}+a_1(a_2+a_3)-\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)^2\right)-\frac{a_1^2b_1}{8}+\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_1a_5}{2}+\frac{a_6a_2}{2}+\frac{a_1a_3}{2}-\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{4}+(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)\right)\right)h^3 y\ln f_y^*} \\
& \times G^{\left(\frac{a_1^2b_1}{8}+\frac{b_2}{2}\left(\frac{1}{4}(a_2+a_3)^2+\frac{a_1^2}{4}\right)+\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_4^2}{4}+\frac{a_5^2}{4}+\frac{a_6^2}{4}+\frac{a_4a_5}{2}+\frac{a_5a_6}{2}+\frac{a_6a_4}{2}+\frac{(a_2+a_3)^2}{4}\right)\right)h^3} \\
& \times F^{\left(\frac{a_1^2b_1}{16}+\frac{b_2}{2}\left(a_1^2a_3-\frac{(a_1a_3)(a_1+a_2+a_3)}{2}-\frac{(a_2+a_3)a_1(a_1+a_2+a_3)}{2}+\frac{(a_1+a_2+a_3)^3}{8}\right)+\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_6a_1a_3}{2}+(a_2+a_3)(a_1a_5+a_6a_2+a_6a_3)\right)\right)h^4y^2\ln^2 f} \\
& \times F^{\frac{b_3}{2}\left((a_4+a_5+a_6)(a_1a_3)-\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_1a_5+a_6a_2+a_6a_3+a_1a_3)}{2}+\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^3}{8}-\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)}{2}\right)h^4y^2\ln^2 f_y^*} \\
& \times G^{\left(\frac{b_2}{2}\left(\frac{a_1^3a_3}{4}+\frac{(a_1a_3)(a_2+a_3)}{2}+\frac{a_1(a_2+a_3)^2}{2}+\frac{a_1^{\,2}(a_2+a_3)}{2}-\frac{(a_1+a_2+a_3)\left(a_1^{\,2}+(a_2+a_3)^2\right)}{4}\right)-\frac{a_1^3b_1}{8}+\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_1^2a_5}{4}+\frac{a_2^2a_6}{4}+\frac{a_3^2a_6}{4}+\frac{(a_4+a_5+a_6)(a_1a_5+a_6a_3)}{2}\right)\right)h^4y\ln f_y^*} \\
& \times G^{\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_2a_6(a_3+a_4+a_5+a_6)}{2}-\frac{a_1^2a_3}{4}-\frac{a_1a_3(a_2+a_3)}{2}+(a_2+a_3)\left(\frac{a_4^2}{2}+\frac{a_5^2}{2}+\frac{a_6^2}{2}+a_4a_5+a_5a_6+a_6a_4+\frac{(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)^2}{2}+\frac{1}{2}\left(a_1^2a_3+a_1a_3(a_2+a_3)\right)\right)\right)h^4y\ln f_y^*} \\
& \times G^{\frac{b_3}{2}\left(-\frac{1}{2}(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\left(\frac{1}{2}\left(a_4^2+a_5^2+a_6^2\right)+(a_4a_5+a_5a_6+a_6a_4)+\frac{1}{2}(a_2+a_3)^2\right)\right)h^4y\ln f_y^*} \\
& \times H^{\left(\frac{b_1a_1^{\,3}}{24}+\frac{b_2}{2}\left(\frac{(a_2+a_3)^3}{12}+\frac{a_1^3}{12}\right)+\frac{b_3}{2}\left(\frac{(a_4+a_5+a_6)^3}{12}+\frac{(a_2+a_3)^3}{12}\right)\right)h^4}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

elde edilir. Diğer taraftan (4), (12) ve (13) denklemlerinden yararlanılarak $y(x_{n+1})$ fonksiyonunun y değişkenine göre h^4 mertebeli Taylor serisi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$
y_{n+1} = y_n\; f^{h}\, F^{\frac{h^2}{2}}\, F^{\frac{h^3 y\ln f_y^*}{6}}\, G^{\frac{h^3}{6}}\, F^{\frac{h^4y^2\ln^2 f_y^*}{24}}\, G^{\frac{h^4\, 4y\ln f_y^*}{24}}\, H^{\frac{h^4}{24}} \tag{35}
$$

(34) ve (35) denklemlerinin eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$b_1+b_2+b_3=2,$$

$$\frac{b_1a_1}{4}+\frac{b_2}{4}(a_1+a_2+a_3)+\frac{b_3}{4}(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=\frac{1}{2},$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{b_2}{2}\left(\frac{a_1a_3}{2}+a_1(a_2+a_3)-\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)^2\right)-\frac{a_1^2b_1}{8} \\
&+\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_1a_5}{2}+\frac{a_6a_2}{2}+\frac{a_1a_3}{2}-\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{4}+(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)\right)=\frac{1}{6},
\end{aligned}
$$

$$\frac{a_1^2 b_1}{8}+\frac{b_2}{2}\left(\frac{1}{4}(a_2+a_3)^2+\frac{a_1^2}{4}\right)+\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_4^2}{4}+\frac{a_5^2}{4}+\frac{a_6^2}{4}+\frac{a_4a_5}{2}+\frac{a_5a_6}{2}+\frac{a_6a_4}{2}+\frac{(a_2+a_3)^2}{4}\right)=\frac{1}{6},$$

$$\frac{a_1^3 b_1}{16}+\frac{b_2}{2}\left(a_1^2a_3-\frac{(a_1a_3)(a_1+a_2+a_3)}{2}-\frac{(a_2+a_3)a_1(a_1+a_2+a_3)}{2}+\frac{(a_1+a_2+a_3)^3}{8}\right)$$

$$+\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_6a_1a_3}{2}+(a_2+a_3)(a_1a_5+a_6a_2+a_6a_3)+(a_4+a_5+a_6)(a_1a_3)\right)$$

$$+\frac{b_3}{2}\left(-\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_1a_5+a_6a_2+a_6a_3+a_1a_3)}{2}+\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^3}{8}\right)$$

$$+\frac{b_3}{2}\left(-\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)}{2}\right)=\frac{1}{24},$$

$$\frac{b_2}{2}\left(\frac{a_1^2a_3}{4}+\frac{(a_1a_3)(a_2+a_3)}{2}+\frac{a_1(a_2+a_3)^2}{2}+\frac{a_1^2(a_2+a_3)}{2}-\frac{(a_1+a_2+a_3)\left(a_1^2+(a_2+a_3)^2\right)}{4}\right)-\frac{a_1^3b_1}{8}$$

$$+\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_1^2a_5}{4}+\frac{a_2^2a_6}{4}+\frac{a_3^2a_6}{4}+\frac{(a_4+a_5+a_6)(a_1a_5+a_6a_3)}{2}+\frac{a_2a_6(a_3+a_4+a_5+a_6)}{2}\right)$$

$$+\frac{b_3}{2}\left(-\frac{a_1^2a_3}{4}-\frac{a_1a_3(a_2+a_3)}{2}+(a_2+a_3)\left(\frac{a_4^2}{2}+\frac{a_5^2}{2}+\frac{a_6^2}{2}+a_4a_5+a_5a_6+a_6a_4+\frac{(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)^2}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{b_3}{2}\left((a_2+a_3)\left(\frac{1}{2}\left(a_1^2a_3+a_1a_3(a_2+a_3)\right)\right)\right)$$

$$+\frac{b_3}{2}\left(-\frac{1}{2}(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\left(\frac{1}{2}\left(a_4^2+a_5^2+a_6^2\right)+(a_4a_5+a_5a_6+a_6a_4)+\frac{1}{2}(a_2+a_3)^2\right)\right)=\frac{1}{6},$$

$$\frac{b_1a_1^3}{24}+\frac{b_2}{2}\left(\frac{(a_2+a_3)^3}{12}+\frac{a_1^3}{12}\right)+\frac{b_3}{2}\left(\frac{(a_4+a_5+a_6)^3}{12}+\frac{(a_2+a_3)^3}{12}\right)=\frac{1}{24}. \qquad (36)$$

Buradan (36) sistemi çözülerek

$$b_1=b_2=b_3=\frac{2}{3},\quad a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=-\frac{1}{8},\quad a_3=\frac{5}{8},\quad a_4=-\frac{1}{4},\quad a_5=\frac{7}{20},\quad a_6=\frac{9}{10}$$

değerleri elde edilir. Bulunan a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, $a_{6,}$ b_1, b_2 ve b_3 değerleri h^4 mertebesine göre sırasıyla (6), (14), (15) ve (16) denklemlerinde yerine yazılarak

$$k_1=f \qquad (37)$$

$$k_2=f\left(y_n+\frac{1}{2}hy\ln k_1\right) \qquad (38)$$

$$k_3=f\left(y_n-\frac{1}{8}hy\ln k_1+\frac{5}{8}hy\ln k_2\right) \qquad (39)$$

$$k_4 = f\left(y_n - \frac{1}{4} hy \ln k_1 + \frac{7}{20} hy \ln k_2 + \frac{9}{10} hy \ln k_3 \right) \tag{40}$$

şeklindeki algoritmalar elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n \ f\left(y_n\right)^{\frac{b_1 h \ln f\left(y_n + \frac{1}{2} y_n h \ln k_1\right)}{\ln\left(f\, f\left(y_n + \frac{1}{2} y_n h \ln k_1\right)\right)}} \ f\left(y_n + \frac{1}{2} y_n h \ln k_1 \right)^{\frac{b_2 h \ln f\left(y_n - \frac{1}{8} y_n h \ln k_1 + \frac{5}{8} y_n h \ln k_2\right)}{\ln\left(f\left(y_n + \frac{1}{2} y_n h \ln k_1\right) f\left(y_n - \frac{1}{8} y_n h \ln k_1 + \frac{5}{8} y_n h \ln k_2\right)\right)}} \\ \times f\left(y_n - \frac{1}{8} y_n h \ln k_1 + \frac{5}{8} y_n h \ln k_2 \right)^{\frac{b_3 h \ln f\left(y_n - \frac{1}{4} y_n h \ln k_1 + \frac{7}{20} y_n h \ln k_2 + \frac{9}{10} y_n h \ln k_3\right)}{\ln\left(f\left(y_n - \frac{1}{8} y_n h \ln k_1 + \frac{5}{8} y_n h \ln k_2\right) f\left(y_n - \frac{1}{4} y_n h \ln k_1 + \frac{7}{20} y_n h \ln k_2 + \frac{9}{10} y_n h \ln k_3\right)\right)}} \end{aligned} \tag{41}$$

ile gösterilen dördüncü mertebeden multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi yazılabilir.

3.3 Multiplikatif Kontra Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi

Bu bölümde multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi tanıtılacaktır.

3.3.1 İkinci Mertebe Multiplikatif Kontra Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi

$$y_{n+1} = y_n \ k_1^{\frac{b_1 h \ln k_1}{\ln(k_1 k_2)}} \ k_2^{\frac{b_1 h \ln k_2}{\ln(k_1 k_2)}} \tag{42}$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebe multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi için $k_1 = f$ ve $k_2 = f\, F^{a_1 h}$ fonksiyonları yerine yazılarak:

$$y_{n+1} = y_n \ f^{hb_1} \ F^{\frac{a_1 b_1 h^2}{2}} \tag{43}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4), (12) ve (13) denklemlerinden yararlanılarak $y\left(x_{n+1}\right)$ fonksiyonunun y değişkenine göre h^2 mertebeli Taylor serisi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$y_{n+1} = y_n \ f^h \ F^{\frac{h^2}{2}}. \tag{44}$$

(43) ve (44) denklemlerinin eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$b_1 = 1, \quad \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{45}$$

(45) sistemi çözülerek

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 1 \tag{46}$$

değerleri elde edilir. Bulunan a_1 ve b_1 değerleri h^2 mertebesine göre sırasıyla (6) ve (14) denklemlerinde yerine yazılarak

$$k_1 = f \tag{47}$$

$$k_2 = f\left(y_n + hy\ln k_1\right) \tag{48}$$

şeklindeki algoritmalar elde edilir. Buradan

$$y_{n+1} = y_n \, f\left(y_n\right)^{\frac{h\ln f}{\ln\left(f\, f\left(y_n+hy\ln k_1\right)\right)}} \, f\left(y_n + hy\ln k_1\right)^{\frac{h\ln f\left(y_n+hy\ln k_1\right)}{\ln\left(f\, f\left(y_n+hy\ln k_1\right)\right)}} \tag{49}$$

ile gösterilen ikinci mertebeden multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi yazılabilir.

3.3.2 Üçüncü Mertebe Multiplikatif Kontra Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi

$$y_{n+1} = y_n \, k_1^{\frac{b_1 h\ln k_1}{\ln(k_1k_2)}} \, k_2^{\frac{b_1 h\ln k_2}{\ln(k_1k_2)}+\frac{b_2 h\ln k_2}{\ln(k_2k_3)}} \, k_3^{\frac{b_2 h\ln k_3}{\ln(k_2k_3)}} \tag{50}$$

şeklinde tanımlanan üçüncü mertebe multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi için $k_1 = f$, $k_2 = f\,F^{a_1h}G^{\frac{a_1^2h^2}{2}}$ ve $k_3 = f\,F^{(a_1+a_3)h}\,F^{a_1a_3yh^2\ln f_y^*}G^{\frac{(a_2+a_3)^2h^2}{2}}$ fonksiyonları yerine yazılarak:

$$y_{n+1} = y_n \, f^{(b_1+b_2)h} \, F^{\frac{h^2\left(b_1a_1+b_2\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)}{2}} \, F^{\left(\frac{a_1^2b_1}{4}+\frac{b_2}{2}\left(\left(a_1a_3+\left(a_2+a_3\right)^2\right)\right)+a_1^2-\frac{\left(a_1+a_2+a_3\right)^2}{2}\right)h^3y\ln f_y^*} \, G^{\left(\frac{a_1^2b_1}{4}+\frac{b_2}{4}\left(a_1^2+\left(a_2+a_3\right)^2\right)\right)h^3} \tag{51}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4), (12) ve (13) denklemlerinden yararlanılarak $y\left(x_{n+1}\right)$ fonksiyonunun y değişkenine göre h^3 mertebeli Taylor serisi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$y_{n+1} = y_n \, f^h \, F^{\frac{h^2}{2}} \, F^{\frac{yh^3\ln f_y^*}{6}} \, G^{\frac{h^3}{6}}. \tag{52}$$

(51) ve (52) denklemlerinin eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$a_1 + b_2\left(a_2 + a_3\right) = 1$$

$$\frac{a_1^2b_1}{4} + \frac{b_2}{2}\left(a_1a_3 + \left(a_2+a_3\right)^2 + a_1^2 - \frac{\left(a_1+a_2+a_3\right)^2}{2}\right) = \frac{1}{6}. \tag{53}$$

Buradan (53) sistemi çözülerek

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{2}$$

değerleri elde edilir. Bulunan a_1, a_2, a_3, b_1 ve b_2 değerleri h^3 mertebesine göre sırasıyla (6), (14) ve (15) denklemlerinde yerine yazılarak

$$k_1 = f \tag{54}$$

$$k_2 = f\left(y_n + \frac{2}{3} hy \ln k_1 \right) \tag{55}$$

$$k_3 = f\left(y_n + \frac{2}{3} hy \ln k_2 \right) \tag{56}$$

şeklindeki algoritmalar elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} y_{n+1} = {} & y_n f\left(y_n\right)^{\frac{h \ln f(y_n)}{2 \ln\left(f\, f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_1 \right)\right)}} f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_1 \right)^{\frac{h \ln f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_1 \right)}{2 \ln\left(f\, f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_1 \right)\right)}} \\ & \times f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_1 \right)^{\frac{h \ln f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_1 \right)}{2 \ln\left(f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_1 \right) f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_2 \right)\right)}} \\ & \times f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_2 \right)^{\frac{h \ln f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_2 \right)}{2 \ln\left(f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_1 \right) f\left(y_n + \frac{2}{3} y_n h \ln k_2 \right)\right)}} \end{aligned} \tag{57}$$

ile gösterilen üçüncü mertebeden multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi yazılabilir.

3.3.3 Dördüncü Mertebe Multiplikatif Kontra Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi

$$y_{n+1} = y_n\, k_1^{\frac{b_1 h \ln k_1}{\ln(k_1 k_2)}}\, k_2^{\frac{b_1 h \ln k_2}{\ln(k_1 k_2)} + \frac{b_2 h \ln k_2}{\ln(k_2 k_3)}}\, k_3^{\frac{b_2 h \ln k_3}{\ln(k_2 k_3)} + \frac{b_3 h \ln k_3}{\ln(k_3 k_4)}}\, k_4^{\frac{b_3 h \ln k_4}{\ln(k_3 k_4)}} \tag{58}$$

şeklindeki dördüncü mertebe multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi $k_1 = f$ iken

$$k_2 = f\, F^{a_1 h} G^{\frac{a_1^2 h^2}{2}} H^{\frac{a_1^3 h^3}{6}}$$

$$k_3 = f\, F^{(a_1 + a_3)h}\, F^{a_1 a_3 y h^2 \ln f_y^*} G^{\left(a_1 a_3 (a_2 + a_3) + \frac{a_1^2 a_3}{2} \right) h^3 \ln f_y^*} G^{\frac{(a_2 + a_3)^2 h^2}{2}} H^{\frac{(a_2 + a_3)^3}{6} h^3}$$

$$k_4 = f\, F^{(a_4+a_5+a_6)h}\, F^{(a_1a_5+(a_2+a_3)a_6)h^2 y\ln f_y^*}\, G^{\frac{(a_4+a_5+a_6)^2 h^2}{2}}$$

$$\times F^{a_1a_3a_6h^3y^2\ln^2 f_y^*}\, G^{\left(a_1a_5(a_4+a_5+a_6)+a_6(a_2+a_3)(a_4+a_5+a_6)+\frac{a_1^2a_5+a_6(a_2+a_3)^2}{2}\right)h^3 y\ln f_y^*}\, H^{\frac{(a_4+a_5+a_6)^3 h^3}{6}}$$

fonksiyonları yerine yazılarak:

$$y_{n+1} = y_n f^{\frac{h}{2}(b_1+b_2+b_3)}\, F^{h^2\left(\frac{b_1a_1}{2}+\frac{b_2}{2}(a_1+a_2+a_3)+\frac{b_3}{2}(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\right)}$$

$$\times F^{\left(b_2\left(\frac{a_1a_3}{2}-a_1(a_2+a_3)+\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)^2\right)+\frac{a_1^2b_1}{4}+b_3\left(\frac{a_1a_5}{2}+\frac{a_6a_2}{2}+\frac{a_1a_3}{2}+\frac{a_6a_3}{2}+\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{4}-(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)\right)\right)h^3 y\ln f_y^*}$$

$$\times G^{\left(\frac{a_1^2b_1}{4}+b_2\left(\frac{1}{4}(a_2+a_3)^2+\frac{a_1^2}{4}\right)+\frac{b_3}{2}\left(\frac{a_4^2}{4}+\frac{a_5^2}{4}+\frac{a_6^2}{4}+\frac{a_4a_5}{2}+\frac{a_5a_6}{2}+\frac{a_6a_4}{2}+\frac{(a_2+a_3)^2}{4}\right)\right)h^3}$$

$$\times F^{\left(-\frac{a_1^3b_1}{8}+b_2\left(-a_1^2a_3+\frac{(a_1a_3)(a_1+a_2+a_3)}{2}+\frac{(a_2+a_3)a_1(a_1+a_2+a_3)}{2}-\frac{(a_1+a_2+a_3)^3}{8}\right)+b_3\left(\frac{a_6a_1a_3}{2}-(a_2+a_3)(a_1a_5+a_6a_2+a_6a_3)\right)\right)h^4y^2\ln^2 f}$$

$$\times F^{b_3\left(-(a_4+a_5+a_6)(a_1+a_3)+\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_1a_5+a_6a_2+a_6a_3+a_1a_3)}{2}-\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^3}{8}+\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)}{2}\right)h^4y^2\ln^2 f_y^*}$$

$$\times G^{\left(b_2\left(\frac{a_1^2a_3}{4}+\frac{(a_1a_3)(a_2+a_3)}{2}-\frac{a_1(a_2+a_3)^2}{2}-\frac{a_1^{\,2}(a_2+a_3)}{2}+\frac{(a_1+a_2+a_3)\left(a_1^{\,2}+(a_2+a_3)^2\right)}{4}\right)+\frac{a_1^3b_1}{4}+b_3\left(\frac{a_1^2a_5}{4}+\frac{a_2^2a_6}{4}+\frac{a_3^2a_6}{4}+\frac{(a_4+a_5+a_6)(a_1a_5+a_6a_3)}{2}\right)\right)h^4y\ln f_y^*}$$

$$\times G^{b_3\left(\frac{a_2a_6(a_3+a_4+a_5+a_6)}{2}+\frac{3a_1^2a_3}{4}+\frac{3a_1a_3(a_2+a_3)}{2}-(a_2+a_3)\left(\frac{a_4^2}{2}+\frac{a_5^2}{2}+\frac{a_6^2}{2}+a_4a_5+a_5a_6+a_6a_4-\frac{(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)^2}{2}-\frac{1}{2}a_1^2a_3-(a_1a_3(a_2+a_3))\right)\right)h^4y\ln f_y^*}$$

$$\times G^{b_3\left(\frac{1}{2}(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\left(\frac{1}{2}(a_4^2+a_5^2+a_6^2)+(a_4a_5+a_5a_6+a_6a_4)+\frac{1}{2}(a_2+a_3)^2\right)\right)h^4y\ln f_y^*}$$

$$\times H^{\left(\frac{b_1a_1^{\,3}}{12}+b_2\left(\frac{(a_2+a_3)^3}{12}+\frac{a_1^3}{12}\right)+b_3\left(\frac{(a_4+a_5+a_6)^3}{12}+\frac{(a_2+a_3)^3}{12}\right)\right)h^4} \tag{59}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4), (12) ve (13) denklemlerinden yararlanılarak $y(x_{n+1})$ fonksiyonunun y değişkenine göre h^4 mertebeli Taylor serisi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$y_{n+1} = y_n\; f^{h}\, F^{\frac{h^2}{2}}\, F^{\frac{h^3y\ln f_y^*}{6}}\, G^{\frac{h^3}{6}}\, F^{\frac{h^4y^2\ln^2 f_y^*}{24}}\, G^{\frac{h^4 4y\ln f_y^*}{24}}\, H^{\frac{h^4}{24}} \tag{60}$$

(59) ve (60) denklemlerinin eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$b_1+b_2+b_3=1,$$

$$\frac{b_1a_1}{2}+\frac{b_2}{2}(a_1+a_2+a_3)+\frac{b_3}{2}(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=\frac{1}{2},$$

$$b_2\left(\frac{a_1a_3}{2}-a_1(a_2+a_3)+\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)^2\right)+\frac{a_1^2b_1}{4}+b_3\left(\frac{a_1a_5}{2}+\frac{a_6a_2}{2}+\frac{a_1a_3}{2}+\frac{a_6a_3}{2}\right)$$

$$+b_3\left(\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{4}-(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)\right)=\frac{1}{6},$$

$$\frac{a_1^2b_1}{4}+b_2\left(\frac{1}{4}(a_2+a_3)^2+\frac{a_1^2}{4}\right)+b_3\left(\frac{a_4^2}{4}+\frac{a_5^2}{4}+\frac{a_6^2}{4}+\frac{a_4a_5}{2}+\frac{a_5a_6}{2}+\frac{a_6a_4}{2}+\frac{(a_2+a_3)^2}{4}\right)=\frac{1}{6},$$

$$-\frac{a_1^3b_1}{8}+b_2\left(-a_1^2a_3+\frac{(a_1a_3)(a_1+a_2+a_3)}{2}+\frac{(a_2+a_3)a_1(a_1+a_2+a_3)}{2}-\frac{(a_1+a_2+a_3)^3}{8}\right)$$

$$+b_3\left(\frac{a_6a_1a_3}{2}-(a_2+a_3)(a_1a_5+a_6a_2+a_6a_3)-(a_4+a_5+a_6)(a_1a_3)\right)$$

$$+b_3\left(\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_1a_5+a_6a_2+a_6a_3+a_1a_3)}{2}-\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^3}{8}\right)$$

$$+b_3\left(\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)}{2}\right)=\frac{1}{24},$$

$$b_2\left(\frac{a_1^2a_3}{4}+\frac{(a_1a_3)(a_2+a_3)}{2}-\frac{a_1(a_2+a_3)^2}{2}-\frac{a_1^2(a_2+a_3)}{2}+\frac{(a_1+a_2+a_3)\left(a_1^2+(a_2+a_3)^2\right)}{4}\right)+\frac{a_1^3b_1}{4}$$

$$+b_3\left(\frac{3a_1^2a_3}{4}+\frac{a_1^2a_5}{4}+\frac{a_2^2a_6}{4}+\frac{a_3^2a_6}{4}+\frac{(a_4+a_5+a_6)(a_1a_5+a_6a_3)}{2}+\frac{a_2a_6(a_3+a_4+a_5+a_6)}{2}\right)$$

$$+b_3(a_2+a_3)\left(\frac{3a_1a_3}{2}-\left(\frac{a_4^2}{2}+\frac{a_5^2}{2}+\frac{a_6^2}{2}+a_4a_5+a_5a_6+a_6a_4-\frac{(a_4+a_5+a_6)(a_2+a_3)^2}{2}\right)\right)$$

$$+b_3\left((a_2+a_3)\left(-\frac{1}{2}a_1^2a_3-a_1a_3(a_2+a_3)\right)\right)$$

$$+b_3\left(\frac{1}{2}(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\left(\frac{1}{2}(a_4^2+a_5^2+a_6^2)+(a_4a_5+a_5a_6+a_6a_4)+\frac{1}{2}(a_2+a_3)^2\right)\right)=\frac{1}{6},$$

$$\frac{b_1a_1^3}{12}+b_2\left(\frac{(a_2+a_3)^3}{12}+\frac{a_1^3}{12}\right)+b_3\left(\frac{(a_4+a_5+a_6)^3}{12}+\frac{(a_2+a_3)^3}{12}\right)=\frac{1}{24} \qquad (61)$$

(61) sistemi çözülerek

$$b_1=b_2=b_3=\frac{1}{3},\quad a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{8},\quad a_3=\frac{3}{8},\quad a_4=\frac{1}{4},\quad a_5=-\frac{3}{4},\quad a_6=\frac{3}{2}$$

değerleri elde edilir. Bulunan a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, $a_{6,}$ b_1, b_2 ve b_3 değerleri h^4 mertebesine göre sırasıyla (6), (14), (15) ve (16) denklemlerinde yerine yazılarak

$$k_1=f \qquad (62)$$

$$k_2=f\left(y_n+\frac{1}{2}hy\ln k_1\right) \qquad (63)$$

$$k_3=f\left(y_n+\frac{1}{8}hy\ln k_1+\frac{3}{8}hy\ln k_2\right) \qquad (64)$$

$$k_4=f\left(y_n+\frac{1}{4}hy\ln k_1-\frac{3}{4}hy\ln k_2+\frac{3}{2}hy\ln k_3\right) \qquad (65)$$

şeklindeki algoritmalar elde edilir. Buradan da

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = {} & y_n f\left(y_n\right)^{\frac{h\ln f(y_n)}{3\ln\left(f\, f\left(y_n+\frac{1}{2}y_n h\ln k_1\right)\right)}} f\left(y_n+\frac{1}{2}y_n h\ln k_1\right)^{\frac{h\ln f\left(y_n+\frac{1}{2}y_n h\ln k_1\right)}{3\ln\left(f\, f\left(y_n+\frac{1}{2}y_n h\ln k_1\right)\right)}} \\
& \times f\left(y_n+\frac{1}{2}y_n h\ln k_1\right)^{\frac{h\ln f\left(y_n+\frac{1}{2}y_n h\ln k_1\right)}{3\ln\left(f\left(y_n+\frac{1}{2}y_n h\ln k_1\right) f\left(y_n+\frac{1}{8}y_n h\ln k_1+\frac{3}{8}y_n h\ln k_2\right)\right)}} \\
& \times f\left(y_n+\frac{1}{8}y_n h\ln k_1+\frac{3}{8}y_n h\ln k_2\right)^{\frac{h\ln f\left(y_n+\frac{1}{8}y_n h\ln k_1+\frac{3}{8}y_n h\ln k_2\right)}{3\ln\left(f\left(y_n+\frac{1}{2}y_n h\ln k_1\right) f\left(y_n+\frac{1}{8}y_n h\ln k_1+\frac{3}{8}y_n h\ln k_2\right)\right)}} \\
& \times f\left(y_n+\frac{1}{8}y_n h\ln k_1+\frac{3}{8}y_n h\ln k_2\right)^{\frac{h\ln f\left(y_n+\frac{1}{8}y_n h\ln k_1+\frac{3}{8}y_n h\ln k_2\right)}{3\ln\left(f\left(y_n+\frac{1}{8}y_n h\ln k_1+\frac{3}{8}y_n h\ln k_2\right) f\left(y_n+\frac{1}{4}y_n h\ln k_1-\frac{3}{4}y_n h\ln k_2+\frac{3}{2}y_n h\ln k_3\right)\right)}} \\
& \times f\left(y_n+\frac{1}{4}y_n h\ln k_1-\frac{3}{4}y_n h\ln k_2+\frac{3}{2}y_n h\ln k_3\right)^{\frac{h\ln f\left(y_n+\frac{1}{4}y_n h\ln k_1-\frac{3}{4}y_n h\ln k_2+\frac{3}{2}y_n h\ln k_3\right)}{3\ln\left(f\left(y_n+\frac{1}{8}y_n h\ln k_1+\frac{3}{8}y_n h\ln k_2\right) f\left(y_n+\frac{1}{4}y_n h\ln k_1-\frac{3}{4}y_n h\ln k_2+\frac{3}{2}y_n h\ln k_3\right)\right)}}
\end{aligned}
\tag{66}
$$

ile gösterilen dördüncü mertebeden multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi yazılabilir.

3.4 MGMAM yöntemlerinde kararlılık analizi

$y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$, $y(x_0) = y_0$ şeklindeki klasikte bilinen başlangıç değer problemlerinin yaklaşık sayısal çözüm yöntemleri için kararlılık analizinde

$$y' = \lambda y, \quad \left(\forall \lambda \in R\right),$$

biçiminde tanımlanan standart test problemi kullanılmaktadır. Bu problem klasik ve multiplikatif türevler arasındaki bağıntı yardımıyla

$$y^* = e^{\lambda}$$

olarak yazılabilen multiplikatif standart test problemine dönüştürülür. Diğer yandan, bu problemin bir analitik çözümü

$$y(x) = e^{\lambda(x-x_0)}$$

olarak hesaplanmıştır. Bulunan analitik çözümde, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ için $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\lambda(x-x_0)}\right) \to 0$ olur. Eğer nümerik teknik de aynı davranışı gösterirse geliştirilen yöntem mutlak kararlı olur (Dahlquist, 1963). Dördüncü mertebe Multiplikatif harmonik veya kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi multiplikatif standart test problemine uygulandığında

$$y_{n+1} = y_n \left(e^{\lambda}e^{\lambda}e^{\lambda}e^{\lambda}e^{\lambda}e^{\lambda}\right)^{\frac{h}{6}}$$
$$= y_n e^{\lambda h}$$

şeklindeki iteratif bağıntı elde edilir. Buradan da $z = \lambda h$ için

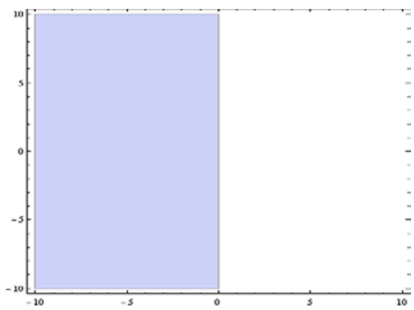
$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = e^z = R(z)$$

bulunur. Bu bağıntı da, $R(z)$ bir kararlılık fonksiyonunu ifade etmektedir. Ayrıca, kararlılık bölgesi

$$S^* = \left\{z \in C : \left|e^z\right| < 1\right\}$$

olarak tanımlanabilir. Burada gerekli temel işlemler yapılarak $0 < e^{-|\lambda|h} < 1$ eşitsizliğinden adım aralığı için $0 < h < \infty$ şeklindeki kararlılık kriteri belirlenir. Geliştirilen tekniğin koşulsuz kararlı olduğunu bu kriter ifade eder. Ayrıca diğer multiplikatif Runge-Kutta yöntemleri de aynı kararlılık bölgesi, kararlılık fonksiyonuna ve kararlılık kriterine sahiptir. Diğer taraftan $\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ bağıntısı ile $\mathrm{Re}(z) < 0$ eşitsizliği elde edilir. Buradan, yöntemlere ait mutlak kararlılık bölgesinin düzlemin sol tarafını ifade ettiği ve verilen yöntemlerin mutlak kararlı olduğu tespit edilmiştir. Multiplikatif anlamda geliştirilen yöntemlerin kararlılık bölgelerinin klasik Runge-Kutta yöntemlerine göre daha geniş olması multiplikatif tekniklerin çeşitli başlangıç değer problemlerine uygulamaları açısından oldukça önemlidir.

Ayrıca, Ehle' nin (1969) makalesinde ele aldığı gibi herhangi bir yöntemin mutlak kararlı olması ve ardından da $\lim\limits_{|z|\to\infty}\left(R(z)\right) \to 0$ özelliğinin sağlanması durumunda geliştirilen multiplikatif Runge-Kutta yöntemlerinin de lineer kararlı olacağı görülebilir. Bu yöntemler mutlak kararlı olduğundan ve $\lim\limits_{z\to-\infty}\left(e^z\right) \to 0$ özelliğinden lineer kararlıdır.



Şekil 3.1: MGMAM yöntemleri için kararlılık bölgesi

3.5 Sayısal Uygulamalar

Örnek 3.5.1 $y(0.1) = 2.402585093$ başlangıç koşulu ile

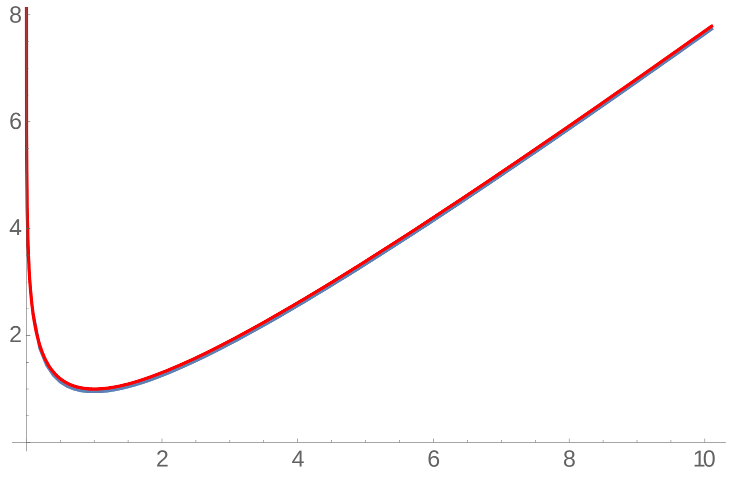
$$y^*(x) = \exp\left(\frac{x-1}{xy}\right)$$

şeklindeki multiplikatif başlangıç değer probleminin bir analitik çözümü $y(x) = x - \ln(x)$ olur. Sırasıyla, Volterra tipi multiplikatif Runge-Kutta yöntemleri (Aniszevska, 2007), multiplikatif Adams Bashforth-Moulton yöntemleri (Misirli ve Gurefe, 2011) ve yeni multiplikatif Runge-Kutta yöntemleri (Gurefe, 2013) ile çözülen problem bu çalışmada geliştirilen multiplikatif çok adımlı yöntemler ile elde edilen sonuçlar Çizelge 3.2 de verilmiştir. Burada, MR-K, Volterra tipi multiplikatif Runge-Kutta, MAB ve MAM, multiplikatif Adams Bashforth ve Adams Moulton, mcR-K ise multiplikatif kalkülüs (Calculus) ile Runge-Kutta, MGMAM ve 2MGMAM multiplikatif harmonik ve kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemlerinin kısaltmalarıdır.

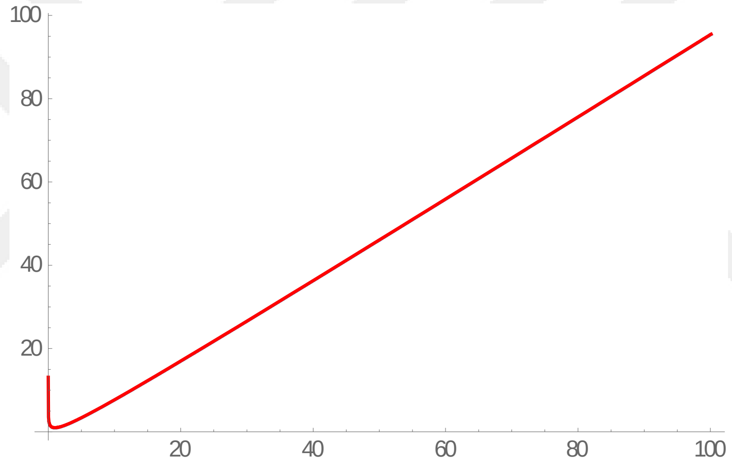
Çizelge 3.2: $h = 0.1$ için Örnek 3.5.1' in nümerik sonuçları

x	Tam çözüm	Yöntem	Yaklaşık çözüm	Bağıl hata (%)
425.9956668083	419.9412376339	MR-K2	415.5685869679	1.04125
		MR-K3	420.5358872408	0.141603
		MR-K4	420.2994798832	0.0853077
426.0	419.9455606537	MAB-2	419.8627174937	0.0197271
		MAB-3	419.8008829906	0.0344515
		MAB-4	419.8239686466	0.0289542
		MAM-2	420.1948651	0.0593658
		MAM-3	419.7499747	0.0465741
		MAM-4	419.8375502	0.0257201
426.0	419.9455606537	mcR-K1	419.8803498890	0.0155283
		mcR-K2a	419.9308748745	0.0034970
		mcR-K2b	419.8585156168	0.0207276
		mcR-K3a	419.9132030346	0.0077051
		mcR-K3b	419.9296263682	0.0037943
		mcR-K4a	419.9327174238	0.0030583
		mcR-K4b	419.9335128808	0.0028688
426.0	419.9455606542	MGMAM-2	419.8921783635	0.0127117
		MGMAM-3	419.9416842472	0.000923074
		MGMAM-4	419.9468319765	0.000302735
		2MGMAM-2	419.8257122141	0.028539
		2MGMAM-3	419.9068057168	0.00922856
		2MGMAM-4	419.9377255520	0.00186574

2153.1824394181	2145.5077371871	MR-K2	2111.8918755939	1.5668
		MR-K3	2149.3920729325	0.181045
		MR-K4	2147.2543523302	0.081408
2153.2	2145.5252896133	MAB-2	2145.4424305860	0.003861
		MAB-3	2145.3806119562	0.006743
		MAB-4	2145.4036976062	0.005667
		MAM-2	2146.19323	0.031131
		MAM-3	2145.280161	0.011425
		MAM-4	2145.428735	0.004500
2153.2	2145.5252896133	mcR-K1	2145.5414518474	0.0007532
		mcR-K2a	2145.5106022513	0.0006845
		mcR-K2b	2145.4382477560	0.0040569
		mcR-K3a	2145.5336160563	0.0003880
		mcR-K3b	2145.5093585107	0.0007425
		mcR-K4a	2145.5124495664	0.0005984
		mcR-K4b	2145.5132450234	0.0005613
2153.2	2145.5252896138	MGMAM-2	2145.4719057402	0.0024881493
		MGMAM-3	2145.5214163912	0.0001805256
		MGMAM-4	2145.5265641200	0.0000594029
		2MGMAM-2	2145.4054491166	0.0055856017
		2MGMAM-3	2145.4865378584	0.0018061663
		2MGMAM-4	2145.5038952218	0.0009971633
10883.1966582076	10873.9016829198	MR-K2	10647.0966921181	2.08577
		MR-K3	10897.8773521744	0.220488
		MR-K4	10882.3906119410	0.078067
10883.2	10873.9050244051	MAB-2	10873.8221622635	0.0007620
		MAB-3	10873.7603467482	0.0013305
		MAB-4	10873.7834323984	0.0011182
		MAM-2	10875.51242	0.0147821
		MAM-3	10873.56281	0.0031471
		MAM-4	10873.82945	0.0006950
10883.2	10873.9050244051	mcR-K1	10874.0022991151	0.0008945
		mcR-K2a	10873.8903367318	0.0001350
		mcR-K2b	10873.8179831710	0.0008004
		mcR-K3a	10873.9539069887	0.0004495
		mcR-K3b	10873.8890939258	0.0001465
		mcR-K4a	10873.8921849814	0.0001180
10883.2	10873.9050244056	MGMAM-2	10873.8516402207	0.0004909384
		MGMAM-3	10873.9011518063	0.0000356136
		MGMAM-4	10873.9062995351	0.0000117265
		2MGMAM-2	10873.7851854660	0.0011020782
		2MGMAM-3	10873.8662732731	0.0003563681
		2MGMAM-4	10873.8701115347	0.0003210702



Şekil 3.3: $h=0.1$ ve $x=10.1$ için Örnek 3.5.1' deki çözümlerin davranışları



Şekil 3.4: $h=0.1$ ve $x=100.1$ için Örnek 3.5.1' deki çözümlerin davranışları

Şekil 3.3 ve 3.4' te $h=0.1$ için Örnek 3.5.1' e MGMAM-2 yöntemi uygulanarak hesaplanan nümerik çözümler ile problemin analitik çözümleri karşılaştırılmıştır.

Örnek 3.5.2 (Chandru et al., 2017) $y(0)=1$ başlangıç koşullu

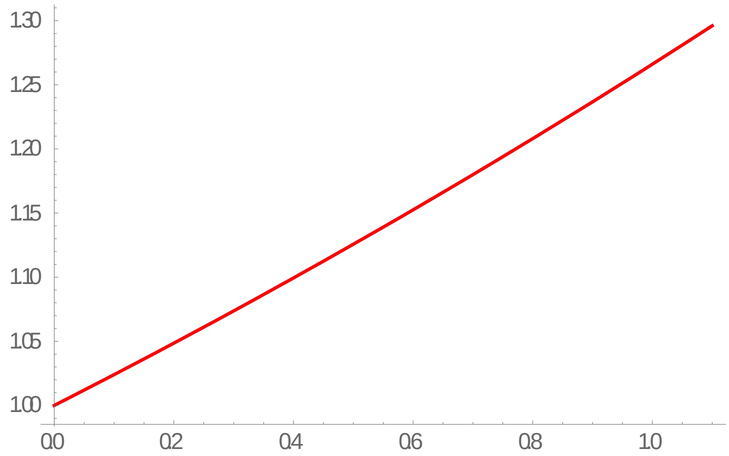
$$y^*(x)=e^{\frac{1}{4}\left(1-\frac{y}{20}\right)}$$

multiplikatif başlangıç değer probleminin bir analitik çözümü aşağıdaki gibidir:

$$y(x)=\frac{20}{1+19e^{-\frac{x}{4}}}.$$

Çizelge 3.5: $h = 0.01$ için Örnek 3.5.2' nin nümerik sonuçları

x	Tam çözüm	Yöntem	Mutlak hata (%)
0.1	1.024019	HM	1.20702e-2
		C_oM	2.40190e-2
		HeM	7.12980e-8
		GM	1.06322e-2
		MGMAM-2	1.02851e-9
		MGMAM-3	1.18651e-9
		MGMAM-4	1.18651e-9
		2MGMAM-2	1.24713e-9
		2MGMAM-3	1.18631e-9
		2MGMAM-4	2.48596e-7
0.4	1.099390	HM	5.07788e-2
		C_oM	9.93899e-2
		HeM	3.03721e-7
		GM	4.48205e-2
		MGMAM-2	4.21344e-9
		MGMAM-3	4.88943e-9
		MGMAM-4	4.88942e-9
		2MGMAM-2	5.52404e-9
		2MGMAM-3	4.88943e-9
		2MGMAM-4	1.02665e-6
0.7	1.179963	HM	9.34379e-2
		C_oM	1.79966e-1
		HeM	5.65598e-7
		GM	8.26384e-2
		MGMAM-2	7.54711e-9
		MGMAM-3	8.81548e-9
		MGMAM-4	8.81547e-9
		2MGMAM-2	1.07013e-8
		2MGMAM-3	8.8155e-9
		2MGMAM-4	1.855e-6
1.0	1.266046	HM	1.40317e-2
		C_oM	2.66047e-1
		HeM	8.59090e-7
		GM	1.24341e-2
		MGMAM-2	1.10277e-8
		MGMAM-3	1.29727e-8
		MGMAM-4	1.29727e-8
		2MGMAM-2	1.69166e-8
		2MGMAM-3	1.29727e-8
		2MGMAM-4	2.73608e-6



Şekil 3.6: $h = 0.01$ ve $x = 1.1$ için Örnek 3.5.2' deki çözümlerin davranışları

Şekil 3.6' da $h = 0.01$ için Örnek 3.5.2' ye MGMAM-2 yöntemi uygulanarak hesaplanan nümerik çözümler ile problemin analitik çözümleri karşılaştırılmıştır.

Örnek 3.5.3 (Chandru et al., 2017) $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında tanımlanan

$$y^*(x) = e^{\cos(x)}$$

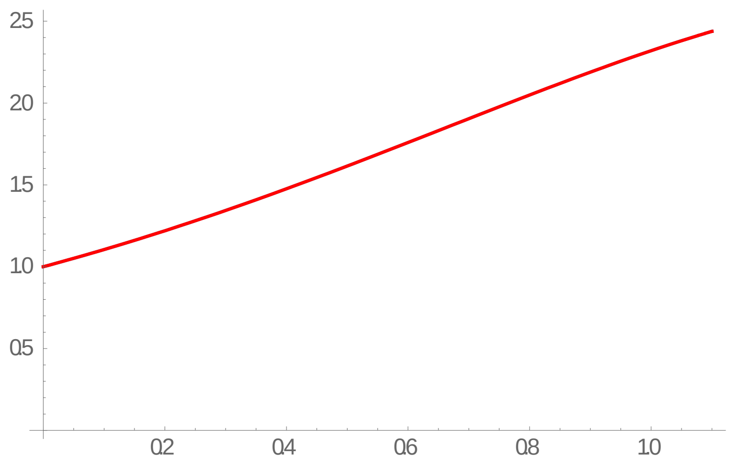
multiplikatif başlangıç değer probleminin bir analitik çözümü aşağıdaki gibidir:

$$y(x) = e^{\sin(x)}.$$

Çizelge 3.7: $h = 0.01$ için Örnek 3.5.3' ün nümerik sonuçları

x	Tam çözüm	Yöntem	Mutlak hata (%)
0.1	1.104987	HM	5.36727e-2
		CoM	1.04992e-1
		HeM	1.46958e-6
		GM	4.38845e-2
		MGMAM-2	9.28484e-7
		MGMAM-3	1.78085e-9
		MGMAM-4	1.38907e-9
		2MGMAM-2	9.10095e-7
		2MGMAM-3	1.73489e-9
		2MGMAM-4	3.95445e-6
0.4	1.476122	HM	2.60595e-1
		CoM	4.76140e-1
		HeM	6.39238e-6
		GM	2.17241e-1

		MGMAM-2	5.59076e-6
		MGMAM-3	1.1939e-7
		MGMAM-4	9.03945e-8
		2MGMAM-2	3.98973e-6
		2MGMAM-3	1.1863e-7
		2MGMAM-4	6.49231e-5
0.7	1.904497	HM	5.23456e-1
		CoM	9.04524e-1
		HeM	1.04197e-5
		GM	4.44760e-1
		MGMAM-2	1.59913e-5
		MGMAM-3	6.68997e-7
		MGMAM-4	5.0471e-7
		2MGMAM-2	4.45716e-6
		2MGMAM-3	6.66822e-7
		2MGMAM-4	1.94349e-4
1.0	2.319777	HM	7.95362e-1
		CoM	1.31981e-0
		HeM	1.07185e-5
		GM	6.87500e-1
		MGMAM-2	3.85774e-5
		MGMAM-3	2.12727e-6
		MGMAM-4	1.60298e-6
		2MGMAM-2	6.04392e-6
		2MGMAM-3	2.12302e-6
		2MGMAM-4	3.80448e-4



Şekil 3.8: $h = 0.01$ ve $x = 1.1$ için Örnek 3.5.3' deki çözümlerin davranışları

Şekil 3.8' da $h = 0.01$ için Örnek 3.5.3' ye MGMAM-2 yöntemi uygulanarak hesaplanan nümerik çözümler ile problemin analitik çözümleri karşılaştırılmıştır.

Örnek 3.5.4 (Murugesan et al., 2002) $y(0)=1$ başlangıç koşulu altında tanımlanan

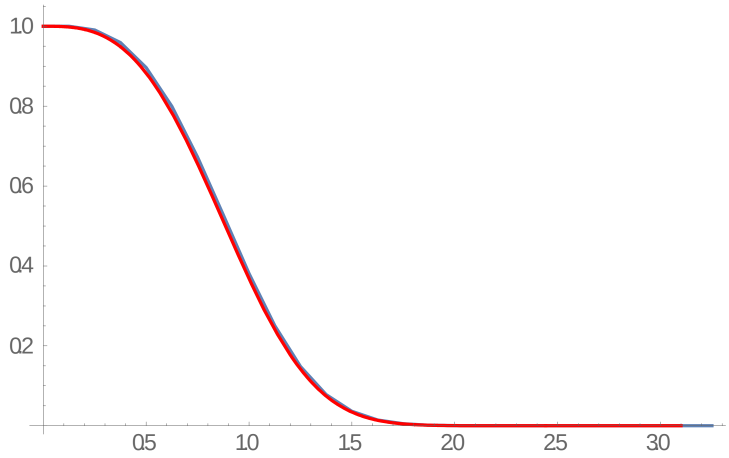
$$y^*(x)=e^{-3x^2}$$

multiplikatif başlangıç değer probleminin bir analitik çözümü aşağıdaki gibidir:

$$y(x)=e^{-x^3}.$$

Çizelge 3.9: $h=0.125$ için Örnek 3.5.4' ün nümerik sonuçları

x	Yöntem	Mutlak hata (%)
1.0	RKACeM	1.8626e-5
	RK	4.4346e-5
	RKF	5.6624e-7
	RKM	2.9802e-7
	MGMAM-2	1.3113e-2
	MGMAM-3	9.6776e-3
	MGMAM-4	7.4963e-3
	2MGMAM-2	1.8168e-2
	2MGMAM-3	9.5848e-3
	2MGMAM-4	3.2592e-2
2.0	RKACeM	4.5607e-6
	RK	1.0014e-4
	RKF	6.6771e-6
	RKM	1.4547e-6
	MGMAM-2	2.5764e-5
	MGMAM-3	2.0240e-2
	MGMAM-4	1.5394e-2
	2MGMAM-2	3.3511e-5
	2MGMAM-3	1.9839e-2
	2MGMAM-4	1.2088e-2
3.0	RKACeM	3.9256e-8
	RK	7.1096e-8
	RKF	1.6799e-12
	RKM	1.8346e-12
	MGMAM-2	2.2491e-13
	MGMAM-3	3.0920e-2
	MGMAM-4	2.3356e-2
	2MGMAM-2	2.7774e-13
	2MGMAM-3	2.9993e-2
	2MGMAM-4	2.49511e-1



Şekil 3.9: $h = 0.125$ ve $x = 3.1$ için Örnek 3.5.3' deki çözümlerin davranışları

Şekil 3.9' da $h = 0.125$ için Örnek 3.5.3' ye MGMAM-2 yöntemi uygulanarak hesaplanan nümerik çözümler ile problemin analitik çözümleri karşılaştırılmıştır.

4 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, multiplikatif başlangıç değer problemlerinin yaklaşık sayısal çözümlerini bulmada etkili olan 2., 3. ve 4. mertebeden multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemleri (MGMAM) ve 2., 3. ve 4. mertebeden multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemleri (2MGMAM) ortaya konulmuştur. Ayrıca bu yöntemler için gerekli olan multiplikatif analizin bazı temel tanım, teorem ve özelliklerine yer verilmiştir. Bunlar multiplikatif cebirsel işlemlerin özellikleri, multiplikatif türev ve integral kavramları ile multiplikatif nümerik analizdeki bazı kavramlar olarak sıralanabilir.

Ayrıca, lokal hata analizi ile kararlılık analizi yapılarak geliştirilen yeni Runge-Kutta yöntemlerinin problemin türüne göre hatayı daha fazla minimize eden ve koşulsuz kararlı, mutlak kararlı ve lineer kararlı olduğu tespit edilmiştir. Yapılandırılan yöntemlerdeki en etkin özellik, koşulsuz kararlılık ile geniş kararlılık bölgeleri oluşturup özellikle tanım bölgesindeki değerler büyüdükçe gerçek çözüme yakınsamanın çok daha iyi olmasıdır. Bu durum çeşitli problemlere yapılan uygulamalar sayesinde literatürde bulunan Volterra tipi multiplikatif Runge-Kutta, multiplikatif Adams Bashforth-Moulton ve yeni multiplikatif Runge-Kutta yöntemleri ile bağıl hata değerleri hesaplanarak yapılan karşılaştırmalar ile çok daha net bir biçimde ortaya konulmuştur. Ayrıca, geliştirilen yöntemler için nümerik algoritmalar Mathematica paket programı yardımı ile kodlar oluşturularak elde edilmiştir. Mathematica programında yapılan uygulamalarda geliştirilen yöntemlerin algoritmalarının daha karmaşık olması sebebi ile literatürdeki yöntemlerden biraz daha yavaş olduğu kendi içerisinde de mertebe arttıkça yöntemlerin hızlarında azalma gözlendiği söylenebilir. Multiplikatif analizin üstel fonksiyona dayanan bir analiz olduğu göz önünde bulundurulduğunda geliştirilen tüm yöntemlerin algoritmalarının hesaplama noktasında paket programlardaki kodlarının yazılması ve hızlarının azalmasının doğal olduğu kolayca düşünülebilir. Bu nedenle, sonraki çalışmalarda daha basit bir algoritmaya sahip ve çok daha hızlı çalışabilen yöntemlerin geliştirilmesi amaçlanabilir.

KAYNAKLAR

Aniszewska, D., 2007, "Multiplicative Runge-Kutta methods", Nonl. Dyn., 50:262-272.

Aniszewska, D. and Rybaczuk, M., 2005, "Analysis of the multiplicative Lorenz system", Chaos Soliton. Fract., 25:79-90.

Aniszewska, D. and Rybaczuk, M., 2008, "Lyapunov type stability and Lyapunov exponent for exemplary multiplicative dynamical systems", Nonl. Dyn., 54:345-354.

Bashirov, A., 2013, "On line and double multiplicative integrals", TWMS J. Appl. Eng. Math., 3 (1):103-107.

Bashirov, A. and Rıza, M., 2011, "On complex multiplicative differentiation", TWMS J. Appl. Eng. Math., 1:75-85.

Bashirov, A.E., Misirli, E.K. and Ozyapici, A., 2008, "Multiplicative calculus and its applications", J. Math. Anal. Appl., 337 (1):36-48.

Bashirov, A.E., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. and Özyapıcı, A., 2011, "On modelling with multiplicative differential equations", Appl. Math.-A J. Chinese Uni., 26 (4):425-438.

Cakmak, A.F. and Basar, F., 2012, "On the classical sequence spaces and non-Newtonian calculus", J. Inequal. Appl., 2012, Art. ID 932734, 13 pages.

Campbel, D., 1999, "Multiplicative calculus and student projects", Primus, 9 (4):327-332.

Chandru, M., Ponalagusamy, R. and Alphonse, P.J.A, 2017, "A new fifth-order weighted Runge-Kutta algorithm based on Heronian mean for initial value problems in ordinary differential equations", J. Appl. Math. & Informatics, 35 (1-2):191-204.

Dahlquist, G.G., 1963, "A special stability problem for linear multistep methods", BIT Numer. Math., 3:27-43.

Ehle, B.L., 1969, "On Pade approximations to the exponential function and a-stable methods for the numerical solution of initial value problems", PhD Thesis, University of Waterloo.

Englehardt, J., Swartout, J. and Loewenstine, C., 2009, “A new theoretical discrete growth distribution with verification for microbial counts in water”, Risk Anal., 29:841-856.

Florack, L. and Assen, H.V., 2012, “Multiplicative calculus in biomedical image analysis”, J. Math. Imag. Vis., 42:64-75.

Grossman, M. and Katz, R., 1972, “Non-Newtonian calculus”, Pigeon Cover, Lee Press, Mass.

Grossman, J., Katz, R. and Grossman, M., 1983, “Averages: A new approach”, ISBN 0977117049.

Grossman, M., 1983, “Bigeometric calculus. A system with a scale-free derivative”, Archimedes Foundation, Rockport, Mass.

Gürefe, Y., 2009, “Çarpımsal analiz ve uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, İzmir, 49s.

Kasprzak, W., Lysik, B. and Rybaczuk, M**.,** 2004, “Dimensions, invariants models and fractals”, Ukrainian society on fracture mechanics, Spolom, Wroclaw-Lviv, Poland.

Lepe, F.C., Valle, R.D. and Ponce, K.V., 2018, “A new approach to the concept of linearity. Some elements for a multiplicative linear algebra”, Inter. J. Comput. Math., DOI:10.1080/00207160.2018.1437265.

Misirli, E. and Ozyapici, A., 2009, “Exponential approximations on multiplicative calculus”, Proc. Jangjeon Math. Soc., 12:227-236.

Misirli, E. and Gurefe, Y., 2011, “Multiplicative Adams Bashforth-Moulton methods”, Numer. Algorithms, 57 (4):425-439.

Mora, M., Lepe, F.C. and Valle, R.D., 2012, “A non-Newtonian gradient for contour detection in images with multiplicative noise”, Pattern Recognit. Lett., 33:1245-1256.

Murugesan, K., Dhayabaran, D.P., Amirtharaj, E.C.H. and Evans, D.J., 2002, “A Fourth Order Embedded Runge-Kutta RKACeM(4,4) Method Based on Arithmeticand Centroidal Means with Error Control”, Int. J. Comput. Math., 79 (2):247-269.

Özyapıcı, A., 2009, “Çarpımsal analiz ve uygulamaları”, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, İzmir 105s.

Ozyapici, A., Riza, M., Bilgehan, B. and Bashirov, A., 2014, “On multiplicative and Volterra minimization methods”, Numer. Algorithms, 67: 623-636.

Özyapıcı, A. and Bilgehan, B., 2016, “Finite product representation via multiplicative calculus and its applications to exponential signal processing”, Numer. Algorithms, 71: 475-489.

Riza, M., Ozyapici, A. and Misirli, E., 2009, “Multiplicative finite difference methods”, Q. Appl. Math., 67 (4):745-754.

Riza, M., and Aktöre, H., 2015, “The Runge-Kutta method in geometric multiplicative calculus”, LMS J. Comput. Math., 18 (1): 539-554.

Rybaczuk, M., Kedzia, A. and Zielinski, W., 2001, “The concepts of physical and fractional dimensions 2. The differential calculus in dimensional spaces”, Chaos Soliton. Fract., 12:2537-2552.

Rybaczuk, M. and Stoppel, P., 2000, “The fractal growth of fatigue defects in materials”, Int. J. Frac., 103:71-94.

Rybaczuk, M. and Zielinski, W., 2001, “The concept of physical and fractal dimension I. The projective dimensions”, Chaos Soliton. Fract., 12:2517-2535.

Stanley, D., 1999, “A multiplicative calculus”, Primus, 9 (4):310-326.

Tekin, S. and Basar, F., 2013, “Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field”, Abstr. Appl. Anal., 2013, Art. ID 739319, 11 pages.

Uzer, A., 2010, “Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus”, Comput. Math. Appl., 60:2725-2737.

Volterra, V. and Hostinsky, B., 1938, “Operations infinitesimales lineares”, Herman, Paris.

EKLER

Ek A

Örnek 3.5.1’ in çözümü için kullanılan multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemlerinin ve multiplikatif kontra harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemlerinin Mathematica paket programında yazılan kodları:

İkinci Mertebeden Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(MGMAM-2)]:

```
Clear[x,y,S1,S2];
a=0.1;b=426.1;
y[1]=2.402585093;h=0.1;n=(b-a)/h;
Do[x[i]=0.1+(i-1)*h,{i,1,n+1}]
f[x_,y_]=Exp[(x-1)/(x*y)];
Do[{z[i]=5.954348125669639 6`*^-12+x[i]-Log[x[i]]},{i,1,n}]
Do[{S1=f[x[i],y[i]],S2=f[x[i]+1/3*h,y[i]*(1+1/3*h*Log[S1])],S
3=f[x[i]+2/3*h,y[i]*(1+1/3*h*Log[S2³/S1])],S4=f[x[i]+h,y[i]*(
1+h*Log[(S1*S3)/S2])],y[i+1]=y[i]*(S1*(S2^3)*(S3^3)*S4)},{i,1
,n}]
Do[{e[i]=Max[Abs[(100*(z[i]-y[i])/z[i])]]},{i,1,n}]
Do[{p[i+1]=Max[e[i+1],p[1]=e[1],p[i]]},{i,1,n}]
Do[Print[x[i],"            ",y[i],"            ",z[i],"
",e[i],"            ",p[i]],{i,1,n+1}]
```

Üçüncü Mertebeden Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(MGMAM-3)]:

```
Clear[x,y,S1,S2,S3];
a=0.1;b=426.1;
y[1]=2.402585093;h=0.1;n=(b-a)/h;
Do[x[i]=0.1+(i-1)*h,{i,1,n+1}]
f[x_,y_]=Exp[(x-1)/(x*y)];
Do[{z[i]=5.954348125669639 6`^-12+x[i]-Log[x[i]]},{i,1,n}]
Do[{S1=f[x[i],y[i]],S2=f[x[i]+2/3 h,y[i]*(1+2/3
h*Log[S1])],S3=f[x[i]+2/3 h,y[i]*(1-2/3 h*Log[S1]+4/3
h*Log[S2])],y[i+1]=y[i]*((S1)^(Log[S2]/Log[S1*S2])*(S2)^(Log[S3]/Log[S2*S3]))^h},{i,1,n}]
Do[{e[i]=Max[Abs[(100*(z[i]-y[i]))/z[i]]]},{i,1,n}]
Do[{p[i+1]=Max[e[i+1],p[1]=e[1],p[i]]},{i,1,n}]
Do[Print[x[i]," ",y[i]," ",z[i]," ",e[i]," ",p[i]],{i,1,n+1}]
```

Dördüncü Mertebeden Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(MGMAM-4)]:

```
Clear[x,y,S1,S2,S3,S4];
a=0.1;b=426.1;
y[1]=2.402585093;h=0.1;n=(b-a)/h;
Do[x[i]=0.1+(i-1)*h,{i,1,n+1}]
f[x_,y_]=Exp[(x-1)/(x*y)];
Do[{z[i]=5.954348125669639 6`^-12+x[i]-Log[x[i]]},{i,1,n}]
Do[{S1=f[x[i],y[i]],S2=f[x[i]+1/2 h,y[i]*(1+1/2
h*Log[S1])],S3=f[x[i]+1/2 h,y[i]*(1-1/8 h*Log[S1]+5/8
h*Log[S2])],S4=f[x[i]+h,y[i]*(1-1/4 h*Log[S1]+7/20
h*Log[S2]+9/10
h*Log[S3])],y[i+1]=y[i]*((S1)^(Log[S2]/Log[S1*S2])*(S2)^(Log[S3]/Log[S2*S3])*(S3)^(Log[S4]/Log[S3*S4]))^(2h/3)},{i
,1,n}]
Do[{e[i]=Max[Abs[(100*(z[i]-y[i]))/z[i]]]},{i,1,n}]
Do[{p[i+1]=Max[e[i+1],p[1]=e[1],p[i]]},{i,1,n}]
Do[Print[x[i]," ",y[i]," ",z[i]," ",e[i]," ",p[i]],{i,1,n+1}]
```

İkinci Mertebeden Multiplikatif Kontra Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(2MGMAM-2)]:

```
Clear[x,y,S1,S2];
a=0.1;b=426.1;
y[1]=2.402585093;h=0.1;n=(b-a)/h;
Do[x[i]=0.1+(i-1)*h,{i,1,n+1}]
f[x_,y_]=Exp[(x-1)/(x*y)];
Do[{z[i]=5.954348125669639б`^-12+x[i]-Log[x[i]]},{i,1,n}]
Do[{S1=f[x[i],y[i]],S2=f[x[i]+h,y[i]*(1+h*Log[S1],y[i+1]=y[i]
```

$$*\left((S1)^{\frac{Log[S1]}{Log[S1*S2]}}*(S2)^{\frac{Log[S2]}{Log[S1*S2]}}\right)^{h}\},\{i,1,n\}]$$

```
Do[{e[i]=Max[Abs[(100*(z[i]-y[i]))/z[i]]]},{i,1,n}]
Do[{p[i+1]=Max[e[i+1],p[1]=e[1],p[i]]},{i,1,n}]
Do[Print[x[i]," ",y[i]," ",z[i]," ",e[i]," ",p[i]],{i,1,n+1}]
```

Üçüncü Mertebeden Multiplikatif Kontra Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(2MGMAM-3)]:

```
Clear[x,y,S1,S2,S3];
a=0.1;b=426.1;
y[1]=2.402585093;h=0.1;n=(b-a)/h;
Do[x[i]=0.1+(i-1)*h,{i,1,n+1}]
f[x_,y_]=Exp[(x-1)/(x*y)];
Do[{z[i]=5.9543481256696396`^-12+x[i]-Log[x[i]]},{i,1,n}]
Do[{S1=f[x[i],y[i]],S2=f[x[i]+2/3 h,y[i]*(1+2/3
h*Log[S1])],S3=f[x[i]+2/3 h,y[i]*(1+2/3h*Log[S2])]
```

$$y[i+1]=y[i]*\left((S1)^{\frac{Log[S1]}{Log[S1*S2]}}*(S2)^{\frac{Log[S2]}{Log[S1*S2]}}*(S2)^{\frac{Log[S2]}{Log[S2*S3]}}*(S3)^{\frac{Log[S3]}{Log[S2*S3]}}\right)^{\frac{h}{2}}\},\{i,1,n\}]$$

```
Do[{e[i]=Max[Abs[(100*(z[i]-y[i]))/z[i]]]},{i,1,n}]
Do[{p[i+1]=Max[e[i+1],p[1]=e[1],p[i]]},{i,1,n}]
Do[Print[x[i]," ",y[i]," ",z[i]," ",e[i]," ",p[i]],{i,1,n+1}]
```

Dördüncü Mertebeden Multiplikatif Kontra Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(2MGMAM-4)]:

```
Clear[x,y,S1,S2,S3,S4];
a=0.1;b=426.1;
y[1]=2.402585093;h=0.1;n=(b-a)/h;
Do[x[i]=0.1+(i-1)*h,{i,1,n+1}]
f[x_,y_]=Exp[(x-1)/(x*y)];
Do[{z[i]=5.954348125669639`^-12+x[i]-Log[x[i]]},{i,1,n}]
Do[{S1=f[x[i],y[i]],S2=f[x[i]+1/2 h,y[i]*(1+1/2
h*Log[S1])],S3=f[x[i]+1/2 h,y[i]*(1+1/8 h*Log[S1]+3/8
h*Log[S2])],S4=f[x[i]+h,y[i]*(1+1/4 h*Log[S1]-3/4
h*Log[S2]+3/2
h*Log[S3])],y[i+1]=y[i]*
```

$$\left((S1)^{\frac{Log[S2]}{Log[S1*S2]}}*(S2)^{\frac{Log[S2]}{Log[S1*S2]}}*(S2)^{\frac{Log[S2]}{Log[S2*S3]}}*(S3)^{\frac{Log[S3]}{Log[S2*S3]}}*(S3)^{\frac{Log[S3]}{Log[S3*S4]}}*(S4)^{\frac{Log[S4]}{Log[S3*S4]}}\right)^{\frac{h}{3}}$$

```
},{i,
1,n}]
Do[{e[i]=Max[Abs[(100*(z[i]-y[i]))/z[i]]]},{i,1,n}]
Do[{p[i+1]=Max[e[i+1],p[1]=e[1],p[i]]},{i,1,n}]
Do[Print[x[i]," ",y[i]," ",z[i]," ",e[i]," ",p[i]],{i,1,n+1}]
```

Ek B

Örnek 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3 ve 3.5.4 için ikinci mertebe multiplikatif harmonik ortalamaya dayanan Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen yaklaşık sayısal çözümlerin gerçek çözümler ile karşılaştırıldığı grafiği oluşturan Mathematica kodları:

Örnek 3.5.1 için İkinci Mertebe Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(MGMAM-2)]:

```
f[x_,y_]:=Exp[(x-1)/(x*y)];
x0=0.1;
y0=2.402585093;
xend=10.1;
steps=100;
h=(xend-x0)/steps//N;
x=x0;
y=y0;
eulerlist={{x,y}};
For[i=1,i≤steps,y=((f[x,y]^((Log[f[x+h,y*(1+h*Log[f[x,y]])]])
/(Log[(f[x,y])(f[x+h,y*(1+h*Log[f[x,y]])])])))^(2h))*y;
 x=x+h;
 eulerlist=Append[eulerlist,{x,y}];
 i++]
Print[eulerlist]
a=ListPlot[eulerlist,PlotJoined→True];
b=Plot[5.9543481256696396`*^-12+x-
Log[x],{x,0,10.1},PlotStyle→RGBColor[1,0,0]];
Show[a,b]
```

Örnek 3.5.2 için İkinci Mertebe Multiplikatif Harmonik

Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(MGMAM-2)]:

```
f[x_,y_]:=Exp[1/4 (1-y/20)];
x0=0;
y0=1;
xend=1.1;
steps=110;
h=(xend-x0)/steps//N;
x=x0;
y=y0;
eulerlist={{x,y}};
For[i=1,i<=steps,y=((f[x,y]^((Log[f[x+h,y*(1+h*Log[f[x,y]])]]
)/(Log[(f[x,y])(f[x+h,y*(1+h*Log[f[x,y]])])]))))^(2h))*y;
 x=x+h;
 eulerlist=Append[eulerlist,{x,y}];
 i++]
Print[eulerlist]
a=ListPlot[eulerlist,PlotJoined->True];
b=Plot[20/(1+19*Exp[-(x/4)]),{x,0,1.1},PlotStyle-
>RGBColor[1,0,0]];
Show[a,b]
```

Örnek 3.5.3 için İkinci Mertebe Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(MGMAM-2)]:

```
f[x_,y_]:=Exp[Cos[x]];
x0=0;
y0=1;
xend=1.1;
steps=110;
h=(xend-x0)/steps//N;
x=x0;
y=y0;
eulerlist={{x,y}};
For[i=1,i<=steps,y=((f[x,y]^((Log[f[x+h,y*(1+h*Log[f[x,y]])]]
)/(Log[(f[x,y])(f[x+h,y*(1+h*Log[f[x,y]])])])))^(2h))*y;
 x=x+h;
 eulerlist=Append[eulerlist,{x,y}];
 i++]
Print[eulerlist]
a=ListPlot[eulerlist,PlotJoined->True];
b=Plot[Exp[Sin[x]],{x,0,1.1},PlotStyle->RGBColor[1,0,0]];
Show[a,b]
```

Örnek 3.5.4 için İkinci Mertebe Multiplikatif Harmonik Ortalamaya Dayanan Runge-Kutta Yöntemi-[(MGMAM-2)]:

```
f[x_,y_]:=Exp[-3 x²];
x0=0;
y0=1;
xend=3.25;
steps=26;
h=(xend-x0)/steps//N;
x=x0;
y=y0;
eulerlist={{x,y}};
For[i=1,i<=steps,y=((f[x,y]^((Log[f[x+h,y*(1+h*Log[f[x,y]])]]
)/(Log[(f[x,y])(f[x+h,y*(1+h*Log[f[x,y]])])])))^(2h))*y;
 x=x+h;
 eulerlist=Append[eulerlist,{x,y}];
 i++]
Print[eulerlist]
a=ListPlot[eulerlist,PlotJoined->True];
b=Plot[Exp[-x³],{x,0,3.1},PlotStyle->RGBColor[1,0,0]];
Show[a,b]
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgileri:

Soyadı, adı	: ÇALIŞKAN,Evrim
Uyruğu	: T.C
Doğum Tarihi ve Yeri	: 28.06.1991 İZMİR
Medeni Hali	: Bekar
Telefon	: 5386482646
Mail	: evrimcaliskann@gmail.com

Öğrenim Durumu:

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lise	Hoca Ahmet Yesevi Lisesi	2009
Lisans	Uşak Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2014