T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KENAN AKARBULUT

HAZİRAN 2019
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KENAN AKARBULUT

UŞAK 2019

Kenan AKARBULUT tarafından hazırlanan **Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri** adlı bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SOYERTEM ....
Tez Danışmanı Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma,jürimiz tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalından Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK ....
Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi M.Seyyit SEYYİDOĞLU ....
Matematik Anabilim Dalı,Uşak Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SOYERTEM ....
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih:···/···/2019

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Kenan AKARBULUT

İMZA

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Kenan Akarbulut

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2019

ÖZET

Doğa bilimlerinde ve ekonomide kullanılan matematiksel modellerin büyük çoğunluğu diferansiyel denklemler vasıtasıyla oluşturulurlar. Fakat yapılan kabuller çoğunlukla sistemin girdilerinin tam olarak bilindiği ve ölçümlerin kesin yapıldığı varsayımına dayalıdır. Bu tür modeller deterministik modeller olarak adlandırılır ve sistemin ancak kısıtlı bir betimlemesini yapabilirler. Olasılık teorisinin kullanılmasıyla bu modellerde ölçümlerden ve başlangıç koşullarından kaynaklanan belirsizlikler diferansiyel denklemlerde gürültü terimi ile ifade edilirler. Bu tür denklemlere stokastik diferansiyel denklemler denir.

Bu tezde, stokastik diferansiyel denklemlerin daha iyi anlaşılması için gerekli ölçü teorisi, olasılık teorisi,stokastik süreç kavramları ile stokastik diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini inceledik.

Bilim Kodu	:	403.06.00.UYGULAMALI MATEMATİK
Anahtar Kelimeler	:	Ölçüm Teorisi,Stokastik Analiz,Olasılık Teorisi,Stokastik Süreç, Euler-Marumaya Metodu,Milstein Metodu
Sayfa Adedi	:	98
Tez Yöneticisi	:	Dr. Öğretim Üyesi Mustafa Soyertem

NUMERICAL SOLUTION OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
(M.Sc. Thesis)

Kenan Akarbulut

UNIVERSITY OF UŞAK
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
August 2019

ABSTRACT

The majority of mathematical models used in natural sciences and economics are created by differential equations. However, the assumptions made are usually based on the assumption that the inputs of the system are well known and the measurements are made. Such models are called deterministic models and can only provide a limited description of the system. By using probability theory, the uncertainties resulting from measurements and initial conditions in these models are expressed by the term noise in differential equations. Such equations are called stochastic differential equations.

In this thesis, we have examined numerical solutions of stochastic differential equations with the theory of measure, probability theory, stochastic process, which are necessary for a better understanding of stochastic differential equations.

Science Code	:	403.06.00.APPLIED MATHEMATICS
Keywords	:	Measure Theory, Stochastic Analysis, Probability Theory, Stochastic Process, Simulation, Euler-Marumaya Methods, Milstein Methods
Number of Page	:	98
Supervisor	:	Dr. Öğretim Üyesi Mustafa Soyertem

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve kıymetli tecrübelerinden faydalandığım değerli hocalarım Doktor Öğretim Üyeleri Mustafa Soyertem ve Utku Erdoğan ile destekleriyle her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

Kenan AKARBULUT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

KISALTMALAR

SDE : Stokastik diferansiyel denklemler
ODE : Adi diferansiyel denklemler
PDE : Kısmi türevli diferansiyel denklemler
h.h. : Hemen her yerde
h.h.k. : Hemen her yerde kesin
s.s. : Sonsuz sıklıkta
b.ö.d : Bağımsız Özdeş Dağılımlı
s.b.d : Sonlu Boyutlu Dağılım
d.d. : Diğer Durumlarda

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\emptyset$	Boş Küme
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
$\mathscr{A}$	σ-Cebir
$:=$	Tanımlama
ω	Olay
Ω	Örneklem Uzayı
$(\Omega,\mathscr{A})$	Ölçüm Uzayı
$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$	Ölçü Uzayı
$(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$	Olasılık Uzayı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklit Uzayı
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
J	$a\in\mathbb{R}$ için $J=(-\infty,a]$
X	X rassal değişkeni
$\overrightarrow{X}$	X rassal vektörü
P	Olasılık Ölçüsü
A^c	A kümesinin Tümleyeni
$\mathscr{B}$	Borel σ-Cebri
$\mathscr{B}^n$	$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı Borel σ-Cebri
$exp(x)$	Exponansiyel Fonksiyon , e^x
$P(.\vert.)$	Koşullu Olasılık
F_x	X rassal değişkeninin Dağılım Fonksiyonu
χ_A	A olayının Karakteristik Fonksiyonu
$\Vert\cdot\Vert$	Norm
$[x]$	x’in tam değeri

1. GİRİŞ

İnsanlar her zaman çevrelerini tanımaya, anlamaya ve düzenini tespit etmeye çalışmaktadırlar. Bu çalışmalar sonucu bilimde ilerlemeler olmuştur. Özellikle değişimin olduğu olayları incelemek için farkların analizi önem arz etmiş bu da "Diferansiyel Denklemler" konusunda çalışmaları arttırmıştır. İlerleyen süreçte denklemleri etkileyen girdiler tam belirlenemediği için uygun koşullarda deterministik model oluşturulmuştur. Fakat bu modellerde belirsizlikler önemsenmediği için çözümler istenilen düzeyde olamamıştır.

Modellere bu belirsizliklerin dahil edilmesi ile yeni bir modelleme metodu geliştirilmiştir. Olasılık teorisinin argümanlarını kullanan bu modellemeye "Stokastik Modelleme" denilmiştir. Stokastik modelleme içindeki diferansiyel denklemler ve belirsizlikleri ifade eden gürültü terimi ile beraber "Stokastik Diferansiyel Denklemleri" oluşturmuştur.

Stokastik diferansiyel denklemleri içeren modeller kullanılarak oluşturulan simülasyonlar doğru karar vermek için çok önemli olduğundan denklemlerin nümerik çözümlerini incelenmesi çalışmamızın konusu olmuştur.

Çalışmamızın İkinci bölümünde Ölçüm Teorisi ve Olasılık Teorisinin temel aksiyomatik yapısıyla beraber önemli başlıkları incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde rassal değişkenler cebri üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde Stokastik Süreçler ve teoremleri incelenmiş, olasılık teorisinin uygulamaları gözlenmiştir. Dördüncü bölümde stokastik diferansiyel denklemler ile ilgili olarak "stokastik türev" ve "stokastik integral" kavramları incelenerek Ito İntegrali ve Lemmaları üzerinde durulmuştur. Ayrıca nümerik çözüm metotları incelenerek metotlardan bahsedilmiştir.Beşinci bölümde ise stokastik diferansiyel denklemlerin bir uygulaması olan Black-Scholes denklemleri ve finans matematiği kavramları incelenmiştir.

1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, Doğa Bilimleri, Ekonomi, Finans ve diğer bilimlerde kullanılan matematiksel modellerdeki stokastik diferansiyel denklemleri ve nümerik çözümlerin incelenmesidir. Ayrıca kullanılan metotları geliştirmeye çalışmak ve bu konuda araştırma yapmak isteyen araştırmacılar için Türkçe bir kaynak oluşturmaktır.

1.2 Literatür Araştırması

1827-1828 yıllarında Botanik bilimci Robert Brown'ın sulandırılmış polen taneciklerinin mikroskop altında görüntülerinde rassal hareketleri ve izlediği yörüngeler dikkatini çekmiş, bunları anlamlandırmaya çalışmıştır. Brown hareketi olarak literatüre geçen bu olayı bilim dünyasına sunmuştur. Dönemin matematikçileri ve fizikçileri konu üzerinde çalışmalarda bulunmasıyla önemli gelişmeler olmuştur. Einstein, Wiener, Ornstein-Uhlenbeck matematiksel modeller kurmuştur. Wiener tarafından geliştirilen "Wiener ölçüsü", Brown hareketinin anlaşılmasında ve çözülmesinde önemli bir basamaktır. Fokker-Planck oluşturulan diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmiştir. Ornstein-Uhlenbeck, Hamilton-Jacobi denklemleri ve modellerin formülize edilmesini sağlayarak Langevin denkleminin elde edilmesine imkan tanımışlardır.

Bachelier 20.yüzyılın başlarında bu denklemlerin belirsizlikler içermesi nedeniyle toplumsal , ekonomik ve finansal olaylarda etkin bir alanda kullanılabildiği gösterdi. Finans dünyasında çok önemli kullanım alanı olan opsiyon fiyatlama gibi modeller oluşturdu.

Brown hareketinin yörüngelerinin hiçbir noktada türevi olmadığı için diferansiyel ve integrallerindeki zorluğu Gelfand'ın ve Laurent Schwartz'ın çalışmaları sonucu geliştirilen genelleştirilmiş fonksiyonlar kuramı ile olmuştur.

Rassallık kavramı içerdiği için olasılık teorisi, ölçü kuramı ve stokastik integral konusunda yoğun çalışmalar 1930'lu yıllarda hız kazanmıştır. 1933 yılında A.N. Kolmogorov'un olasılık teorisini aksiyomatik bir yapıyla sunması sonucu farklı bir boyut kazanarak hızlanmıştır. Doob, Feller, Chung, Herris gibi matematikçilerin ölçüm teorisi üzerine kurulu olasılık teorisi, stokastik süreçler ve stokastik integral üzerine çalışmaları önemli bir argüman olarak kullanmışlardır. Bu çalışmaları referans kabul ederek Barlett,Cox-Miller,Parzen,Kendall'ın çalışmaları süreci hızlandırmıştır.

Stokastik diferansiyel denklemlerin(SDE) çözümünde 1944-1946 yıllarında Kiyosi Ito tarafından yayınlanan makalelerle "Ito lemmaları" ve "Ito integrali" tanımlanmış ve denklemlerin çözümü farklı bir boyut kazanmıştır. Konu üzerine sayısız bilim insanı birçok tez,makale ve kitap yazmıştır. Bunlardan özellikle son dönemde Evans, Higham, Kloden, Lord, Mao, Platen ve Oksendal'ın çalışmaları dikkat çekicidir.

Black-Scholes ve Merton tarafından 1973 yılında yayınlanan makaleler opsiyon fiyatlama konusunda önemli bir aşama oluştururken ileri matematik bilgisine çok ihtiyaç duymadan model yardımıyla finansçılar için kullanım kolaylığı sağlayarak fiyatlandırma olanağı vermiştir.

Ülkemizde konu üzerine yapılan çalışmalar ise sınırlı sayıda kalmıştır. Ulusal Tez Merkezi verilerine göre 20-30 arasındaki sayıda tez kayıtlı olmakla beraber Uluğ Çapar'ın "Ölçüm Kuramsallı Olasılık ve Stokastik Kalkülüse Giriş", Kasırga Yıldırak vd. "Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri" , Mehmet F. Beyazıt'ın "Stokastik Finans" , Ömer Önalan'ın "Stokastik Süreçler" , Ahmet H. Kayran vd. "Olasılık Teorisi ve Stokastik Süreçler" isimli kitapları kaynak olarak sunulmuştur.

2. ÖLÇÜ KURAMSALLI OLASILIĞIN TEMELLERİ

Bu bölümde, olasılık uzayı ve olasılık ölçüsünü tanımlayabilmek ve daha iyi kullanabilmek için öncelikle σ-cebir kavramını tanımlayacağız. Ondan sonra ölçülebilirlik ve rassal değişkenler cebrini inceleyeceğiz. Ayrıca matematiksel beklenti,momentler ve yakınsama teoremlerinden bahsedeceğiz.

Olasılık, bir olayın bütün alternatif sonuçları içinde istenen sonuçların analizi yapmak amacıyla ortaya çıkmıştır. 1933 yılında A.N.Kolmogorov tarafından aksiyomatik olarak yapılandırılmasıyla çalışmalar hız kazanmıştır[11].

Aksiyomatik yapıyla birlikte küme kuramı önem kazanmıştır. Bu nedenle küme kuramının özelliklerini inceleyelim.

Tanım 1 (Örnekleme Uzayı)**.** *Uygun şartlar altında yapılan iyi tanımlanmış bir rassal deneyin bütün sonuçlarını içeren kümeye "Örnekleme Uzayı" denir.* Ω *ile gösterilir.*

Deneyin istenen sonuçları olaylar kümesi şeklinde ise büyük harflerle ifade edilir. A,B,C.. gibi

Olay kümelerini eleman olarak kabul eden kümeye "Olaylar Topluluğu" denir. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ gibi majiskül harflerle gösterilir. ω bir olay , A olaylar kümesi ve $\mathscr{A}$ olaylar topluluğu ise aralarındaki ilişki

$$\omega \in A \in \mathscr{A}$$

şeklindedir. Örnekleme Uzayının elemanları olan olay veya olaylar kümelerinin birbirinden farklı durumlarına dikkat edilmelidir. Kümeler; sonlu elemanlı , sayılabilir sonsuz elemanlı ve sayılamaz sonsuz elemanlı olabilir[11].

Şimdi σ-cebir kavramını izah edelim.

2.1 Sigma Cebir ve Özellikleri

Tanım 2. $\mathscr{A}$ *,* Ω *ile gösterilen örnekleme uzayının herhangi bir alt kümelerinin topluluğu olsun.* $\mathscr{A}$ *topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa* $\mathscr{A}$ kümesine Ω üzerinde σ-cebir *denir*[10, 11].

i. $\Omega \in \mathscr{A}$

ii. $\forall A \in \mathscr{A}$ *ise* $A^c \in \mathscr{A}$ *dir.*

iii. $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots \in \mathscr{A}$ *ise* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$ *dir.*

$(\Omega, \mathscr{A})$ *ikilisine ise* "Ölçüm Uzayı" *denir.*

Teorem 1. $\mathscr{A}$ *,* Ω *içinde bir* σ*-cebir olsun. Buna göre ,*

i. $\emptyset \in \mathscr{A}$

ii. $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots \in \mathscr{A}$ *ise* $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$ *dir.*

iii. $A, B \in \mathscr{A}$ *ise* $A \setminus B \in \mathscr{A}$ *ve* $A \triangle B \in \mathscr{A}$ *dir.*

Kanıt. i. $\mathscr{A}$, Ω üzerinde σ-cebir olduğundan $\Omega \in \mathscr{A}$ dır. Tanım 2'den dolayı $\Omega^c = \emptyset \in \mathscr{A}$ dir.

ii. $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots \in \mathscr{A}$ olmak üzere $\mathscr{A}$, Ω üzerinde σ-cebir olduğundan, $A_1^c, A_2^c, A_3^c, \cdots, A_k^c, \cdots \in \mathscr{A}$ dir. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c = (\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)^c \in \mathscr{A}$ dır.σ-cebir olma özelliğinden dolayı $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

iii. $A, B \in \mathscr{A}$ ise A^c ve $B^c \in \mathscr{A}$ dir. Tanım 2'den dolayı $A \cap B^c = A \setminus B \in \mathscr{A}$ dır. Benzer şekilde $A, B \in \mathscr{A}$ Tanım 2'den dolayı $A \cup B, A \cap B \in \mathscr{A}$ dır . Buradan $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \triangle B \in \mathscr{A}$ [1]

. □

Tanım 3. *Bir* Ω *kümesinin alt kümelerinden oluşan bir* $\mathscr{C}$ *kümeler topluluğu aşağıda verilen koşulları sağlarsa* $\mathscr{C}$ *ye* Ω *üzerinde* yarı cebir *denir.*

i) $\Omega \in \mathscr{C}$

ii) $A \in \mathscr{C}$ *ise* A^c *,* $\mathscr{C}$ *nin elemanlarından oluşan sonlu sayıda ikişerli ayrık kümelerinin birleşimi olarak ifade edilir.*

iii) $A, B \in \mathscr{C}$ *ise* $A \cap B \in \mathscr{C}$ *dir.*

Tanım 4. *Bir* Ω *kümesinin alt kümelerinden oluşan bir* $\mathscr{C}$ *kümeler topluluğu olsun.* $\mathscr{C}$ *kümeler topluluğunu kapsayan en küçük bir* σ*-cebir vardır. Bu* σ*-cebire* $\mathscr{C}$'nin doğurduğu σ-cebir *denir.* $\sigma(\mathscr{C})$ *ile gösterilir.*

2.1.1 Borel Kümeleri

Tanım 5. *$\mathbb{R}$'de tanımlı bütün açık aralıkların oluşturduğu kümeler topluluğunu $\mathscr{O}$ ile gösterelim. $\mathscr{O}$'nin doğurduğu en küçük σ-cebire* Borel σ-cebir *denir.* $\sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{B}$ *ile gösterilir.*

Borel σ-cebrinin elemanlarına ise Borel Kümeleri *denir.*

2.2 Olasılık Uzayı ve Olasılık Aksiyomları

Tanım 6. ***[Olasılık Uzayı]*** *Bir $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sıralı üçlüsü aşağıda verilen şartları sağlarsa bu üçlüye "* σ-toplamsal olasılık uzayı" *ya da kısaca* "olasılık uzayı" *denir*[11].

i) Ω *bir deneyin örneklem uzayı.*

ii) $\mathscr{A}, \Omega$ *üzerinde σ-cebir*

iii) *P:* $\mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *küme fonksiyonu aşağıda verilen koşulları sağlar.*

  1) $\forall A \in \mathscr{A}$ *ise* $P(A) \geqslant 0$

  2) $P(\Omega) = 1;$

  3) $A_i \in \mathscr{A}, (i = 1,2,3,\cdots)\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j$ *ve* $i, j = 1,2,3,\cdots)$ *olmak üzere* $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *dir.*

  Yukarıda verilen P fonksiyonuna "Olasılık Fonksiyonu" *denir. Kısaca* "Olasılık Ölçüsü" *veya* "Olasılık" *olarak ifade edilir.*

Teorem 2. ***[Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun. Bu taktirde;*

i) $P(\emptyset) = 0$

ii) $\forall A \in \mathscr{A}$ *için* $P(A) + P(A^c) = 1$

iii) $\forall A, B \in \mathscr{A}, A \subset B$ *ise* $P(A) \leq P(B)$

iv) $\forall A \in \mathscr{A}$ *için* $0 \leq P(A) \leq 1$

v) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ *için* $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

vi) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ *için* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

dir[11].

Kanıt. i) Olasılık fonksiyonun (3.) özelliğinden dolayı $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ ve $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$ olduğundan $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ dir. Olasılık fonksiyonun (2.) özelliğinden $P(\Omega) = 1$ değerini eşitlikte yazılırsa $P(\emptyset) + 1 = 1$ buradan $P(\emptyset) = 0$ dir.

ii) $\forall A \in \mathscr{A}$ için $A \cap A^c = \emptyset$ ve $A \cup A^c = \Omega$ olduğundan olasılık fonksiyonun (3.) özelliğine göre $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ buradan $P(\Omega) = P(A) + P(A^c) = 1$ olur.

iii) $\forall A, B \in \mathscr{A}, A \subset B$ ise $B = A \cup (B \cap A^c)$ şeklinde yazılabilir. $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ olduğundan $P(A) + P(B \cap A^c) = P(B)$ dir. $P(B \cap A^c) \geqslant 0$ ve $P(A) \leq P(B)$ elde edilir.

iv) $\forall A \in \mathscr{A}$ için $\emptyset \subset A \subset \Omega$ olduğundan $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$ dır. Yani $0 \leq P(A) \leq 1$ dir.

v) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ için $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ ve $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$ olduğundan $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ dir. Buradan $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ elde edilir.

vi) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ için $(A \cup B) = (A \cap B^c) \cup B$ ve $(A \cap B^c) \cap B = \emptyset$ olduğundan $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$ elde edilir.Buradan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

bulunur[1] .

□

Teorem 3. ***[Boole Eşitsizliği]*** *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayı olsun. $A_i \in \mathscr{A} (i = 1, 2, \cdots, n)$ olmak üzere*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{2.1}$$

dir.

Kanıt. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ ve $P(A_1 \cap A_2) \geq 0$ olduğundan $P(A_1 \cup A_2) \leqslant P(A_1) + P(A_2)$ dir. Benzer şekilde $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leqslant P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$ elde edilir. $B = \cup_{i=1}^{n-1} A_i$ olmak üzere;

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(B \cup A_n) \leqslant P(B) + P(A_n) \leq \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad dir[1].$$

□

Teorem 4. ***[Dizisel Süreklilik]*** *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayı olsun.*

i) $A_1, A_2, A_3, \cdots$ *genişleyen olaylar dizisi olsun.*$(A_n \subset A_{n+1}, n = 1,2,3,\cdots)$ *Genişleyen olaylar dizisinin limitine* $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ *dersek;*

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{2.2}$$

dir.

ii) $A_1, A_2, A_3, \cdots$ *daralan(büzüşen) olaylar dizisi olsun.*$(A_{n+1} \subset A_n, n = 1,2,3,\cdots)$ *Daralan olaylar dizisinin limitine* $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ *dersek;*

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{2.3}$$

dir[11].

Kanıt. i) $A_n \subset A_{n+1}, n = 1,2,3,\cdots$ olduğundan $A_2 = (A_2 \setminus A_1) \cup A_1$ ve $A_3 = (A_3 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup A_1$ yazılabilir. Benzer şekilde

$$A_n = (A_n \setminus A_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus A_{n-2}) \cup \cdots (A_2 \setminus A_1) \cup A_1$$

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n = lim_{n\to\infty}((A_n \setminus A_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus A_{n-2}) \cup \cdots (A_2 \setminus A_1) \cup A_1)$$

elde edilir.

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots (A_{n-1} \setminus A_{n-2}) \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cdots)$$

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \cdots P(A_{n-1} \setminus A_{n-2}) + P(A_n \setminus A_{n-1}) \cdots$$

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = lim_{n\to\infty}(P(A_1 + P(A_2 \setminus A_1) \cdots + P(A_{n-1} \setminus A_{n-2}) + P(A_n \setminus A_{n-1}))$$

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = lim_{n\to\infty} P((A_n \setminus A_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus A_{n-2}) \cup \cdots (A_2 \setminus A_1) \cup A_1)$$

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

dir.

ii) i) deki özelik kullanarak $A_1^c \subset A_2^c \subset A_3^c \subset \cdots$ olacak şekilde alınırsak $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ olur. $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ idi.

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = P\big((\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c\big) = 1 - P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n)) = 1 - 1 + \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

dir [1].

$\square$

2.2.1 Borel-Cantelli Lemması

Tanım 7. ***[Sonsuz Sıklıkta]*** *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayı olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{A}$ olaylar dizisi için $B := \{\omega | \text{sonsuz sayıda } n \text{ değeri için } \omega \in A_n\}$ ile tanımlanan B olaylar kümesine* "sonsuz sıklıkta" A_n olayı *denir. Kısaca* s.s *ile gösterilir.*

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \tag{2.4}$$

şeklinde de ifade edebiliriz [11].

Teorem 5. ***[Borel-Cantelli Lemması]*** *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayı olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{A}$ olaylar dizisi için $B := \{\omega | \text{sonsuz sayıda } n \text{ değeri için } \omega \in A_n\}$ olmak üzere $p_n := P(A_n)$ şeklinde tanımlanırsa;*

a) Eğer $\Sigma_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ ise $P(B) = 0$ dır.

b) Eğer $\Sigma_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ ve $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ olayları bağımsız ise $P(B) = 1$ dir [11].

Kanıt. a) $0 \le P(A_n, s.s.) = P\big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\big) \le P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\big) \le \Sigma_{n=k}^{\infty} p_n$ ve $\Sigma_{n=1}^{\infty} p_n$ serisinin yakınsaklığından dolayı $\Sigma_{n=1}^{\infty} p_n \longrightarrow 0$ dır. Dolayısıyla $P(B) = 0$ olur.

b) $B^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c$dir. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ olayları bağımsız olduğundan $m > k \geqslant 1$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$0 \le P(B_k^c) = P(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c) \le P(\bigcap_{n=k}^{m} A_n^c)$$

yazılabilir. Buradan

$$0 \le P(B_k^c) \le P(\bigcap_{n=k}^{m} A_n^c) = \prod_{n=k}^{m} P(A_n^c) = \prod_{n=k}^{m} \big(1 - p_n\big)$$

elde edilir. $0 \le P(B_k^c) \le \prod_{n=k}^{m} \big(1 - p_n\big)$ ve $m \longrightarrow \infty$ durumu göz önüne alınırsa ;

$$0 \le P(B_k^c) \le \prod_{n=k}^{\infty} \big(1 - p_n\big) \le \exp(-\Sigma_{n=k}^{\infty} p_n) \longrightarrow 0$$

$0 \le P(B_k^c) \le 0$ dolayısıyla $P(B_k^c) = 0$ dır. $0 \le P(B^c) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^c) \le \Sigma_{k=1}^{\infty} P(B_k^c) = 0$ ve $P(B^c) = 0$ buradan da $P(B) = 1$ dir.

$\square$

2.2.2 Bağımsızlık Kavramı

Tanım 8. ***[Bağımsızlık]*** *Bir olasılık uzayında olayların bağımsızlığını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz;*

i. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ *olmak üzere* $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ *eşitliğini sağlıyorsa* A_1 *ve* A_2 *olaylarına bağımsızdır denir.*

ii. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ *ikişerli olarak bağımsız olmak üzere;*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

eşitliğini sağlıyorlarsa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *olaylarına bağımsızdır denir.*

iii. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun. T herhangi bir indis kümesi olmak üzere* $\{A_t, t \in T\}$ *olaylar ailesinin ikişerli bağımsız olayları olmak üzere* $\forall n \geqslant 2$ *ve T indis kümesinden alınan indeksleri* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *için*

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_{t_i}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(A_{t_i}) \tag{2.5}$$

eşitliğini sağlıyorsa $\{A_t, t \in T\}$ *olaylar ailesine bağımsızdır denir.* [11].

2.2.3 Koşullu Olasılık

Tanım 9. ***[Koşullu Olasılık]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A, B \in \mathscr{A}$ *ve* $P(A) > 0$ *olmak üzere*

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2.6}$$

oranına B olayının A olayı koşulu altında olma olasılığı denir. Bu olasılığın değeri $P(B|A)$ *veya* $P_A(B)$ *ile gösterilir*[11].

2.2.4 Olasılık Yoğunluk Ölçüsü

Örnekleme uzayının yapısına göre olasılık ölçüsü kurulurken farklı durumlara dikkat edilerek olasılık küme fonksiyonları tanımlanması gerekir. Bu durumların bazıları şu şekilde ifade edilebilir [11].

I.) Örnekleme uzayı sonlu veya sayılabilir sonsuz elemandan oluşuyorsa ;
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ ve $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$

a) $p_i \geqslant 0$

b) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ şartlarını sağlayan $p_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ sayı kümesi olmak üzere $P : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ küme fonksiyonu $A \in \mathscr{A}$ için $P(A) = \sum_{i,(\omega_i \in A)} p_i$ şeklinde tanımlanır. Bu küme fonksiyonunun olasılık aksiyomlarını sağladığı açıktır.

II.) Örneklem uzayı Borel kümelerinden oluşuyorsa, yani $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ veya $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_n)$ üzerinde tanımlı ise o zaman "olasılık yoğunluk fonksiyonu" veya "olasılık dağılım fonksiyonu" kullanılarak olasılık ölçüsü hesaplanır.

Tanım 10. ***[Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu]*** *$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa, f fonksiyonuna* Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu *denir [11].*

i) $\forall x$ *için* $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ *dir.*

$B \in \mathscr{B}$ olmak üzere her B Borel kümesi için $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerinden $P(B) = \int_B f(x)dx$ olarak tanımlanan ölçü olasılık aksiyomlarını sağlar. Yani $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ ölçüm uzayı üzerinde olasılık ölçüsüdür.

Tanım 11. ***[Olasılık Dağılım Fonksiyonu]*** ($\mathbb{R}$ *üzerinde tanımlı reel değerli bir $F(x)$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $F(x)$ fonksiyonuna* Olasılık Dağılım Fonksiyonu , Birikimli(Kümülatif) Dağılım Fonksiyonu *veya* Dağılım Fonksiyonu *denir.*

i) $\forall x$ *için* $1 \geqslant F(x) \geqslant 0$

ii) $F(x)$ *, azalmayan bir fonksiyon*

iii) $F(x)$ *, her noktada sağdan sürekli*

iv) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *ve* $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ *dir.*

Dağılım Fonksiyonunu başka bir tanımla şu şekilde tanımlayabiliriz;
$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $X(\omega)$ *olayına karşılık gelen P olasılık ölçüsünü kullanarak*

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

$\forall x$ *için* $F(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leqslant x\})$ *biçiminde tanımlanan fonksiyona* Dağılım Fonksiyonu *denir.*

Teorem 6. ***[Genişletim Teoremi]*** *$\mathscr{C}$,Ω üzerinde tanımlı bir yarı cebir olsun. $\mathscr{C}$ üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu $\mu : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ nin aşağıdaki koşulları sağladığını farzedelim.*

i) $\mu(A) \geqslant 0$

ii) $\mu(\Omega) = 1$

iii) *$A_1, A_2, \ldots$ olaylar kümesi $\mathscr{C}$ nin ayrık kümeleri olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{C}$ ve $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$*

Bu taktirde $\mathscr{C}$'nin doğurduğu minimal σ-cebir $\sigma(\mathscr{C})$ üzerinde tanımlanan μ ölçüsünü genişleten olasılık ölçüsü tektir.Bu ölçüyü P ile gösterelim, bu durumda $P(A) = \mu(A)$ dir [13, 19] .

Tanım 12. ***[Hemen Heryerde (h.h.)]*** *$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı özellik için oluşturulan sonlu elemanlı veya sayılabilir sonsuz elemanlı bir alt küme, diğer bir ifade Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir küme dışında özellik doğru oluyorsa bu özelliğe* hemen heryerde (h.h.) *tanımlı özellik denir.*

Tanım 13. ***[Hemen Hemen Kesin Özellik (h.h.k.)]*** *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayı olsun.Bu uzayın tanımlandığı Ω üzerinde verilen bir özellik olasılık ölçüsü sıfır olan bir $N \in \mathscr{A}$ kümesi dışında doğru oluyorsa bu özelliğe* hemen hemen kesin (h.h.k.) *özellik denir.* P-h.h. *ile gösterilir.*

Tanım 14. ***[$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_n)$ Üzerinde Tanımlı Olasılık Yoğunluk ve Olasılık Dağılım Fonksiyonları]***

$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_n)$ n-boyutlu ölçüm uzayında olasılık yoğunluk fonksiyonu ve olasılık dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır [11].

* *n tane değişkene sahip reel değerli integrallenebilir bir f fonksiyonu için*

i) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ *veya* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant_{(h.h.)} 0$

ii) $\int \int \ldots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$
koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu *denir.*

* *n tane değişkene sahip reel değerli bir F fonksiyonu için*

i) $0 \leqslant F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 1$

ii) *$i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere bütün x_i değişkenleri için F fonksiyonu azalmayan fonksiyon* *iii)* *Herhangi bir* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *noktasında bütün* x_i *değişkenleri için F fonksiyonu sağdan sürekli*

iv) $\lim_{min x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *ve* $\lim_{min x_i \to \infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ *koşullarını sağlayan F fonksiyonuna* Kümülatif Dağılım Fonksiyonu *ya da kısaca* Dağılım Fonksiyonu *denir.*

2.3 Rassal Değişkenler

Tanım 15. ***[Rassal Değişken]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun. Bu olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *reel değerli fonksiyon*

$$\forall k \in \mathbb{R} \text{ için } \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant k\} \in \mathscr{A}$$

oluyorsa X fonksiyonuna rassal değişken *denir. Rassal değişkenler ölçülebilir küme fonksiyonlarıdır.*

2.3.1 Ölçülebilirlik Kavramı

Tanım 16. ***[Genel Ölçülebilirlik Kavramı]*** $(\Omega, \mathscr{A})$ *ve* $(\Omega^*, \mathscr{A}^*)$ *iki ölçüm uzayı ve* $f : \Omega \to \Omega^*$ *bu iki uzay arasında tanımlı bir dönüşüm fonksiyonu olsun.* $\forall A^* \in \mathscr{A}^*$ *için* $f^{-1}(A^*) \in \mathscr{A}$ *sağlanıyorsa f fonksiyonunu* $\mathscr{A} \to \mathscr{A}^*$ *ölçülebilir bir fonksiyon olarak ifade edilir.*

Teorem 7. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *reel değerli fonksiyonu* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayında rassal bir değişken olması için gerek ve yeter şart* $\mathscr{A} \longleftrightarrow \mathscr{B}$ *ölçülebilir olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)X$ bir rassal değişken olduğundan $X^{-1}(\mathscr{B}) = X^{-1}(\sigma(J))$ küme fonksiyonu olduğundan küme fonksiyonunun özelliği kullanılarak $X^{-1}(\sigma(J)) \subset \mathscr{A}$ olur.

$(\Leftarrow)$ Benzer şekilde $J \subset \mathscr{B}$ olduğundan $X^{-1}(J) \subset X^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$ □

2.3.2 Rassal Vektörler

Tanım 17. ***[Rassal Vektör]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun. Bu olasılık uzayında* $\mathscr{A} \longleftrightarrow \mathscr{B}_n$ *ölçülebilir bir* $\overrightarrow{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *vektör fonksiyonuna* n-boyutlu rassal vektör *denir.*

Teorem 8. *$\overrightarrow{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektör fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart $\overrightarrow{X}$'in her bileşeni olan $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ değişkenlerinin rassal değişken yani ölçülebilir fonksiyon olmasıdır.*

Teorem 9. *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayı olsun. Bu olasılık uzayında;*

i.) X olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir rassal değişken olsun. Buna göre

$$P_X(B) := P(X^{-1}(\mathscr{B}), B \in \mathscr{B})$$

ile belirlenen küme fonksiyonu $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsüdür.

ii.) $\overrightarrow{X}$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir rassal vektör olmak üzere; $\mathscr{B}_n$ üzerinde

$$P_{\overrightarrow{X}} := P(\overrightarrow{X}^{-1}(\mathscr{B}), B \in \mathscr{B}_n)$$

ile belirlenen küme fonksiyonu $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_n)$ üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsüdür [11].

Teorem 10. ***[Lusin Teoremi]*** *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\delta > 0$ için $[a,b]$ üzerinde tanımlı sürekli öyle bir $\phi(x)$ fonksiyonu bulunabilir ki $\phi(x)$ Lebesgue ölçüsü δ'dan küçük bir küme dışında f fonksiyonuna eşittir.*

2.3.3 Rassal Değişkenler Cebiri

Tanım 18. ***[Rassal Değişkenlerin Pozitif ve Negatif Kısmı]*** *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ bir rassal değişken olmak üzere X rassal değişkeninin 0 dan büyük olan kısmı yani pozitif kısmı X^+ , 0 dan küçük olan kısmı yani negatif kısmı X^- ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$X^+ = max(X,0) = \frac{1}{2}(|X| + X) = \begin{cases} X & X \geqslant 0 \\ 0 & X \leqslant 0 \end{cases}$$

$$X^- = min(X,0) = \frac{1}{2}(|X| - X) = \begin{cases} 0 & X \geqslant 0 \\ -X & X \leqslant 0 \end{cases}$$

Tanımdan dolayı $X^+, X^- \geqslant 0$ ve $X = X^+ - X^-$ eşitliği sağlanır [11].

Teorem 11. ***[Rassal Değişkenlerle İşlemler]*** *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ ve $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ iki rassal değişken ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere;*

i.) $c, X + c, c.X$ rassal değişkendir,

ii.) $X^2, |X|, X^+, X^-$ rassal değişkendir, *iii.)* Ω *üzerinde* $X \neq 0$ *olmak üzere* $1/X$ *rassal değişkendir,*

iv.) Ω *üzerinde* $X \geqslant 0$ *olmak üzere* $\sqrt{X}$ *rassal değişkendir,*

v.) $(X+Y)$, $X.Y$, $X/Y\ (Y \neq 0)$ *rassal değişkendir,*

vi.) $max(X,Y)$ *ve* $min(X,Y)$ *rassal değişkendir*

Teorem 12. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *ve* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bir Borel ölçülebilir fonksiyon olsun. Buna göre ,*

$$f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$$

bir rassal değişkendir.

Teorem 13. ***[Rassal Değişken Dizisinde Supremum-İnfimum]*** *Bir rassal değişken dizisi* $X_n(n = 1,2,\dots)$ *ve* $\forall\omega \in \Omega$ *için* $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ *rassal değişkenleri sınırlı bir sayı dizisi olmak üzere bu dizinin üzerinde noktasal tanımlanan* $sup_n\{X_n(\omega)\}$ *ve* $inf_n\{X_n(\omega)\}$ *değişkenleri için,*

i.) $\sup\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ *ve* $\inf\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ *rassal değişkendir,*

ii.) $\limsup\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ *ve* $\liminf\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ *rassal değişkendir,*

iii.) $\forall\omega$ *için* $lim_{n\to\infty}\{X_n(\omega)\}$ *limiti varsa bu limit de bir rassal değişkendir.*

2.3.4 Basit Rassal Değişken ve Karakteristik Fonksiyon

Tanım 19. ***[Basit Fonksiyon]*** $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tanımlanan rassal değişken (küme fonksiyonu) sonlu sayıda değer alıyorsa bu fonksiyona* "Basit Fonksiyon" *denir.*

Tanım 20. ***[Karakteristik Fonksiyon]*** $A \subset \Omega$ *olmak üzere;*

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona "Karakteristik Fonksiyon" *denir.*

Sonuç 1. $A, B \subset \Omega$ *olmak üzere;*

i.) $\chi_{A\cap B}(\omega) = \chi_A(\omega).\chi_B(\omega) = min(\chi_A(\omega), \chi_B(\omega))$

ii.) $\chi_{A\cup B}(\omega) = \chi_A(\omega) + \chi_B(\omega) - \chi_{A\cap B}(\omega) = max(\chi_A(\omega), \chi_B(\omega))$

Sonuç 2. *$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ basit fonksiyon olsun. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Omega$'nın bölüntüsü vardır ve $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere;*

$$X = c_1.\chi_{A_1} + c_2.\chi_{A_2} + \ldots + c_n.\chi_{A_n}$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 3. *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayı olsun. $A \in \mathscr{A}$ ise χ_A ölçülebilir fonksiyondur.*

Tanım 21. ***[Basit Rassal Değişken]*** *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında $\mathscr{A}$-bölüntüsü verilmiş olsun. X ölçülebilir fonksiyonuna* "Basit Rassal Değişken" *denir.*

Teorem 14. *$X, (\Omega, \mathscr{A})$ üzerinde tanımlanan negatif değer almayan bir rassal değişken olsun.Buna göre oluşturulacak öyle bir $X_1, X_2, \ldots$ basit rassal değişkenler dizisi vardır ki $\forall \omega \in \Omega$ için $0 \leqslant X_1 \leqslant X_2 \leqslant \ldots$ ve $n \longrightarrow \infty$ iken $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$ dir.*

2.4 Matematiksel Beklenti (Beklenen Değer)

$(\Omega, \mathscr{A}$,P) olasılık uzayı olmak üzere bir X rassal değişkenin beklenen değeri Ω örneklem uzayı üzerinde

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Bu integral değerinin bulunabilmesi için bazı temel integral tanımları aşağıda verilmiştir [11] .

2.4.1 Bazı Temel İntegral Tanımları

1. **Riemann İntegrali:** $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere , $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı reel değerli bir fonksiyon $[a, b]$ aralığının sonlu bir parçalanışı olan $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ için

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) \qquad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) \tag{2.8}$$

tanımlamalarına karşılık gelen Alt Darboux ve Üst Darboux toplamları aşağıda verilmiştir.

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x_i \qquad A(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i \tag{2.9}$$

dir.

$\sup \Delta_{x_i} \to 0$ iken $U(P,f) = A(P,f)$ eşitliği varsa $f,[a,b]$ aralığında *Riemann anlamda integrallenebilir* denir ve $U(P,f) = A(P,f) = \int_a^b f(x)dx$ şeklinde gösterilir [2, 10, 11].

2. **Lebesgue İntegrali:** $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ Lebesgue ölçüm uzayında Lebesgue integrali rassal değişkenin tanımına bağlı olarak üç aşamada inşa edilir. Burada tanımlanan Lebesgue integrali aynı zamanda $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan beklenen değer integraline benzerliğinden dolayı Soyut Lebesgue integrali olarak da isimlendirilir.

   i. f negatif olmayan A üzerinde tanımlı basit fonksiyon ve Lebesgue ölçülebilir ikişerli ayrık kümeler olan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin birleşimi A'ya denk olsun. $c_i \geqslant 0\,(i = 1,2,\ldots,n)$ için $f = c_1\chi_{A_1} + c_2\chi_{A_2} + \ldots + c_n\chi_{A_n}$ olmak üzere ;

   $$\int_A f d\lambda := \sum_{i=1}^{n} c_i.\lambda(A_i) \tag{2.10}$$

   olarak tanımlanır.

   ii. f negatif olmayan Lebesgue ölçülebilir A üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. A üzerinde tanımlanan $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ basit fonksiyonlar dizisi vardır ki $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ dir.Bu durumda;

   $$\int_A f d\lambda := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\lambda \tag{2.11}$$

   dir. Ayrıca bütün basit fonksiyonların kümesi $\mathscr{S}_+$ içinde tanımlanan ϕ basit fonksiyonları için;

   $$\int_A f d\lambda = \sup_{0\leqslant\phi\leqslant f} \int_A \phi d\lambda \tag{2.12}$$

   şeklinde de verilebilir.

   iii. f , A üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazılsın. Bu taktirde ;

   $$\int_A f d\lambda := \int_A f^+ d\lambda - \int_A f^- d\lambda \tag{2.13}$$

   şeklinde tanımlanır. Burada $\int_A f^+ d\lambda$ ve $\int_A f^- d\lambda$ integralleri sonlu ise $\int_A f d\lambda$ de sonludur ve o zaman f fonksiyonuna *Lebesgue anlamda integrallenebilir* bir fonksiyon denir[2, 10, 11].

3. **Riemann-Stieltjes İntegrali:** $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere f ve g, [a,b] kapalı aralığında tanımlı iki reel değerli fonksiyon ve g artan olsun. [a,b] kapalı aralığının

   $$\tau_n : a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b \tag{2.14}$$

şeklindeki parçalanışı ve

$$\sigma_n : t_{i-1} \leqslant y_i \leqslant t_i \qquad (i = 1,2,3,\dots,n) \tag{2.15}$$

ara parçalanması için

$$\Delta_i = t_{i-1} - t_i, \qquad \Delta_i g = g(t_i) - g(t_{i-1}) \tag{2.16}$$

$$mesh(\tau_n) := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta_i = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (t_i - t_{i-1}) \tag{2.17}$$

karşılık gelen Riemann-Stieltjes Toplamı;

$$S_n = S_n(f,\tau_n,\sigma_n) := \sum_{i=1}^{n} f(y_i).\Delta_i g = \sum_{i=1}^{n} f(y_i).[g(t_i) - g(t_{i-1})] \tag{2.18}$$

eşitliliği ile tanımlanır.
$mesh(\tau_n) \to 0$ iken $S_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(y_i).\Delta_i g$ limit değeri τ_n ve σ_n'den bağımsız limiti var ve sonlu ise bu limit değerine f fonksiyonunun [a,b] üzerinde g fonksiyonuna göre *Riemann-Stieltjes(R.S) integrali* denir ve

$$S = \int_a^b f(t)dg(t) \tag{2.19}$$

ile gösterilir.Burada f fonksiyonuna integrant, g fonksiyonuna integratör denir [2, 10, 11].

2.4.2 Beklenen Değer ve Özellikleri

$(\Omega,\mathscr{A}$,P) olasılık uzayında bir X rassal değişkenin beklenen değeri Ω örneklem uzayı üzerinde

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)dP \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanmıştı.Lebesque integralinde olduğu gibi X rassal değişkenin yapısına göre $E(X)$'i üç farklı şekilde hesaplanır.

i. $(\Omega,\mathscr{A}$,P) olasılık uzayında X rassal değişkeni basit ve negatif değer almayan fonksiyon olsun. X rassal değişkenini $\mathscr{A}$ ölçülebilir ikişerli ayrık kümeler olan $A_1, A_2, \dots, A_n$ ve $c_i \geqslant 0\,(i = 1,2,\dots,n)$ için $X = c_1\chi_{A_1} + c_2\chi_{A_2} + \dots + c_n\chi_{A_n}$ şeklinde yazarsak;

$$E(X) = c_1P(A_1) + c_2P(A_2) + \dots + c_nP(A_n) = \sum_{i=1}^{n} c_iP(A_i) \geqslant 0 \tag{2.21}$$

dir.

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında $X, Y \geqslant 0$ basit rassal değişkenler $c \geqslant 0, (c \in \mathbb{R})$ olmak üzere ;

1. $E(cX) = cE(X)$,
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,
3. $X \geqslant Y$ ise $E(X) \geqslant E(Y)$,
4. $X_1, X_2, \ldots$ ve Y basit rassal değişkenler için $X_1 \leqslant X_2 \leqslant \ldots$ olmak üzere $0 \leqslant Y \leqslant \lim_{n\to\infty} X_n$ eşitsizliği için

$$0 \leqslant E(Y) \leqslant \lim_{n\to\infty} E(X_n)$$

dir [27].

ii. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ olasılık uzayında X rassal değişkeni negatif olmayan $\mathscr{A}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu uzayda tanımlanan basit fonksiyonlardan oluşan $\{X_n\}$ dizisi azalmayan ve negatif olmayan bir rassal değişken dizisi olsun. Bu dizi için $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ eşitliği sağlansın. Bu taktirde;

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n) \tag{2.22}$$

dir.

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında X, Y negatif olmayan rassal değişkenler ve $c \geqslant 0, (c \in \mathbb{R})$ olmak üzere ;

1. $E(cX) = cE(X)$,
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,
3. $X \geqslant Y$ ise $E(X) \geqslant E(Y)$ dir [27].

iii. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ olasılık uzayında X bir rassal değişken olmak üzere $X = X^+ - X^-$ (Tanım 18) şeklinde verilsin. Burada X^+, X^- negatif olmayan rasssal değişkenlerdir. Bu takdirde $E(X^+)$ ve $E(X^-)$ her ikisi de aynı anda $+\infty$ olmadığı sürece;

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-) \tag{2.23}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $E(X)$'in alabileceği değerler ile ilgili aşağıdaki durumlar gözönünde bulundurulmalıdır.

1. $E(X^+) < \infty$ ve $E(X^-) < \infty$ ise $E(X) < \infty$
2. $E(X^+) = \infty$ ve $E(X^-) < \infty$ ise $E(X) = \infty$

3. $E(X^-) = \infty$ ve $E(X^+) < \infty$ ise $E(X) = -\infty$
4. $E(X^+) = E(X^-) = \infty$ ise $E(X)$ tanımsızdır [27].

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında X, Y rassal değişkenler ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $E(X) < \infty$ ise;

1. $E(cX) = cE(X)$,
2. $E(X), E(Y) < \infty$ ise $E(X+Y) < \infty$ ve $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,
3. $E(X), E(Y)$ mevcut olmak şartıyla $X \geqslant Y$ ise $E(X) \geqslant E(Y)$,
4. $E(X) < \infty$ ise $E(|X|) < \infty$,
5. $E(X) < \infty$ ise $|E(X)| \leqslant E(|X|)$,
6. $E(Y) < \infty$ ve $|X| \leqslant Y$ ise $E(X) < \infty$,
7. X rassal değişkeni sınırlı ise $E(X) < \infty$ dir [27].

2.4.3 Yakınsama Teoremleri

Beklenen değerin hesaplanması sırasında karşılaşılacak ana sorunlardan biri limitin hangi koşullar altında integralle yer değiştirebildiğinin tespit edilmesidir. Bu nedenle aşağıdaki (2.24) eşitliğinin sağlandığı durumların belirlenmesi için yakınsaklık teoremlerini inceleyeceğiz.

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n) \tag{2.24}$$

Teorem 15. ***[Monoton Yakınsaklık Teoremi]*** *Ω üzerinde tanımlanan rassal değişkenler $X_1, X_2, \ldots$ için $0 \leqslant X_1 \leqslant X_2 \leqslant \ldots$ eşitsizliği mevcut ve $\forall \omega \in \Omega$ için $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ olsun. Bu taktirde*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n) = E(X) \tag{2.25}$$

dir [10, 11].

Teorem 16. ***[Beppo-Levi Teoremi]*** *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında $\{X_k\} : \Omega \to [0, \infty]$ rassal değişkenler olmak üzere;*

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} \{X_k\} dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int \{X_k\} dP \tag{2.26}$$

dir [10, 11].

Sonuç 4. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayında* $\{X_k\} : \Omega \to [0, \infty]$ *rassal değişkenler olmak üzere* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n, \Omega$ *üzerinde yakınsak ise;*

$$E(\sum_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n) \tag{2.27}$$

dir [10, 11].

Teorem 17. ***[Fatou Lemması]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayında* $\{X_k\} : \Omega \to [0, \infty]$ *rassal değişkenler olmak üzere;*

$$\int \liminf_{n\to\infty} \{X_k\} dP \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \{X_k\} dP \tag{2.28}$$

dir [10, 11].

Teorem 18. ***[Baskın Yakınsaklık Teoremi]*** Ω *üzerinde tanımlanan rassal değişkenler* $X_1, X_2, \ldots$ X, Y *verilmiş olsun.* $E(Y) < \infty$ *için* $|X_n| \leqslant Y, (n = 1, 2, \ldots)$ *ve* $\forall \omega \in \Omega$ *için* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ *koşulları sağlanırsa ;*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n) = E(X) \tag{2.29}$$

dir [10, 11].

Teorem 19. ***[Sınırlı Yakınsaklık Teoremi]*** Ω *üzerinde tanımlanan rassal değişkenler* $X_1, X_2, \ldots$ X *ve* $c \in \mathbb{R}$ *verilmiş olsun.* $|X_n| \leqslant c, (n = 1, 2, \ldots)$ *ve* $\forall \omega \in \Omega$ *için* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ *koşulları sağlanırsa ;*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n) = E(X) \tag{2.30}$$

dir [10, 11].

2.4.4 Reel Sayılar Üzerinde Beklenen Değer

Bir olasılık uzayında tanımlanan beklenen değerin $\mathbb{R}$ üzerinde hesaplanması aşağıdaki teoremler aracılığıyla kurulur [11].

Teorem 20. $\mathbb{R}$ *üzerinde verilen J kümeleri için;*$E(J) = \int_{\mathbb{R}} J(x) dP_x = \int_{\mathbb{R}} x dP_x$ *iken*

a. $E(X)$*'in mevcut olması için gerek ve yeter koşul* $E(J)$*'nin varolmasıdır.*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dP_x \tag{2.31}$$

dir [11].

b. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *Borel ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere* $E(g(X))$*'in mevcut olması için gerek ve yeter koşul* $E(g(J))$*'nin varolmasıdır.*

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X)dP = \int_{\mathbb{R}} g(x)dP_x \tag{2.32}$$

dir.

Sonuç 5. *X rassal değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonunun uyardığı olasılık ölçüsünün J kümeleri altındaki kısıtlaması,yani* $F_X = P_{X|J}$ *ile hesaplanır.*

Teorem 21. Ω *üzerinde* $a < X \leqslant b$ *olmak üzere;*

$$E(X) = \int_a^b xdF_X \tag{2.33}$$

dir.

Teorem 22. *X rassal değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu F ve* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon olsun. Buna göre;*

$$E(g(X)) < \infty \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} gdF \tag{2.34}$$

genelleştirilmiş Riemann-Stieltjes integrali mutlak olarak yakınsaktır ve

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} gdF \tag{2.35}$$

dir.

2.4.5 Momentler

Teorem 22'ye göre bir $g(x)$ fonksiyonunun beklenen değerinin hesaplanmasının yöntemi verilmişti. Burada $g(x)$ fonksiyonunu özel olarak $g(x) = x^r$ ve X rassal değişkeninin beklenen değerine $E(X) = \mu$ dersek, $\mu_r^{'} := E(X^r)$ ile tanımlanan beklenen değere *r. moment* denir. Ayrıca $\mu_r := E\big((X - E(X))^r\big) = E\big((X-\mu)^r\big)$ ile verilen beklenen değere ise *r. merkezileştirilmiş moment* denir [11].

$r = 1$ için $\mu_1^{'} = E(X)$ ve $\mu_1 = 0$ dır.$r = 2$ için $\mu_2^{'} = E(X^2)$ ve $\mu_2 = E\big((X-\mu)^2\big) = \sigma_X^2 = V(X) \geqslant 0$ dır. $\mu_2 = \sigma_X^2$*'ye varyans* denir.

Sonuç 6. *i)* $a, b \in \mathbb{R}$ *için* $V(aX+b) = a^2V(X)$

ii) $V(X) = E\big((X-\mu)^2\big) = E(X^2) - \mu^2$ *dir.*

Ayrıca X,Y rassal değişkenleri için *kovaryans fonksiyonu*

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} := E\big((X-\mu_x)(Y-\mu_Y)\big) \tag{2.36}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 7. *X_i, Y_j rassal değişkenler olmak üzere $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,\dots,m$ ve $j = 1,2,\dots,n)$ için*

$$Cov\Big(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov(X_i, Y_j) \tag{2.37}$$

$$V\Big(\sum_{i=1}^{m} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} a_i^2 V(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} a_i b_j Cov(X_i, X_j) \tag{2.38}$$

dir.

2.5 Çarpım Uzayında Olasılık

$(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ ve $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ iki ölçüm uzay olmak üzere $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ şeklinde tanımlanan kartezyen çarpım bölgesi bir yarı cebirdir. Bu yarı cebir tarafından doğurulan minimal σ-cebir $\sigma(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2)$ cebrine *$\mathscr{A}_1$ ve $\mathscr{A}_2$'nin tensör çarpımı* denir ve $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ ile gösterilir. Bundan dolayı $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ çiftide bir ölçüm uzaydır.

Bu ölçüm uzayında $\omega_1 \in \Omega_1$ ve $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ için A_{ω_1} olarak isimlendirilen kümeye A kümesinin ω_1 kesiti denir.

$$A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 | (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

Benzer şekilde ; $\omega_2 \in \Omega_2$ ve $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ için A_{ω_2} olarak isimlendirilen kümeye A kümesinin ω_2 kesiti denir.

$$A_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 | (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

dir. Ayrıca $X : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ olmak üzere $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ ölçüm uzayında rassal değişken olsun. X rassal değişkeninin ω_1 ve ω_2'ye göre kesitleri;

$$X_{\omega_1} = \Omega_2 \to \mathbb{R} \qquad X_{\omega_1}(\omega_2) = X(\omega_1, \omega_2)$$

$$X_{\omega_2} = \Omega_1 \to \mathbb{R} \qquad X_{\omega_2}(\omega_1) = X(\omega_1, \omega_2)$$

dir.

Tanım 22. ***[Geçiş Olasılığı]*** *$(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ ve $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ iki ölçüm uzayı olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlara* geçiş olasılığı *denir.*

i. $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ *için* $P_2^1(\omega_1, \cdot), (\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ *üzerinde olasılık ölçüsüdür.*

ii. $\forall A_2 \in \mathscr{A}_2$ *için* $P_2^1(\omega_1, \omega_2), (\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ *üzerinde ölçülebilir bir fonksiyondur* [27].

Burada $P_2^1(\omega_1, \omega_2)$ *ile gösterilen dönüşüm fonksiyonu*

$$P_2^1 : (\Omega_1, \mathscr{A}_2) \to [0, 1]$$

olacak şekilde tanımlanır.

Yukarıda verilen tanımlar doğrultusunda çarpım uzayında olasılık ölçüsü aşağıdaki şekilde hesaplanır.

Tanım 22. de verilen şartları sağlayan $P, (\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ üzerinde bir olasılık ölçüsü olmak üzere;

i. $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ üzerinde

$$P(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} P_2^1(\omega_1, A_2) dP_1(\omega_1) \qquad (A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2) \tag{2.39}$$

eşitliğini sağlayan tek bir P olasılık ölçüsü vardır.

ii. $X, (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ ölçüm uzayı üzerinde tanımlı pozitif değerli veya integrali var olan bir rassal değişken olmak üzere,

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X dP = \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} X_{\omega_1}(\omega_2) P_2^1(\omega_1, d\omega_2) \Big) dP_1(\omega_1) \tag{2.40}$$

dir. Yani,

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X dP = \int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1) \Big(\int_{\Omega_2} P_2^1(\omega_1, d\omega_2) X_{\omega_1}(\omega_2) \Big) \tag{2.41}$$

dir.

Teorem 23. ***[Fubini Teoremi]*** $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, P_1)$ *ve* $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, P_2)$ *iki olasılık uzayı olmak üzere;*

i. $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ *ölçüm uzayında*

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2) \qquad (A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2) \tag{2.42}$$

eşitliğini sağlayan olasılık ölçüsü tek türlüdür ve $P_1 \otimes P_2$ *ile gösterilir.*

ii. $X, (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ *ölçüm uzayı üzerinde tanımlı pozitif değerli veya integrali var olan bir rassal değişken olmak üzere,*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X dP = \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} X_{\omega_1}(\omega_2) dP_2(\omega_2) \Big) dP_1(\omega_1) \tag{2.43}$$

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X dP = \int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} X_{\omega_2}(\omega_1)dP_1(\omega_1)\Big)dP_2(\omega_2) \tag{2.44}$$

dir. Bu şekilde elde edilen $(\Omega_1\times\Omega_2, \mathscr{A}_1\otimes\mathscr{A}_2, P_1\otimes P_2)$ *olasılık uzayına* $(\Omega_1,\mathscr{A}_1)$ *ve* $(\Omega_2,\mathscr{A}_2)$ *olasılık uzaylarının çarpım uzayı denir*[10, 11].

Tanım 23. ***[$\mathscr{L}^p$ Uzayında Olasılık]*** $(\Omega,\mathscr{A},P)$ *olasılık uzayı ve* $p\geqslant 1$ *gerçel sayı olmak üzere; bu olasılık uzayı üzerinde tanımlı ve p. kuvveti sonlu beklenen değere sahip rassal değişkenlerin oluşturduğu uzay* $\mathscr{L}^p$ *olarak tanımlanır ve*

$$\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{A},P) = \{X|\int_\Omega |X|_p dP < \infty\} \tag{2.45}$$

gösterilir. Ayrıca $\mathscr{L}^p$ *içinde verilen denklik sınıfları tarafindan oluşturulan uzay ise* $L^p(\Omega,\mathscr{A},P)$ *sembolü ile gösterilir.*

Tanım 24. L^p *uzayında gerçel değerli* $\|\cdot\|$ *fonksiyonu şu şekilde tanımlayalım,*

$$\| X \|_p := \Big(\int_\Omega |X|^p dP\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(E(|X|)\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2.46}$$

dir [2, 11].

2.6 Olasılık Uzayında Eşitsizlikler

1. **Chebyshev Eşitsizliği:** f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde azalmayan bir fonksiyon ve X rassal bir değişken olsun. $(f(0)\geqslant 0)$ Bu taktirde;

$$E\big(f(|X|)\big) \geqslant f(t)P\big(|X|\geqslant t\big) \tag{2.47}$$

dir.Ayrıca X rassal değişkeninin ikinci momenti sonlu ve $t>0$ ise,

$$P\big(|X-E(X)|\geqslant t\big) \leqslant \frac{V(X)}{t^2} \tag{2.48}$$

dir. $t = k\sqrt{V(X)} = k\sigma_X$ seçilirse

$$P\big(|X-E(X)|\geqslant k\sigma_X\big) \leqslant \frac{1}{k^2} \tag{2.49}$$

elde edilir.

2. $[1,\infty]$ aralığından seçilen p,q,r sayıları için $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ sağlanırsa

$$\| XY \|_r \leqslant \| X \|_p \| Y \|_q \tag{2.50}$$

dir.

3. **Hölder Eşitsizliği:** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $X \in L^p, Y \in L^q$ ise $XY \in L^1$ ve

$$\int_\Omega |XY|dP = \| XY \|_1 \leqslant \| X \|_p \| Y \|_q \tag{2.51}$$

dir.

4. **Schwarz Eşitsizliği:**Hölder Eşitsizliğinde $p=q=2$ alınırsa;

$$E(|XY|) = \| XY \|_1 \leqslant \| X \|_2 \| Y \|_2 \tag{2.52}$$

olur.

5. **Minkowski Eşitsizliği:**

$$\| X+Y \|_p \leqslant \| X \|_p + \| Y \|_p \tag{2.53}$$

dir.

6. **Jensen Eşitsizliği:** $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks bir fonksiyon olmak üzere $X \in L^1$ için

$$\phi(\| X \|_1) = \phi(E(|X|)) \leqslant E(\phi(X)) \tag{2.54}$$

dir.

7. X bir rassal değişken olmak üzere $1 < p < q$ için

$$\| X \|_1 \leqslant \| X \|_p \leqslant \| X \|_q \leqslant \| X \|_\infty \tag{2.55}$$

ve

$$L_\infty \subset L_q \subset L_p \subset L_1 \tag{2.56}$$

dir.

2.7 Rassal Değişken Dizilerinde Yakınsama

Tanım 25. ***[Noktasal Yakınsaklık]*** *Ω üzerinde $\{X_n\}\,(n=1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisi ve X bir rassal değişken olsun.*

i. *Sabit bir $\omega \in \Omega$ için $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ oluyorsa $\{X_n\}$ dizisi X'e ω 'ya göre düzgün yakınsar denir.*

ii. *$\forall \omega \in \Omega$ için $\{X_n\}$ dizisi X'e ω 'ya göre düzgün yakınsıyorsa $\{X_n\}$ dizisi X'e Ω üzerinde yakınsar denir.*

iii. *Bir $N \in \mathscr{A}$ kümesi için $P(N)=0$ oluyorsa ve $\forall \omega \in N^c$ için $\{X_n\}$ dizisi X'e ω 'ya göre düzgün yakınsıyorsa $\{X_n\}$ dizisi X'e hemem hemen kesin (h.h.k.) yakınsar denir.*

Tanım 26. ***[Olasılıkta Yakınsaklık]*** *$\{X_n\}\,(n=1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisinin rassal bir değişken olan X'e yakınsaması ile ilgili olarak; $\forall \varepsilon > 0$ için, $\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega | X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon)\}) = 1$ ise $\{X_n\}$ rassal değişken dizisi X'e olasılıkta yakınsar denir ve $\{X_n\} \xrightarrow{P} X$ sembolü ile gösterilir.*

$$\{X_n\} \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \{X_n\} - X \xrightarrow{P} 0 \tag{2.57}$$

dir.

Teorem 24. *Bir $\{X_n\}\,(n=1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisinin X rassal bir değişkenine (h.h.k.) olarak yakınsıyorsa olasılıkta da yakınsar.*

$$\{X_n\} \to X(h.h.k.) \Rightarrow \{X_n\} \xrightarrow{P} X(n \to \infty) \tag{2.58}$$

Teorem 25. *Bir $\{X_n\}\,(n=1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisinin (h.h.k.) yakınsaklığı için yeter şart:*

$$\exists \varepsilon_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n) < \infty \tag{2.59}$$

dir.

Teorem 26. ***[Cauchy Kriterleri]***

i. *Bir $\{X_n\}\,(n=1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisinin (h.h.k.) olarak bir rassal değişkene yakınsaması için gerek ve yeter şart dizinin Cauchy dizisi olmasıdır. Yani $m,n \to \infty$ için $X_m - X_n \to 0(h.h.k.)$ sağlanmasıdır.*

ii. *Bir $\{X_n\}\,(n=1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisinin bir rassal değişkene olasılıkta yakınsaması için gerek ve yeter şart dizinin Cauchy dizisi olmasıdır. Yani $m,n \to \infty$ için $X_m - X_n \xrightarrow{P} 0$ sağlanmasıdır.*

Teorem 27. ***[Zayıf Büyük Sayılar Kanunu]*** *$X_1, X_2, \ldots$ bağımsız özdeş dağılımlı ve sonlu ikinci mertebeden momentleri olan bir rassal değişkenler dizisi olsun.Bu dizinin elemanlarının beklenen değeri $E(X_n) = \mu$ ile gösterilsin. Buna göre,*

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \tag{2.60}$$

dir [4, 7, 8].

Teorem 28. ***[Markov Şartı]*** *$X_1, X_2, \ldots$ bağımsız rassal değişkenler $E(X_k) = \mu_k$ ve $V(X_k) = \sigma_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = 0 \tag{2.61}$$

eşitliğine Markov Şartı *denir.Bu şartı sağlayan $\{X_n\}$ dizisíde zayıf büyük sayılar kanununu sağlar.*

Teorem 29. ***[Kuvvetli Büyük Sayılar Kanunu]*** *$X_1, X_2, \ldots$ bağımsız özdeş dağılımlı bir rassal değişkenler dizisi ve ortalaması μ olsun. Eğer $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ ortalaması μ ye yakınsıyorsa ;*

$$P(lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \mu) = 1 \tag{2.62}$$

dir [4, 7, 8].

Tanım 27. ***[Olasılıkta Sınır]*** *Her $\varepsilon > 0$ için bir $a > 0$ sayısı*

$$P(|X| > a) < \varepsilon \tag{2.63}$$

olacak şekilde varsa X rassal değişkenine Olasılıkta sınırlı *denir.*

Teorem 30. *$\{X_n\}$ ve $\{Y_n\}$ iki rassal değişken dizisi ve $n \to \infty$ için $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$ sağlasın. Buna göre;*

1. *$c \in \mathbb{R}$ için $cX_n \xrightarrow{P} cX$*
2. *$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$*
3. *$X_nY_n \xrightarrow{P} XY$*
4. *$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{X}{Y}$ ve $Y_n \neq 0(h.h.k.), Y \neq 0(h.h.k.)$ dir* [11].

Teorem 31. ***[Slutsky Teoremi]*** *$n \to \infty$ için $X_n \xrightarrow{P} X$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olmak üzere $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ dir.*

Tanım 28. ***[L^p'de Yakınsama]*** *$\{X_n\}, (n = 1, 2, \ldots)$ rassal değişken dizisi L^p içinde bir dizi olsun. $n \to \infty$ için $\| X_n - X \|_p \to 0$ sağlanırsa ($p \geqslant 1$) $\{X_n\}$ dizisi L^p'de (p.ortalamada) X'e yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{L^p} X$ ile gösterilir. Ayrıca*

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Leftrightarrow E(|X_n - X|^p) \to 0 \tag{2.64}$$

dir [4, 7, 8, 11].

Teorem 32. *X sonlu bir beklenen değere sahip rassal değişken olmak üzere; $(E(|X| < \infty)$*

i. $A \in \mathscr{A}, P(A) = 0$ *ise* $\int_A X dP = 0$,

ii. $\lim_{n\to\infty} \int_{\{|X|>n\}} X dP = 0$,

iii. $A_n \in \mathscr{A}, (n = 1, 2, \ldots), \lim_{n\to\infty} P(A) = 0$ *ise* $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} X dP = 0$ *dir.*

Tanım 29. ***[Dağılımda Yakınsama]*** *$X_1, X_2, \ldots$ ve X rassal değişkenler ve bu rassal değişkenlerin kümülatif dağılım fonksiyonları$F_1, F_2, \ldots$ ve F olsun. Eğer $F(X)$'in her süreklilik noktasında* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ *ise X_n dizisi X'e* Dağılımda yakınsar *denir ve $X_n \xrightarrow{d} X$ şeklinde gösterilir.*

Teorem 33. *$\{X_n\}$ ve $\{Y_n\}, (c \in \mathbb{R})$ iki rassal değişken dizisi ve $n \to \infty$ için $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} c$ sağlasın. Buna göre;*

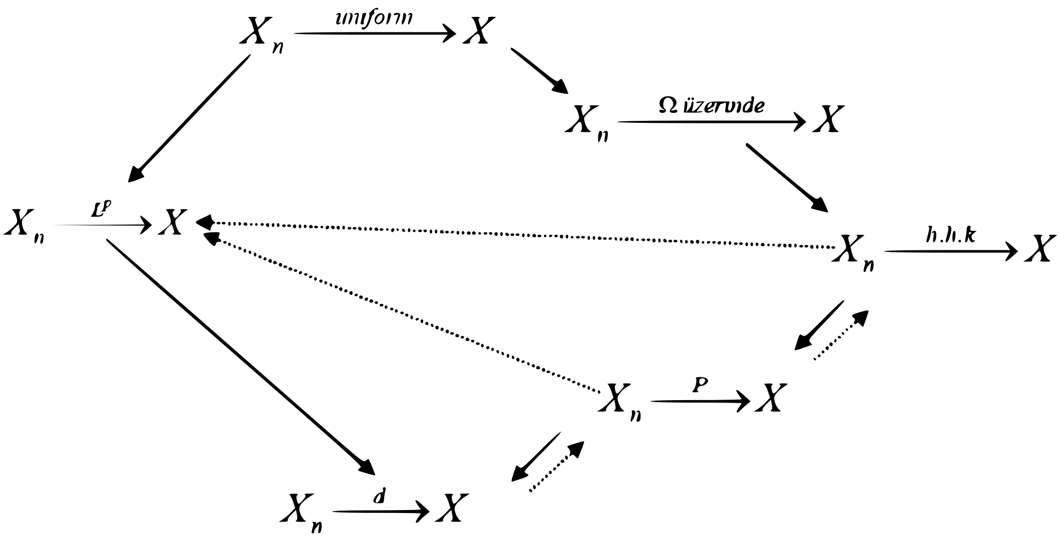
1. $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
2. $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
3. $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$ *ve* $c \neq 0$ *dir.*

Yakınsamalar arasındaki ilişkiyi veren çizelge aşağıda verilmiştir [11].

2.8 Koşullu Beklenen Değer

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında $A \in \mathscr{A}$ olayı koşulu altında başka bir $B \in \mathscr{A}$ olayının gerçekleşme olasılığı $P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ idi. Benzer şekilde bir $A \in \mathscr{A}$ olayı koşulu altında bir X rassal değişkeninin beklenen değeri

$$E(X|A) := \int_\Omega X dP_A = \frac{1}{P(A)} \int_A X dP \tag{2.65}$$



Şekil 2.1: Yakınsamalar Arasındaki ilişkiler

şeklinde tanımlanır.

$\mathscr{A}$'nın bir parçalanışı (bölüntüsü) $\mathscr{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ olsun. $\mathscr{C}$ bölüntüsü ile koşullu beklenen değeri olan

$$E(X|\mathscr{C})(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(A_n)} \Big(\int_{A_n} X dP \Big) \chi_{A_n}(\omega) \tag{2.66}$$

şeklinde tanımlanır.

2.9 Bazı Önemli Dağılımlar

Olasılık ve İstatistikte kullanılan bazı dağılımlar aşağıda verilmiştir [1, 4, 11, 27].

1. **Bernouilli Dağılımı:** Bir deneyin sadece iki farklı sonucu varsa bu deneye Bernouilli deneyi denir.Genel olarak "başarılı" veya "başarısız" diye tanımlanabilir. Örnekleme uzayı $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ şeklindedir. Deneyin başarılı olma sayısı X ise;

$$P(X = x) = p^x q^{1-x}, (x = 0, 1)$$

$$E(X) = p, \qquad V(X) = pq \tag{2.67}$$

dir.

2. **Binom Dağılımı:**Bir Bernouilli deneyinin n defa tekrar edilmesi sonucu oluşan örnek-

leme uzayıdır. Tekrarlanan olayda x defa başarı için ;

$$P(X=x)=\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^x q^{n-x}, (x=0,1,\ldots,n)$$

$$E(X)=np, \qquad V(X)=npq \tag{2.68}$$

dir.

3. **Çok Terimli Dağılım:**$\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$ bir deneyin ayrık olayları $\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$ bağımsız rassal değişkenleri olayların gözlem sayıları olsun. $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ ve $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ olmak üzere ;

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_k=x_k)=\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k} \tag{2.69}$$

4. **Geometrik Dağılım:**Bir Bernouilli deneyinin n defa denenmesi sonucu istenilen durumun ilk defa n.denemede ortaya çıkma durumudur.Dolayısıyla;

$$P(X=x)=pq^{x-1}, (x=0,1,\ldots)$$

$$E(X)=\frac{1}{p}, \qquad V(X)=\frac{q}{p^2} \tag{2.70}$$

dir.

5. **Poisson Dağılımı:** Sürekli bir zaman aralığı içinde bir olayın kesikli gözlem sayısına sahip gerçekleşen olayları inceleyen dağılımdır.$\lambda > 0$ belirlenen bir zaman aralığında ortalama gözlem sayısı olsun. X sürekli bir zaman aralığında gözlem sayısını veren rassal değişken ise;

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x=0,1,2,\ldots$$

$$E(X)=\lambda, \qquad V(X)=\lambda \tag{2.71}$$

dir.

6. **Düzgün Dağılım:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $a,b \in \mathbb{R}$ ve $a<b$ olmak üzere;

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{2.72}$$

ise X rassal değişkenine (a,b) aralığında düzgün dağılımına sahip denir.

$$E(X)=\frac{a+b}{2}, \qquad V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

dir.

7. **Gamma Dağılımı:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{2.73}$$

ise X rassal değişkenine Gamma dağılımına sahip denir.

$$E(X) = \alpha\beta, \qquad V(X) = \alpha\beta^2$$

dir.

Hatırlatma: Gamma Fonksiyonu;

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds, x > 0$$

ve

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma(x+1) \approx (\frac{x}{e})^x \sqrt{2\pi x}$$

dir.

8. **Üstel Dağılım:**X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu Gamma dağılımında $\alpha = 1$ alınırsa;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{2.74}$$

ise X rassal değişkenine Üstel dağılımına sahip denir.

$$E(X) = \beta, \qquad V(X) = \beta^2$$

dir.

9. **Ki-Kare Dağılımı:**X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu Gamma dağılımında $\alpha = \frac{p}{2}, \beta = 2$ alınırsa;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{p}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}}{2^{\frac{p}{2}}\Gamma(\frac{p}{2})} & x > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{2.75}$$

ise X rassal değişkenine Ki-Kare dağılımına sahip denir.Dağılımın serbestlik derecesi p ve dağılımın gösterimi $X \backsim \chi_p^2$ şeklindedir.

$$E(X) = p, \qquad V(X) = 2p$$

dir.

10. **Weibull Dağılımı:**Xrassal değişkeni Üstel dağılıma sahip olsun.$\gamma > 0$ ve $Y = X^{\gamma}$ olmak üzere Y'nin olasılık dağılım fonksiyonu;

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\beta} y^{\gamma-1} e^{\frac{-y^{\gamma}}{\beta}} & y > 0, \beta > 0, \gamma > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{2.76}$$

ise Y rassal değişkenine Weibull Dağılımına sahip denir.

$$E(Y) = \beta^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma(\frac{1}{\gamma}+1), \qquad V(Y) = \beta^{\frac{2}{\gamma}} [\Gamma(\frac{2}{\gamma}+1) - \Gamma(\frac{1}{\gamma}+1)^2]$$

dir.

11. **Beta Dağılımı:**Beta fonksiyonu Analiz derslerinde

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

şeklinde verilmiştir.Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi ise

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

dır.
X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{2.77}$$

ise X rassal değişkenine Beta dağılımına sahip denir.

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

dir.

12. **Cauchy Dağılımı:**X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\theta)^2} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.78}$$

ise X rassal değişkenine Cauchy dağılımına sahip denir. Cauchy dağılımında moment yoktur.

13. **Normal Dağılım:** $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.79}$$

ise X rassal değişkeni Normal dağılıma sahip denir. $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir. Ayrıca $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ için normal dağılıma özel olarak Standart Normal Dağılım denir. $N(0,1)$ şeklinde ifade edilir. Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ise;

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad z \in \mathbb{R} \tag{2.80}$$

dir.Merkezi Limit Teoremine göre ortalamada birçok dağılım normal dağılıma yakınsar.

14. **Log-Normal Dağılım:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.81}$$

verilmişse Log-normal dağılımına sahiptir denir.

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \qquad V(X) = e^{\mu+\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$$

dir.

15. **Laplace Dağılımı:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} & \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{2.82}$$

ise X rassal değişkenine Beta dağılımına sahiptir denir.

$$E(X) = \alpha, \qquad V(X) = 2\beta^2$$

3. STOKASTİK SÜREÇLER

Günlük yaşamımız bir zaman akışı içinde olan olaylar zinciridir. Bu zincirde alınacak kararlarda süreçlerin iyi incelenmesi gerekir. Bu ihtimal içeren süreçleri stokastik süreçler olarak ifade ederiz [9, 17, 20, 21, 23, 25, 29].

3.1 Stokastik Sürecin Tanımı

Tanım 30. ***[Stokastik Süreçler]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayında tanımlanacak olan*

$$(\omega, t) \to X(\omega, t) \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

dönüşümüne stokastik süreç *denir. Bu dönüşümde* Ω *örneklem uzayı iken* T *olayın gerçekleştiği zamanı ifade eden indis kümesidir.*X *iki değişkenli bir rassal değişken olup ilk bileşeni örneklem uzayından alınırken ikinci bileşen zaman indisinden alınan gerçel değerli fonksiyondur.* $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$

Stokastik süreçler iki değişken açısından incelenirken eğer zaman değişkeni sabitlenirse aynı anda örneklem uzayda olan olaylar incelenir bu da $X_t(\omega)$ şeklinde rassal değişkendir. Eğer ω değişkeni sabitlenirse o zamanda bir olayın zamana bağlı değişimini inceleyen $X_\omega(t)$ şeklinde rassal fonksiyondur[9] .

3.1.1 Sonlu Boyutlu Dağılımlar

Tanım 31. ***[Sonlu Boyutlu Dağılımlar]*** T zaman indis kümesi $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$ sıralı değerleri için $I = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\} \subset T$ olan bir indis kümesi olmak üzere $\forall t_i \in I$ *karşılık gelen* X_{t_i} *rassal değişkenlerinin oluşturduğu rassal vektör* $\overrightarrow{X_I} := (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ *olsun.*

Burada tanımlanan $\overrightarrow{X_I}$ *vektörüne karşılık gelen olasılık dağılımına stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılımı denir,* $P_I := P_{\overrightarrow{X_I}}$ *ile gösterilir.*

$\{P_I\}_{I \in \mathscr{I}}$ *ifadesi ile sonlu boyutlu dağılımların ailesini gösterilir.*

I ve J sonlu ve sıralı iki indis kümesi $I \subset J$ olmak üzere $P_I = P_{J|I}$ dir. Yani P_I, P_J dağılımın I

indis kümesine göre kısıtlanması denir [11].

3.1.2 Kovaryans Fonksiyonu

Sonlu boyutlu bir X süreci için $I = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\} \in \mathscr{T}$ ve $\overrightarrow{X_I} := (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ olmak üzere;

$$\mu_I = \mu_{\overrightarrow{X_I}} := \big(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)\big)$$

ile $\overrightarrow{X_I}$ vektörüne karşılık gelen beklenen değer ifade edilirken,

$$\big[Cov(X_{t_i}, X_{t_j})\big]_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

şeklinde kovaryansların oluşturduğu matris $\sum_I$ veya $\sum_{\overrightarrow{X_I}}$ ile gösterilir.

Süreçteki her rassal değişken için beklenen değer fonksiyonu

$$\mu_X := \mu_{X_t} = E(X_t), t \in T$$

ve kovaryans fonksiyonu

$$c_X(t,s) := Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))] \tag{3.2}$$

eğer X_t ve X_s bağımsız rassal değişkenler ise

$$c_X(t,s) := Cov(X_t, X_s) = E(X_t X_s) - \mu_{X_t}\mu_{X_s}, (t, s \in T) \tag{3.3}$$

varyans fonksiyonu ise;

$$\sigma_X^2 := c_X(t,t) = V(X_t), t \in T \tag{3.4}$$

dir [11].

3.1.3 Gauss Süreci

Tanım 32. ***[Gauss Süreci]*** *Sonlu boyutlu dağılımların hepsi çok değişkenli normal dağılım ise bu sonlu bayutlu dağılıma* ***Gauss Süreci*** *denir.*

$I = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\} \in \mathscr{T}$ için f_I olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f_I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Det \sum_I}} exp\Big(-\frac{1}{2}(\overline{x} - \overline{\mu})(\sum_I)^{-1}(\overline{x} - \overline{\mu})^t\Big) \tag{3.5}$$

Burada $(\bar{x}-\bar{\mu}) = (x_1-\mu_1, x_2-\mu_2, \ldots, x_n-\mu_n)$ şeklinde satır vektörü iken $\sum_I$: kovaryans matrisi ve $Det \sum_I$ kovaryans matrisin determinantıdır.
Eğer $T=[0,1], t \in T$ için X_t'ler b.ö.d ve $Z = N(0,1)$ rassal değişkenler ise Gauss sürecine *Normalleştirilmiş Gauss Süreci* denir [11].

3.1.4 Durağanlık

Tanım 33. ***[Eş Dağılımlılık]*** *A ve B rassal değişkenler veya rassal vektörler ya da rassal süreçler olmak üzere eğer aynı olasılık dağılımına sahiplerse eş dağılımlıdırlar denir ve* $A \stackrel{d}{=} B$ *şeklinde gösterilir.*

Tanım 34. $X = \{X_t, t \in T\}, T \subset \mathbb{R}$ *ile tanımlanan süreç s.b.d. olsun.*$t \in T$ *indisi h zaman ötelemesi altında değişmiyorsa bu sürece* Mutlak Durağan Süreç *denir.*

$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n \in T, n \geqslant 1$ indisler $t_1+h, t_2+h, t_3+h, \ldots, t_n+h \in T$ değerleri için eğer

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \ldots, X_{t_n}\right) \stackrel{d}{=} \left(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, X_{t_3+h}, \ldots, X_{t_n+h}\right) \tag{3.6}$$

dır [11].

Tanım 35. *t indisi altında ötelenen bir X rassal sürecinin beklenen değer ve kovaryans fonksiyonları değişmiyorsa sürece* Geniş Anlamda Durağan Süreç *denir. Bu durum için,*

$$\mu_X(t+h) = \mu_X(t), c_X(t+h, s+h) = c_X(t,s), \forall h \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

dir. Bir Gauss Süreci mutlak durağan ise geniş anlamda durağandır,terside doğrudur. Ayrıca Gauss sürecinde $E(X^2) < \infty$ olduğu zaman geniş anlamda durağanlığına *ikinci dereceden durağanlık* denir.

Tanım 36. *X rassal süreci* $n \geqslant 2$ *pozitif tamsayıları için* $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n \in T$ *indislerine karşılık*

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{m-1}} \tag{3.8}$$

artışlarının oluşturduğu rassal değişkenler bağımsız rassal değişken ise X sürecine Bağımsız Artışlı Süreç *denir.*

Eğer X süreci $X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}, (t, s, t+h, s+h \in T)$ eşitliği sağlanıyorsa sürece *Durağan Artışlı Süreç* olarak adlandırılır [11].

3.1.5 Stokastik Sürecin Olasılık Dağılımı

Teorem 9'da bir rassal değişkenin veya rassal vektörün $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^n$ üzerindeki olasılık ölçüsü tanımlanmıştı. Stokastik sürecin olasılık ölçüsü sonsuz boyutlu bir fonksiyon uzayı üzerinde tanımlanması gerekir.
Bu nedenle herhangi bir t anında oluşan $(\Omega_t, \mathscr{A}_t, P_{\{t\}})$ olasılık uzayları için tensör çarpımı n adet olasılık uzayına genelleştirilebilir. Bu yöntemle farklı I indis kümelerine bağlı olarak

$$(\Omega_I, \mathscr{A}_I, P_I) = \Big(\prod_{t\in I} \Omega_t, \otimes \mathscr{A}_t, P_I\Big) \tag{3.9}$$

sonlu çarpım uzayları oluşturulur.($\{P_I\}_{I\in\mathscr{T}}$ olasılık ailesi)

Ayrıca $\Omega_T = \prod_{t\in T} \Omega_t$ ise $\forall t \in T$ için $\omega_t \in \Omega_t$ olmak üzere,

$$\omega = \{\omega_t\}_{t\in T}$$

sonlu dizisi veya bu dizinin herhangi bir alt dizisi ω yörüngelerini oluşturur.

Buradan $\prod_{t\in T} \Omega_t \to \Omega_s : \omega \to \omega_s$ olmak üzere ω üzerinde s'nin koordinatı ise $X_s(\omega)$ olarak belirtilir [11].

Tanım 37. ***[Silindirik Kümeler]***

$$R_I(A_{t_1}, A_{t_2}, \dots, A_{t_n}) := \Big(\prod_{t\in I} A_t\Big) \times \Big(\prod_{t\in I^c} \Omega_t\Big), (A_t \in \mathscr{A}_t) \tag{3.10}$$

formulasyonu ile yazılan kümeye $A_{t_1} \times A_{t_2} \times \dots \times A_{t_n}$ *tabanlı* Silindirik Küme *denir. Yani* $R := \{\mathscr{A}_I \times \prod_{t\in I^c} \Omega_t | I \in \mathbb{T}\}$ *topluluğudur.*

Ayrıca $(\Omega_T, \mathscr{A}_T, P)$ uzayına ise *Kanonik Olasılık Uzayı* denir [11].

3.1.6 Sayma Süreçleri

$\{N_t; t \geqslant 0\}$ stokastik süreci belirli rassal değişkenler için t anında bir olayın tekrar sayısını belirtiyorsa bu sürece *Sayma Süreci* denir.Sayma sürecinin özellikleri ile ilgili olarak ;

i. $N_t \geqslant 0$

ii. $N_t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

iii. $s < t$ için $N_s \leqslant N_t$

iv. $s < t$ için $N_s - N_t$ ifadesi $(s,t]$ aralığında gözlemlenen olay sayısıdır *[11]*.

3.1.7 Filtrasyonlar

Tanım 38. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *bir olasılık uzayı olsun. Bu uzayda* $\{\mathscr{F}_t\}, (t \geqslant 0)$ *şeklinde verilen* σ*-cebirler topluluğu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu* σ*-cebir topluluğuna* Filtrasyon *denir ve* $\mathscr{F}$ *ile gösterilir .*

i. $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$

ii. $s < t$ *için* $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$

Sonuç olarak filtrasyonlar genişleyen bilgi kümeleridir.

Tanım 39. ***[Adapted Filtrasyon]*** $\{X_t, t \geqslant 0\}$ *şeklinde verilen bir rassal sürecin her rassal değişkeni* $X_t, \mathscr{F}$*'ye göre ölçülebilir ise* $\{\mathscr{F}, t \geqslant 0\}$ *filtrasyonuna adaptedir yani* Adapted Filtrasyon *denir.*

Tanım 40. ***[Doğal Filtrasyon]*** $\mathscr{F}_t = \sigma\{X_s; s \leqslant t\} := \sigma\left(\bigcup_{s \leqslant t} \sigma(X_s)\right)$ *olarak verilen filtrasyona* Doğal Filtrasyon *denir.*

Doğal filtrasyon bir sürecin adapte olabileceği en küçük filtrasyondur.

Tanım 41. ***[Sağdan Sürekli Filtrasyon]*** $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ *şeklinde verilen bir filtrasyonda* $\mathscr{F}_t^+ := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$ *bu durumda* $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^+$ *eşitliği sağlanıyorsa* $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ *filtrasyonuna* sağdan sürekli filtrasyon *denir.*

3.1.8 Durma Zamanı

Tanım 42. ***[Durma Zamanı]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *bir olasılık uzayı ve* $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ *bu uzayda tanımlı bir filtrasyon olsun.* $T : \Omega \to [0, \infty]$ *tanımlanan rassal değişken*

$$\{T(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \qquad \forall t \in [0, \infty)$$

şartını sağlıyorsa T'ye Durma Zamanı *denir.*

Durma zamanı bir sürecin ne zamana bırakılmasının daha iyi olduğuna karar verme anı olarak kabul edilir.
T durma zamanı verildiğinde $\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} | A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t \geqslant 0\}$ olaylar topluluğu durma zamanına kadar geçen olayların kümesidir.

T bir durma zamanı olsun. Eğer T aşağıdaki koşulları sağlayan durma zamanlarının oluşturduğu dizi $\{T_n\}(n > 1)$ varsa T'ye *önceden kestirilebilir bir durma zamanı* denir [11].

i. $\{T > 0\}$ kümesi üzerinde $T_n < T$

ii. T_n genişleyen bir dizi

iii. $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ (h.h.k.)

Stokastik süreçlerde önemli bir adım olan Kanonik iki süreci inceleyelim.

3.2 Poisson Süreci

Tanım 43. ***[Poisson Süreci]*** $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ *durağan ve bağımsız artışlı bir sayma süreci ve* $\lambda > 0$ *için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu sürece* λ *hızında* Poisson Süreci *denir [9].*

i. $X_0 = 0$

ii. $P(X_h = 1) = \lambda h + o(h), \qquad (lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0)$

iii. $P(X_h \geqslant 2) = o(h)$

Poisson süreci sürekli zamanlı bir stokastik süreç olmasına rağmen sürecin rassal değişkenleri ayrık rassal değişkenlerdir.

Teorem 34. *Bir Poisson sürecindeki* $X_t, (t \geqslant 0)$ *rassal değişkenleri* λh *parametreli* Poisson Dağılımına *sahiptir.*

Bir Poisson sürecinde T_n *"n. olayı gözlemlendiği zamanı"* göstermek üzere Y_n ise *"$n-1$. ve n. olayların gözlemlenmesi süresi arasında geçen zamanı"* temsil etsin.Bu taktirde ;

* T_n, λ ve n parametreli Gamma dağılımına sahiptir.

* Y_n, λ parametreli Üstel dağılıma sahiptir.

Tanım 44. ***[Poisson Geçiş Olasılıkları]*** *Bir Poisson sürecindeki* $X_t, (t \geqslant 0)$ *rassal değişkenleri için durağan artışlı olduklarından* $X_{t-s} \stackrel{d}{=} X_t - X_s, (s < t)$ *dir. Yani s anından t anına kadar olan artışı ifade eden* $X_t - X_s$ *rassal değişkeni* $\lambda(t-s)$ *parametreli Poisson dağılımına sahiptir.*

Bu nedenle sürece ait s anında m farklı durumdan t anındaki $n > m$ *farklı duruma geçiş olasılığı,*

$$p(s,t;m,n) = \frac{[\lambda(t-s)]^{n-m} e^{-\lambda(t-s)}}{(n-m)!}$$

olur [9].

Tanım 45. ***[Poisson Sonlu Boyutlu Dağılımları]*** *$I = \{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m\}$ olmak üzere n_k;t_{k-1} ile t_k arasındaki gözlem sayısı olsun.n_k'ların bağımsız artışlı olma özelliği gözönüne alınırsa;*

$$P_{\overrightarrow{X}_I}(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \prod_{i=1}^{m} \frac{[\lambda(t_j - t_{j-1})]^{n_j - n_{j-1}} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}}{(t_j - t_{j-1})!}$$

dir [11].

3.3 Brown Süreci

1827 yılında Botanik bilimci Robert Brown'ın mikroskop altında polen solüsyonunu incelemesi sırasında polen taneciklerinin hareketlerinin aşırı hızlı ve sürekli yön değişmesine anlam verememiş daha sonra bu rastgele hareketlere *Brown Hareketi(Brownian Hareketi)* veya *Brown Devinimi (Brown Motion)* adı verilmiştir. Sonraki yıllarda bir çok fizikçi ve matematikçi bu hareketi anlamaya ve modellemeye çalışmıştır. Bu çalışmalar sırasında Wiener,Brown Hareketindeki taneciklerin yörüngelerinin sürekli fonksiyonlardan oluşan kümeler olduğunu tespit etmiş ve Wiener bu sürekli fonksiyonlar kümesi için Wiener ölçüsünü geliştirmiştir. Bu nedenle Brown Hareketi Sürecine *Wiener Süreci* de denir [17].

Tanım 46. ***[Brown Hareket Süreci]*** *Sürekli bir stokastik süreç olan $B = \{B_t, t \in [0, \infty)\}$ durağan ve bağımsız artışlı süreç aşağıdaki verilen koşulları sağlıyorsa B_t sürecine* Brown veya Wiener Hareket Süreci *denir [8, 9, 11, 17, 23, 25].*

i. $B_0 = 0$

ii. *$\forall t > 0$ için B_t süreci $N(0,t)$ normal dağılımına sahiptir.*

iii. *Sürecin yörüngeleri sürekli fonksiyonlardır.*

Sonuç 8. *Brown hareket süreci koşullarını sağlayan B_t stokastik süreci için;*

i. $E(B_t) = 0$

ii. *Sürecin yörüngeleri sürekli fonksiyonlardır.Fakat hiçbir noktasında türevlenemez.*

$s < t$ için $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s} \stackrel{d}{=} B_t - B_s$ durağan artışlı olma özelliğinin sonucu olarak elde edilebilir. Bunun sonucu olarakta $B_t - B_s$ değeri $N(0, t-s)$ Normal dağılımına sahiptir.

Tanım 47. ***[Brown Hareket Sürecinin Sonlu Boyutlu Dağılımları]*** *Önceki paragrafta açıklanan sonlu boyutlu dağılımlara* Brown hareket sürecinin sonlu boyutlu dağılımları *denir.*

Sonuç 9. *Brown hareket sürecine kısaca* Brown Süreci *diyeceğiz.*

$I = \{t_1 < t_2 < \ldots < t_m\}$ *sıralı zaman indis kümesi için* $B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \stackrel{d}{=} N(0, t_j - t_{j-1}), (j = 1, 2, \ldots, m)$ *dir.Bu taktirde*

$$\overrightarrow{B}_I = \{B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m}\} \qquad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

olmak üzere;

$$\{B_{t_0} = x_0, B_{t_1} = x_1, \ldots, B_{t_m} = x_m\}$$

olayını incelersek;

$$\{B_{t_0} = x_0, B_{t_1} - B_{t_0} = x_1 - x_0, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}} = x_m - x_{m-1}\}$$

olayına denktir. Dolayısıyla Brown süreci özel bir Gauss sürecidir [11].

Teorem 35. ***[Brown Hareket Sürecinin Beklenen Değeri ve Kovaryans Fonksiyonları]***

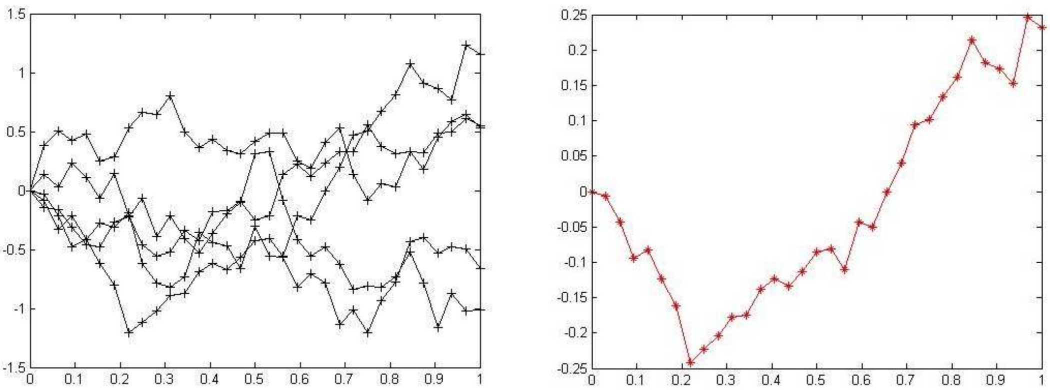
Brown hareket süreci koşullarını sağlayan B_t stokastik sürecinin beklenen değeri ve kovaryans fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

i. $\mu_B(t) = E(B_t) = 0, (t \geqslant 0)$

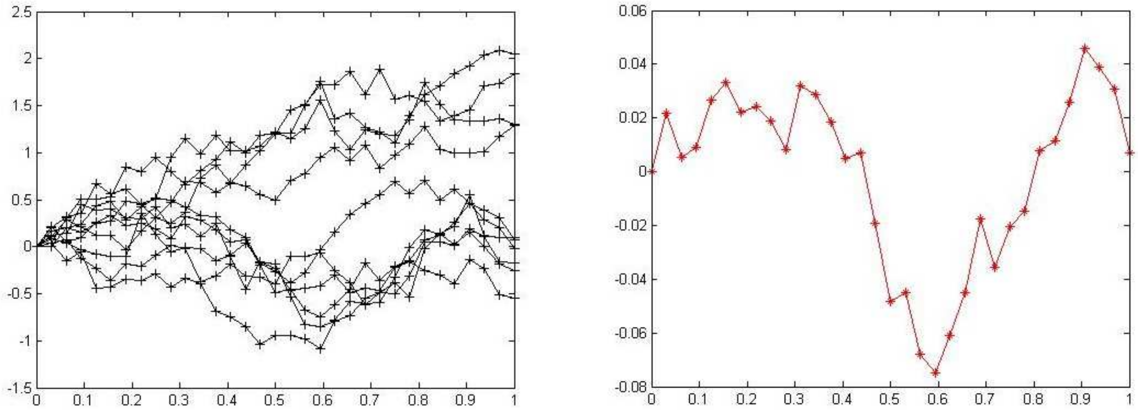
ii. $0 \leqslant s \leqslant t$ *için süreç bağımsız artışlı olduğundan;*

$$c_B(t, s) = E(B_t B_s) = min\{t, s\} = s \tag{3.11}$$

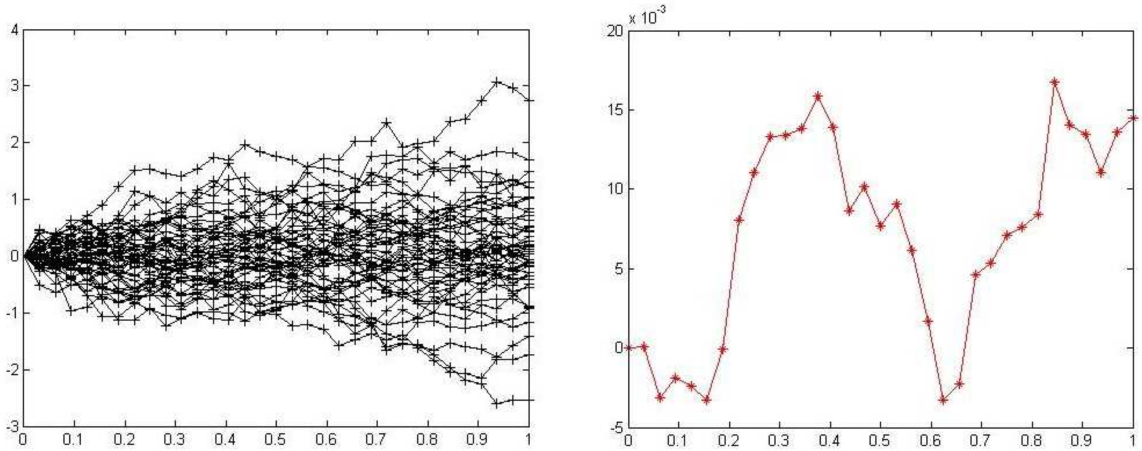
dir[21].



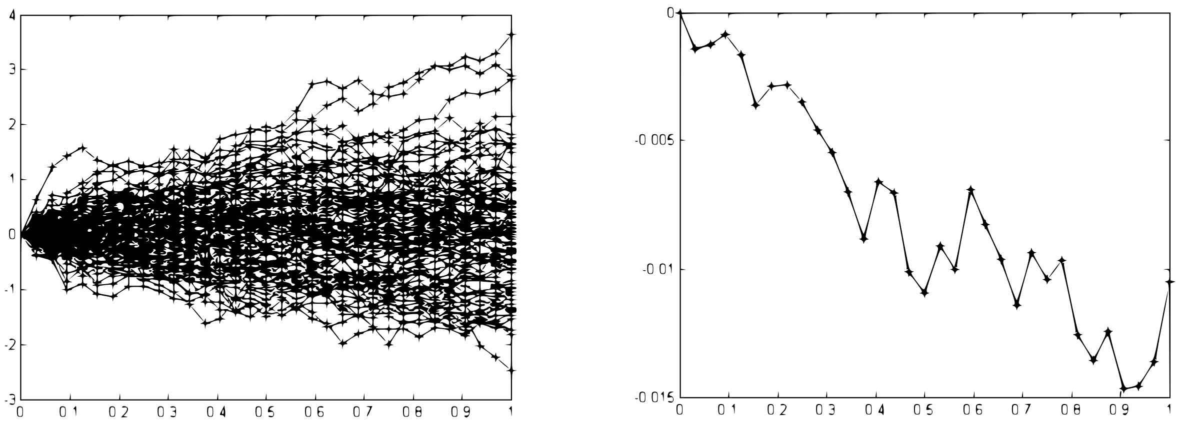
Şekil 3.1: 5 Yörüngeli Brown Hareket Süreci



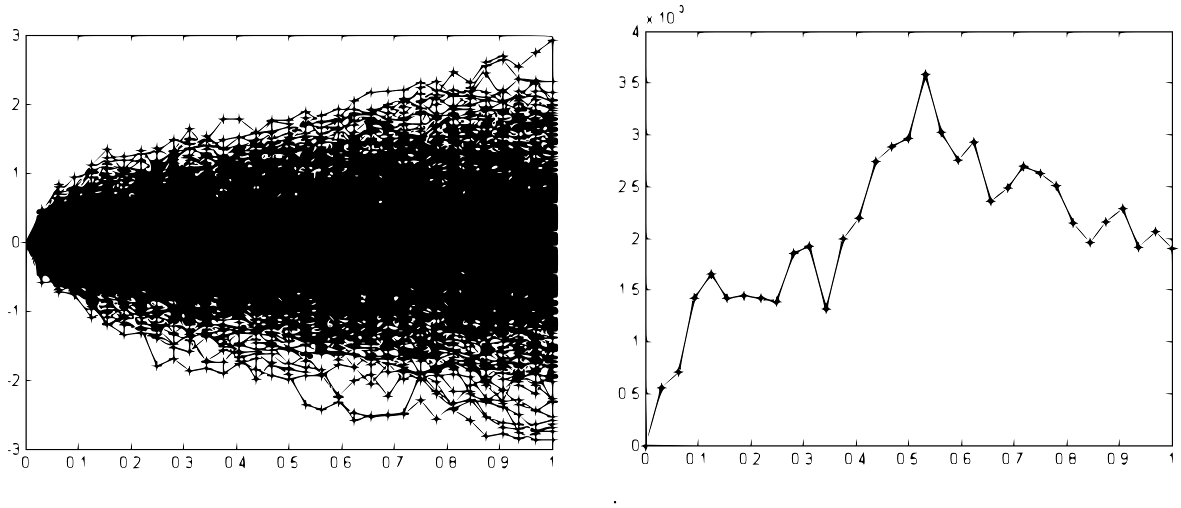
Şekil 3.2: 10 Yörüngeli Brown Hareket Süreci



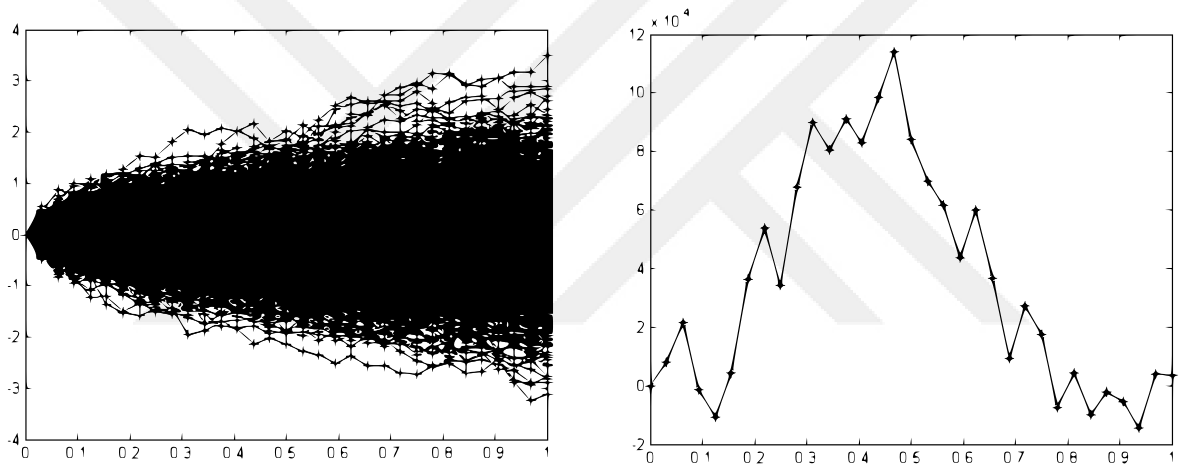
Şekil 3.3: 50 Yörüngeli Brown Hareket Süreci



Şekil 3.4: 100 Yörüngeli Brown Hareket Süreci



Şekil 3.5: 500 Yörüngeli Brown Hareket Süreci



Şekil 3.6: 1000 Yörüngeli Brown Hareket Süreci

3.3.1 Yörüngelerin Salınımı

Tanım 48. ***[Salınım]*** *$h(t), [a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Herhangi bir bölüntüsü için*

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1} \qquad \Delta_i h = h(t_i) - h(t_{i-1})$$

olmak üzere;

i. h'ın bir $\tau : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ bölüntüsü için $\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i h|$ toplamına h'ın τ bölüntüsüne göre salınımı denir, $v_n([a,b],\tau)$ ile gösterilir.

ii. h'ın toplam salınımı $v_n([a,b])$ ile gösterilir, $\sup_\tau v_h([a,b],\tau)$ değerine eşittir.

iii. $v_n([a,b]) < \infty$ ise h'a sınırlı salınımlı,*$v_n = \infty$ ise* sınırsız salınımlı *denir.*

iv. $\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i h|^2$ *değerine h'ın* ikinci dereceden salınım *denir,* $Q_h([a,b],\tau)$ *ile gösterilir[11].*

$[0,t]$ aralığının bir $\tau = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ bölüntüsü ve $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ verilmiş olsun. Buna göre sürecin [a,b] aralığındaki salınımı;

$$v_B(\omega)([0,t],\tau) := \sum_{i=1}^{n}|\Delta_i B(\omega)| \tag{3.12}$$

ve toplam salınımı;

$$v_B(\omega)([0,t]) := \sup_{\tau} v_B(\omega)([0,t],\tau) \tag{3.13}$$

olarak hesaplanır. Kısaca $v_B(\omega)([0,t],\tau_n) = v_{n,t}(\omega)$ ile gösterilir [11].

Tanım 49. ***[Yörüngenin 2. Dereceden Salınımı]*** *Tanım 48'da verilenlere göre [0,t] aralığında verilen yörüngenin*

$$Q_B(\omega)([0,t],\tau) = \sum_{i=1}^{n}|\Delta_i B(\omega)|^2 \tag{3.14}$$

şeklinde hesaplanan değerine yörüngenin ikinci derece salınımı *denir [11].*

Kısaca $Q_B(\omega)([0,t],\tau_n) = Q_{n,t}(\omega)$ ile gösterilir.

Tanım 50. ***[2. Derece Salınım Süreci]*** *$Q_{n,t}(\omega)$'nın olasılıktaki limit değerine* ikinci derece salınım süreci *denir.*

X stokastik sürecinin ikinci derece salınım süreci genel olarak $[X]_t$ ile gösterilir. Brown süreci için $[X]_t = t$ dir.

3.3.2 Özbenzeşim

Matematiksel olarak kendisine veya bir parçasına benzeyen objelere özbenzeşimli denilmektedir. Özbenzeşimin önemli örneklerinden biri fraktallardır.

Stokastik bir süreç $\{X_t; t \in [0,\infty)\}$ olmak üzere; $\forall T > 0$ ve her rassal vektör $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}), (n = 1,2,\ldots)$ için

$$(T^{\alpha}X_{t_1}, T^{\alpha}X_{t_2}, \ldots, T^{\alpha}X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{Tt_1}, X_{Tt_2}, \ldots, X_{Tt_n}) \tag{3.15}$$

eşitliğini sağlayan $\alpha > 0$ değerine karşılık α *özbenzeşimli süreç* denir [11].

Brown süreci $\alpha = \frac{1}{2}$ olan özbenzeşimli süreçtir.

3.3.3 Brown Köprüsü

Tanım 51. $\{X_t = B_t - tB_1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ *ile tanımlanan sürece* Brown(Brownian) Köprüsü *denir.*

$t = 0$ ve $t = 1$ için $X_0 = X_1 = 0$ olduğundan sürecin yörüngesi her iki uçtan sıfır bağlıdır. Bu nedenle sürece *Bağlı Brown Süreci* de denir [11].

Sürecin sonlu boyutlu vektörleri Gauss dağılımlı olduğundan bu süreçte Gauss sürecidir. Sürecin beklenen değeri $\mu_X(t) = 0$, kovaryans fonksiyonu ise $c_X(t,s) = Cov(B_t - tB_1, B_s - sB_1) = min\{t,s\} - st$ dir.

3.3.4 Sürüklenmeli Brown Süreci

Tanım 52. $\{X_t = \mu t + \sigma B_t, t \geqslant 0, \sigma > 0\}$ *ile tanımlanan sürece* Sürüklenmeli Brown Süreci *denir.*

Sürecin yine sonlu boyutlu vektörleri Gauss dağılımlı olduğundan bu süreçte Gauss sürecidir. Sürecin beklenen değeri $\mu_X(t) = \mu t$, kovaryans fonksiyonu ise $c_X(t,s) = \sigma^2 min\{t,s\}$ dir [11].

3.3.5 Geometrik Brown Süreci

Tanım 53. $\{X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}, t \geqslant 0\}$ *ile tanımlanan sürece* Geometrik Brown Süreci *denir.*

Bu sürece Üssel Sürüklemeli Brown süreci de denir [11]. Üssel dönüşümler Gauss dağılımlı olmadığından bu süreçte Gauss dağılımlı değildir.Gauss süreci değildir.

Sürecin beklenen değeri

$$\mu_X(t) = E(e^{\mu t + \sigma B_t}) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} = e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t}$$

ve kovaryans fonksiyonu,

$$s \leqslant t \qquad c_X(t,s) = \widetilde{c}_X\,(t-s) = e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t+s)}(e^{\sigma^2 s} - 1)$$

ayrıca $s = t$ için

$$\sigma_X(t) = e^{(2\mu + \sigma^2)t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

dir.

3.3.6 Ak ve Renkli Gürültü

Brown sürecinin yörüngelerinin hiçbir noktada türevi olmadığını ifade etmiştik. Brown sürecinin türevlenebilme sorununu aşmak için Gelfand sürecin rassal fonksiyonları yerine rassal genelleştirilmiş fonksiyonlar tanımlamıştır. Laurent Schwartz tarafından kuramı oluşturulan genelleştirilmiş fonksiyonlar belli bir topolojik vektör uzayının dualinin elemanları olarak verilir. Özel türev tanımı ile her mertebeden türevleri vardır.

Ak gürültü (White Noise), Brown sürecinin türevi olarak tanımlandığından sürecinin yörüngelerinin genelleştirilmiş türevi ak gürültüyü verecektir. Şimdi ak gürültünün farklı bir yaklaşımı olan renkli gürültü sürecini inceleyelim.

Bu süreçte;

$$X_t^h := \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \qquad ,t \geqslant 0, h > 0$$

(h sabit sayı) olarak tanımlanır. Brown sürecinin doğrusal bir bileşimi olduğunda bu süreç bir Gauss sürecidir.

Sürecin beklenen değeri

$$\mu_X(t) = 0$$

ve kovaryans fonksiyonu ise

$$s \leqslant t \qquad c_X(t,s) = \frac{1}{h^2} Cov(B_{t+h} - B_t, B_{s+h} - B_s)$$

$$= \frac{1}{h^2}[s + h - s - min\{t, s+h\} + s]$$

$$= \frac{1}{h^2}(s + h - min\{t, s+h\})$$

elde edilir.

Eğer $s + h \leqslant t$ ise $min\{t, s+h\} = s + h$ ve $c_X(t,s) = 0$ olur. X_t ve X_s ilintisizdir. Gauss süreci bağımsızdır. Fakat $s + h > t$ ise $min\{t, s+h\} = t$ ve $c_X(t,s) = \frac{h-(t-s)}{h^2}$ olur. $\delta = t - s$ dersek $c_X(t,s) = \frac{h-\delta}{h^2}$ ve süreç geniş anlamda durağan süreçtir. Gauss süreci olarak da mutlak durağandır.

Varyans fonksiyonu ise $t - s = \delta = 0$ ise $\sigma^2 = \frac{1}{h}$ olur. Burada $h \downarrow 0$ olduğunda renkli gürültünün salınımları sınırsız artacağından süreç gerçek anlamda stokastik bir süreç olmayacaktır. Yeterince küçük seçilen h'lar için X_t'ler bağımsız olmaya başlarlar. Yani b.ö.d. olur ve N(0,1) dağılımlı Gauss süreci yörüngelerine benzerler.

Brown süreci $\{B_t\}$ ve doğal filtrasyon olan $\{F_t, t \geqslant 0\}$ olsun. İki değişkenli sürekli ve ölçülebilir bir fonksiyon olan f için $X_t = f(t, B_t)$ şeklinde yazılan doğal filtrasyonlar da adapted filtrasyondur.

Sürecin doğal filtrasyonlarını genişletebiliriz. Sürecin yeni filtrasyonlarına göre adaptedtır.

$\{B_t, t \geqslant 0\}$ bir Brown süreci ve $F_t = \sigma(B_s, s \leqslant t), (t \geqslant 0)$ doğal filtrasyon olsun. Süreç s anında iken bir t zamanında $(t > s)$ bir olayın olasılığı sadece s anındaki duruma bağlıdır. Buna *"Belleksizlik"* özelliği denir. Yani

$$P(X_t \in B|F_s) = P(X_t \in B|X_s) = P(X_t \in B|\sigma(X_s)), (s > t, B \in \mathscr{B}) \tag{3.16}$$

olur. Bu özelliğe *MARKOV özelliği* denir.

Markov özelliğini taşıyan süreçlere *Markov Süreci* denir.

3.4 Brown Sürecinin Simülasyonu

3.4.1 Weiner Ölçüsü

$(\Omega_t, \mathscr{A}_t)$ ölçüm uzayında özel olarak $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ uzayını gözönüne alınırsak sürecin s.b.d. genişletilerek $(\mathbb{R}^T, \mathscr{B}_t)$ çarpım uzayı üzerinde tek bir olasılık ölçüsü olan P tanımlanır.

$0 < T \leqslant \infty$ olmak üzere $\mathbb{R}^{[0,T]}$'ye aralığı üzerindeki bütün fonksiyonların uzayı şeklinde bakabiliriz. $\mathscr{B}_T$ Borel σ-cebirlerinin $[0,T]$ üzerindeki tensör çarpımıdır.

Brown süreci halindeki süreç olan $(\mathbb{R}^T, \mathscr{B}_t)$ üzerinde uyardığı bir olasılık ölçüsü vardır. Bu olasılık ölçüsüne *Wiener ölçüsü* denir.

Bu ölçü, Brown sürecinin simülasyonunun kurulması için çok önemlidir.

3.4.2 Olasılıkta Zayıf Yakınsama

Tanım 54. ***[Ölçü Ailesinin Sıkılığı:]*** *$\{\mu_n\}$ ölçü ailesi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir K tıkız kümesi $\{\mu_n\}$ ölçü ailesinin her üyesi için,*

$$\mu(K) > 1 - \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayorsa $\{\mu_n\}$ ölçü ailesine sıkı(bağıl tıkız) *denir.*

$I = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \subset [0,T]$ sıralı ve sonlu zaman indisleri ve P_I sürecin s.b.d.'larını göstersin.

Teorem 36. ***[Olasılıkta Zayıf Yakınsama:]*** *$\{X_{t,n}, t \geqslant 0\}$, dağılımları μ_n ve s.b.d.'ları $P_{I,n}$ olan bir stokastik süreç dizisi olsun. Bu süreç dizisinin s.b.d.'si P_I ve olasılık dağılımı μ olan sürece zayıf yakınsaması için aşağıdaki koşulları sağlanması gerekir.*

i. *$n \to \infty$ olmak üzere $P_{I,n} \Longrightarrow P_I$*

ii. *$\{\mu_n\}, (n = 1, 2, \ldots)$ olasılık ölçüsü ailesi sıkıdır.*

3.4.3 Rassal Yürüyüş(Random Walking)

Brown süreci kullanarak rassal yürüyüşün simülasyon kurulumu için aşağıdaki aşamalara göre hareket edilir.

Eksen üzerinde rastgele hareket eden polen taneciklerinin var olduğu kabul edilerek her Δt zaman birimine karşılık gelen sürede $\frac{1}{2}$ olasılıkla sağa veya sola doğru Δx kadar hareket etsin.

$Y_1, Y_2, \ldots$ bağımsız ve $\frac{1}{2}$ olasılıkla $\pm\Delta x$ değeri alan rassal değişkenler olsun.

$$X_{n,t} := Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{[\frac{T}{\Delta t}]} \qquad , n = [\frac{T}{\Delta t}]$$

süreci tanımlanır. Bu süreçte; $n \to \infty, \Delta t \to 0$ ve $\Delta x \approx \sqrt{\Delta t}$ mertebesinde 0'a giderken Wiener ölçüsü μ'ye zayıf olasılıkla yakınsar. Y_i'ler b.ö.d. ve $N(0,1)$ dağılımlı rassal değişkenler olmak üzere;

$$X_{n,t}(\omega) = \begin{cases} \frac{Y_1(\omega)+Y_2(\omega)+\ldots+Y_i(\omega)}{\sqrt{n}} & t = \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \ldots \\ dogrusal\, interpolasyon & d.d.t'ler \end{cases}$$

için

1. $X_{0,t} = 0$

2. $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tamsayılarının $0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_m \leqslant n$ olmak üzere

$$X_{\frac{i_2}{n},n} - X_{\frac{i_1}{n},n}, X_{\frac{i_3}{n},n} - X_{\frac{i_2}{n},n}, \ldots, X_{\frac{i_m}{n},n} - X_{\frac{i_{m-1}}{n},n}$$

   bağımsız rassal değişkenlerdir. Çünkü bu artışlar dizisinin her biri sonlu sayıda bağımsız $\frac{Y_i}{\sqrt{n}}$ değişkeninin toplamıdır.

3. Artışlar aynı sayıda $\frac{Y_i}{\sqrt{n}}$ toplamından oluşuyorsa iki dağılım aynıdır.

4. $\forall 0 \leqslant i \leqslant n$ için $X_{\frac{i}{n},n}$'nin dağılımı $N(0, \frac{i}{n})$ ve $V[\frac{Y_1(\omega)+Y_2(\omega)+...+Y_i(\omega)}{\sqrt{n}}] = \frac{i}{n}$ dir.

Verilen süreç bağımsız artışlı ve durağan artışlı olduğundan Brown sürecidir.

3.4.4 Donsker Değişmezlik Prensibi

$$X_{n,t}(\omega) = \begin{cases} \frac{Y_1(\omega)+Y_2(\omega)+...+Y_i(\omega)}{\sqrt{n}} & t = \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \ldots \\ lineer\, interpolasyon & d.d.t'ler \end{cases}$$

ifadesi ile verilen süreç dağılımda Brown sürecine yakınsar. Sürecin olasılık dağılımı μ_n ise Wiener ölçüsüne göre μ'ye yakınsamaktadır [17].

3.5 Martengaller

Tanım 55. ***[Martengaller:]*** *$X = \{X_t; t \geqslant 0\}$ stokastik süreci ve $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ filtrasyonu verilmiş olsun. Bu süreç aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ filtrasyonuna $\{\mathscr{F}_t\}$*-Martengali *denir.*

i. $\forall t$ *için* $E(|X_t|) < \infty$

ii. $X_t, \{\mathscr{F}_t\}$ *filtrasyonuna adaptedir.*

iii. *Her* $0 \leqslant s \leqslant t$ *için* $E(X_t|\mathscr{F}_s) = X_s$*(h.h.k.) dir.*

Eğer (iii.) koşulunda verilen eşitlik yerine $E(X_t|\mathscr{F}_s) \geqslant X_s$(h.h.k.) ise Martengale *Alt-Martengal*, $E(X_t|\mathscr{F}_s) \leqslant X_s$(h.h.k.) ise Martengale *Üst-Martengal* denir. Ayrıca (i.) yerine $X_t \in L^p, p \in [1,\infty)$ gelirse L^p*-Martengal* denir. Bir L^P-Martengel için $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} E(|X_t|^p) < \infty$ ise $X'e, L^p-$*sınırlı Martengal* denir.

Bir Martengalin beklenen değer fonksiyonu;

$$\mu_X(t) = E(X_t) = c, (c : sabit)$$

dir.

Tanım 56. ***[Ayrık Zamanlı Martengal:]*** *Ayrık zamanlı bir süreç olan $X = \{X_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ve $\{\mathscr{F}_t, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ filtrasyonu verilmiş olsun.*

i. $E(|X_n|) < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

ii. *$X_n, \{\mathscr{F}_n\}$ filtrasyonuna adaptedir.*

iii. *Her $m \geqslant 1$ için $E(X_n + m|\mathscr{F}_n) = X_n$(h.h.k.) dir.*

koşulları sağlanıyorsa X sürecine $\{\mathscr{F}_n\}$ filtrasyonuna adapte bir ayrık zamanlı martengal *denir.*

Bağımsız rassal değişkenlerin kısmi toplamlarından oluşan süreç ayrık zamanlı martengaldir [28].

3.5.0.1 Poisson Martengali

$N = N\{N_t : t \geqslant 0\}$ bir Poisson süreci ve $\mathscr{F}_t$ doğal filtrasyon olsun. Bu taktirde $\{N_t - \lambda t\}_{t \geqslant 0}$ süreci $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ filtrasyonuna adapte sağdan sürekli bir L^p-Martengalidir.

3.5.0.2 Brown Martengali

Poisson martengali gibi Brown süreci doğal filtrasyonuna göre L^p-Martengalidir.

$E(X_n + 1|\mathscr{F}_n) = X_n \Leftrightarrow E(X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n) = 0$ olmak üzere tanımlanacak ayrık zamanlı $\{Y_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ sürecine *Martengal Fark Dizisi* denir.

i. $Y_n = X_n - X_{n-1} n \geqslant 0$

ii. $E(Y_n|\mathscr{F}_{n-1}) = 0$ dır.

3.5.1 Önceden Kestirilebilir Süreç

$W = \{W_n; n = 1, 2, \ldots\}$ ayrık zamanlı martengal olsun. $\forall n$ için $W_n, \mathscr{F}_{n-1}$ ölçülebilir ise $W, \mathscr{F}_n$'e göre *önceden kestirilebilir süreç* denir.

3.5.2 Martengal Dönüşümü

$Y_n = \{Y_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ süreci $\{\mathscr{F}_n\}$ filtrasyonuna göre bir martengal fark dizisi ve $W = \{W_n; n = 1, 2, \ldots\}$ de bu filtrasyona göre önceden kestirilebilir süreç olsun.

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} W_i Y_i, \quad n \geqslant 1$$

şeklinde tanımlanan Z sürecine *Y'nin W dönüşümü* denir. Kısaca $Z = W \bullet Y$ ile gösterilir [28].

3.5.3 Brown Martengal Dönüşümü

$B = \{B_s; 0 \leqslant s \leqslant t\}; [0,t]$ aralığında tanımlı bir Brown süreci ve $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$ tanım aralığının bir bölüntüsü $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathscr{F}_i = \sigma(B_{t_j}; 1 \leqslant j \leqslant i); (i = 1,2,\ldots,n)$ de bir filtrasyon olsun.

$$\Delta B = \{\Delta_0 B = 0, \Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, (i = 1,2,\ldots,n)\}$$

rassal değişken dizisini tanımlayalım. Buna göre verilen filtrasyona adapte martengal fark dizisidir. Ayrıca

$$\tilde{B} = \{\overset{\sim}{B_{t_i}} = B_{t_i-1}, (i = 1,2,\ldots,n)\}$$

sürecini tanımlayalım.

Bu süreç $\overset{\sim}{B_{t_i}} = B_{t_i-1}$ olarak tanımlandığından önceden kestirilebilir süreçtir. $\tilde{B} \bullet \Delta B$ bir martengaldir.

$$\{\tilde{B} \bullet \Delta B\}_k = \sum_{i=1}^{k} \overset{\sim}{B_i} \bullet \Delta_i B = \sum_{i=1}^{k} B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

dir [11].

3.5.4 Martengal Yakınsaklık Teoremi

Teorem 37. $\{X_t\}_{t \geqslant 0}; p > 1$ *için* L^p*-sınırlı ve sürekli zamanlı martingale olsun. Bu taktirde öyle bir* $X_\infty \in L^p(\Omega, \mathscr{A}_\infty, P)$ *rassal değişkeni bulunabilir ki* $t \to \infty$ *hem* L^p *hem de h.h.k. olarak* X_t, X_∞*'ye yakınsar.* $(X_t \to X_\infty)$

Ayrıca $\{X_t\}$ *Martengali kapatır* denir [9].

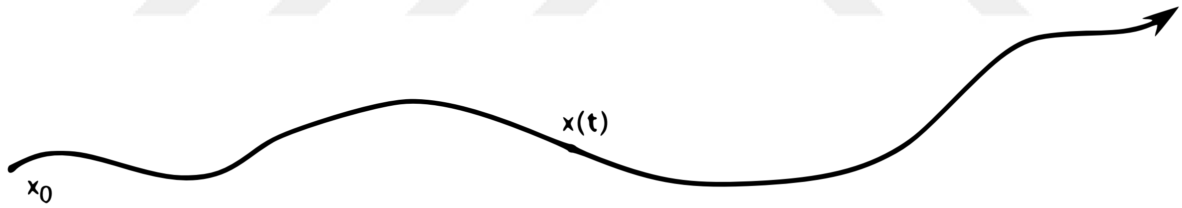
4. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Doğa Bilimleri, Sosyal Bilimler, Ekonomi, Finans ve diğer bilimlerle ilgilenen araştırmacıların zamana bağlı değişimi incelemek amacıyla kurdukları modellerde diferansiyel denklemler(ODE) kullanılmıştır. Fakat bu denklemlerin deterministik olması birçok etkinin sabit kabul edilmesi veya dikkate alınmaması tam çözümler ile model sonucu arasında önemli farklılıklar oluşturmaktadır. Bu nedenle diğer etkilerin ve belirsizlikten kaynaklanacak farklılıkların oluşturacağı bir terimi diferansiyel denkleme dahil etmek gerekmektedir. Böylece Stokastik Diferansiyel Denklemler (SDE) gündeme gelmiştir [3, 4, 12, 14, 20, 21, 23, 29].

Bir başlangıç değer problemi olan adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

$$\begin{cases} x'(t) = b(x(t)) \qquad (t > 0) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

Yukarıdaki denklemde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonun yörüngesi aşağıdaki gibi verilebilir [12].



Şekil 4.1: Adi Diferansiyel Denklemin Örnek Çözüm Yörüngesi

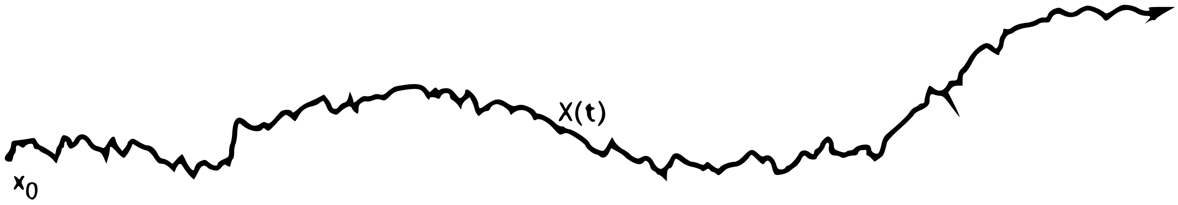
Fakat diğer belirsizlikler "Ak Gürültü" (White Noise) terimi olarak denkleme ilave edilirse;

$$\begin{cases} X'(t) = b(X(t)) + B(X(t))\xi(t) \qquad (t > 0) \\ X(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

Burada $\xi(t) :=$ m-boyutlu "Ak Gürültü" ve $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}^{m\times n}$ tanımlıdır. Fonksiyonun yörüngesi ise aşağıdaki gibi verilebilir [12].

(4.2) SDE sisteminde $m = n, x_0 = 0, b = 0$ ve $B = I$ değerleri için $n - boyutlu$ Brown Hareketi elde edilir. Kısaca $W(.)$ sembolü ile gösterilir. Ayrıca $W'(.) = \xi(.)$ dir. Ak gürültü ,Brown Hareketinin zamana göre türevidir. Yani(4.2) SDE,

$$\frac{dX(t)}{dt} = b(X(t)) + B(X(t))\frac{dW(t)}{dt} \tag{4.3}$$



Şekil 4.2: Stokastik Diferansiyel Denklemin Örnek Çözüm Yörüngesi

dir. Dolayısıyla;

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t B(X(s))dW \tag{4.4}$$

genel çözümü formu elde edilir[12] .

Brown Hareketinin hiçbir noktada türevlenememesi nedeniyle integralin hesaplanması için daha az kısıtlar gerekmektedir. Riemann-Stieltjes integrali yeterli değildir. Japon matematikçi Kiyosi Ito tarafından 1944-1946 yılları arasında yayınlanan makaleler stokastik integral hesaplanmasında önemli bir dönüm noktası olmuştur [15, 16].

Ito, yörüngeler üzerinde alınan Riemann-Stieltjes toplamlarının klasik limitleri yerine L^2 uzayında ya da olasılıkta limitlerini alarak stokastik integral tanımında geniş bir integrand ailesi üzerinde sonuca ulaşır.

4.1 Stokastik İntegral

4.1.0.1 Basit Süreçler ve Ito Stokastik İntegralleri

$X = \{X_t : t \in [0,T]\}$ süreci τ_n bölüntüsüne göre aşağıdaki gibi tanımlanıyorsa süreç *Basit Süreç* denir[11].

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$$

$$X(\omega,t) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(\omega) I_{[t_{i-1},t_i)}(t) + Z_n(\omega) I_{\{t_n\}}(t) \tag{4.5}$$

yada kısaca

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i I_{[t_{i-1},t_i)} + Z_n I_{\{t_n\}} \tag{4.6}$$

dir.Basit sürecin açık yazılımı ise

$$X_t(\omega) = \begin{cases} Z_i(\omega) & t_{i-1} \leqslant t < t_i \qquad (i = 1,2,\ldots n) \\ Z_n(\omega) & t = t_n = T \end{cases} \tag{4.7}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki tanımlamada Z_i 'ler, $\{\mathscr{F}_{t_i-1}\}$ filtrasyonuna göre karesi integrallenebilir rassal değişkenlerdir. Yani $E(Z_i^2) < \infty$ dir.

$X = \{X_s; 0 \leqslant s \leqslant T\}$ basit süreci için tanımlanancak olan Ito stokastik integrali,

$$\int_0^T X_s dB_s = \sum_{i=1}^{n} Z_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \tag{4.8}$$

formülleri ile verilir.Diğer bir ifade ile

$$\int_0^t X_s dB_s = \int_0^T X_s I_{[0,t]} dB_s := \sum_{i=1}^{n} Z_i(B_{min\{t_i,t\}} - B_{min\{t_{i-1},t\}}) \tag{4.9}$$

tanımlanır.

4.1.0.2 Basit Süreçlerin Ito Stokastik İntegralinin Özellikleri

Basit sürecin stokastik integrali;

$$I_t(X)(\omega) := \int_0^t X_s(\omega) dB_s(\omega) \qquad (t \in [0,T]) \tag{4.10}$$

olarak tanımlanırsa $I_t(X)(\omega)$'da bir stokastik süreç olur. Bu süreç;

i. $E(I_t(X)(\omega)) = 0$

ii. $E(I_t^2(X)(\omega)) = E((\int_0^t X_s(\omega) dB_s(\omega))^2) = \int_0^t E(X_s^2(\omega)) ds \qquad t \in [0,T]$

Bu özelliğe *İzometri Özelliği* denir.

iii.
- $I_t(X+Y) = I_t(X) + I_t(Y)$
- $I_t(cX) = cI_t(X) \qquad (c \in \mathbb{R})$
- $\int_0^T X_s dB_s = \int_0^t X_s dB_s + \int_t^T X_s dB_s$

iv. $I_t(X)$ yörüngeleri süreklidir.

v. $I_t(X)(\omega)$ süreci Brown sürecinin doğal filtrasyonuna adapted olan martengal özelliklerine sahiptir.

4.1.1 Ito Stokastik İntegral

X bir stokastik süreç ve ϕ_n basit stokastik süreç olmak üzere,

$$lim_{n\to\infty}E(\int_0^T (X(\omega)-\phi_n(\omega))^2 dt) \to 0 \tag{4.11}$$

varsayımı altında $\mathscr{L}^2(P)$ içinde Ito integrali ;

$$\int_0^T X_t(\omega)dB_t(\omega) = lim_{n\to\infty}\int_0^T \phi_{n,t}(\omega)dB_t(\omega) \tag{4.12}$$

limiti ile tanımlanır. Bu limitle hesaplanan Ito integralinin özellikleri,

i. $\int_0^T (X_t+Y_t)dB_t = \int_0^T X_t dB_t + \int_0^T Y_t dB_t$ dir

ii. $I_t(X) = \int_0^T X_s dB_s, (t\in[0,T])$ süreci Brown hareket sürecinin doğal filtrasyonuna göre martengaldir.

iii. $E(I_t(X)(\omega)) = 0$ dir

iv. $\{I_t(X)(\omega)\}$ stokastik sürecinin yörüngeleri süreklidir

v. $E((\int_0^t X_s dB_s)^2) = \int_0^t E(X_s^2)ds \qquad t\in[0,T]$

dir[15, 16].

4.1.2 Ito Lemmaları

Ito'nun stokastik integral alarken kullandığı argümaanlardan en önemlileri arasına giren Ito Lemmalarına stokastik değişken değiştirme gözü ile bakılabilir. Taylor açılımı yardımıyla tanımlanan bu lemmaların diferansiyel ve integral formu aşağıdaki gibidir [20, 21, 23, 29] .

- **Ito Lemması-1:**

  Ito Lemması-1 (Diferansiyel Formu): f fonksiyonu 2.defa türevlenebilen sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt \tag{4.13}$$

  Ito lemmasının diferansiyel formunu s'den t'ye integrali alınarak Ito lemmasının integral formu elde edilir.

Ito Lemması-1 (İntegral Formu):

$$\int_0^t d(f(B_x)) = f(B_t) - f(B_s) = \underbrace{\int_s^t f'(B_x)d(B_x)}_{Ito\,integrali} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)dx}_{Riemann\,integrali} \tag{4.14}$$

- **Ito Lemması-2:**

  $f(t,x)$ iki değişkenli, sürekli ve ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(t,B_x) - f(x,B_x) = \underbrace{\int_s^t [f_1(x,B_x)] + \frac{1}{2} f_{22}(x,B_x)]dx}_{Riemann\,integrali} + \underbrace{\int_s^t f_2(x,B_x)d(B_x)}_{Ito\,integrali} \tag{4.15}$$

  dir.

4.1.3 Ito Stokastik Adi Diferansiyel Denklemler

Stokastik modellemelerde temel denklemlerden,

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t \quad X_0 = Y(\omega) \tag{4.16}$$

diferansiyel formu ile verilen stokastik diferansiyel denklemi integral formunda yazarsak;

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dB_s \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{4.17}$$

Ito stokastik diferansiyel denklemini elde ederiz. Denklemin özel durumlarını incelersek;

i. $X_0 = 0$, $a = 0$ ve $b = 1$ için $X_t = \int_0^t dB_t = B_t$ olur. Denklemin çözümü Brown hareket süreci olur.

ii. $X_0 = 0$, $a = \mu$ ve $b = 1$ için $X_t = \int_0^t \mu dt + \int_0^t dB_t = \mu t + B_t$ olur. Denklemin çözümü sürüklenmeli Brown hareket süreci olur.

iii. Ayrıca $a(t,x) = c_1(t)x + c_2(t)$ ve $b(t,x) = \sigma_1(t)x + \sigma_2(t)$ olmak üzere

$$X_t = X_0 + \int_0^t [c_1(s)X_s + c_2(s)]ds + \int_0^t [\sigma_1(s)X_s + \sigma_2(s)]dB_s \tag{4.18}$$

elde edilen stokastik diferansiyel denkleme *Genel Doğrusal Ito Diferansiyel Denklemi* denir.

4.1.3.1 Gronwall Eşitsizliği:

$f(t) \geqslant 0$ fonksiyonu $0 \leqslant t \leqslant T$ aralığında $a, c \in \mathbb{R}^+$ sabit değerler olmak üzere,$f(t) \leqslant c + a\int_0^t f(s)ds$ eşitsizliği mevcutsa

$$f(t) \leqslant ce^{at} \tag{4.19}$$

dir[11].

4.1.3.2 Lipschitz Koşulu:

Bir $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y| \tag{4.20}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $K \geqslant 0$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x)$'e Lipschitz fonksiyonu veya Lipschitz sürekli fonksiyon denir [11].

4.1.4 Ito Stokastik Adi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Genel doğrusal Ito diferansiyel denklemin özel hali olan,

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma\int_0^t X_s dB_s \quad \sigma > 0 \tag{4.21}$$

denkleminde X ve B süreçleri arasındaki çarpımsal ilişkide dolayı *Çarpımsal Gürültülü Doğrusal Stokastik Diferansiyel Denklem* denir.

$W^{(1)}$ ve $W^{(2)}$ Brown sürecinin doğal filtrasyonuna adapted süreçler olmak üzere,

$$X_t = X_0 + \int_0^t W_s^{(1)} ds + \int_0^t W_s^{(2)} dB_s \tag{4.22}$$

formunda verilen sürece *Ito Süreci* denir. Bu sürecin stokastik diferansiyel denklemi ise,

$$dX_t = W_t^{(1)} dt + W_t^{(2)} dB_t \tag{4.23}$$

formundadır.

- **Ito Lemması-3 :** (4.22) ve (4.23) denklemleri ile verilen Ito süreci ve $f(t,x)$ ikinci mertebe kısmi türevleri varolan ve sürekli fonksiyon olmak üzere,

$$f(t,X_t)-f(s,X_s)=\int_s^t \left[f_1(x,X_x)+W_x^{(1)}f_2(x,X)+\frac{1}{2}[W_x^2]^2 f_{22}(x,X)\right]dx$$
$$+\int_s^t f_2(x,X)W_x^2 dB_x \quad (s<t) \qquad\qquad (4.23a)$$

eşitliği elde edilir [11] .

4.1.5 Ornstein-Uhlenbeck Süreci:

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma\int_0^t dB_s \qquad t\in[0,T] \tag{4.24}$$

stokastik diferansiyel denklemiyle belirlenen sürece *Ornstein-Uhlenbeck Süreci* denir.

(4.24) denklemi ise *Langevin Stokastik Diferansiyel Denklemi* olarak adlandırılır. Bu denklemin diferansiyel formu ise

$$dX_t = cX_t dt + \sigma dB_t \tag{4.25}$$

şeklindedir. Bu denklemin ayrık zamanlı modelleri özellikle Ekonometri'de ARMA modeli olarak ifade edilir ve birçok kullanım alanı vardır.

Langevin dekleminin çözümünü incelersek çözümde Ito lemması-3 denkleminde $Y_t = e^{-ct}X_t$ dönüşümü yapılırsa, $f(t,X_t)=e^{-ct}x$ fonksiyonu için;

$$f_1(t,x)=-cf(t,x) \quad , \quad f_2(t,x)=e^{-ct} \quad ve \quad f_{22}(t,x)=0 \tag{4.26}$$

Ito lemması-3 denkleminde $W^{(1)}=cx$ ve $W^{(2)}=\sigma$ olur. $s=0$ ve (4.26) değerlerini lemmada yerine yazarsak

$$f(t,X_t)-f(0,X_0)=\int_0^t \left[f_1(s,X_s)+cX_s f_2(s,X_s)+\frac{1}{2}\sigma^2 f_{22}(s,X_s)\right]ds$$
$$+\int_0^t \sigma f_2(s,X_s)dB_s$$

elde edilir.

$$f_1(s,X_s)=-cY_s \quad , \quad X_s f_2(s,X_s)=e^{-cs}X_s=Y_s \quad ve \quad f_{22}=0$$

olduğuna dikkat edilirse,

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t (-cY_s+cY_s)ds + \int_0^t \sigma e^{-cs}dB_s = \int_0^t \sigma e^{-cs}dB_s$$

ve $Y_0 = X_0$ olduğundan

$$X_t = e^{ct} X_0 + \sigma e^{ct} \int_0^t e^{-cs} dB_s \tag{4.27}$$

bulunur [30].

Sonuç 10. *Ornstein-Uhlenbeck Süreci bir Gauss sürecidir.*

4.1.6 Ito Çarpım Kuralı

X_1 ve X_2 iki Ito süreci olmak üzere bu süreçlerin stokastik diferansiyelleri,

$$dX_{1,t} = W_t^{(1,1)} dt + W^{(2,1)} dB_t$$

$$dX_{2,t} = W_t^{(1,2)} dt + W^{(2,2)} dB_t$$

olsun. Bu taktirde $X_1 X_2$ çarpımıda bir Ito süreci olup stokastik diferansiyeli,

$$d(X_1 X_2) = X_{1,t} dX_{2,t} + X_{2,t} dX_{1,t} + W_t^{(2,1)} W^{(2,2)} dt \tag{4.28}$$

elde edilir.

Teorem 38. ***[Levy'nin Brown Hareket Sürecinin Karakterizasyonu:]*** *$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan $\{X_t\}; (t \geqslant 0)$ sürekli stokastik süreci ve $X_t^2 - t$ süreci $\{\mathscr{F}_t\}$ doğal filtrasyonuna göre martengal olması ile $\{X_t\}$'nin Brown süreci olması denktir [11].*

4.2 Girsanov Teoremi

Teorem 39. ***[Girsanov Teoremi:]*** *$X_t = \alpha t + B_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, X_0 = 0$ olmak üzere $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan bir Ito süreci olsun. Ayrıca $M_t = e^{-\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$ tanımlayalım. Bu taktirde;*

i. M_t , P ölçüsüne göre martengaldir.

ii. $Q(A) = \int_A M_T(\omega) dP(\omega) \quad A \in \mathscr{F}$ ile tanımlanan ölçü P ile eşdeğerdir.

iii. Q ölçüsü altında $X_t = \alpha t + B_t$ bir Brown sürecidir.

Kanıt. i. $f(t,x) = e^{-\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$ fonksiyonu için M_t sürecine Ito lemması-2 uygulanırsa ,

$$f(t, B_t) = M_t$$

$$f_1(t,x) = -\frac{\alpha^2}{2} f(t,x), \quad f_2(t,x) = \alpha f(t,x)$$

ve

$$f_{22}(t,x) = \alpha^2 f(t,x)$$

yerine yazarsak ,

$$df(t,B_t) = [f_1(t,B_t) + \frac{1}{2} f_{22}(t,B_t)] + f_2(t,B_t)dB_t$$

$$= \frac{-\alpha^2}{2} f(t,B_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 f(t,B_t) - \alpha f(t,B_t)dB_t$$

olur. Buradan,

$$dM_t = -\alpha M_t dB_t$$

$$M_t = 1 - \int_0^t \alpha M_s dB_s \quad ,M_0 = 1$$

dir.

M_t, Brown filtrasyonuna göre ölçülebilir olduğundan $E(M_t^2) = E(e^{-2\alpha B_t - \alpha^2 t})$ dir. $\mu = -\alpha^2$ ve $\sigma = -2\alpha$ için Geometrik Brown süreci olur.

$$\int_0^T E(M_t^2 dt = \int_0^T e^{-\alpha^2 t} dt < \infty$$

gerçekleşir.

$$M_t = \int_0^t \alpha M_s dB_s$$

bir Ito integraldir. Dolayısıyla M_t, P ölçüsüne göre martengaldir.

ii. Q ölçüsünün ifadesi P ölçüsüne göre mutlak sürekli olduğunu gösterir. $Q(A) = 0$ ise $M_t > 0$ olduğundan $P(A) = 0$ olur. Bu da bize Q ve P ölçülerinin eşdeğer olduğunu gösterir.

iii. Levy karakterizasyonuna göre X_t'nin Brown süreci olduğunu gösterelim. Yani,$X_t = \alpha t + B_t$ ve $X_t^2 - t$ süreçlerinin $dQ = M_t dP$'ye göre martengal olduğunu gösterelim. Bunun için $K_t = M_t X_t$ alınarak Ito çarpım kuralı uygulanırsa;

$$dK_t = M_t dX_t + X_t dM_t + dX_t dM_t$$

elde edilir. Buradan

$$dK_t = M_t(\alpha dt + dB_t) - X_t \alpha M_t dB_t - dB_t \alpha M_t dB_t$$

ve $M_t \alpha dt - \alpha M_t (dB_t)^2 = 0$ eşitliği dikkate alınırsa,

$$dK_t = M_t(1 - \alpha X_t) dB_t$$

olur. Dolayısıyla P ölçüsüne göre martengaldir.

$$E_Q(X_t|\mathscr{F}_s) = \frac{E(M_t X_t|\mathscr{F}_s)}{E(M_t|\mathscr{F}_s)} = \frac{E(K_t|\mathscr{F}_s)}{E(M_t|\mathscr{F}_s)} = \frac{K_s}{M_s} = X_s(h.h.k)$$

Benzer şekilde $X_t^2 - t$ gösterilebilir [11].

$\square$

Girsanov Teoreminin Genel Hali: *X_t, $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan $dX_t = \alpha_t(\omega)dt + dB_t, t \in [0,T]$ ile verilen Ito süreci için*

$$M_t = e^{-\int_0^t \alpha_s(\omega) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\omega) ds}, \quad t \in [0,T]$$

tanımını yapalım ve $\alpha_t(\omega)$ süreci için Novikov şartı P ölçüsüne göre $E(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s^2(\omega)ds}) < \infty$ sağlasın. Buna göre $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ üzerinde Q ölçüsü $dQ(\omega) = M_T(\omega)dP(\omega)$ şeklinde verilmişse,

a. *M_t bir P martengaldir.*

b. *Q ölçüsü ile P ölçüsü eşdeğerdir.*

c. *Q ölçüsü altında X_t süreci bir Brown sürecidir [11].*

4.3 Stokastik Adi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözüm Metotları

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x \tag{4.29}$$

stokastik diferansiyel denklemin tam çözümü,

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s \tag{4.30}$$

bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Bu nedenle nümerik metotlar aracılığıyla yakın değerlerle çözüme yaklaşılabilir.

Stokastik diferansiyel denklemlerin en basit nümerik metotlarından biri *Stokastik Euler Metodu* veya daha genel adıyla *Euler-Marumaya Metodudur*[11, 14, 20, 21].

4.3.1 Euler-Marumaya Metodu

(4.29) ve (4.30) denklemleri ile verilen stokastik diferansiyel denklemin nümerik çözümünü yapmak için,

$$\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} b(s,X_s)dW_s \approx b(t_n,X_n)\Delta W_n \qquad \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(s,X_s)dW_s \approx a(t_n,X_n)\delta t$$

olmak üzere,

$$X_{n+1} = X_n + a(t_n,X_n)\delta t + b(t_n,X_n)\Delta W_n \tag{4.31}$$

iterasyon denklemi elde edilir.

İterasyonun uygulanması sırasındaki adımlarda $t_n = n\delta t$ olmak üzere,

$$X_t^{\delta t} = X_n + \frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n}(X_{n+1} - X_n) \qquad t \in [t_n, t_{n+1}) \tag{4.32}$$

iterasyon sonucu çıkan değere karşılık X_t kesin çözümü kıyaslandığında;

i. Eğer $\lim_{\delta t \to 0} E(|X_t - X_t^{\delta t}|) = 0$ ise iterasyon güçlü yakınsar,

ii. Eğer bütün $g(x)$ polinomları için $\lim_{\delta t \to 0} |E(g(X_t) - E(g(X_t^{\delta t}))| = 0$ iterasyon zayıf yakınsar denir.

iii. γ mertebeden(order) güçlü ve zayıf yakınsama ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E(|X_t - x_t^{\delta t}|) \leqslant K(\delta t)^{\gamma} \quad (K; sabit)$$

γ. mertebeden güçlü yakınsama

$$|E(g(X_t) - E(g(X_t^{\delta t}))| \leqslant K(\delta t)^{\gamma} \quad (K; sabit)$$

γ. mertebeden zayıf yakınsamadır.

4.3.2 Milstein Metodu

Stokastik nümerik metotlarından biri de Milstein metodudur. (4.29) ve (4.30) denklemleri ile verilen stokastik diferansiyel denklemin nümerik çözümünü farklı bir yaklaşım kullanarak elde etmeye çalışır. Milstein metodu, Stokastik Taylor açılımının Ito formülüne uygulanması esasına dayalıdır.

$$\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} b(s,X_s)dW_s \approx b(t_n,X_n)\Delta W_n \qquad \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(s,X_s)dW_s \approx a(t_n,X_n)\delta t$$

ve $b(t_n,X_n)$ 1. türevi $b'(t_n,X_n)$ olmak üzere,

$$X_{n+1} = X_n + a(X_n)\delta t + b(X_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}b'(X_n)b(X_n)((\Delta W_n)^2 - \delta t) \tag{4.33}$$

denklemi elde edilir [26].

Örnek: Geometrik Brown sürecinin stokastik diferansiyel denklemi,

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X(0) = X_0$$

için olmak üzere Euler-Marumaya ve Milstein metotları uygulanırsa

$$X_{n+1} = X_n + \mu X_n \Delta t + \sigma X_n \sqrt{\Delta} Z \qquad (Euler - Marumaya)$$

ve

$$X_{n+1} = X_n + \mu X_n \Delta t + \sigma X_n \sqrt{\Delta} Z + \frac{1}{2}\sigma^2(Z^2 - 1) \qquad (Milstein)$$

Örnek: CIR(Cox- Ingersol-Ross) stokastik diferansiyel denklemi,

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad X(0) = X_0 > 0$$

için

$$f(X_t) = (\alpha - \beta)X_t \quad g(X_t) = \sigma\sqrt{X_t}$$

Euler-Marumaya ve Milstein metotları uygulanırsa

$$X_{n+1} = X_n + (\alpha - \beta)X_n \Delta t + \sigma\sqrt{X_n}\sqrt{\Delta} Z \qquad (Euler - Marumaya)$$

ve

$$X_{n+1} = X_n + (\alpha - \beta)X_n \Delta t + \sigma\sqrt{X_n}\sqrt{\Delta} Z + \frac{1}{4}\sigma^2(Z^2 - 1) \qquad (Milstein)$$

dir[33].

Örnek: Vasicek stokastik diferansiyel denklemi ise

$$dX_t = (\beta - \alpha X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X(0) = X_0 > 0$$

şeklindedir[33].

Vasicek modelinin denklem yapısı ile CIR modelinin denklem yapısı aynı olduğundan Euler-Marumaya ve Milstein metotları uygulandığında benzer iterasyon denklemleri elde edilir.

CIR ve Vasicek modelleri birbiribe benzeyen tahvil fiyatları ile kısa dönem faiz haddi arasındaki doğrusal ilişkiyi veren stokastik modellerdir[33].

5. UYGULAMA

5.1 Finans Matematiğinin Temel Kavramları

Finansal türev ürünleri, mevcut sistemde geleceğe yönelik yapılacak olan yatırımlarda belirsizlikleri azaltmak ve yatırımcıya da üreticiye de koruma amacı ile yapılan sözleşmelerdir.

Finansal piyasalarda kullanılan türev kelimesinde bu piyasalarda işlem gören ürünlerin başka varlık üzerine dayalı yapılan sözleşmelerdir[33]. Bu sözleşmeler arasında en önemli olanları Futures, Forward, Opsiyon ve Swap sözleşmeleridir. Bir yatırımcının dikkat ettiği en önemli noktalar arasında fiyat dalgalanmaları ve dalgalanmalardan kaynaklanacak olan riskleri iyi analiz etmektir.

Bu noktada türev ürünlerinin işlevi, dayanak varlıklarla birlikte doğru pozisyon alınarak yatırımcı için risksiz ortam oluşturmaktır[33].

Türev piyasaları, finansal araçların gelecekteki bir zaman diliminde alınmasına dair alım-satım sözleşmelerinin yapıldığı piyasalardır.

Türev piyasaları iki ana grupta toplanabilir.

i. **Düzenli Türev Piyasalar :** Teslimat ve nakit akışının belli kurumlar tarafından denetlendiği piyasalardır. Opsiyon piyasaları ve Futures (Vadeli İşlem) piyasaları gibi...

ii. **Tezgahüstü Türev Piyasaları :** Düzenleyici ve denetleyici kurumların olmadığı tarafların karşılıklı alım-satım yaptığı piyasalardır. Forward (Alivre) ve Swap (Takas) piyasaları gibi...

Türev piyasalarında yatırım yapan yatırımcılar eğer alım yapıyorsa *uzun pozisyon almış*, eğer satım yapıyorsa *kısa pozisyon almış* denir[31].

5.2 Opsiyon Sözleşmeleri

Opsiyon sözleşmesi, gelecekte belirlenmiş bir tarihi baz alarak bu tarihe kadar bir dayanak varlıkla ilgili kullanım fiyatı belirleyerek istenilen miktarda ve şartlarda alma veya satma hakkını tanıyan sözleşmelerdir.

Opsiyon sözleşmelerinde iki taraf vardır. Bunlar opsiyon alıcısı ve opsiyon satıcısıdır. Alıcı, prim ödeyerek almak istediği varlığı anlaştığı şartlarda belirlenen tarihe kadar alma hakkı elde ederken vazgeçmesi halinde ödediği primi kaybeder. Satıcı, prim ödeyen alıcıya karşı opsiyonu kullanması durumunda zorunlu olarak yükümlülüğünü yerine getirmelidir[31].

Opsiyon Sözleşmeleri İle İlgili Kavramlar

- **Alım(Call) Opsiyonu:** Alım opsiyonu, opsiyonu alan kişiye opsiyon sözleşmesine konu edilen dayanak varlığın sözleşmede belirtilen fiyattan istemesi koşulunda alma hakkı verir.
- **Satım(Put) Opsiyonu:** Satım opsiyonu, opsiyonu alan kişiye opsiyon sözleşmesine konu edilen dayanak varlığın sözleşmede belirtilen fiyattan istemesi koşulunda alma hakkı verir.
- **Avrupa(European) Tipi Opsiyon:** Vadesinden önce kullanılma hakkı olmayan opsiyondur. Sözleşmede belirtilen tarihte kullanılabilir. Öncesinden kullanılamaz.
- **Amerikan(American) Tipi Opsiyon:** Vadesinden önce istenilen bir zamanda da kullanılabilen opsiyondur. Kullanım serbestliği vardır.
- **Birleşik(Compound) Opsiyonları:** Opsiyonlar üzerine yazılan opsiyon sözleşmeleridir. Bir Avrupa tipi opsiyonu satın almak için başka bir Avrupa tipi opsiyonu kullanmak gibi...
- **Seçim(Chooser) Opsiyonları:** Opsiyona sahip olan kişi, T_1 anında kullanım fiyatı E_1 olan opsiyon ile T_2 anında kullanım fiyatı E_2 olan opsiyonu alım ya da satım opsiyonu olarak almasını sağlar.
- **Asya(Asian) Opsiyonları:** Bu opsiyon çeşitlerinde opsiyonun vade sonunda yapacağı ödeme, opsiyon sözleşmesine konu olan dayanak varlığın geçmişteki değeri gözönüne alınarak yapılan opsiyon sözleşmesidir.
- **Geriye Dönük(Lookback) Opsiyonlar:** Bu tür opsiyonlarda ödeme opsiyon sözleşmesine konu olan dayanak varlığın vadedeki değeri ile belli zaman aralıklarında da-

yanak varlığın maksimum ve minimum değerini gözönünde bulundurarak belirlendiği opsiyonlardır.

- **Standart(Vanilla) Opsiyonlar:** Çok karmaşık olmayan tek dayanak varlık üzerinden yapılan opsiyonlardır. En yaygın opsiyon tipidir.
- **Egzotik(Exotic) Opsiyonlar:** Vanilla opsiyonlarına göre daha karmaşık olan opsiyonlardır. Birçok türüvardır. En çok bilinen türleri Engelli(Barrier) opsiyonu, Asya opsiyonu ve Gökkuşağı(Rainbow) opsiyonudur.
- **Gökkuşağı(Rainbow) Opsiyonlar:** Birden fazla dayanak varlığın alım-satımının konu edildiği opsiyon sözleşmeleridir.

Bunların dışında opsiyon sözleşmesine konu edilen dayanak varlığa göre isimlendirilen opsiyonlar vardır. Endeks opsiyonları, Futures opsiyonları, Döviz opsiyonları ve Faiz opsiyonları örnek verilebilir [6, 18, 33].

5.3 Opsiyon Fiyatlama

Alım ya da satım opsiyonu sözleşmelerinde, sözleşme gereği ödenmesi gereken prim miktarını belinmesine opsiyon fiyatlandırması denir. Amaç sözleşme taraflarının haklarını koruyacak asgari miktardır.

Opsiyon fiyatını belirlenmesi sırasında etkili olan faktörler ve duyarlılıkların vardır. Bu parametreler için kullanılan notasyonlar aşağıdaki gibidir [22, 32, 33].

X	Kullanım Fiyatı
S	Dayanak varlığın fiyatı
S_T	Dayanak varlığın T anında fiyatı
r	Risksiz faiz oranı
σ	Değişkenlik, dalgalanma, volatilite, difüzyon terimi, dağılma
T	Vade, opsiyon sözleşmesinin bittiği tarih
t	Şimdiki zaman
$T-t$	Vadenin bitmesine kalan süre
C	Amerikan tipi alım opsiyonunun satın alma değeri
P	Amerikan tipi alım opsiyonunun satma değeri
c	Avrupa tipi alım opsiyonunun satın alma değeri
p	Avrupa tipi alım opsiyonunun satma değeri
$N(d)$	Normal Dağılım Değeri, $N(d) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{d} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$
V_t	t anında varlığın değeri (Servet birikimi) $V_t = u(t, X_t)$

Şimdi opsiyon fiyatlama tekniklerinden biri olan Black-Scholes Modelini inceleyelim.

5.4 Black-Scholes Denklemleri

1973 yılında Fischer Black ve Myron Scholes tarafından yayınlanan "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" isimli makale finans dünyası için özellikle opsiyon fiyatlama konusunda önemli bir dönüm noktası olmuştur. Opsiyon fiyatlama ile ilgilenen bilim insanları ileri matematik bilmeseler bile denklemin kullanımı sayesinde kolaylıkla fiyatlandırma yapmalarını sağlamıştır [5, 24].

Black-Scholes denkleminde temel dayanak noktası başlangıç olarak ele alınan hisse sentlerini ve benzeri argümanların fiyat hareketliliğini rassal yürüyüşe sahip olup dağılım olarak Lognormal dağılımına uymasıdır. Finansal araçların bir çoğu da bu nedenlerden dolayı Geometrik Brown Hareketine uymaktadır [6, 33].

Model sonucu uygulanan stokastik diferansiyel denklemler sonucu uzmanların kulanması için sunulan denklemler;

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rt}N(d_2) \tag{5.1}$$

$$p = Xe^{-rt}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{5.2}$$

her iki denklemde de

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{5.3}$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{5.4}$$

dir[6].

$$V_t = a_t X_t + b_t \beta_t = u(t, X_t) \qquad t \in [0, T]$$

denkleminde X_t bir Ito süreci olarak düşünülürse

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma\int_0^t X_s dB_s$$

stokastik diferansiyel denkleminde Ito lemmaları uygulanarak stokastik diferansiyel denklemde yerine yazılır.

Buradan

$$V_t - V_0 = \int_0^t \left[(c-r)a_s X_s + rV_s\right] ds + \int_0^t (\sigma a_s X_s) dB_s$$

eşitliğine ulaşılır. Dolayısıyla ;

$$(c-r)a_t X_t + ru(t, X_t) = (c-r)u_2(t, X_t)X_t + ru(t, X_t)$$

$$(c-r)a_t X_t + ru(t, X_t) = u_1(t, X_t) + cX_t u_2(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 {X_t}^2 u_{22}(t, X_t)$$

X_t geometrik Brown süreci olduğundan daima pozitiftir. $X_t = x$ yazarsak;

$$ru(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{22}(t,x) + u_1(t,x) + rxu_2(t,x) \qquad x > 0, \quad t \in [0, T] \tag{5.5}$$

kısmi diferansiyel denklemine ulaşılır. t anında satılan stokun sağlayacağı risksiz kar ortalamadan düşülürse Black-Schole diferansiyel denklemi,

$$ru(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{22}(t,x) + u_1(t,x) + (r-\rho)xu_2(t,x) \tag{5.6}$$

halini alır.

Örnek: Vadesinin dolmasına 3 ay kalan bir Avrupa satım opsiyonunun şimdiki endeks değeri 10000 lira olsun. Kullanım değeri 9800 lira olan bu opsiyonu risksiz faiz haddi %20 ve endeks değişkenliği (dalgalanması) %30' olduğu kabul edilirse opsiyon primi kaç liradır?

Çözüm: Verilen bilgileri yazarsak;

$$S_0 = 10000 \quad K = 9800 \quad r = \%20 \quad \sigma = \%30 \quad T = \frac{3}{12} = 0.25$$

dir. d_1 ve d_2 değerlerini hesaplarsak;

$$d_1 = \frac{ln(\frac{10000}{9800}) + (0.20 + (0.30)^2/2)(0.25)}{0.30\sqrt{0.25}} = 0.5430$$

$$d_2 = 0.5430 - 0.30\sqrt{0.25} = 0.3930$$

$$N(d_1) = 0.2936 \qquad N(d_2) = 0.3472$$

Opsiyon değeri;

$$C = 10000(0.2936) - 9800(0.3474)e^{(-0.20)(0.25)} = 300.5909$$

bulunur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Stokastik diferansiyel denklemler konusu daha iyi anlaşılması için Matematiğin önemli dalları arasında olan Olasılık Teorisi, Ölçüm Teorisi, Nümerik Analiz, Diferansiyel Denklemler ve Stokastik Süreç dallarını iyi kavranması gerekmektedir. Bu nedenle zorlu bir süreç olan çalışmada temel kavramlar irdelenmiş ve uygulama sahası olarak Black-Scholes denklemine gözatılmıştır. Nümerik çözümleme metotlarınında verildiği çalışmada birçok uygulama sahasının olması ve metotların belirsizliklere göre modeller oluşturulabileceğinden kısıtlı kalmıştır.

Simülasyon metotlarıda kullanarak gerçek dünya problemlerinin daha iyi modellenebilmesini sağlayan PDE ve SDE, ülkemizde sayılı bilim insanları dışında yeni yeni çalışılmaya başlanmıştır. Özellikle metotların kısıtlarının azaltılarak daha yaygın kullanılabilir hale getirilmesi mümkündür. Araştırmacıların bu konu üzerinde daha fazla duracağını düşünüyorum. Bu konuda çalışmalarımızın giriş kısmı gibi olan çalışma temel kaynak oluşturması hedeflenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Akdi,Y., " Matematiksel İstatistiğe Giriş", 2005, *Bıçaklar Kitabevi*, Ankara.

[2] Apostol T.M., "Mathematical Analysis" 2nd ed.,1973,*Addison-Wesley*, New York .

[3] Applebaum D., "Stochastic Processes" , 2007 , *University of Sheffield Lec.Notes*, Sheffield.

[4] Bhat B.R., "Modern Probability Theory", 1981,*John Wiley Sons*, Tunbridge Wells(UK).

[5] Black F., Scholes M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy, 81 (May/June 1973*,pp.637–59;

[6] Chambers N.,"Türev Piyasalar", 2007, *Beta Yayınları*, İstanbul.

[7] Chung K,.L., "A Course in Probability Theory" 2nd ed., 1974, *Academic Press*, Stanford.

[8] Chung K.L., "Elementary Probability Theory with Stochastic Processes", 1975, *Springer*, New York.

[9] Chung K,.L., Willams R.J., "Introduction to Stochastic Integration", 1983,*Birkhauser*, New York.

[10] Cohn, D.L., "Measure Theory", 2013, *Birkhäuser*,Boston.

[11] Çapar U., "Ölçü Kuramsallı Olasılık ve Stokastik Kalkülüse Giriş:Finans Uygulamaları ile", 2013, *ODTÜ Yayıncılık*, Ankara.

[12] Evans, L.C., "An Introduction to Stochastic Differential Equations", 2012, *American Mathematical Society*, Berkeley.

[13] Halmos P.R., "Measure Theory" , 1974, *Graduate Texts in Mathematics Springer*, New York.

[14] Higham D.J., "An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations", 2001, *SIAM Review Vol. 43,No.3*,pp.525–546.

[15] Ito K.,"Stochastic Integral", 1944, *Proceeding of The Japan Academy,Vol.20 Number 8*,pp.519,524.

[16] Ito K.,"On a Stochastic Integral Equation", 1946, *Proceeding of The Japan Academy,Vol.22 Number 2*,pp.32-35.

[17] Karatzas I.,Shreve S., "Brownian Motion and Stochastic Calculus", 1988, *Springer-Verlag*, New York.

[18] Karan M.B., "Yatırım Analizi ve Portföy Yönetimi", 2013, *Gazi Kitabevi*, Ankara.

[19] Kingman J.F.C.,Taylor S.J.,"Introduction to Measure and Probability", 1966, *Cambridge*,Cambridge .

[20] Kloeden, P.E. and Platen, E., "Numerical Solution of Stochastic Differential Equations", 2013, *Springer Berlin Heidelberg*, New York.

[21] Lord, G.J. and Powell, C.E. and Shardlow, T., "An Introduction to Computational Stochastic PDEs", 2014, *Cambridge University Press*, London.

[22] Malliavin P. "Integration and Probability", 1995, *Graduate Texts in Mathematics Springer-Verlag*, New York.

[23] Mao, X., "Stochastic Differential Equations and Applications", 2008,*Elsevier Science*, Glasgow.

[24] Merton R.C., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (Spring 1973)*,pp.141–83

[25] Mikosch T., "Elementary Stochastic Calculus", 2006, *World Scientific*, London.

[26] Milstein G.N., "Approximate integration of stochastic differential equations", 1974 , *Theor.Prob.Appl.,19*,pp.557-562.

[27] Neveu J. "Mathematical Foundations of the Calculus of Probability" ,1965 , *Holden-Day*.

[28] Protter P., "Stochastic Integration and Differential Equations (a new approach)", 1990, *Springer*,New York.

[29] Oksendal B. "Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications"6th ed., 2013, *Springer*, Oslo.

[30] Ornstein L.,Uhlenbeck G.E., "On the Theory of Brownian Motion" , 1930, *Phys. Rev. 36*,pp.823-841.

[31] Sucu M.,Kul F., " Finans Matematiği", 2015 , *Nobel Yayıncılık*, Ankara.

[32] Wilmott P., "The Mathematics of Financial Derivatives ,(a student introduction)" , 1995, *Cambridge University Press*, London.

[33] Yıldırak K.,Çalışkan N., "Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri", 2008 ,*Literatür Yayıncılık*, İstanbul.

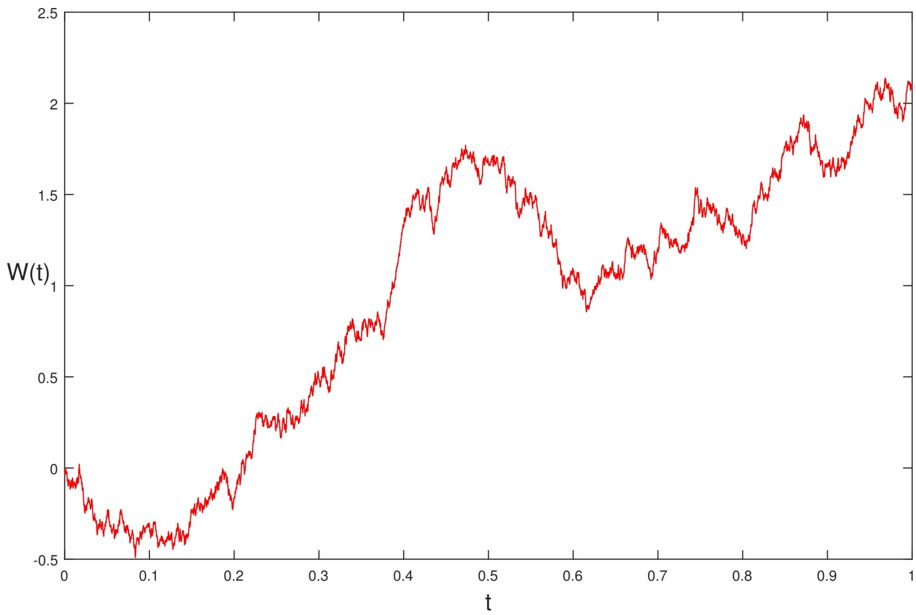
EK :Matlab Kodları

EK :Matlab Kodları[14]

```
************************************************************************
Higham D.J.
************************************************************************
%BPATH1  Brownian path simulation

randn('state',100)            % set the state of randn
T = 1; N = 500; dt = T/N;
dW = zeros(1,N);              % preallocate arrays ...
W = zeros(1,N);               % for efficiency

dW(1) = sqrt(dt)*randn;       % first approximation outside the loop ...
W(1) = dW(1);                 % since W(0) = 0 is not allowed
for j = 2:N
   dW(j) = sqrt(dt)*randn;    % general increment
   W(j) = W(j-1) + dW(j);
end

plot([0:dt:T],[0,W],'r-')     % plot W against t
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
```

Şekil 6.1: Brown Hareket Sürecinin Yörüngeleri

Örnek

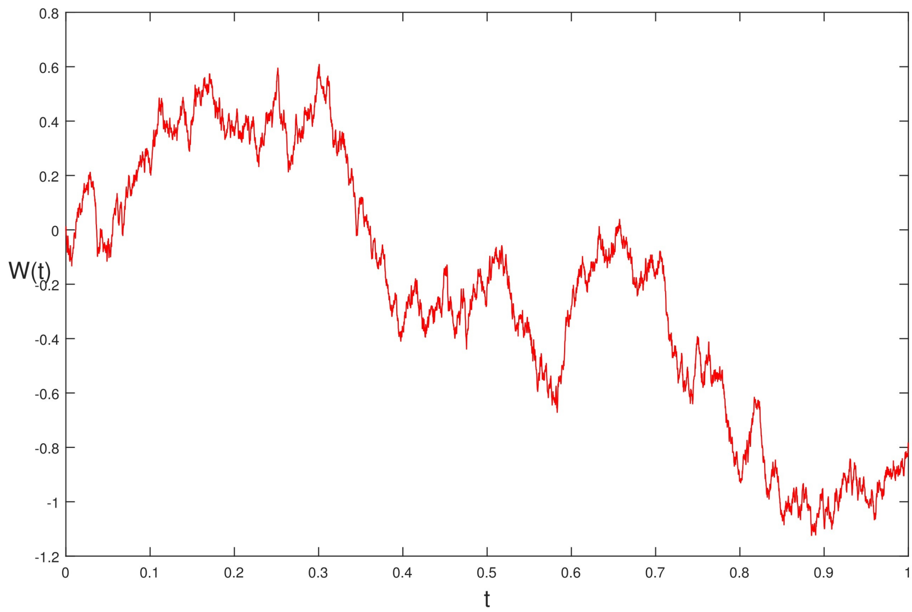


Şekil 6.2: Brown Hareket Yörünge Örneği

```
**********************************************************************
Higham D.J.
**********************************************************************
%BPATH2  Brownian path simulation: vectorized

randn('state',100)           % set the state of randn
T = 1; N = 500; dt = T/N;

dW = sqrt(dt)*randn(1,N);    % increments
W = cumsum(dW);              % cumulative sum

plot([0:dt:T],[0,W],'r-')    % plot W against t
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
```

Şekil 6.3: Brown Hareket Sürecinin Yörüngeleri

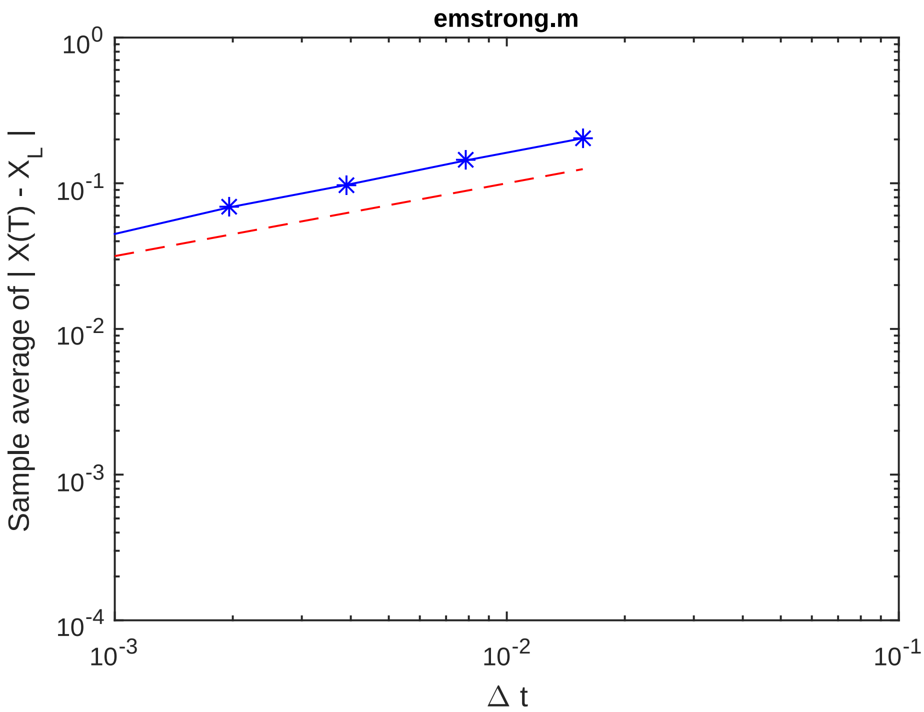
Örnek



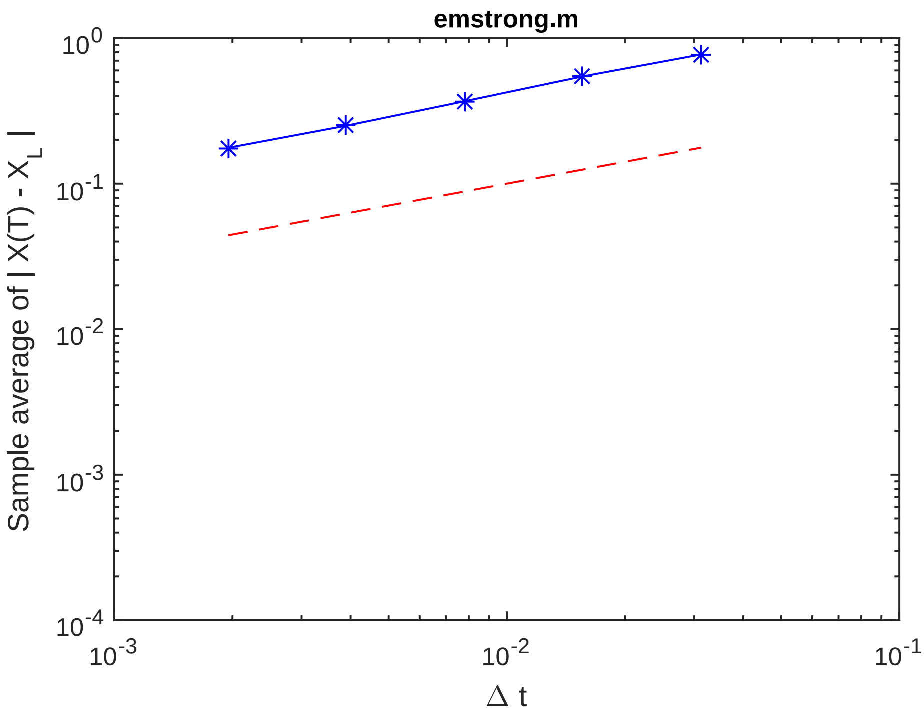
Şekil 6.4: Brown Hareket Yörünge Örneği

```
******************************************************************
Higham D.J.
******************************************************************
%EMSTRONG  Test strong convergence of Euler-Maruyama
%
% Solves    dX = lambda*X dt + mu*X dW,   X(0) = Xzero,
%         where lambda = 2, mu = 1 and Xzer0 = 1.
%
% Discretized Brownian path over [0,1] has dt = 2^(-9).
% E-M uses 5 different timesteps: 16dt, 8dt, 4dt, 2dt, dt.
% Examine strong convergence at T=1:  E | X_L - X(T) |.

randn('state',100)
lambda = 2; mu = 1; Xzero = 1;    % problem parameters
T = 1; N = 2^9; dt = T/N;         %
M = 1000;                         % number of paths sampled

Xerr = zeros(M,5);                % preallocate array
for s = 1:M,                      % sample over discrete Brownian paths
        dW = sqrt(dt)*randn(1,N);     % Brownian increments
        W = cumsum(dW);               % discrete Brownian path
        Xtrue = Xzero*exp((lambda-0.5*mu^2)+mu*W(end));
        for p = 1:5
                R = 2^(p-1); Dt = R*dt; L = N/R;     % L Euler steps of size Dt = R*dt
                Xtemp = Xzero;
                for j = 1:L
                        Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
                        Xtemp = Xtemp + Dt*lambda*Xtemp + mu*Xtemp*Winc;
                end
                Xerr(s,p) = abs(Xtemp - Xtrue);      % store the error at t = 1
        end
end

Dtvals = dt*(2.^([0:4]));
subplot(221)                                % top LH picture
loglog(Dtvals,mean(Xerr),'b*-'), hold on
loglog(Dtvals,(Dtvals.^(.5)),'r--'), hold off % reference slope of 1/2
axis([1e-3 1e-1 1e-4 1])
xlabel('\Delta t'), ylabel('Sample average of | X(T) - X_L |')
title('emstrong.m','FontSize',10)

%%%% Least squares fit of error = C * Dt^q %%%%
A = [ones(5,1), log(Dtvals)']; rhs = log(mean(Xerr)');
sol = A\rhs; q = sol(2)
resid = norm(A*sol - rhs)
```

Şekil 6.5: Euler-Marumaya Metotu için Güçlü Yakınsama Testi



Şekil 6.6: $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ için Euler-Marumaya Güçlü Yakınsama Örneği



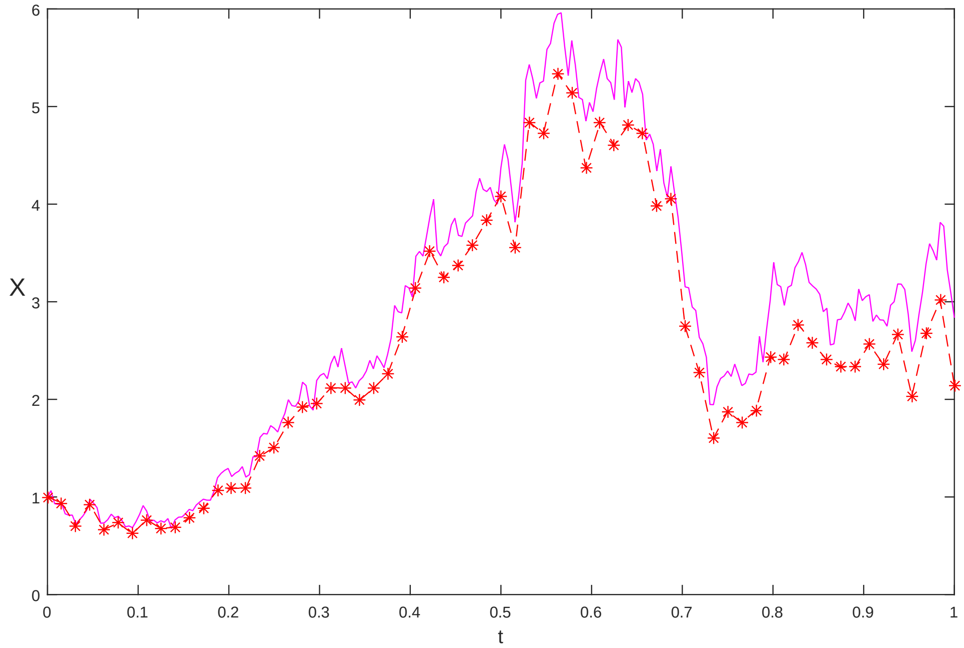
Şekil 6.7: $\lambda = 2$ ve $\mu = 1$ için Euler-Marumaya Güçlü Yakınsama Örneği

```
***********************************************************************
Higham D.J.
***********************************************************************
%MILSTRONG  Test strong convergence of Milstein: vectorized
%
% Solves   dX = r*X*(K-X) dt + beta*X dW,  X(0) = Xzero,
%        where r = 2, K= 1, beta = 1 and Xzero = 0.5.
%
% Discretized Brownian path over [0,1] has dt = 2^(-11).
% Milstein uses timesteps 128*dt, 64*dt, 32*dt, 16*dt (also dt for reference).
%
% Examines strong convergence at T=1:  E | X_L - X(T) |.
% Code is vectorized: all paths computed simultaneously.

randn('state',100)
r = 2; K = 1; beta = 0.25; Xzero = 0.5;   % problem parameters
T = 1; N = 2^(11); dt = T/N;              %
M = 500;                                  % number of paths sampled
R = [1; 16; 32; 64; 128];                 % Milstein stepsizes are R*dt

dW = sqrt(dt)*randn(M,N);                 % Brownian increments
Xmil = zeros(M,5);                        % preallocate array
for p = 1:5
         Dt = R(p)*dt; L = N/R(p);            % L timesteps of size Dt = R dt
         Xtemp = Xzero*ones(M,1);
         for j = 1:L
                  Winc = sum(dW(:,R(p)*(j-1)+1:R(p)*j),2);
                  Xtemp = Xtemp + Dt*r*Xtemp.*(K-Xtemp) + beta*Xtemp.*Winc ...
                          + 0.5*beta^2*Xtemp.*(Winc.^2 - Dt);
         end
         Xmil(:,p) = Xtemp;  % store Milstein solution at t =1
end

Xref = Xmil(:,1);                             % Reference solution
Xerr = abs(Xmil(:,2:5) - repmat(Xref,1,4));   % Error in each path
mean(Xerr);                                   % Mean pathwise errors
Dtvals = dt*R(2:5);                           % Milstein timesteps used

subplot(224)                                  % lower RH picture
loglog(Dtvals,mean(Xerr),'b*-'), hold on
loglog(Dtvals,Dtvals,'r--'), hold off         % reference slope of 1
axis([1e-3 1e-1 1e-4 1])
xlabel('\Delta t')
ylabel('Sample average of | X(T) - X_L |')
title('milstrong.m','FontSize',10)

%%%% Least squares fit of error = C * Dt^q %%%%
A = [ones(4,1), log(Dtvals)]; rhs = log(mean(Xerr)');
sol = A\rhs; q = sol(2)
resid = norm(A*sol - rhs)
```

Şekil 6.8: Milstein Metotu için Güçlü Yakınsama Testi

```
************************************************************************
Higham D.J.
************************************************************************
%EM  Euler-Maruyama method on linear SDE
%
% SDE is  dX = lambda*X dt + mu*X dW,   X(0) = Xzero,
%      where lambda = 2, mu = 1 and Xzero = 1.
%
% Discretized Brownian path over [0,1] has dt = 2^(-8).
% Euler-Maruyama uses timestep R*dt.

randn('state',100)
lambda = 2; mu = 1; Xzero = 1;    % problem parameters
T = 1; N = 2^8; dt = T/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);         % Brownian increments
W = cumsum(dW);                   % discretized Brownian path

Xtrue = Xzero*exp((lambda-0.5*mu^2)*([dt:dt:T])+mu*W);
plot([0:dt:T],[Xzero,Xtrue],'m-'), hold on

R = 4; Dt = R*dt; L = N/R;        % L EM steps of size Dt = R*dt
Xem = zeros(1,L);                 % preallocate for efficiency
Xtemp = Xzero;
for j = 1:L
   Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
   Xtemp = Xtemp + Dt*lambda*Xtemp + mu*Xtemp*Winc;
   Xem(j) = Xtemp;
end

plot([0:Dt:T],[Xzero,Xem],'r--*'), hold off
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('X','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')

emerr = abs(Xem(end)-Xtrue(end))
```

Şekil 6.9: Euler-Marumaya Metotu ile Stokastik Lineer Denklem Çözümü



Şekil 6.10: Euler-Marumaya Metotu ile Stokastik Lineer Denklem Çözümü Örneği

```
**********************************************************************
Higham D.J.
**********************************************************************
% BS  Black-Scholes European put price.
%

%%%%%%%%% Problem parameters %%%%%%%%%%%%%%
S = 5; E = 10; T = 1; r = 0.06; sigma = 0.3;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

d1 = (log(S/E) + (r + 0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2 = d1 - sigma*sqrt(T);
N1 = 0.5*(1+erf(-d1/sqrt(2)));
N2 = 0.5*(1+erf(-d2/sqrt(2)));

value = E*exp(-r*T)*N2 - S*N1;

disp('Option value is'), disp(value)
```

Şekil 6.11: Black-Scholes Denklemi ile Avrupa Tipi Satım Opsiyon Değeri

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: AKARBULUT Kenan
Uyruğu	: TC.
Doğum Tarihi ve Yeri	:12/07/1977-Elazığ
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0542 201 74 64
Faks	:
e-mail	:akarbulut@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Marmara Üniversitesi /Matematik Bölümü	1998
Lise	Manisa Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1998-2011	Uşak	Özel Öğretim Kursu Matematik Öğr.
2011-2016	Uşak Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Bilgisayar, Film izleme, Kitap Okuma