**T.C.**
**UŞAK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# KÜME DEĞERLİ TOPOLOJİLER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fatma ALTINTAŞ**

**AĞUSTOS 2019**
**UŞAK**

**T.C.**
**UŞAK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# KÜME DEĞERLİ TOPOLOJİLER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fatma ALTINTAŞ**

**UŞAK 2019**

Fatma ALTINTAŞ tarafından hazırlanan **Küme Değerli Topolojiler** adlı bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SOYERTEM ..................
Tez Danışmanı Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma,jürimiz tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalından Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK ..................
Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Onur OKTAY ..................
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SOYERTEM ..................
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih:···/···/2019

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ..................
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Fatma ALTINTAŞ

İMZA

KÜME DEĞERLİ TOPOLOJİLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma ALTINTAŞ

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2019

ÖZET

Bu tezde 6 tane küme topolojisi üzerinde durduk. Bunlar Hausdorff, Vietoris,Wijsman, Mosco, Fell ve Attouch-Wets topolojileridir. Önce Hausdorff uzaklığın tanımı ve özellikleri verildi ve Hausdorff uzaklığın metrik olma koşulları belirtildi. İkinci olarak açık kümelerin alt kümelerinin oluşturduğu ailelerle açık kümelerle kesişen kümelerin oluşturduğu aileleri alt taban kabul eden Vietoris topolojisi incelendi. Üçüncü küme topolojisi uzaklık fonksiyonlarının, noktasal yakınsaklığına karşılık gelen yakınsaklık olan Wijsman topolojisi üzerinde duruldu. Dördüncü küme topolojisi, Vietoris Topolojiye göre daha kaba olan Fell Topolojisi, Kuratowski yakınsaklık ile karşılaştırıldı. Beşinci olarak Kuratowski yakınsamadan daha az kısıtlayıcı bir yakınsama verildi ki bu bizi $X$ uzayı sonsuz boyutta küme olduğu durumda bile kullanılabilecek Mosco küme topolojisine götürdü. Son olarak incelediğimiz küme topolojisi Attouch-Wets topoloji, kümelerin düzgün sınırlı dizilerinde bile Mosco yakınsama Hausdorff yakınsamaya indirgenemezken bu özelliği sağlayacak bir küme yakınsamasıdır.

Son olarak da bu 6 topolojik uzayın birbiriyle ilişkisi gösterildi.


| | | |
|---|---|---|
| **Bilim Kodu** | : | 403.04.00.TOPOLOJİ |
| **Anahtar Kelimeler** | : | Küme değerli topolojiler, Hausdorff Metriği, Vietoris Topolojisi, Wijsman Topolojisi, Fell Topolojisi, Mosco Topolojisi, Attouch-Wets Topoloji |
| **Sayfa Adedi** | : | 68 |
| **Tez Yöneticisi** | : | Dr. Öğretim Üyesi Mustafa SOYERTEM |

SET TOPOLOGIES

(M.Sc. Thesis)

Fatma ALTINTAŞ

UNIVERSITY OF UŞAK

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2019

## ABSTRACT

In our thesis we focused on 6 set topologies. These are Hausdorff, Vietoris, Wijsman, Mosco, Fell and Attouch-Wets topologies.The definition and properties of Hausdorff distance are given.Later Hausdorff distance metrik conditions specified. Vietoris topology, which accepts families formed by subsets of open sets and families formed by intersecting open sets, was examined.The Wijsman topology is the topological characterization of a mode of convergence of sets, which is useful in applications and also is a tool in comparing other set convergences. We are referring to the convergence concept which corresponds to the pointwise convergence of the distance functions.Fell topology more rought than Vietoris topology examined and Fell Topology to Kuratowski convergence is compared.Generally given a less restrictive convergence than Kuratowski convergence. This led us to Mosco Topology, which can be used even when $X$ space is infinite.Last Attouch-Wets topology uniformly bounded sequence of sets, Mosco convergence does not reduce to Hausdorff convergence. Finally, the

relationship between these 6 hyperspace topologies is shown.

**Science Code** : 403.04.00.TOPOLOGY

**Keywords** : Set topologies, Hausdorff Metric, Vietoris Topology, Wijsman Topology, Fell Topology, Mosco Topology, Attouch-Wets Topology

**Number of Page** : 68

**Supervisor** : Dr. Öğretim Üyesi Mustafa SOYERTEM

**TEŞEKKÜR**

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve kıymetli tecrübelerinden faydalandığım değerli danışman hocam Doktor Öğretim Üyesi Mustafa SOYERTEM'e ve destekleriyle her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

Fatma ALTINTAŞ

## İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\emptyset$ | Boş Küme |
| $\in$ | Eleman |
| $\notin$ | Eleman değil |
| $2^X$ | $X$ in tüm alt kümeleri ailesi |
| $P_f(X)$ | $X$ in boşolmayan, kapalı alt kümeleri ailesi |
| $\hat{P}_f(X)$ | $X$ in kapalı alt kümeleri ailesi |
| $P_{fc}(X)$ | $X$ in boşolmayan, kapalı ve konveks alt kümeleri ailesi |
| $P_{bf}(X)$ | $X$ in boşolmayan,sınırlı, kapalı alt kümeleri ailesi |
| $P_{bfc}(X)$ | $X$ in boşolmayan,sınırlı, kapalı ve konveks alt kümeleri ailesi |
| $P_k(X)$ | $X$ in boşolmayan, kompakt alt kümeleri ailesi |
| $P_{kc}(X)$ | $X$ in boşolmayan, kompakt ve konveks alt kümeleri ailesi |
| $P_{wk}(X)$ | $X$ in boşolmayan, zayıf-kompakt alt kümeleri ailesi |
| $P_{wkc}(X)$ | $X$ in boşolmayan, zayıf-kompakt ve konveks alt kümeleri ailesi |
| $B(x,\varepsilon)$ | $x$ merkezli, epsilon yarıçaplı açık yuvar |
| $X^*$ | $X$ in topolojik duali |
| $w^*$ | zayıf alttan yarı süreklidir |

# 1. GİRİŞ

Kontrol teorisi, matematiksel ekonomi, oyun teorisi, diferansiyel oyun, biomatematik, nitel fizik ve canlılık teorisindeki kullanımlarda ortaya çıkan küme değerli analize olan ihtiyaç araştırmacıları tekrar tekrar kullanılan temel bilgiyi paylaşmak için bu konu üzerinde çalışmaya yöneltti. Araştırmacıların karşılaştıkları problemler Hadamard anlamında iyi tanımlı(well posed) problemler olmak zorunda değil. Kötü tanımlı(ill posed) problemler, ters (inverse) problemler ve başka isim altında diğer pekçok farklı problem tüm çalışma alanlarında (bazı veriler için bir çözümün varolmadığında veya çözümün tekniği tehlike de olduğunda) ortaya çıkmaktadır. Dönüşümlerin her zaman tek değerli (hatta birebir ve örten) olması kabulu pekçok uygulama alanında zor elde edilecek koşullardır. Hatta bazı alanlarda böyle varsayımlar yapamayız. Bu durum 20. yüzyılın başlarında Fonksiyonel Analizin kurucuları tarafından da farkedildi: Painleve, Hausdorff, Bouligand, Kuratowski bunlardan sadece bazılarıdır. Kuratowski önemli kitabı "TOPOLOGIE" [4]'de küme değerli topolojiye hakettiği değeri vermiştir.

Bourbaki'nin "TOPOLOGIE GÉNÉRALE" [5] cildinin yazarları küme değerli topolojiyi terkederek çalışmalarını tek değerli dönüşümlere kısıtladılar. Bu çalışmalarda küme değerli dönüşümleri bir kümeden başka bir kümenin kuvvet kümesine tanımlı tek değerli dönüşümler olarak veya birebir ve örten yapmak için tek değerli dönüşümlere ayrıştırarak incelediler. Böyle bir yaklaşım çözüm değildir. Çünkü böyle yapıldığında pekçok yapısal özellik kaybolur. Geriye kalanlar ise hayatı kolaylaştıracağına daha da zorlaştıran kullanışsız araçlardır.

II. Dünya Savaşından sonra tüm dünyaya yayılan bu bakış açıları bizi gereksiz çıkmazlara yönlendirdi. Doğrudan yaklaşımın çok zor veya daha kötüsü hiç olmadığı fikrini yaydılar.

Sonuç olarak küme değerli analiz düzgün hedefleri olmayan sadece birşeyleri genelleştirmek adına genelleştiren matematikçilere bırakılması gereken bir matematiksel merak konusu olarak oldukça zor ve gizemli olarak düşünüldü.

Tersine ortaya çıktı ki, kontrol teori, ekonomi ve yönetim, biyoloji ve sistem bilimleri, yapay zeka gibi diğer bilgi alanlarında ortaya çıkan problemlerin çözümü için küme değerli analize ihtiyaç vardı. Bu ihtiyaç matematikçilerin bu tür önyargılarının üstesinden gelmesi için yeterli oldu.

Bu şekilde iştah uyandıran uygulamaların ışığında tek değerli analizin bölümlerinin temel sonuçlarının çoğunun küme değerli analize uygulanabilmesi iyi bir gelişme olarak bu süreçte elde edildi. Bunlar:

-Limit ve Süreklilik

-Lineer Fonksiyonel Analiz

-Lineer olmayan Fonksiyonel Analiz

-Teğetler ve Normaller

-Dönüşümlerin Türevleri

-Fonksiyonların Gradyanları ve Fermat Kuralı

-Dönüşümlerin Yakınsaklığı

-Ölçü ve İntegral

-Diferansiyel Denklemler

şeklinde sayılabilir.

Bu tezde ilk önce noktalardaki topolojik yapının kümelere aktarılmasının bazı örnekleri incelenerek noktalar için nokta uzayının sahip olduğu özellikler küme uzaylarını nasıl etkilediği incelenecektir. Tez çalışmamızda 6 tane küme topolojisi üzerinde durduk. Bunlar Hausdorff, Vietoris, Wijsman, Mosco, Fell ve Attouch-Wets topolojileridir.

İlk olarak noktalar arası uzaklıktan kümeler arası uzaklığın tanımına geçilerek Hausdorff uzaklığın tanımı ve özellikleri verildi. Daha sonra Hausdorff uzaklığın metrik olma koşulları için hangi özel durumlarının olması gerektiği belirtildi. Metrik uzay üzerinde tanımlı bir kümenin alt kümeleri aileleri arasındaki Hausdorff olma koşulları incelenerek bir sonraki bölüme geçildi.

ikinci olarak Hausdorff topoloji olan kümenin alt kümelerinin ailesinin taban olduğu küme ile kesişimleri boşkümeden farklı küme ailelerinin alt taban olduğu kümenin birleşimini alt taban kabul eden Vietoris topolojisine geçildi.Vietoris topolojisinin Hausdorff topoloji ile ilişkileri incelendi.

Üçüncü olarak incelenen Wijsman topolojisi küme yakınsaklıklarını karşılaştırmak için de yararlı bir araçtır. Burada bahsedilen; uzaklık fonksiyonlarının, noktasal yakınsaklığına karşılık gelen yakınsaklıktır.

Dördüncü inceleyeceğimiz küme topolojisi de küme yakınsaklığı kavramından elde edilir. Fell Topoloji küme topolojisiyle ilgili olmayanların arasında bile popülerdir.

Beşinci küme topolojisi Mosco Topolojidir. Amacımız yeni bir küme yakınsama kavramını vermek. Genel olarak Kuratowski yakınsamadan daha az kısıtlayıcı ki bu bizi $X$ uzayı sonsuz boyutta küme olduğu durumda bile kullanılabilecek bir küme topolojisine götürür.

Altıncı inceleyeceğimiz küme topolojisi Attouch-Wets topoloji, kümelerin düzgün sınırlı dizilerinde bile Mosco yakınsama Hausdorff yakınsamaya indirgenemezken bu özelliği sağlayacak bir küme yakınsamasıdır.

Son olarak da bu 6 topolojik uzayın birbiriyle ilişkileri gösterildi.

## 1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, küme değerli topolojilerinden Hausdorff, Vietoris, Wijsman, Fell, Mosco ve Attouch-Wets topolojilerini biraraya getirip, onların genel özelliklerini hatırlatıp birbirleriyle olan ilişkilerini ve farklılıklarını sunmak. Ayrıca son yüzyılda gelişen ve birçok bilime katkısı olan küme değerli topoloji ile ilgili yeterince Türkçe kaynak olmaması ve bu konuda araştırma yapmak isteyen araştırmacılar için kaynak oluşturmak hedefimiz.

## 1.2 Literatür Araştırması

Tez araştırmasından faydalandığım kaynakların başında Handbook of Multivalued Analysis[1] vardır.Ayrıca bunun dışında Set-Valued Analysis[3] kitabından da faydalanılmıştır.

# 2. HAUSDORFF METRİK TOPOLOJİ

Kümeler arasında da noktalar arasında olduğu gibi uzaklık kavramı oluşturmak oldukça zor bir işlemdir. Her ne kadar ayrık metrik gibi herhangi bir küme üzerinde metrik uzay oluşturabilecek yapılar mevcutsa da burada esas istenilen şey tek nokta kümelerine indirgendiğinde noktalar arasındaki uzaklık kavramına denk olacak şekilde kümeler ailesi üzerinde tanımlı uzaklık kavramını genişletebilecek bir tanımdır.

Bu bölümde bir metrik uzay üzerindeki uzaklık kavramını kullanarak öncelikle bir noktanın kümeye, sonrasında da bir kümenin bir kümeye (Hausdorff anlamında) uzaklıkları verildi. Basit örnekler üzerinden de bu uzaklıkların nasıl hesaplanacağı gösterildi. Bu kümeler arasındaki uzaklığın önce kuvvet kümesi üzerindeki özellikleri gösterildikten sonra kapalı kümeler üzerinde metrik olma şartlarının sağlandığı da gösterildi. Hausdorff metrik kümeler ailesi üzerinde tanımlı bir metrik olduğundan bu özellik Hausdorff metrik için de ya vardır ya yoktur. Kapalı kümelerin alt kümeleri olan kompakt kümeler, kapalı sınırlı kümeler, kapalı konveks kümeler ve kapalı konveks sınırlı küme ailelerinin bu metrikte kapalı aileler olduğu da gösterildi. Konveks analizde kapalı konveks küme ile bunların destek fonksiyonu arasındaki ilişki oldukça önemlidir. Kapalı konveks kümelerin arasındaki Hausdorff uzaklık ile destek fonksiyonları arasındaki bir ilişki de gösterildi.

Bölüme bir metrik uzayda noktanın kümeye uzaklığının tanımı ile başlıyoruz.

**Tanım 2.1.** *$(X,d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A \in 2^X$ verilsin.*
*$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$ eşitliği ile tanımlı sayıya $x$ noktasının $A$ kümesine uzaklığı denir.*

Bu tanıma göre geometrik olarak noktanın bir kümeye olan uzaklığı kümede bu noktaya varsa en yakın noktanın uzaklığı olarak düşünülebilir. Buradan $d$, $\mathbb{R}$ üzerinde bilinen (öklid) metrik olmak üzere $d(4,[1,2]) = 2$ olduğu kolayca görülebilir. Kümenin noktaya en yakın noktası yoksa buradaki infimum ifadesinden bir yaklaşım düşünülebilir. Yani $d(4,[1,2)) = 2$

olur.

Aşağıdaki tanımda noktanın kümeye uzaklığından yararlanılarak iki küme arasındaki Hausdorff uzaklık tanımı verildi.

**Tanım 2.2.** • *$A, C \in 2^X$ olsun.*

- *$h^*(A,C) = \sup\{d(a,C) : a \in A\}$ ve*
- *$h^*(C,A) = \sup\{d(c,A) : c \in C\}$ olmak üzere*

- *$h(A,C) = maks\{h^*(A,C), h^*(C,A)\}$*

*ifadesine A ile C kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.*

Burada kümeler eğer tek nokta kümeleri ise bu iki küme arasındaki Hausdorff uzaklığın, noktalar arasındaki metrik uzaklığa eşit olacağı açıktır. Yani $A = \{2\}$ , $B = \{-5\}$ ise $h(A,B) = 7 = d(2,-5)$ olur.(Burada ve sonraki örneklerde metriğimiz $d$, $\mathbb{R}$ üzerinde bilinen (öklid) metriğidir.)
İki nokta arasında bir uzaklık daima negatif olmayan bir reel sayıdır. Ancak Hausdorff uzaklık sonsuz değerini alabilir. Diğer taraftan kümenin küme uzaklığı ile Hausdorff uzaklık eşit olmak zorunda değildir. Aşağıda bunlarla ilgili kolayca görülebilecek örnekler verilmiştir.

**Örnek 2.1.** *$A = \{0\}$, $C = [0,\infty)$ ise*
*$h^*(A,C) = 0$ ve $h^*(C,A) = +\infty$ olur ki bu durumda Hausdorff uzaklık*
*$h(A,C) = +\infty$ sonucu çıkar.*

**Örnek 2.2.** *$A = [0,2]$, $B = \{0\}$ ise*
*$h^*(A,B) = 2$ ve $h^*(B,A) = 0$ olur ki bu durumda Hausdorff uzaklık*
*$h(A,B) = 2$ olur.*

**Örnek 2.3.** *$A = [-1,1]$ , $B = [-2,2]$ ise*
*$h^*(A,B) = 0$ ve $h^*(B,A) = 1$ olur ki bu durumda Hausdorff uzaklık*
*$h(A,B) = 1$ olur.*

**Örnek 2.4.** $A = \{0\} \times [-1,1]$ , $B = [-1,1] \times \{0\}$ *ise*
*A ile B arasındaki Hausdorff uzaklık* $h(A,B) = 1$ *olur.*

**Örnek 2.5.** $\mathbb{N}$ *kümesi ile* $\mathbb{N}$ *kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı* $0$ *olur.*

**Örnek 2.6.** $\mathbb{N}$ *kümesi ile* $\mathbb{Z}$ *kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı* $\infty$ *olur.*

**Örnek 2.7.** $\mathbb{N}$ *kümesi ile* $\mathbb{Q}$ *kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı* $\frac{1}{2}$ *olur.*

Tanım 2.2'deki ifadeyi bir başka şekilde şöyle de verebiliriz.

Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$A_\varepsilon := \{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}$$

ve

$$C_\varepsilon := \{x \in X : d(x,C) < \varepsilon\}$$

kümelerini tanımlayalım. Bu kümeleri, bir kümenin noktasal olarak $\varepsilon$ komşuluğu olarak değerlendirebiliriz. Bu durumda

- $h^*(A,C) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq C_\varepsilon\}$ ve
- $h^*(C,A) = \inf\{\varepsilon > 0 : C \subseteq A_\varepsilon\}$ olmak üzere
- $h(A,C) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq C_\varepsilon \wedge C \subseteq A_\varepsilon\}$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi Hausdorff uzaklığın kuvvet kümesi üzerinde metrik koşullarından hangilerini sağladığını gösterelim.

**Teorem 2.1.** $\forall A,C,D \in 2^X$ *için*

*(a)* $h(A,A) = 0$

*(b)* $h(A,C) = h(C,A)$

*(c)* $h(A,C) \leq h(A,D) + h(D,C)$

*olur ki bu da h fonksiyonunun $2^X$ üzerinde genişletilmiş yarı metrik olması anlamına gelir.*

*Kanıt.* (a) $h(A,A) = 0$ olduğunu gösterelim.
$h^*(A,A) = \sup\{d(a,A) : a \in A\} = 0$ olur ki bu durumda $h(A,A) = 0$ olur.

(b) $h(A,C) = h(C,A)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} h(A,C) &= maks\{h^*(A,C), h^*(C,A)\} \\ &= maks\{h^*(C,A), h^*(A,C)\} \\ &= h(C,A) \end{aligned}$$

olur.

(c) İddia: $h^*(A,C) \leq h^*(A,D) + h^*(D,C)$
$\forall a \in A$ ve $\forall d \in D$ için

$$\begin{aligned} d(a,C) &= \inf\{d(a,c) : c \in C\} \\ &\leq \inf\{d(a,d) + d(d,c) : c \in C\} \\ &= d(a,d) + \inf\{d(d,c) : c \in C\} \\ &= d(a,d) + d(d,C) \end{aligned}$$

(Her $d$ için yapıldığından)

$$\begin{aligned} d(a,C) &\leq \inf\{d(a,d) : d \in D\} + \sup\{d(d,C) : d \in D\} \\ d(a,C) &\leq d(a,D) + h^*(D,C) \end{aligned}$$

(Her $a$ için yapıldığından)

$$\begin{aligned} \sup d(a,C) &\leq \sup(d(a,D) + h^*(D,C)) \\ h^*(A,C) &\leq h^*(A,D) + h^*(D,C) \end{aligned}$$

Aynı şekilde;

$$h^*(C,A) \leq h^*(C,D) + h^*(D,A)$$

da gösterilebilir. Buradan;

$$\begin{aligned} h(A,C) &= maks\{h^*(A,C), h^*(C,A)\} \\ &\leq maks\{h^*(A,D) + h^*(D,C), h^*(C,D) + h^*(D,A)\} \\ &\leq maks\{h^*(A,D), h^*(D,A)\} + maks\{h^*(D,C), h^*(C,D)\} \\ &= h(A,D) + h(D,C) \end{aligned}$$

□

Hausdorff uzaklık metrik olma koşullarından $h(A,C) = 0$ ise $A = C$ olma koşulunu sağlamayabilir. Örneğin; $A = (0,1)$ , $C = [0,1)$ ise $h(A,C) = 0$ olur, fakat $A \neq C$. Dolayısıyla Hausdorff uzaklık kuvvet kümesi üzerinde yarı metrik olmasına rağmen metrik değildir.

İki küme arasındaki Hausdorff uzaklık sıfır olduğunda bu iki kümenin eşit olmayabileceğini gösterdik. Ancak şimdi bu iki küme kapalı ise bunlar arasındaki Hausdorff uzaklık sıfır olduğunda bu iki kümenin de eşit olduğunu göstereceğiz.

**Önerme 2.2.** $(X,d)$ *bir metrik uzay ve* $A,C \subseteq X$ *herhangi iki küme olsun.Bu durumda;* $\overline{A} = \overline{C} \Leftrightarrow h(A,C) = 0$

*Kanıt.* $(\Rightarrow)\overline{A} = \overline{C}$ olsun.
$\forall x \in X$ için $d(x,A) = d(x,C)$ olduğunu gösterelim.
$A \subseteq \overline{A}$ olduğundan $'\inf'$ tanımı gereği
$d(x,\overline{A}) \leq d(x,A)$ olur.
$d(x,\overline{A}) < d(x,A)$ olamayacağını gösterelim.Varsayalım ki
$d(x,\overline{A}) = \alpha_1, d(x,A) = \alpha_2$ ve

$\alpha_1 < \alpha_2$ olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4}$ olarak tanımlayalım.

$'\inf'$ tanımı gereği $\exists a_* \in \overline{A}$ vardır öyle ki

$d(x,a_*) < \alpha_1 + \varepsilon = \alpha_1 + \frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}$ olur.

$a_* \in \overline{A}$ olduğundan $\exists a_0 \in A$ için $d(a_0,a_*) < \varepsilon$ olur.

$$\begin{aligned} d(x,a_0) &\leq d(x,a_*) + d(a_*,a_0) & < \alpha_1 + \tfrac{\alpha_2-\alpha_1}{4} + \tfrac{\alpha_2-\alpha_1}{4} \\ && = \alpha_1 + \tfrac{\alpha_2-\alpha_1}{2} \\ && = \tfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \\ && < \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = d(x,A) \leq d(x,a_0) < \alpha_2$$

$$\begin{aligned} d(x,A) &= d(x,\overline{A}) \\ d(x,\overline{A}) &= d(x,\overline{C}), (\forall x \in X) \\ h^*(A,C) &= \sup\{d(a,C) : a \in A\} \\ &= \sup\{d(a,\overline{C}) : a \in A\} \\ &= \sup\{d(a,\overline{A}) : a \in A\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $h^*(C,A) = 0$ olduğu görülürse buradan

$h(A,C) = 0$ elde edilir.

$(\Leftarrow) h(A,C) = 0$ olsun.

Bu durumda $h^*(A,C) = 0$ ve $h^*(C,A) = 0$ olur.

$\forall a \in A$ için $d(a,C) = 0$ için $a \in \overline{C}$ , $0 = \sup\{d(a,C) : a \in A\}$ olur,

Burdan $\forall a \in A$ için $0 \leq d(a,C) \leq 0$ ve

$\forall a \in A$ için $d(a,C) = 0$ olur ki bu da $a \in \overline{C}$ olması demektir.

$A \subseteq \overline{C}$ heriki tarafın kapanışı alınırsa $\overline{A} \subseteq \overline{C}$ olur.

Diğer tarafı da aynı şekilde gösterirsek $\overline{C} \subseteq \overline{A}$ ifadesi elde edilir.

Böylece $\overline{A} = \overline{C}$ olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç olarak boş kümeden farklı kapalı kümeler $(P_f(X))$ ; Hausdorff uzaklığıyla bir metrik uzay olur. $\square$

. $P_f(X) \cup \{\emptyset\}$ kümesinde $\{\emptyset\}$ izole edilmiş noktadır.

. Eğer $d(\cdot,\cdot)$ sınırlı ise $h(\cdot,\cdot)$ de sınırlı olur.

. Hausdorff metrik, topolojik bir yapılaşma değildir. $'\emptyset'$ olmadığı için.

$P_f(X)$ üzerindeki Hausdorff metrik topoloji $X$ üzerindeki topoloji tarafından belirlenmez.

Ancak denk metrikler üzerindeki Hausdorff uzaklıklar denk olmayabilir. Aşağıdaki örnekle bunu görebiliriz.

**Örnek 2.8.** $X = \mathbb{R}_+$ , $d_1(x,y) = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right|$ *ve* $d_2(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$
*$X$ üzerinde iki metrik uzay olsun. $h_1(\cdot,\cdot)$ ve $h_2(\cdot,\cdot)$ bu metriklerle belirlenen Hausdorff uzaklıklar olsun. $d_1$ ve $d_2$ denk metriklerdir fakat $h_1$ ve $h_2$ denk değildir.*
*Pozitif doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ve $\mathscr{F}$ ; $\mathbb{N}$ ın boştan farklı sonlu alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda $\mathbb{N}$ , $(P_f(X),h_1)$ uzayında yığılma noktası ama $(P_f(X),h_2)$ uzayında yığılma noktası değildir.*

*Eğer $d_1$ e göre $X$ uzayında düzgün sürekli olan bir fonksiyon $d_2$ye göre de düzgün sürekli ve $d_2$ye göre düzgün sürekli olan bir fonksiyon $d_1$ e göre de düzgün sürekli ise yada denk olarak*
$i_* : (X,d_1) \to (X,d_2)$
$i_* : (X,d_2) \to (X,d_1)$
*düzgün sürekli oluyorsa $d_1$ ve $d_2$, $P_f(X)$ üzerinde denk Hausdorff metrikler üretirler.*

Aşağıdaki önermede küme dizilerinin Hausdorff yakınsaması için epsilon komşuluklar ve kapanışlar cinsinden karakterizasyonu verilmiştir.

**Önerme 2.3.** *$\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subseteq P_f(X)$ ve $A_n \xrightarrow{h} A$ olsun. Bu durumda*

*$A = \bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{\bigcup\limits_{m\geq n} A_m} = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$ olur.*

*Kanıt.* $\varepsilon > 0$ verilsin. $A_n \xrightarrow{h} A$ olduğundan

$\exists n_0(\varepsilon) \geq 1$ öyle ki $\forall m \geq n_0(\varepsilon)$ için $A \subseteq (A_m)_\varepsilon$ ve $A_m \subseteq A_\varepsilon$ olur.

Buradan

$$A \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon \tag{2.1}$$

sonucu çıkar.

Şimdi $\bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{\bigcup\limits_{m\geq n} A_m} \subseteq A$ olduğunu gösterelim,

$x \in \bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{\bigcup\limits_{m\geq n} A_m}$ ise $\forall n \geq 1$ için $x \in \overline{\bigcup\limits_{m\geq n} A_m}$, $\forall \varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap \bigcup\limits_{m\geq n} A_m \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0$ ,$\forall n \geq 1$ ve $\exists m > n$ için $B(x,\varepsilon) \cap A_m \neq \emptyset$

Özel olarak $n = n_0(\varepsilon)$ alınırsa $B(x,\varepsilon) \cap A_m \neq \emptyset$

$$x \in \overline{A_m} \subseteq A_\varepsilon, x \in \overline{A_m} \subseteq \overline{A} = A \tag{2.2}$$

olur.

Son olarak $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon \subseteq \bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{\bigcup\limits_{m\geq n} (A_m)}$ durumunu gösterelim

$A_n \xrightarrow{h} A$ olduğundan, $x \in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$ olsun.Bu durumda

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \geq 1 \ni \forall m \geq n_0(\varepsilon)$ için $x \in (A_m)_\varepsilon$ olur.

$n \geq 1$ verilsin. Bu durumda $\exists m \geq max\{n, n_0(\varepsilon)\} \ni x \in (A_m)_\varepsilon \subseteq (\bigcup_{m \geq n} (A_m))_\varepsilon$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $x \in \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$ olur. Buradan $x \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m > n} A_m}$ elde edilir,

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} (A_m)_\varepsilon \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} (A_m)} \tag{2.3}$$

olur.

Böylece (3.1), (3.2) ve (2.3) den istenen eşitlik elde edilir. □

$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} (A_m)}$ ifadesi d metriği ile belirlenen topolojiye bağlıdır.

Bir önceki önermenin tersi de doğru değildir. Yani; $\{A_n, A\}_{n \geq 1} \subseteq P_f(X)$ ve $A = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} (A_m)}$ ise $A_n \xrightarrow{h} A$ olmak zorunda değil.

Şimdi tam metrik uzaylarda tanımlı boşolmayan kapalı alt küme aileleri üzerindeki Hausdorff uzaklıklarının da tam olduğu gösterilecektir.

**Teorem 2.4.** *$(X, d)$ tam metrik uzay ise $(P_f(X), h)$ uzayı da tam metrik uzay olur.*

*Kanıt.* $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $(P_f(X), h)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun.

İddia: $A_n \xrightarrow{h} A = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} (A_m)}$ ise $\in P_f(X)$ olduğunu gösterelim.

$A$ kapalı kümelerin keyfi kesişimi olduğundan kapalıdır.

$A \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun.

Bu durumda $\{A_n\}_{n\geq 1}$ Cauchy dizisi olduğundan

$k \geq 1$ için $\exists N_k \geq 1 \ni \forall n,m \geq N_k$ olduğunda $h(A_n,A_m) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ olur.

$n_0 \geq N_0$ ve $x_0 \in A_{n_0}$ seçip sabitleyelim.

$n_1 > \max\{n_0,N_1\}$ ve $d(x_0,x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $x_1 \in A_{n_1}$ seçelim.

(Bu şekilde bir $x_1$ vardır çünkü $d(x_0,A_{n_1}) \leq h(A_{n_0},A_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur.)

$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ kesin artan dizi olduğundan $n_k \geq N_k$ özelliğini sağlayan

$x_k \in A_{n_k}$ ve $d(x_k,x_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ olan $\{x_k\}_{k\geq 0} \subseteq X$ dizisi tanımlayabiliriz.

$\{x_k\}_{k\geq 0}$ , $X$ uzayında Cauchy dizisi olur.

$(X,d)$ tam metrik olduğundan $\{x_k\}_{k\geq 0}$ yakınsaktır.

$x_k \to x$ $(x \in X)$ diyelim. $\{n_k\}_{k>0}$ kesin artan olduğundan verilen

$n \geq 1$ için $\exists k_n \geq 1$ öyle ki $n_{k_n} \geq n$ olur.

$\forall k \geq k_n$ için $x_k \in \underset{m\geq n}{\cup} A_m$ olur.

Dolayısıyla $\forall n \geq 1$ için $x \in \overline{\underset{m\geq n}{\cup} A_m}$ ise $x \in \bigcap_{n\geq 1}\overline{\bigcup_{m\geq n}(A_m)} = A$ yani $A \neq \emptyset$ olur.

Şimdi $A_n \xrightarrow{h} A$ olduğunu gösterelim.

Bunun için de $A \subset A_{n\varepsilon}$ ve $A_n \subset A_\varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

$$d(x,x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} d(x_k,x_{k-1}) < \varepsilon$$

$(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon)$

$\forall n_0 \geq N_0$ ve $\forall x_0 \in A_{n_0}$ için $x \in A$, $d(x,x_0) < \varepsilon$ olduğundan $x_0 \in A_\varepsilon$ olur. Dolayısıyla $A_{n_0} \subseteq A_\varepsilon$ gerçekleşir.

Şimdi de $\forall n \geq N_0$ için $A \subseteq (A_n)_\varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

$x \in A = \bigcap_{n\geq 1}\overline{\bigcup_{m\geq n}(A_m)}$ olsun, Bu durumda $x \in \overline{\bigcup_{m\geq N_0} A_m}$ olur.

Buradan $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\exists m \geq N_0$ ve

$y \in \bigcup_{m\geq N_0} A_m$ vardır $\Leftrightarrow \exists m \geq N_0$ için $y \in A_m$

$n \geq N_0$ ise $d(x,A_n) \leq d(x,A_m) + h(A_m,A_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$h^*(A,A_n) < \varepsilon$ , $A \subseteq (A_n)_\varepsilon$ , $\forall n \geq N_0$ , $A_n \xrightarrow{h} A$ olur. $\square$

Bir küme üzerindeki metrik, herhangi bir alt kümesine indirgendiğinde bu alt küme üzerinde de bir metrik tanımlar. Hausdorff metriği $P_f(X)$ üzerinde tanımlıdır. Bu durumda Hausdorff metriği $X$ üzerindeki kapalı kümelerin herhangi bir ailesine indirgendiğinde de aynı şekilde metrik özelliklerini sağlar. Bu alt kümelerden en çok ilgi çekenleri $P_k(X)$ (Kompakt alt kümeleri), $P_{bf}(X)$ (Sınırlı ve kapalı alt kümeleri), $X$ normlu uzay olduğunda da $P_{fc}(X)$ (kapalı,konveks), $P_{kc}(X)$ (kompakt,konveks ) ve $P_{bfc}(X)$ (sınırlı,kapalı,konveks) alt uzaylarıdır. Sıradaki önermeler ve sonuç bu alt uzayları inceler.

**Önerme 2.5.** *$(X,d)$ tam metrik uzay ise $P_k(X)$ , $(P_f(X),h)$ uzayının kapalı alt kümesidir. Dolayısıyla $(P_k(X),h)$ tam metrik uzaydır.*

*Kanıt.* $\{A_n\}_{n\geq 1}$, $(P_k(X),h)$ uzayında bir Cauchy dizisi ve $A_n \xrightarrow{h} A$ olsun.
$A \in P_k(X)$ olduğunu göstermeliyiz.
Verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \geq 1$ öyle ki $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ için $h(A_n,A) < \varepsilon$ olur.
Dolayısıyla $A \subset (A_n)_\varepsilon$ olur. $A_n$ kümeleri kompakt olduğundan tamamen sınırlıdır.
Böylece sonlu epsilon ağına sahip bir $F \subset X$ bulabiliriz öyle ki $A_n \subset F_\varepsilon$ olur.
Heriki tarafın $\varepsilon$ komşuluğu alınırsa $(A_n)_\varepsilon \subseteq F_{2\varepsilon}$ haline gelir ve $A \subseteq F_{2\varepsilon}$
olur ki bu ise $A$ nın kapalı ve tamamen sınırlı olduğu anlamına gelir. Böylece $A \in P_k(X)$ olur ve $P_k(X)$, $P_f(X)$ içinde kapalıdır.$P_f(X)$ tam olduğundan $(P_k(X),h)$ ın tam metrik uzay olduğu açıktır. □

Tam sınırlılılık ne demek şimdi onu hatırlayalım:

(a) $(X,d)$ bir metrik uzay $A \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.Eğer bir $P \subset X$ alt kümesi için $A \subset \bigcup_{x\in P} K(x,\varepsilon)$ sağlanıyorsa bu $P$ altkümesine $A$ nın bir $\varepsilon$ ağı denir.

(b) $(X,d)$ bir metrik uzay $A \subset X$ olsun.Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $A$ nın sonlu bir $\varepsilon$ ağı varsa bu $A$ alt kümesine tam sınırlıdır denir.

**Önerme 2.6.** *$P_{bf}(X)$ , $(P_f(X),h)$ uzayının kapalı alt kümesidir.
Bu durumda $(X,d)$ tam metrik uzay ise $(P_{bf}(X),h)$ tam metrik uzaydır.*

Normlu uzayların alt ailelerinde tanımlı Hausdorff uzaklıkların birbiri ile ilişkileri aşağıdaki önermede verilmiştir.

**Önerme 2.7.** *$X$ normlu bir uzay olsun.Bu durumda $P_{fc}(X)$ , $(P_f(X),h)$ uzayının kapalı alt ailesidir.*

*Kanıt.* $\{A_n,A\}_{n\geq 1} \subseteq P_{fc}(X)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n$ kümesi konveks ve $A_n \xrightarrow{h} A$ olsun.
$A \in P_{fc}(X)$ olduğunu göstermeliyiz. $A = \bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{\bigcup\limits_{m\geq n} (A_m)} = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$ olduğunu biliyoruz.
$\forall m \in \mathbb{N}$ için $A_m$ konveks olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $(A_m)_\varepsilon$ da konveks kümedir.
Dolayısıyla $C_n^\varepsilon = \bigcap\limits_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$ kümesi de konvekstir.
$\{C_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P_{fc}(X)$ dizisi artan bir dizidir.$\forall \varepsilon > 0$ için $\bigcup\limits_{n\geq 1} C_n^\varepsilon = C^\varepsilon$ konvekstir.
$(\forall \varepsilon)$ r, $A = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} C^\varepsilon$ konvekstir. $A \in P_{fc}(X)$ □

$X$ normlu uzay ise $P_{kc}(X) \subseteq P_{bfc}(X) \subseteq P_{fc}(X)$ ve

$P_k(X) \subseteq P_{bf}(X)$ kümeleri $(P_f(X),h)$ uzayının kapalı alt uzayıdır.

$X$ Banach uzayı ise yukarıdaki alt kümelerin hepsi $(P_f(X),h)$ uzayının tam altuzaylarıdır.

Aşağıda normlu uzaylar üzerinde tanımlı destek fonksiyonlarının Hausdorff olma koşulları verilmiştir.

**Tanım 2.3.** *$X$ normlu uzay, $X^*$ topolojik duali ve $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ olsun.*
*$A$ nın destek fonksiyonu*

$$\sigma : X^* \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ ,} \sigma(x^*,A) = \sup\{(x^*,a) : a \in A\}$$

*olarak tanımlanır.*

Tanımdan $\sigma(x^*,A)$ fonksiyonu sublineerdir.

*Kanıt.* $x^*, y^* \in X^*$ olsun.

$$\begin{aligned}\sigma(x^*+y^*,A) &= \sup\{(x^*+y^*,a) : a \in A\} \\ &= \sup\{(x^*,a)+(y^*,a) : a \in A\} \\ &\leq \sup\{(x^*,a) : a \in A) + \sup\{(y^*,a) : a \in A\} \\ &= \sigma(x^*,A)+\sigma(y^*,A)\end{aligned}$$

$\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha.x^*,A) &= \sup\{(\alpha.x^*,a) : a \in A\} \\ &= \alpha.\sup\{(x^*,a) : a \in A\} \\ &= \alpha.\sup\{(x^*,a) : a \in A\}\end{aligned}$$

□

Aslında $P_{fc}(X)$ in elemanları ile bu şekildeki fonksiyonlar arasında birebir eşleme vardır. Bu eşleme $A = \{x \in X : (x^*,x) \leq \sigma(x^*,A), \forall x^* \in X^*\}$ eşitliğiyle belirlenir. Bu eşitlik konveks kümelerin ayrılması teoreminin basit bir sonucudur.

Destek fonksiyonu küme değerli analizce basit bir araçtır. Fonksiyon analiz teknikleriyle kapalı konveks kümelerin özelliklerini elde etmemizi sağlar.

**Tanım 2.4.** *$X$ ve $Y$, $K$ cismi üzerinde vektör uzayları, $f : X \to Y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna lineer denir:*

*(1)* $f(x+y) = f(x)+f(y)$

*(2)* $f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$

**Tanım 2.5.** *$X$ ve $Y$, $K$ cismi üzerinde vektör uzayları, $f : X \to Y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna sublineer denir:*

*(1)* $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$

*(2)* $\alpha \geq 0, f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$

**Tanım 2.6.** *$X$, $K$ cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Bir $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\|\cdot\|$'ye $X$ üzerinde bir norm fonksiyonu, $X$'e de bu normla birlikte normlu uzay denir.*

*(1)* $\|x\| = 0$ *olması için gerekli ve yeterli şart* $x = \theta$ *olmasıdır*

*(2)* $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

*(3)* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Teorem 2.8.** *$X$ normlu uzay, $A, C \in P_{bfc}(X)$ olsun. Bu durumda*

$h(A,C) = \sup\{|\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,C)| : ||x^*|| \leq 1\}$ *olur.*

*Kanıt.* $A = C$ için doğruluğu açıktır.

$A \neq C$ olsun. $\varepsilon > 0$ , $A \subseteq C + B_\varepsilon$ ve $C \subseteq A + B_\varepsilon$ şeklinde verilsin.

$(B_\varepsilon = \{x \in X : ||x|| < \varepsilon\})$ ise $\forall x^* \in X^*$ için $||x^*|| \leq 1$ için

$\sigma(x^*,A) \leq \sigma(x^*,C) + \varepsilon$ ve $\sigma(x^*,C) \leq \sigma(x^*,A) + \varepsilon$ olur. Burdan da

$|\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,C)| \leq \varepsilon$ sonucu çıkar.

$\sup\{|\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,C)| : ||x^*|| \leq 1\} \leq \varepsilon$

$$\sup\{|\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,C)| : ||x^*|| \leq 1\} \leq h(A,C) \tag{2.4}$$

$\varepsilon = \sup\{|\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,C)| : ||x^*|| \leq 1\}$ olsun.

Bu durumda $A \subseteq C + \overline{B_\varepsilon}$ ve $C \subseteq A + \overline{B_\varepsilon}$ elde edilir.

O halde

$$h(A,C) \leq \varepsilon \tag{2.5}$$

olur.

Böylece (2.4) ve (2.5) den istenen eşitlik elde edilir.

$\square$

**Teorem 2.9.** *$(X,d)$ metrik uzay, $A,C \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ olsun. Bu durumda*

*$h(A,C) = \sup\{|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X\}$ olur.*

*Kanıt.* Bir $c \in C$ için

$d(x,A) \leq d(x,c) + d(c,A)$ doğru olduğundan, herbir $c \in C$ için

$d(x,A) \leq d(x,C) + h(C,A)$ olur. $d(c,A) < h^*(c,A) < h(c,A)$
olduğundan

$d(x,C) \leq d(x,A) + h(C,A)$ elde edilir.

$|d(x,A) - d(x,C)| \leq h(C,A)$

$$\sup_{x\in X}\{|d(x,A) - d(x,C)|\} \leq h(C,A) \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\sup\{d(c,A) : c \in C\} &= \sup\{d(c,A) - d(c,C) : c \in C\} \\
&\leq \sup\{|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X\} \\
\sup\{d(a,C) : a \in A\} &\leq \sup\{|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X\}
\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
h^*(C,A) &\leq \sup\{|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X\} \\
h^*(A,C) &\leq \sup\{|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X\}
\end{aligned}$$

$$h(A,C) \leq \sup\{|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X\} \tag{2.7}$$

olur.

Böylece (2.6) ve (2.7) den istenen eşitlik elde edilir.

□

**Önerme 2.10.** *$X$ normlu uzay $A,C,A_1,C_1,A_2,C_2 \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ olsun. Bu durumda,*

*(a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $h(\lambda A, \lambda C) = |\lambda|.h(A,C)$*

*(b) $h(A_1 + A_2, C_1 + C_2) \leq h(A_1,C_1) + h(A_2,C_2)$ olur.*

*Kanıt.* Normun özelliğinden elde edilir. □

**Uyarı 2.11.** *$X$ normlu uzay $A_1,C_1,A_2,C_2 \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun.*
*Bu durumda*
*$h(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2, \lambda C_1 + (1-\lambda)C_2) \leq \lambda h(A_1,C_1) + (1-\lambda)h(A_2,C_2)$ olur.*
*Bu ifade bize Hausdorff uzaklığın konveks fonksiyon olduğunu gösterir.*

**Uyarı 2.12.** *Daha genel olarak $h(\overline{conv}A, \overline{conv}C) \leq h(A,C) = h(\overline{A},\overline{C})$ olur.*

*Kanıt.* $A_1 = A_2 = A$, $C_1 = C_2 = C$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
h(convA, convC) &\leq \lambda h(A,C) + (1-\lambda) h(A,C) \\
&= h(A,C) \\
&= h(\overline{A}, \overline{C})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(\overline{conv}A, \overline{conv}C) &= h(convA, convC) \\
&\leq \lambda . h(A,C) + (1-\lambda) . h(A,C) \\
&= h(\overline{A}, \overline{C})
\end{aligned}
$$

□

# 3. VIETORIS TOPOLOJİ

Bu bölümde 2. küme topolojisi olan Vietoris topolojisi üzerinde duracağız. Bu bölüm boyunca kümemiz Hausdorff topolojik uzay olacaktır. Vietoris topolojinin tanımından önce $A^+$ ve $A^-$ nin ne anlama geldiğini tanımlayıp bir küçük örnekle tanımı ifade edip sonrasında Vietoris Topoloji'nin tanımını verdik.

**Tanım 3.1.** *$(X,\tau)$ Hausdorff topolojik uzay ve $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ olsun.*

$$A^+ = \{C \in 2^X \setminus \{\emptyset\} : C \subseteq A\}$$

$$A^- = \{C \in 2^X \setminus \{\emptyset\} : A \cap C \neq \emptyset\}$$

*kümelerini tanımlayalım.*

**Örnek 3.1.** *$X = \mathbb{N}$ ve $A = \{1,2,3\}$ olsun.*

$$A^+ = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

$$A^- = \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\},...\}$$

*(a)* $2^X$ *üzerinde $\mathscr{L}_{UV} = \{U^+ : U \in \tau\}$ ailesini taban kabul eden topolojiye üst Vietoris topoloji denir ve $\hat{\tau}_{UV}$ ile gösterilir,*

*(b)* $2^X$ *üzerinde $\mathscr{L}_{LV} = \{U^- : U \in \tau\}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye alt Vietoris topoloji denir ve $\hat{\tau}_{LV}$ ile gösterilir,*

*(c)* $2^X$ *üzerinde* $\mathscr{L}_{UV} \cup \mathscr{L}_{LV}$ *ailesini alt taban kabul eden topolojiye Vietoris topoloji denir ve* $\hat{\tau}_V$ *ile gösterilir.*

**Uyarı 3.1.** $U, V_1, ..., V_n \in \tau$ *olmak üzere*

$\hat{\tau}_V$ *Vietoris topolojisi için bir taban elemanı*

$\mathscr{B}(U, V_1, ..., V_n) = \{A \in 2^X \setminus \{\emptyset\} : A \subseteq U, A \cap V_k \neq \emptyset, k = 1, ..., n\}$ *biçimindedir.*

* Vietoris topoloji $\forall U \in \tau$ için $U^+$ nın açık ve $\forall C \in P_f(X)$ için $C^+$ nın kapalı olduğu en kaba topolojidir.
* Aynı şekilde $\forall U \in \tau$ için $U^-$ nın açık ve $\forall C \in P_f(X)$ için $C^-$ nın kapalı olduğu en kaba topolojidir.
* Üst Vietoris topoloji $\forall C \in P_f(X)$ için $C^-$ nın kapalı olduğu en kaba topolojidir.
* Alt Vietoris topoloji $\forall C \in P_f(X)$ için $C^+$ nın kapalı olduğu en kaba topolojidir.

**Önerme 3.2.** $i : (X, \tau) \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$

$i(x) = \{x\}$ *ile tanımlı dönüşüm olsun.*

$2^X \setminus \{\emptyset\}$ *ailesi* $\hat{\tau}_V$ *topolojisi ile donatıldığında* $i(.)$ *süreklidir.*

*Kanıt.* $U \in \tau$ olsun.

$i^{-1}(U^+) = \{x \in X : \{x\} \subset U\} = U \in \tau$ dur.

Benzer şekilde eğer $V_1, ..., V_n \in \tau$ ise

$$i^{-1}(\bigcap_{k=1}^{n} V_k^-) = \{x \in X : \{x\} \cap V_k \neq \emptyset, k = 1, ..., n\}$$
$$= (\bigcap_{k=1}^{n} V_k) \in \tau$$

ise $2^X \setminus \{\emptyset\}$ ailesi $\hat{\tau}_V$ topolojisi ile daraltıldığında $i(.)$ süreklidir.

□

**Örnek 3.2.** *Vietoris topoloji $i(.)$ dönüşümünü sürekli kılan $2^X \setminus \{\emptyset\}$ üzerindeki en ince topoloji değildir. Sonsuz bir $X$ kümesi sonlu tümleyenler topolojisi ile donatılmış olsun. $X$ in kapalı alt kümeleri $\emptyset, X$ ve $X$ in sonlu alt kümeleridir. $F, X$ in boş olmayan sonlu alt kümelerinin ailesini göstersin. Bu durumda $(2^X \setminus \{\emptyset\}, \hat{\tau}_V)$ uzayında her açık küme sonsuz kümeler içerir. O halde $F \notin \hat{\tau}_V$ olur ve böylece $2^X \setminus \{\emptyset\}$ üzerinde $\hat{\tau}_V$ nin orjinal alt tabanına $F_i$ ekleyerek elde ettiğimiz daha ince topolojiyi düşündüğümüzde $i(.)$ yine sürekli olur.Çünkü $i^{-1}(F)$ bu topolojiye göre açıktır.*

**Önerme 3.3.** *$X$ sonsuz küme ve $F, X$ in boş olmayan sonlu alt kümelerinin ailesi ise $F$, $(2^X \setminus \{\emptyset\}, \hat{\tau}_V)$ içinde yoğundur.*

*Kanıt.* $U \in \tau, U \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $U$ sonlu alt kümeler içerir.

O halde $U^+ \cap F \neq \emptyset$ olur.

$V_1, ..., V_n \in \tau$ ve $V_k \neq \emptyset$ $(\forall k = 1, ..., n)$ $x_k \in V_k$ olsun.

Bu durumda $\{x_k\}_{k=1}^n \in (\bigcap_{k=1}^{n} V_k^-) \cap F \neq \emptyset$

O halde $F$ ,$\hat{\tau}_V$ nin herbir taban elemanıyla kesişir. Dolayısıyla $F$ yoğundur.

□

**Uyarı 3.4.** *$(X, \tau)$ ayrılabilir Hausdorff topolojik uzay ise $(2^X \setminus \{\emptyset\}, \hat{\tau}_V)$ de ayrılabilir topolojik uzaydır.*

**Önerme 3.5.** *$(X,\tau)$ regüler topolojik uzay ise $(P_f(X),\hat{\tau}_V)$ Hausdorff topolojik uzaydır.*

*Kanıt.* $A,C \in P_f(X)$ ve $A \neq C$ olsun. $A \cap C^c \neq \emptyset$ veya $A^c \cap C \neq \emptyset$ olmalıdır.

Kabul edelim ki $A \cap C^c \neq \emptyset$ olsun. $\exists a \in A \cap C^c$ vardır .

$X$ regüler olduğundan $\exists U_1, U_2 \in \tau$ öyle ki $a \in U_1, C \subseteq U_2$ ve $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ dir.

$U_1^-$ ve $U_2^+$, $\hat{\tau}_V$ nin farklı elemanlarıdır. $A \in U_1^-$ ve $C \in U_2^+$ dır.

Dolayısıyla $\hat{\tau}_V$ Hausdorff uzaydır.

□

**Lemma 3.6.** *Alexander Lemma: $(Y,\tau)$ topolojik uzay ve $\mathscr{Y} \subseteq \tau$ alt taban olsun. $Y$, $\mathscr{Y}$ nin elemanlarından oluşan her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa $(Y,\tau)$ kompakttır.*

**Teorem 3.7.** *$(X,\tau)$ Hausdorff topolojik uzay olsun.*
*$(X,\tau)$ nun kompakt olması için gerek ve yeter koşul $(P_k(X),\hat{\tau}_V)$ nin kompakt olmasıdır.*

*Kanıt.* $(\Rightarrow)$ $\{\{U_\alpha^+\}_{\alpha \in J_1}\}$ ve $\{\{U_\beta^-\}_{\beta \in J_2}\}$ , $(P_k(X),\hat{\tau}_V)$ nin açık örtüsü olsun.

$(U_\alpha, U_\beta \in \tau)$, $U_2 = \bigcup_{\beta \in J_2} U_\beta \in \tau$ ve $C_2 = U_2^c$ olarak tanımlayalım.

$C_2 = \emptyset$ ise $X = U_2 = \bigcup_{\beta \in J_2} U_\beta$ olacağından

$\{U_\beta : \beta \in J_2\}$, $X$ için bir açık örtüdür.

$X$ kompakt olduğundan $\{U_{\beta_1}, \ldots, U_{\beta_n}\}$ olacak şekilde sonlu bir alt örtü vardır.

$C \in P_k(X)$ için

$C \cap X = C \cap (\bigcup_{k=1}^{n} U_{\beta_k})$ olduğundan

bir tane $k_0 \in \{1, ..., n\}$ vardır öyle ki $C \cap U_{\beta_{k_0}} \neq \emptyset$ yani $C \in U^-_{\beta_{k_0}}$ olur.

$C_2 \neq \emptyset$ ise $\forall \beta \in J_2$ için $C_2 \cap U_\beta = \emptyset$ olduğundan $\exists \alpha_0 \in J$ için $C_2 \in U^+_{\alpha_0}$ olur.

Bu durumda $\{U_{\alpha_0}, U_\beta\}_{\beta \in J_2}$ , $X$ için bir açık örtü olur.

$X$ kompakt olduğundan $\{U_{\alpha_0}, U_{\beta 1}, ...U_{\beta_n}\}$ sonlu alt örtüsü vardır.

$C \in P_k(X)$ alalım.

Bu durumda ya $C \subseteq U_{\alpha_0}$ yada $\exists k = 1, ..., n$ için $C \cap U_{\beta_k} \neq \emptyset$ olur.

Dolayısıyla $\{U^+_{\alpha_0}, U^-_{\beta_k}\}_{k=1}^{n}$ ,$P_k(X)$ in sonlu açık alt örtüsü olur.

Alexander Lemma'dan $(P_k(X), \hat{\tau}_V)$ in kompakt olduğunu elde ediyoruz.

$(\Leftarrow)$ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ , $X$ in açık örtüsü olsun.

Bu durumda $\{U^-_\alpha\}_{\alpha \in J}$ , $(P_k(X), \hat{\tau}_V)$ in açık örtüsüdür.

$P_k(X)$ kompakt olduğundan $\{U^-_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ sonlu açık örtüsü vardır.

$\forall x \in X$ için $\{x\} \in P_k(X)$ olduğundan

$\exists k = 1, ..., n$ için $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ $X$ in sonlu alt örtüsüdür.

Dolayısıyla $X$ kompakttır.

$\square$

**Teorem 3.8.** *$(X,d)$ bir metrik uzay olsun.*
*Bu durumda $P_k(X)$ üzerinde Hausdorff metrik topoloji ve Vietoris topoloji denktir.*

*Kanıt.* İlk önce $\hat{\tau}_V \subseteq \hat{\tau}_H$ olduğunu gösterelim.

Bunun için $\forall U \in \tau$ için $U^-, U^+ \in \hat{\tau}_H$ olduğunu gösterelim.

$C \in U^+$ alalım, $C \in P_k(X)$ olduğundan $\exists \varepsilon > 0$ öyle ki

$0 < \varepsilon < inf\{d(x,y) : x \in C, y \in U^c\}$ olur.

$\beta_H(C,\varepsilon) = \{C^{'} \in P_k(X) : h(C,C^{'}) < \varepsilon\}$ kümesini tanımlayalım.

$C^{'} \in \beta_H(C,\varepsilon)$ , $C^{'} \subseteq C_\varepsilon \subseteq U$ ,

$C^{'} \in U^+$ , $\beta_H(C,\varepsilon) \subseteq U^+$ , $U^+ \in \hat{\tau}_H$

Şimdi de $C \in U^-$ olsun.

Bu durumda $\exists x \in C \cap U$ ve $\exists \varepsilon > 0$ öyle ki

$\beta(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \subseteq U$ olur.

$\beta_H(C,\varepsilon)$ yukarıda tanımlandığı gibi olsun.

Eğer $C^{'} \in \beta_H(C,\varepsilon)$ ise $C^{'} \cap \beta(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ olur.

$C^{'} \cap U \neq \emptyset$ , $C^{'} \in U^{-}$ ise $\beta_H(C,\varepsilon) \subseteq U^{-}$ olur ki bu da $U^{-} \in \hat{\tau}_H$ demektir.

Buradan

$$\hat{\tau}_V \subseteq \hat{\tau}_H \tag{3.1}$$

sonucu çıkar

Şimdi $\hat{\tau}_V \supseteq \hat{\tau}_H$ olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0, C \in P_k(X)$ ve $\beta_H(C,\varepsilon)$ yukarıda tanımlandığı gibi olsun.

$U = C_\varepsilon$ olsun ve $V_1, V_2, ...V_n$ lerde $C$ yi örten $\frac{\varepsilon}{2}$ yarıçaplı açık yuvarlar olsun.

$C^{'} \in U^{+}$ olduğunda $h^{*}(C^{'},C) < \varepsilon$ olur.

$C^{'} \in (\bigcap_{k=1}^{n} V_k{}^{-})$ ise $h^{*}(C,C^{'}) < \varepsilon$ olur.

Sonuç olarak

$\{C^{'} \in P_k(X) : C^{'} \subseteq U, C^{'} \cap V_1 \neq \emptyset, ..., C^{'} \cap V_k \neq \emptyset\} \subseteq \beta_H(C, \varepsilon)$ , $\beta_H(C, \varepsilon) \in \tau_V$ olur. Böylece

$$\hat{\tau}_H \subseteq \hat{\tau}_V \tag{3.2}$$

kapsamı da gerçekleşir.Böylece (3.1) ve (3.2) den $\hat{\tau}_H = \hat{\tau}_V$ eşitliği elde edilir. □

**Tanım 3.2.** *$(X,\tau)$ topolojik uzayı $(X,d)$ tam ayrılabilir metrik uzay olacak şekilde bir $d$ metriği ile metriklenebiliyorsa bu uzaya 'Polish Uzayı' denir.*

**Uyarı 3.9.** *a) $(X,\tau)$ metriklenebilir ise $(P_k(X), \hat{\tau}_V)$ de metriklenebilirdir.*

*b) $(X,\tau)$ Polish uzayı ise $(P_k(X), \hat{\tau}_V)$ de Polish Uzayıdır.*

**Teorem 3.10.** *$(X,d)$ kompakt metrik uzay ve $\{A_n\}_{n\geq 1}$ kompakt kümelerin bir dizisi olsun. Bu durumda bu dizinin kompakt bir kümeye yakınsayan bir alt dizisi vardır.*

*Kanıt.* Bir önceki teoremden $(P_k(X), \hat{\tau}_H) = (P_k(X), \hat{\tau}_V)$ olduğunu biliyoruz.

$(P_k(X), \hat{\tau}_V)$ kompakttır ise $(P_k(X), \hat{\tau}_H)$ kompaktır.

Bu durumda $P_k(X)$ içinde seçilen her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. □

# 4. WIJSMAN TOPOLOJİ

Wijsman topolojisi kümelerin yakınsaklığı ile ilgili bir topolojidir. Ayrıca uygulamalarda diğer küme yakınsaklıklarını karşılaştırmak için de yararlı bir araçtır. Burada bahsedilen; uzaklık fonksiyonlarının, noktasal yakınsaklığına karşılık gelen yakınsaklıktır.

Bu alt bölüm boyunca $(X,d)$ bir metrik uzay ve $C(X,\mathbb{R})$ de $X$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların uzayı olsun.

$A \in P_f(X)$ olmak üzere

$$\gamma(A)(\cdot) = \frac{d(\cdot,A)}{1+d(\cdot,A)}$$

şeklinde tanımlanan $\gamma : \hat{P}_f(X) \to C(X,\mathbb{R})$ dönüşümünü dikkate alalım .

($A = \emptyset$ durumlar için $\frac{\infty}{1+\infty} = 1$ doğal çevrimini kullandık). $\gamma(\cdot)$ dönüşümünün kolaylıkla birebir olduğu görülür.

$C(X,\mathbb{R})$ üzerinde noktasal yakınsaklık topolojisi $\tau_p$ ve kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsama topolojisi $\tau_C$ topolojisini düşünelim.

**Tanım 4.1.** *$\hat{P}_f(X)$ üzerinde $\hat{\tau}_W$ Wijsman topolojisi $\hat{\tau}_W = \gamma^{-1}(\tau_p)$ olarak tanımlayalım. (Noktasal yakınsaklığa göre açık kümelerin ters görüntülerini açık olarak kabul eden topoloji)*

**Uyarı 4.1.** *Yukarıdaki tanımdan açıktır ki $\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subseteq \hat{P}_f(X)$ için*

$A_n \xrightarrow{\hat{\tau}_W} A \Leftrightarrow \forall x \in X$ *için* $d(x,A_n) \to d(x,A)$

**Uyarı 4.2.** *$\hat{\tau}_C = \gamma^{-1}(\tau_C)$ olsun.$x \to d(x,A)$ ya genişlemeyen bir fonksiyon $d(x,y) \geq |d(x,A) - d(y,A)|$ olduğundan $\gamma(\hat{P}_f(X)), C(X,\mathbb{R})$ nin eş sürekli alt kümesidir.Yani $\forall A \in \hat{P}_f(X)$ için*

$$\begin{aligned} |\gamma(A)(x) - \gamma(A)(y)| &= \left| \frac{d(x,A)}{1+d(x,A)} - \frac{d(y,A)}{1+d(y,A)} \right| \\ &= \left| \frac{d(x,A) - d(y,A)}{1+d(x,A)+d(y,A)+d(x,A).d(y,A)} \right| \\ &\leq |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

*olur.*

*Sonuç olarak $(x,A) \to d(x,A)$ , $(X,d) \times (\hat{P}_f(X), \hat{\tau}_W)$ dan*
*$\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ dönüşümü eş süreklidir ve aynı düzgün uzaya sahip olduğundan $(\hat{P}_f(X), \hat{\tau}_W)$ ile $(\hat{P}_f(X), \hat{\tau}_C)$ homeomorfiktir.*

*Eğer $X$ yerel kompakt ve ayrılabilir ise $(C(X,\mathbb{R}), \tau_C)$ metriklenebilir ve ayrılabilirdir.*

*Aynı durum $(\hat{P}_f(X), \tau_W)$ için de geçerlidir.*

**Teorem 4.3.** *$(X,d)$ tüm kapalı yuvarlar kompakt olacak şekilde bir metrik uzay ise $(\hat{P}_f(X), \hat{\tau}_W)$ kompakt metriklenebilir bir uzaydır.*

*Kanıt.* $(\hat{P}_f(X), \hat{\tau}_W)$ nin metriklenebilir ve ayrılabilir olduğunu belirttik.

Bununla birlikte $\gamma(\hat{P}_f(X))$, $(C(X),\mathbb{R})$ de eş sürekli olduğundan
Arzele Ascoli teoremi bize $(\hat{P}_f(X), \hat{\tau}_W)$ nin kompaktlığını göstermek için $\gamma(\hat{P}_f(X))$ nin $(C(X,\mathbb{R}), \tau_C)$ de kapalı olduğunu göstermemizin yeterli olduğunu söyler.

Kabul edelim ki $(C(X,\mathbb{R}),\tau_C)$ de $\gamma(A_n) \to f$ yakınsasın.
$C_n = \overline{\underset{m\geq n}{\cup} A_m}$ seçilirse $\{C_n\}_{n\geq 1}$ , $\hat{P}_f(X)$ de azalan bir dizi olur
ve kabul edelim ki $A = \underset{n\geq 1}{\cap} C_n$ olsun.

$\forall x \in X$ için

$$\lim \frac{d(x,C_n)}{1+d(x,C_n)} = \frac{d(x,A)}{1+d(x,A)} = \gamma(A)(x)$$

$\gamma(A)(x) \leq f(x) \leq 1$ .

Eğer $A = \emptyset$ ise $1 = f(x) = \gamma(A)(x)$ olacaktır. Buradan $f = \gamma(\emptyset)$ olur.

Eğer $A \neq \emptyset$ ise $\varepsilon > 0$ için $d(x,a) \leq d(x,A) + \varepsilon$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır.

$d(x,A_n) \leq d(x,a) + d(a,A_n) \leq d(x,A) + \varepsilon + d(a,A_n)$

$\forall n \geq 1$ için $a \in \overline{\underset{m\geq n}{\cup} A_m}$ olduğundan $\underline{\lim} d(a,A_n) = 0$ olur.

$\underline{\lim} d(x,A_n) \leq d(x,A) + \varepsilon$ olacağından $\varepsilon \to 0^+$

$\underline{\lim} d(x,A_n) \leq d(x,A)$ olur.

Sonuç olarak $\forall x \in X$ için

$$f(x) \leq \frac{d(x,A)}{1+d(x,A)} = \gamma(A)(x)$$

olduğunda $f = \gamma(A)$ olur.

□

**Teorem 4.4.** *$(X,d)$ ayrılabilir bir metrik uzay ise $(\hat{P}_f(X), \hat{\tau}_W)$ ayrılabilir metriklenebilir bir uzaydır.*

*Kanıt.* Sadece ayrılabilirliği göstermemiz yeterli olacaktır.

Ancak $(\hat{P}_f(X), \hat{\tau}_V)$ nin ayrılabilir olduğuna ve $\hat{\tau}_W \subset \hat{\tau}_V$ olduğuna dikkat edecek olursak sonuç elde edilir. □

**Uyarı 4.5.** *$\hat{\tau}_W \subset \hat{\tau}_H$ olduğundan Wijsman topolojisi önceki iki küme topolojisinden daha zayıftır.*

# 5. FELL TOPOLOJİ

İnceleyeceğimiz 4. küme topolojisi de küme yakınsaklığı kavramından elde edilir. Küme topolojisiyle ilgili olmayanların arasında bile popülerdir. Bu bölüme küme yakınsaklığının bir çeşidinin sunumuyla başlayalım.
Bu alt bölüm boyunca $(X,d)$ bir metrik uzay $\{A_n\}_{n\geq 1}$ , $P_f(X)$ de bir dizi kabul edilecektir.

**Tanım 5.1.** $\underline{\lim} A_n := \{x \in X : \forall r > 0$ *için bir tane* $n_0(r) \geq 1$ *vardır öyle ki* $\forall n \geq n_0$ *için* $B(x,r) \cap A_n \neq \emptyset\}$

**Uyarı 5.1.** $\underline{\lim} A_n$ *kümesi genellikle* $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *dizisinin 'Kuratowski Alttan Limiti' olarak isimlendirilir.Bu ifade* $\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup\limits_{m\geq 1} \bigcap\limits_{n>m} A_n$ *şeklinde tanımlanan tamamen teorik küme limitinin infimumu ile karıştırılmamalıdır.Bununla birlikte bu tanımdan görülebilir ki*

$$\begin{aligned} \underline{\lim} A_n = &\quad \{x \in X : \underline{\lim} d(x, A_n) = 0\} \\ = &\quad \{x \in X : x = \lim x_n, x_n \in A_n, n \geq 1\} \end{aligned}$$

*olur.*

**Tanım 5.2.** $\overline{\lim} A_n := \{x \in X : \forall r > 0$ *için ve* $\forall n_0 \geq 1$ *için bir* $n \geq n_0$ *vardır öyle ki* $B(x,r) \cap A_n \neq \emptyset\}$

**Uyarı 5.2.** $\overline{\lim} A_n$ *genellikle* $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *dizisinin 'Kuratowski Üstten Limiti' olarak isimlendirilir. Bu ifade* $\lim sup A_n = \bigcap\limits_{m\geq 1} \bigcup\limits_{n\geq m} A_n$ *şeklinde tanımlanan tamamen teorik üstten küme limiti ile karıştırılmamalıdır.*

*Yukarıdaki tanımdan da görebiliriz ki*

$$\begin{aligned} \overline{\lim} A_n = &\quad \{x \in X : \underline{\lim} d(x, A_n) = 0\} \\ = &\quad \{x \in X : x = \lim x_{n_k}, x_{n_k} \in A_{n_k}\}. \end{aligned}$$

*Yukarıdaki iki tanımdan açıktır ki* $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$ *olur.*

*Bununla birlikte her iki küme kapalıdır.*

**Tanım 5.3.** $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = A$ *olacak şekilde bir* $A \subseteq X$ *varsa* $A_n, A$ *ya Kuratowski anlamında yakınsar deriz.*$(A_n \xrightarrow{K} A$ *ile gösterilir.)*

*Açıktır ki bu durumda* $A \in \hat{P}_f(X)$ *olur. Aşağıdaki üç önermede Kuratowski alttan limiti, üstten limiti ve limitiyle ilgili bazı temel özellikleri toparladık.Bu sonuçlar tanımlardan kolayca elde edilir.*

**Önerme 5.3.** *(a)* $\overline{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim} A_n = \underline{\lim} \overline{A_n}$

*(b)Bir* $n_0$ *için* $n \geq n_0$ *olduğunda* $A_n \subseteq C_n$ *oluyorsa* $\underline{\lim} A_n \subseteq \underline{\lim} C_n$

*(c)* $x_n^j \to x, \bigcup\limits_{i \in I} \underline{\lim}_{n \to \infty} A_n^i \subseteq \underline{\lim}_{n \to \infty} \bigcup\limits_{i \in I} A_n^i$

*Kanıt.* $x \in \bigcup\limits_{i \in I} \underline{\lim}_{n \to \infty} A_n^i$ olsun. $\exists j \in I$ vardır öyle ki $x \in \underline{\lim}_{n \to \infty} A_n^i$

$\forall n \in N$ için $x_n^j \in A_n^j$ olacak şekilde $\{x_n^j\}$ vardır ve $x_n^j \to x$ olur.

$\forall n \in N$ için $x_n^j \in \bigcup\limits_{i \in I} A_n^i$ , $x_n^j \to x$ , $x \in \underline{\lim}_{n \to \infty} \bigcup\limits_{i \in I} A_n^i$ olur. □

*(d)* $\underline{\lim}_{n \to \infty} \bigcap\limits_{i \in I} A_n^i \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} \underline{\lim}_{n \to \infty} A_n^i$

*(e)* $\underline{\lim}(A_n \times C_n) = \underline{\lim} A_n \times \underline{\lim} C_n$

*(f)* $\bigcap\limits_{i \in I} A_n \subset lim(inf(A_n)) \subseteq \underline{\lim} A_n$

*Kanıt.* $x \in lim(inf(A_n)) = \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} A_n$ , $\exists m_0 \geq 1$ öyle ki $x \in \bigcap_{n\geq m_0} A_n$, $m_0$ a kadar $a_n \in A_n$ olacak şekilde, $n \geq m_0$ için de $a_n = x \in A_n$ olacak şekilde seçersek $a_n \to x \in \underline{\lim}(A_n)$ olur. $\square$

*(g) Eğer* $k_1 < k_2 < ... < k_n, \underline{\lim} A_n \subseteq \underline{\lim} A_{k_n}$

**Önerme 5.4.** *(a)* $\overline{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} A_n = \overline{\lim}\, \overline{A_n}$

*Kanıt.* $x \in \overline{\overline{\lim} A_n}$ olsun. $x \in \overline{A}$ ise $x_n \to x$ olacak şekilde $x_n \in A$ vardır.

$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\lim} A_n$

${a_1}^{m_1} \to x_1$

${a_2}^{m_2} \to x_2$

.

${a_i}^{m_i} \to x_i$

.

.

$a_m = ({a_1}^1, {a_2}^2, ..., {a_i}^i, ...)$

$a_m \to x \in \overline{\lim} A_n$ olur $A_n$ kapalıdır, dolayısıyla $\overline{\lim}\, \overline{A_n}$ olur.Böylece $\overline{\overline{\lim} A_n} \subset \overline{\lim} A_n$ olur. $\square$

*(b) Bir* $n_0$ *için* $n \geq n_0$ *olduğunda* $A_n \subseteq C_n$ *oluyorsa* $\overline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} C_n$

*(c)* $\bigcup_{i\in I} \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n^i \subseteq \overline{\lim}_{n\to\infty} \bigcup_{i\in I} A_n^i$ *olur ve ek olarak I sonlu ise eşitlik sağlanır.*

*(d)* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \bigcap_{i\in I} A_n^i \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n^i$

*(e)* $\overline{\lim}(A_n \times C_n) \subseteq \overline{\lim} A_n \times \overline{\lim} C_n$

*(f)* $\overline{\lim} A_n \subseteq \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = (\bigcup_{n\geq 1} \overline{A_n}) \cup (\overline{\lim} A_n)$

*Kanıt.* $x \in \overline{\lim} A_n$, $\exists a_{n_k} \to x$ olsun.$a_{n_k} \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$ ise $x \in \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ olur. Sonra buradan $x \in \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ ise $a_n \to a$ , $a_n \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$ olur.

1.Durum: $a_n$ ler sonlu sayıda $A_n$ kümesinin elemanlarıdır. $\exists A_{n_0}$ öyle ki $A_{n_0}$ öyle ki $A_{n_0}$ , $a_n$ dizisinin sonsuz sayıda terimini içerir.Bu terimleri sıralayıp oluşturduğumuz $a_{n_k}$ alt dizisi $x$ e yakınsar. Bu durumda $x \in \overline{A_{n_0}} \subset \bigcup_{n\geq 1} \overline{A_n}$ olur.

2. Durum: $a_n$ ler sonsuz sayıda $A_n$ lerin elemanlarıdır. Farklı $A_n$ lerin elemanlarından alıp sıralayarak oluşturduğumuz alt dizi $a_{n_k}$ ise $a_{n_k} \to x$ olacağından $x \in \overline{\lim} A_n$ olur. $\square$

*(g) Eğer* $k_1 < k_2 < ... < k_n < ...$, $\overline{lim} A_{k_n} \subseteq \overline{\lim} A_k$ *olur.*

Ayrıca aşağıdaki önerme yukarıdaki iki önermenin sonuçlarının birleştirilmesinden elde edilir. Burdaki limitin varlığı kabul edilmiştir.

**Önerme 5.5.** *(a)* $\overline{\lim A_n} = \lim A_n = \lim \overline{A_n}$

*(b) Eğer* $A_n \subseteq C_n, n \geq n_0$ *ise* $\lim A_n \subseteq \lim C_n$

*(c) I sonlu* $\lim \bigcup_{i\in I} A_n^i = \bigcup_{i\in I} \lim A_n^i$

*(d)* $\lim(A_n \times C_n) = \lim A_n \times \lim C_n$

*(e)* $A_{k_n}, A_n$ *dizisinin bir alt dizisi olmak üzere,* $\lim A_{k_n} = \lim A_n$

**Uyarı 5.6.** $\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subseteq \hat{P}_f(X)$ *ve* $A_n \xrightarrow{\hat{\tau}_W} A$ *ise* $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = A$*, (Yani* $A_n \xrightarrow{K} A$*) (Wijsman a göre yakınsayan her topoloji Kuratowskiye göre de yakınsar)*

**Önerme 5.7.** $(X,d)$ *kapalı yuvarların kompakt olduğu bir metrik uzay ise* $\hat{P}_f(X)$ *de K yakınsama ve* $\hat{\tau}_W$ *yakınsama kavramları çakışıktır.*

*Kanıt.* $A_n \xrightarrow{K} A$ olsun. Bu durumda $\lambda(A_n) \to \lambda(A)$ oluyor mu bunu inceleyelim.

$x \in X$ , $d(x, A_n) = d(x, a_n)$ olacak şekilde $a_n \in A_n$ vardır.Yakınsak kompakt uzayda her dizinin yakınsak alt dizisi vardır.$X$ kompakt $\exists\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ ve $a_{n_k} \to a \in X$ olur. $a \in \overline{\lim} A_n = A$ olur. $d(x,A_n) = d(x,a_n) = d(x,a) = d(x,A)$ , $\forall x \in X$ için $\lambda(A_n)(x) = \dfrac{d(x,A_n)}{1+d(x,A_n)} \to \dfrac{d(x,A)}{1+d(x,A)} = \lambda(A)(x)$ olacağından $\lambda(A_n) \to \lambda(A) \Leftrightarrow A_n \xrightarrow{\hat{\tau}_W} A$ olur.

□

Bu bizi öyle bir duruma getirir ki kümelerin Kuratowski yakınsaması gerçektende topolojik bir kavramdır.

**Teorem 5.8.** *$(X,d)$ yerel kompakt (Her noktanın kompakt bir komşuluk tabanı varsa buna denir) ayrılabilir bir metrik uzay ise kümelerin Kuratowski yakınsaklığı yardımıyla $\hat{P}_f(X)$ kompakt ve metriklenebilirdir.*

*Kanıt.* $(X,d)$ yerel kompakt ayrılabilir bir metrik uzay ise $d$ ye denk bir $d^{'}$ uzaklığı vardır öyle ki $(X,d^{'})$ nin kapalı yuvarları kompakttır. □

Bu durumda $X$ yerel kompakt ayrılabilir bir metrik uzay olduğundan Vietoris topolojisinde yaptığımız gibi vur-kaçır yöntemiyle Kuratowski yakınsaklığa denk topolojiyi tanımlayabiliriz.(Önerme 13 ve Teorem 8 den)

**Tanım 5.4.** *$\{U^- : U \subseteq X$, açık $\}$ ve $\{(K^c)^+ : K \subseteq X$ kompakt$\}$ şeklindeki ailelerin alt taban olduğu topolojiye $\hat{P}_f(X)$ üzerinde Fell (veya kapalı yakınsama) topolojisi denir ve $\hat{\tau}_F$ ile gösterilir.*

*$(X,d)$ yerel kompakt ayrılabilir bir metrik uzay olsun. $X^{'} = X \cup \{\infty\}$, $X$ in tek nokta Alexandroff kompaklaştırılması olsun. Bu durumda $X^{'}$ metriklenebilirdir. $\beta(C) = C \cup \{\infty\}$ şeklinde tanımlanan $\beta : \hat{P}_f(X) \to P_f(X^{'})$ dönüşümünü düşünelim. Bu dönüşüm $\hat{P}_f(X)$ den*
*$P_f^{\infty}(X^{'}) = \{C^{'} \in P_f(X^{'}) : \infty \in C^{'}\}$ birebir ve örten bir dönüşümdür.*
*Bununla birlikte $P_f^{\infty}(X^{'})$ tümleyeni*
*$\{C^{'} \subseteq X^{'} : C^{'} \neq \emptyset, C^{'} \subseteq X\} = X^+ \cap P_f(X^{'})$*
*$\hat{\tau}_V{}'$ ye ait olduğundan $P_f^{\infty}(X^{'})$ , $(P_f(X^{'}), \hat{\tau}_V{}')$ nın kapalı alt kümesidir.*

**Önerme 5.9.** $(X,d)$ *yerel kompakt ayrılabilir bir metrik uzay ise yukarıda tanımlanan*

$$\beta : (\hat{P}_f(X), \hat{\tau}_F) \to (P_f^{\infty}(X^{'}), \hat{\tau}_V{'})$$

*dönüşümü bir homeomorfizmadır.*

*Kanıt.* $U^-$ ve $(K^C)^+$, $\hat{\tau}_F$ Fell topolojinin alt taban elemanları olsun.

Bu durumda $U, X$ de açıktır ve $C \in P_f(X)$ için

$C \cap U \neq \emptyset$ olur $\Leftrightarrow \beta(C) \cap U \neq \emptyset$,

$X$ üzerinde boştan farklı olması ile mümkündür.

Bu durumda $\beta(U^-) = U^-$ , $P_f^{\infty}(X^{'})$ üzerindeki Vietoris topolojiye göre açıktır.

$K, X$ de kompakttır.

Bu durumda $U_K^{'} = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ , $X^{'}$ de açıktır ve

$C \in \hat{P}_f(X)$ için $C \cap K = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $\beta(C) \subseteq U_k^{'}$ olmasıdır.

Sonuç olarak $\beta((K^C)^+) = (U_K^{'})^+$ olur ve bu küme $P_f^{\infty}(X^{'})$ üzerindeki Vietoris topolojiye göre açıktır.

Sonuç olarak $\beta(\cdot)$ nın bir açık dönüşüm olduğunu göstermiş olduk. Böylece alt tabanın elemanlarının görüntülerinin açık olduğunu gösterdik.

Şimdi $\beta(\cdot)$ nın sürekli olduğunu göstereceğiz. Bunun için $U^{'-}$ ve $U^{'+}$ nın $(P_f^{\infty}(X^{'}), \tau_V^{'})$ nin alt taban elemanları olduğunu kabul edelim.

Bu durumda ya $U^{'}$, $X$ de açıktır veya $X$ deki bir $K$ kompakt kümesi için $U^{'} = (X \setminus K) \cup \{+\infty\}$ olur.

I. durum için $P_f^{\infty}(X)$ in tanımından görürüz ki $P_f^{\infty}(X^{'})$ de $U^{'+} = \emptyset$ olur. Bununla birlikte önceki ifadelerimizden biliyoruz ki

$U^{'-} \cap P_f^{\infty}(X^{'}) = \beta(U^{'-} \cap P_f^{\infty}(X))$ olur.

II. durum için $U^{'-} = P_f^{\infty}(X^{'})$ olur ve önceki gibi $U^{'+} = \beta((K^C)^+)$ olur.

Sonuç olarak $\beta(\cdot)$ süreklidir ve iddia edildiği gibi bir homomorfizmadır.

$\square$

Artık Fell Topolojisi $\hat{\tau}_F$ ile Kuratowski yakınsaklığının topolojisinin çakıştığını görebiliriz.

**Teorem 5.10.** *$(X,d)$ yerel kompakt ayrılabilir bir metrik uzay olsun. Bu durumda $\hat{P}_f(X)$ üzerinde $\hat{\tau}_F$ Fell Topolojisi ile K yakınsak topolojisi çakışır.*

*Kanıt.* $X^{'}$ kompakt metriklenebilir olduğundan $P_f(X^{'}) = P_k(X^{'})$ olur ve $\tau_V^{'}$ kompakt ve metriklenebilirdir. Teoremi ispatlamak için

$P_f(X)$ de $A_n \xrightarrow{\hat{\tau}_F} A$ olmasının $A_n \xrightarrow{K} A$ olması ile denk olduğunu göstermeliyiz. Dikkat edilmelidir ki $\beta(\underline{\lim} A_n) = \underline{\lim}\beta(A_n)$ ve $\beta(\overline{\lim} A_n) = \overline{\lim}\beta(A_n)$ olur.

Bu durumda $A_n \overset{K}{\to} A$ olması için gerek ve yeter şart $\beta(A_n) \overset{K}{\to} \beta(A)$ olmasıdır.

Bununla birlikte $\beta(A_n) \overset{K}{\to} \beta(A)$ olması için gerek ve yeter şart

$\beta(A_n) \overset{\hat{\tau}_V}{\to} \beta(A)$ olmasıdır.

Gerçekten de $\hat{\tau}_V = \hat{\tau}_H$ olduğundan $\beta(A_n) \overset{\tau_V'}{\to} \beta(A)$ olması $\beta(A_n) \overset{K}{\to} \beta(A)$ olmasını gerektirir.

Diğer taraftan $\beta(A_n) \overset{K}{\to} \beta(A)$ ise $d'(\cdot,\cdot)$, $X'$ üzerinde $X'$ in topolojisini üreten metrik olmak üzere $\forall x' \in X'$ için $d'(x', \beta(A_n)) \to d'(x', B(A))$ olmasını gerektirir.

Bununla birlikte uzaklık fonksiyonu genişlemediğinden $\{d'(\cdot, \beta(A_n))\}_{n\geq 1}$ dizisi denksüreklidir.

Arzela-Ascoli Teoreminden $X'$ üzerinde $d'(\cdot, \beta(A_n)) \to d'(\cdot, \beta(A))$ yakınsamasının düzgün olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç olarak

$$\beta(A_n) \overset{\hat{\tau}_H = \tau_V'}{\to} \beta(A)$$

olur.

$\beta(.)$ homomorfizma olduğundan $\beta(A_n) \overset{\hat{\tau}_V'}{\to} \beta(A)$ olması için gerek ve yeter şartın $\beta(A_n) \overset{\hat{\tau}_F}{\to} \beta(A)$ olduğunu söyleyerek ispatı tamamlarız. $\square$

**Uyarı 5.11.** *Yukarıdaki ispatın dikkatli bir şekilde incelenmesiyle görülür ki $(Y,d)$ kompakt metrik uzayı üzerinde $\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subseteq P_k(Y)$ için $A_n \overset{\hat{\tau}_V}{\to} A$ olması için gerek ve yeter şart $A_n \overset{K}{\to} A$ Kuratowski yakınsamasıdır. Aslında bu daha genel olarak kompakt Hausdorff topolojik uzayında küme ağları için de doğrudur.(Klein-Thompson[2], Teorem 3.3.11 p.34)*

Buraya kadar ki çalışmamızda altta yatan uzay yerel kompakt ayrılabilir bir metrik uzay olduğunda kümelerin Kuratowski yakınsamasının güzel topolojik özellikleri olduğunu gördük. Lineer uzaylar için bu ifadenin anlamı $dimX < \infty$ dur. Bu problemin üstesinden gelmek ve altta yatan normlu uzay sonsuz boyutlu olduğu durumlar için bile bir küme topolojisini elde edebilmek için kümelerin $K$ ya yakınsaklığının orjinal tanımını, normlu uzayların tüm topolojik yapılarını kullanabileceğimiz şekilde, yeniden düzenlememiz gerekmektedir. Bu bizi çalışacağımız 5. küme topolojisine götürür.

## 6. MOSCO TOPOLOJİ

Bu bölümde amacımız yeni bir küme yakınsama kavramını vermek. Genel olarak $K$ yakınsamadan daha az kısıtlayıcı ki bu bizi $X$ uzayı sonsuz boyutta küme olduğu durumda bile kullanılabilecek bir küme topolojisine götürecek. (Hatta altta yatan $X$ uzayı sonsuz boyutta olduğunda bile.) Bu bölüm boyunca $X$ bir Banach Uzayıdır, $s-$ arkasından gelen ifadeler $X$ üzerindeki güçlü topolojiye göre $w-$ arkasından gelenler $X$ üzerindeki zayıf topolojiye göre olduğunu gösterir. $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset P_{fc}(X)$ olsun. Aşağıdaki iki limit tanımını verelim.

**Tanım 6.1.** $s-\underline{lim}A_n = \{x \in X : \forall n \geq 1, x_n \in A_n, x = lim x_n\}$ *ve*

$w-\overline{lim}A_n = \{x \in X : x = w-lim x_{n_k}, x_{n_k} \in A_{n_k}, n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$

**Uyarı 6.1.** *Tanımdan açıktır ki* $s-\underline{lim}A_n \in \hat{P}_{fc}(X)$ *ve*
$s-\underline{lim}A_n \subseteq w-\overline{lim}A_n$ *olur.*

**Tanım 6.2.** *Bir* $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq P_{fc}(X)$ *dizisi için* $s-\underline{lim}A_n = w-\overline{lim}A_n = A$ *oluyorsa Mosco anlamında* $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *dizisi A ya yakınsıyordur denir.*$A_n \xrightarrow{M} A$ *ile gösterilir.*

**Uyarı 6.2.** *Tanımdan A ya hem güçlü hem de* $w_{seq}$ *topolojisine göre yakınsama varsa* $A_n \xrightarrow{M} A$ *olduğu görülür.*

*X üzerindeki* $w_{seq}$ *topolojisinin kapalı kümeleri X in ardışık zayıf kapalı kümeleri olan topoloji olduğunu hatırlayınız. Bu durumda* $w_{seq}$ *yakınsak dizileri zayıf yakınsayan diziler olan X üzerindeki en güçlü topolojidir. Ek olarak* $w \subseteq w_{seq}$ *.* $w_{seq}$ *metriklenebilir olmadığından ancak I. sayılabilir olduğundan* $w_{seq}$ *deki K limiti kavramın sıralı formunda anlaşılmalıdır.(Uyarı 9 ve Uyarı 10)*

$\{A_n\}_{n\geq 1}$ *dizisi* $P_{fc}(X)$ *de düzgün sınırlı olsa bile* $M-$ *yakınsama* $h-$ *yakınsamaya indirgen-*

*mez. Buna basit bir örnek aşağıdaki şekilde verilebilir.* $X = l^2$, ($l^2$ *:Karesi yakınsak diziler uzayı) ve* $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *onun standart birim dikey tabanı olsun.* $A_n = conv\{0, e_n\}$ *olsun.*

*Bu durumda* $A_n \overset{M}{\to} \overline{A} = \{0\}$ *olur ancak* $A_n$ *, h yakınsamaya göre* $A = \{0\}$ *yakınsamaz. Bu yakınsaklık kavramının topolojik bir karakterizasyonunu Fell topolojisi* $\hat{\tau}_F$ *ye benzer şekilde 'vur ve kaçır' topolojisi olarak elde edebiliriz.*

**Tanım 6.3.** $P_{fc}(X)$ *üzerinde* $\hat{\tau}_M$ *ile gösterilen Mosco Topolojisi* $\{U^- : U \subseteq X$*, boştan farklı ve güçlü açık* $\}$ *ve* $\{(W^c)^+ : W \subseteq X$*, boştan farklı ve zayıf kompakt*$\}$ *küme ailelerinin alt taban olarak ürettiği topolojidir.*

**Uyarı 6.3.** *Bölümün devamında güçlü karakterizasyonunu çıkaracağız. Çünkü tersi söylenmedikçe X üzerinde güçlü topolojiyi kullandığımız anlaşılır. Bununla birlikte yukarıdaki tanımda* $\hat{\tau}_M$ *topolojisinin bir tabanı*

$\{[\bigcap_{k=1}^{n} U_k^-] \cap (W^c)^+ : n \geq 1, U \subseteq X$ *boş olmayan açık ve* $W \subseteq X$ *boşolmayan W kompakt(zayıf kompakt)*$\}$ *şeklindedir.*

**Önerme 6.4.** $\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subseteq P_{fc}(X)$ *ise* $A_n \overset{M}{\to} A$ *olur ancak ve ancak* $A_n \overset{\hat{\tau}_M}{\to} A$ .

*Kanıt.* ($\Rightarrow$) $U \cap A \neq \emptyset$ olacak şekilde $U \subseteq X$ boşolmayan açık ve $A \subseteq W^c$ olacak şekilde $W \subseteq X$ boşolmayan zayıf kompakt olsun. $n \geq n_0$ olduğunda $A_n \in U^- \cap (W^c)^+$ olacak şekilde $n_0 \geq 1$ sayısının varolduğunu göstermeliyiz. Gerçekten de $A_n \overset{M}{\to} A$ olduğundan $A \subseteq s - \underline{lim} A_n$ olur.Bu durumda $n_1 \geq 1$ vardır öyle ki $A_n \cap U \neq \emptyset$ olur. Sonuç olarak $n \geq n_1$ için $A_n \in U^-$ olur.Sonrası için kabul edelim ki $k \geq 1$ olduğunda $A_{n_k} \cap W \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n_k \to \infty$ alt dizisi olsun. $a_{n_k} \in A_{n_k} \cap W$ olsun.

Bu durumda Eberlein-Smulian Teoreminde (X Banach Uzayında zayıf topoloji için kompaktlık ve dizisel kompaktlık denktir.) ve gerekirse bir alt diziye geçilerek $a_{n_k} \overset{w}{\to} a$ olduğunu kabul edebiliriz. $A_n \overset{M}{\to} A$ olduğundan $a \in A$ olur. Sonuç olarak $a \in A \cap W$ , $W$ nin seçimiyle çelişkiye düşer.

$(\Leftarrow)$ $A_n \xrightarrow{\hat{\tau}_M} A$ olduğundan $A \cap U \neq \emptyset$ olacak şekilde her $U$ açığı için ve $A \subseteq W^c$ olacak şekilde her boştan farklı zayıf $W$ kümesi için $n \geq n_0$ olduğunda $A_n \in U^- \cap (W^c)^+$ olacak şekilde $n_0 \geq 1$ bulunabilir. Bu durumda $A \subseteq s - \overline{lim} A_n$ olur.

Kabul edelim ki $w - \overline{lim} A_n \nsubseteq A$ bu durumda $a' \notin A$ olmak üzere $a_{n_k} \xrightarrow{w} a'$ ve $a_{n_k} \in A_{n_k}$ olacak şekilde bir $n_k \to \infty$ alt dizisini vardır. Genelliği bozmadan $\forall k \geq 1$ için $a_{n_k} \notin A$ olduğunu kabul edebiliriz.

$W = \{a_{n_k}, a'\}_{k \geq 1}$ seçelim. Bu durumda $A \cap W = \emptyset$ , $A \subseteq (W^c)^+$ ve böylece $n \geq n_0$ için $A_n \in (W^c)^+)$ olur.

Sonuç olarak $\forall n \geq n_0$ için $A_n \cap W = \emptyset$ açık bir çelişkidir. Sonuç olarak $w - \overline{lim} A_n \subseteq A$ ve $A_n \xrightarrow{M} A$ olur.

□

Yansımalı Banach Uzayları kavramında bu topolojinin güzel özellikleri vardır. Aşağıdaki sonuç bu ifadeyi destekler. İlk olarak $\hat{\tau}_M$ nin bir zayıf topoloji olarak karakterizasyonunu elde edelim.

**Önerme 6.5.** *$X$ yansımalı bir Banach Uzayı olsun. Bu durumda $\hat{\tau}_M$ , $\forall W \in P_{wk}(X)$, için $A \to d(A,W) = inf\{\|a-c\|, a \in A, c \in W\}$ sürekli olacak şekilde $P_{fc}(X)$ üzerinde en zayıf topolojidir.*

*Kanıt.* ilk olarak bu şekilde her fonksiyonelin gerçekten $\hat{\tau}_M$ sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için $W \in P_{wk}(X)$ i sabitleyelim ve $\lambda \in J$ olmak üzere
$A_\lambda \xrightarrow{\hat{\tau}_M} A$ olsun. ($P_{fc}(X)$ de $\hat{\tau}_M$ yakınsak bir ağ ). Bir $d(A,W) = \|a-c\|$ olacak şekilde $a \in A$ ve $c \in W$ seçelim. Bir ($d(\cdot,A)$ , $w-$ alttan yarı sürekli $W \in P_{wk}(X)$ ve $X$ yansımalı olduğundan bu mümkündür)

$\forall \varepsilon > 0$ için $A \in B(a,\varepsilon)^-$ olduğundan yeterince büyük $\forall \lambda \in J$ için $A_\lambda \in B(a,\varepsilon)^-$ olur. Sonuç olarak $X$ de $a_\lambda \to a$ yakınsak olacak şekilde $a_\lambda \in A_\lambda$ bulabiliriz. Buradan $d(A_\lambda, W) \leq$

$\|a_\lambda - c\| \to \|a-c\| = d(A,W)$ elde ederiz ve böylece $\overline{lim} d(A_\lambda, W) \leq d(A,W)$ olur bu ise $d(\cdot, W)$ nin $\hat{\tau}_{M^-}$ üstten yarı sürekli olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $\beta \in \mathbb{R}$ olsun.

$\{A \in P_{fc}(X) : d(A,W) \leq \beta\}$ kümesinin $\hat{\tau}_M-$ kapalı olduğunu göstereceğiz. Böylece $d(\cdot, W)$ nun $\hat{\tau}_M-$ alttan yarı sürekliliğini (Böylece $\hat{\tau}_M$ sürekliliğini elde edeceğiz). Bunun için $\lambda \in J$ olmak üzere $A_\lambda \xrightarrow{\hat{\tau}_M} A$ yakınsak ve $d(A_\lambda, W) \leq \beta$ olsun. Bu durumda $(W + \overline{B}(0,\beta)) \cap A_\lambda \neq \emptyset$ ve $W + \overline{B}(0,\beta)$, $W \in P_{wk}(X)$ ve $X$ yansımalı olduğundan zayıf kompaktır. Böylece $(W + \overline{B}(0,\beta)) \cap A \neq \emptyset$ sonuç olarak $d(A,W) \leq \beta$ olur.(Böylece süreklilik elde edilir). $\hat{\tau}, P_{fc}(X)$ üzerinde $d(\cdot, W)$ , $\hat{\tau}$ sürekli olacak şekilde bir küme topolojisi ise $\hat{\tau}_M \subseteq \hat{\tau}$ olduğunu göstereceğiz. $U \subseteq X, A \in U^-$ olacak şekilde boş olmayan açık bir küme olsun. $a \in A \cap U$ olsun ve $B(a,\varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçelim. $A_\lambda \xrightarrow{\hat{\tau}} A$ olsun. Bu durumda $W = \{a\} \in P_{wk}(X)$ seçersek süreklilik varsayımından $d(A_\lambda, \{a\}) \to d(A, \{a\}) = 0$
Böylece yeterince büyük $\forall \lambda \in J$ için $d(a, A_\lambda) < \varepsilon$ olur.
Yani $A_\lambda \in B(a,\varepsilon)^- \subset U^-$ olur.
Son olarak $W \in P_{wk}(X)$ ve $A \in (W^c)^+$ olduğunu kabul edelim.
Bu durumda yeterince büyük $\lambda \in J$ için $d(A,W) > 0$ ve $d(A_\lambda, W) > 0$ olur.
Sonuç olarak yeterince büyük $\lambda \in J$ için $A_\lambda \in (W^c)^+$ olacağından $A_\lambda \xrightarrow{\hat{\tau}_M} A$ olur ki bu da $\hat{\tau}_M \subset \hat{\tau}$ olduğunu gösterir. □

**Uyarı 6.6.** *Bu önermenin ilginç bir sonucu $X$ yansımalı ve $P_{fc}(X)$ de*
$A_\lambda \xrightarrow{\hat{\tau}_M} A$ *ise* $A_\lambda \xrightarrow{\hat{\tau}_W} A$ *olur.(Yani* $\hat{\tau}_W \subseteq \hat{\tau}_M$ *)*

Yansımalı uzaylar için $\hat{\tau}_M$ topolojisinin güzel ayırma özellikleri vardır.

**Önerme 6.7.** *$X$ yansımalı Banach Uzayı ise $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ tamamen regülerdir. ($\tau_{3\frac{1}{2}}$ topolojik uzayıdır)*

*Kanıt.* Öncelikle $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ nin Hausdorff topolojik uzay olduğunu gösterelim. Bunun için kabul edelim ki $A, C \in (P_{fc}(X))$ iki ayrı eleman ve genelliği bozmadan $A \cap C^c \neq \emptyset$ olsun. $a \in A \cap C^c$ olsun ve

$U = \{x \in X : \|x-a\| < \frac{1}{2}d(a,C)\}$ ve

$W = \{x \in X : \|x-a\| \leq \frac{1}{2}d(a,C)\}$ kümelerini tanımlayalım.

Bu durumda $U^-$ ve $(W^c)^+$ sırasıyla $A$ ve $C$ nin ayrık iki $\hat{\tau}_M$ komşuluklarıdır. Bu gerçekten yola çıkarsak $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ Hausdorff tur.

Şimdi tam regülerliği kontrol edelim. $A \in (P_{fc}(X)$, $A \notin \Gamma$ olacak şekilde $\Gamma \subseteq P_{fc}(X)$ boş olmayan kapalı bir alt aile olsun.

$A \in \left[\bigcap_{k=1}^{n} U_k^-\right] \cap (W^c)^+ \subseteq \Gamma^c$ olacak şekilde $\{U_1,...,U_n,W\}$, $\hat{\tau}_M$ temel elemanlarını seçelim. Her zaman $U_1,...,U_n,W$ kümelerinin ayrık olduğunu kabul edebiliriz. $k = 1,...,n$ ve $a_k \in A \cap U_k$ olsun. $d(A,W) > 0$ olduğundan $(W+B(0,\beta)) \cap A = \emptyset$ ve $k = 1,...,n$ için $a_k + B(0,\beta) \subseteq U_k$ olacak şekilde bir $\beta > 0$ seçebiliriz. $g_k : (P_{fc}(X), \hat{\tau}_M) \to [0,1], k = 1,...,n$ için

$g_k(C) = \max\left[0, 1 - \dfrac{d(a_k,C)}{\beta}\right]$

$h : (P_{fc}(X), \hat{\tau}_M) \to [0,1]$

$h(C) = \min\left[1, \dfrac{d(C,W)}{\beta}\right]$ şeklinde tanımlayalım. Önerme 16 dan bu fonksiyonların sürekli olduğunu görebiliriz. Son olarak

$\theta = \left[\prod_{k=1}^{n} g_k\right].h : (P_{fc}(X), \hat{\tau}_M) \to [0,1]$ süreklidir.

$\theta|\Gamma = 0$ ve $\theta(A) = 1$ dir. Böylece $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ tamamen regülerdir. $X$ üzerindeki hipotezlerimizi daha fazla güçlendirerek daha çok şey söyleyebiliriz. □

**Önerme 6.8.** *$X$ yansımalı bir Banach Uzayı olsun. Bu durumda $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ nin I.sayılabilir olması için gerekli ve yeterli şart $X$ in ayrılabilir olmasıdır.*

*Kanıt.* $(\Rightarrow)$: $X$ ayrılabilir olmasın. $X \in P_{fc}(X)$ in sayılabilir yerel tabanını düşünelim. Açıktır ki

$V_{n,k} = \bigcap_{i=1}^{m(n)} \{x \in X : \|x-u_{n_i}\| < \frac{1}{k}\}^-$ ve $m(n), \{u_{n_i}\}_{i=1}^{m(n)}$ $n$ ye bağlıdır ve $k$ ya bağlı olmayacak şekilde bu yerel taban $\{V_{n,k}\}_{n,k\geq 1}$ şeklindedir.

$Y = \overline{span}\{u_{n_i} : n \geq 1, 1 \leq i \leq m(n)\}$ olsun. $X$ ayrılabilir olmadığından $Y \subsetneq X$ olur. Bu durumda bir $z \in X$ öyle ki $B(z,1) \cap Y = \emptyset$ olur. Buradan $B(z,1)^-$ $V_{n,k}$ kümesi kapsamayan $X$ in bir $\hat{\tau}_M$ komşuluğudur. Bu ise bize bir çelişki verir.

$(\Leftarrow)$: $\{u^- : u \subseteq X$ boş olmayan açık $\}$

ailesinin ürettiği topoloji, $D, X$ in yoğun sayılabilir bir alt kümesi olmak üzere $\{B(x,r)^- : x \in D, r \in \mathbb{Q}_+\}$ ailesinin ürettiği topoloji ile aynıdır.

Bu durumda $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ nin I.sayılabilirliğini göstermek için Mosco topolojisinin 2. yarı-

sının I. sayılabilir olduğunu göstermek yeterlidir. $C \in P_{fc}(X)$ olsun, $X$ in ayrılabilirliğinden $C$ kapalı yarı uzayların sayılabilir bir ailesinin kesişimine eşittir. Yani $\forall n \geq 1$ için $C \subseteq H_n$ ve $C = \bigcap_{n\geq 1} \overline{H_n}$ olacak şekilde $X$ in $\{H_n\}_{n\geq 1}$ yarım uzayların dizisi vardır.
$C \in (W^c)^+$ olacak şekilde $W \in P_{wk}(X)$ olsun. Bu durumda $W \subseteq \bigcup_{k\in J} H_k^c$ olacak şekilde $J \subseteq \mathbb{Z}_+$ bulabiliriz.
$W \subseteq \overline{B_r}$ olacak şekilde $r \in \mathbb{Q}_+$ olsun. $\overline{B_r} \cap [\bigcup_{k\in J} H_k^c] \in P_{wk}(X)$, $C$ den ayrıktır ve $W$ yi kapsar. Bu durumda
$\{\bigcap_{k\in J}((\overline{B_r} \cap H_k^c)^c)^+ : J \subseteq \mathbb{Z}_+$ sonlu $r \in \mathbb{Q}+\}$ ailesi $\{(W^c)^+ : W \in P_{wk}(X)$
tarafından üretilen topoloji de $C$ için yerel bir taban oluşturur. Yani $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ I. sayılabilirdir. ☐

**Uyarı 6.9.** *Yani bu önermeye göre bir $X$ yansımalı Banach Uzayında dizilerin Mosco topoloji belirlemesi için gerekli ve yeterli şart $X$ in ayrılabilir olmasıdır.*

**Önerme 6.10.** *$X$ ayrılabilir yansımalı bir Banach Uzayı ise $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ I. sayılabilir, ayrılabilir $\tau_{3\frac{1}{2}}$ topolojik uzayıdır.*

*Kanıt.* Sadece ayrılabilirlik özelliğini göstermemiz gerekiyor. $D, X$ in sayılabilir yoğun alt kümesi ise köşeleri $D$ de olan politoplar $P_{fc}(X)$ da $\hat{\tau}_M$ yoğundur.
Politop: Sonlu sayıda noktanın konveks örtüsüdür, çokgen gibi.

Tanım 16 nın bir anlık yansıması Mosco Topoloji $\hat{\tau}_M$ in $X$ üzerindeki topolojiye bağlı olduğunu topolojiyi tanımlayan norma bağlı olmadığını söyler. Böylece $\hat{\tau}_M$ yi etkilemeden $X$ i tekrardan denk bir normla ifade edebiliriz. Bu basit gözlemi $\hat{\tau}_M$ in metriklenebilmesini kurmak için kullanacağız. Ancak bundan önce geometrik fonksiyonel analizinden bazı kavramları hatırlamalıyız. ☐

**Tanım 6.4.** *Bir Banach Uzayı $X$ in ikil dönüşümü $\forall x \in X$ için*
*$J(x) = \{x^* \in X^* : (x^*, x) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$ şeklinde tanımlanan*
*$J : X \to 2^{X^*}$ dönüşümüdür.*

**Uyarı 6.11.** *$\forall x \in X$ için açıktır ki $J(x)$ , $X^*$ da kapalı konveks ve sınırlıdır. Bununla birlikte Hahn-Banach Teoreminin basit bir uygulaması olarak, $\forall x \in X$ için $J(x)$ in boş olmadığını* *garantiler. Bazı özel durumlarda $J(.)$ tek değerlidir. Aynı zamanda $J(.)$ , $\phi(x) = \frac{1}{2}||x||^2$ nin subdiferansiyelidir.*

*Bu noktada sadece ikil dönüşümün temelde $X$ üzerindeki norma bağlı olduğunu belirtmek istiyoruz. Diğer bir deyişle $\|\cdot\|$ ve $|\cdot|$ , $X$ üzerinde farklı iki norm olsun. $J_1$ , $J_2$ bunlara karşılık elde edilen ikil dönüşümler olsun. Bu durumda $J_1 \neq J_2$ olur. $\|\cdot\|$ ve $|\cdot|$ birbirine denk olsa bile bu durum ortaya çıkar.*

**Tanım 6.5.** *(a) Bir $X$ Banach Uzayı birim çemberi hiç doğru parçası içermiyorsa kesin konvekstir denir. Yani $\forall\lambda \in (0,1)$ ve $\|x\| = \|y\| = 1$ , $x \neq y$ için $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$ dir.*
*(b) Bir $X$ Banach Uzayı $\forall\varepsilon > 0$ ve $\|x\| = 1$ olacak şekilde $x \in X$ için $\|y\| = 1$ olacak şekilde $y \in X$ için $||x-y|| \geq \varepsilon$ olduğunda $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1-\delta$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon, x) > 0$ varsa yerel düzgün konveks denir.*
*(c) Bir $X$ Banach Uzayı $\forall\varepsilon > 0$ için $\|x-y\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\|x\| = \|y\| = 1$ olan $x, y \in X$ için $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1-\delta$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa düzgün konvekstir.*
*(d) Bir $X$ Banach Uzayı $\|x_n\| = 1$ , $\|x\| = 1$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde bir $\{x_n\}_{n>1}$ dizisi için $\|x_n - x\| \to 0$ oluyorsa Kadec-Klee özelliğine (H özelliğine) sahiptir denir.*

**Uyarı 6.12.** *Açıktır ki düzgün konveks $\Rightarrow$ yerel düzgün konveks $\Rightarrow$ kesin konveks olur. Düzgün konveks bir Banach Uzayı yansımalıdır. (Milmon-Pettis Teoremi cf. Milman [7], Pettis [8], Diestel [9], Teorem 2, p 37). Bununla birlikte Kadec-Klee özelliğinin $x_n \xrightarrow{w} x$ , $X$ de $\|x_n\| \to \|x\|$ ise $\|x_n - x\| \to 0$ ile denktir. Son olarak $X^*$ kesin konveks ise ikil dönüşüm $J(.)$ tek değerlidir.*

**Lemma 6.13.** *$X$ yerel düzgün konveks bir Banach Uzayı ise Kadec-Klee özelliğine sahiptir.*

*Kanıt.* $n \geq 1$ için $\|x_n\| = \|x\| = 1$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olsun. Bu durumda $x_n + x \xrightarrow{w} 2x$ olur. Norm fonksiyonelinin zayıf alttan yarı sürekli olduğunu hatırlayacak olursak $2 = 2\|x\| \leq \underline{lim}\|x_n + x\| \leq \overline{lim}\|x_n + x\| \leq \|x\| + lim\|x_n\| = 2$ elde ederiz. Sonuç olarak $\|x_n + x\| \to 2$ Yerel konvekslik tanımı ile bu ifade $\|x_n - x\| \to 0$ olmasını gerektirir. $\square$

**Lemma 6.14.** *$X$ yansımalı ve $X^*$ yerel konveks ise $x \in X|\{0\}$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olmak üzere $\overline{lim}\|x - \lambda x_n\| < \|x\|$ olacak şekilde $\lambda \in (0,1]$ vardır.*

*Kanıt.* $\mathscr{F} : X \to X^*$ tek değerli ikil dönüşümünü düşünelim. İkil dönüşümün sürekli olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten de $z_n \to z$ olsun.

Bu durumda $n \geq 1$ için $\|\mathscr{F}(z_n)\|^2 = \|z_n\|^2 = (\mathscr{F}(z_n), z_n)$ olur. Böylece gerekirse bir alt diziye indirgeyerek $X^*$ da $\mathscr{F}(z_n) \xrightarrow{w} z^*$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $\|\mathscr{F}(z_n)\|^2 \to ||z||^2 = (z^*, z)$ ve $\|z_n^*\| \leq \underline{lim}||\mathscr{F}(z_n)||$ olur. Böylece $\|\mathscr{F}(z_n)\| \to \|z^*\|$ elde ederiz. Yardımcı teorem 2 yi uygularsak $X^*$ da $\mathscr{F}(z_n) \to z^*$ elde edilir. Yani $\mathscr{F}(.)$ süreklidir.

Sonrasında $x \neq 0$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ kabul edelim. $\varepsilon.\sup\limits_{n\geq 1}\|x_n\| < ||x||^2$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ olsun. Yukarıda gösterilen $\mathscr{F}(.)$ nin sürekliliğini $\{x_n\}_{n\geq 1}$ için sınırlılığını kullanırsa $\forall n \geq 1$ için $||\mathscr{F}(x - \lambda x_n) - \mathscr{F}(x)|| < \varepsilon$ olacak şekilde $\lambda \in (0, 1]$ bulabiliriz.

$\lim\limits_{k\to\infty}||x - \lambda x_{n_k}|| = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}||x - \lambda x_n||$ olacak şekilde $n_k \to \infty$ alt dizisi olsun. Uyarı 18 den $\mathscr{F}(.)$ nin subdiferansiyel özelliğinden

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}[||x - \lambda x_{n_k}\|^2 - ||x||^2] &\leq -(\mathscr{F}(x - \lambda x_{n_k}), \lambda x_{n_k}) \\
&= -(\mathscr{F}(x - \lambda x_{n_k}) - \mathscr{F}(x), \lambda x_{n_k}) - (\mathscr{F}(x), \lambda x_{n_k}) \\
&\leq -\lambda(\mathscr{F}(x), x_{n_k}) + \lambda\varepsilon\|x_{n_k}\|
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x - \lambda x_{n_k}\|^2 - ||x||^2}{2} \leq \lambda(\varepsilon.\sup_{n\geq 1}\|x_n|| - ||x||^2) < 0$$

$\overline{lim}||x - \lambda x_n|| < ||x||$ şeklinde sonuçlandırabiliriz. □

**Tanım 6.6.** *$X$ bir Banach Uzayı ve $C \subseteq X$ boşolmayan bir küme olsun. Bu durumda $p(x, C) = \{c \in C : \|x - c\| = d(x, C)\}$ şeklinde tanımlanan*
*$p(\cdot, C) : X \to C$ ye dönüşümüne $C$ üzerinde ’metrik dönüşüm’ denir.*

**Uyarı 6.15.** *$p(x, C)$ kümesi boş olmayabilir. $\forall x \in X$ için $p(x, C) \neq \emptyset$ ise $C$ kümesine ’proximinal’ küme denir. Ek olarak $\forall x \in X$ için $p(x, C)$ tek noktadan oluşuyorsa $C$ kümesine ’Chebyshev kümesi’ denir. $X$ yansımalı olduğunda her kapalı konveks kümenin proximinal olduğunu görmek kolaydır. Ek olarak $X$ kesin konveks ise kapalı konveks küme ’Chebyshev küme’ olur. Aşağıdaki önerme Mosco yakınsamasının birçok uygulamadaki önemini kısmen açıklar.*

**Önerme 6.16.** *$X$ kesin konveks, yansımalı Kadec-Klee özelliğine sahip bir Banach Uzayı ,*

*$X^*$ yerel düzgün konveks $\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subseteq P_{fc}(X)$ ise aşağıdaki ifadeler denktir.*

*(a) $A_n \overset{\hat{\tau}_M}{\to} A$*

*(b) $\forall x \in X$ için $p(x, A_n) \to p(x, A)$*

*(c) $A_n \overset{\hat{\tau}_W}{\to} A$*

*Kanıt.* (a) $\Rightarrow$(b) $a \in P_{fc}(X)$ olduğundan $\forall x \in X$ için $p(x,A)$ tek noktadan oluşur. Bu durumda fonksiyon küme değerli değil vektör değerli kabul edebiliriz. $a_n = p(x, A_n)$ ve $a = p(x,A)$ olsun. Bu durumda $d(x, A_n) = \|x - a_n\|$ ve $d(x,A) = \|x - a\|$ olur. $A_n \overset{\hat{\tau}_M}{\to} A$ olduğundan Uyarı 16 dan ve Wijsman Topoloji tanımından $d(x, A_n) \to d(x,A)$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\|x - a_n\| \to \|x - a\|$ olur.

Buradan da gerekirse bir alt diziye geçilerek $a_n \overset{w}{\to} \hat{a} \in A$ ya zayıf yakınsadığını kabul edebiliriz. Buradan $\|x - \hat{a}\| \leq \underline{lim}\|x - a_n\| = \|x - a\| = d(x,A)$ olur. Bu ise $\hat{a} = p(x,A) = a$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $a_n \overset{w}{\to} a$ olur. Hipotezde $X$ in Kadec-Klee özelliği olduğundan $X$ de $p(x, A_n) \to p(x,A)$ şeklinde sonuçlandırabiliriz.

(b)$\Rightarrow$(a) $a \in A$ olsun. Bu durumda $X$ de $a_n = p(a, A_n) \to a$ ve $A \subseteq s - \underline{lim}A_n$ olur. Sonrasında $n \geq 1$ için $a_n \in A_n$ olsun ve $a_n \overset{w}{\to} a$ olduğunu kabul edelim.

Gerekirse kümeleri kaydırarak genelliği bozmadan $a = 0$ kabul edebiliriz. Kabul edelim ki $0 \notin A$ olsun. Bu durumda $v = p(0,A) \neq 0$ olur. $p(0, A_n) = v_n \to v$ olduğundan Yardımcı Teorem 2 i kullanarak $\overline{lim}\|v - \lambda(v_n - a_n)\| \leq \|v\|$ olacak şekilde $\lambda \in [0,1]$ şeklinde bulabiliriz ve böylece $\overline{lim}\|p(0, A_n)\| < \|p(0,A)\|$ ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $0 \in A$ dır ve böylece $A_n \overset{\hat{\tau}_M}{\to} A$

(a) $\Rightarrow$(c) Uyarı 16 dan elde edilir.

(c) $\Rightarrow$(b) $\forall a \in A$ için $d(a, A_n) \to 0$ olacağından $a \in s - \underline{lim}A_n$ ve böylece $A \subseteq s - \underline{lim}A_n$ elde ederiz. Sonrasında $n \geq 1$ için $a_n \in A_n$ olsun ve

$a_n \overset{w}{\to} a$ kabul edelim. Önceden olduğu gibi $a = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Kabul edelim ki $0 \notin A$ olsun. $v = p(0,A) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\forall \lambda \geq -1$ için $v = p(-\lambda v, A)$ olduğunu kolayca kabul edebiliriz. Herhangi bir $x \in X$ için $d(x,A) \leq \underline{lim}\|x - a_n\|$ elde ederiz. $\lambda \geq 0$ için $x = -\lambda v$ kabul edersek $d(-\lambda v, A) \leq \underline{lim}\|\lambda v + a_n\|$ ve böylece $(1+\lambda)\|v\| \leq \underline{lim}\|\lambda v + a_n\|$ olduğunu elde ederiz. Bu ise $||v|| \leq \underline{lim}\|\frac{\lambda}{1+\lambda}v + \frac{1}{1+\lambda}a_n\|$ olur.

$v - a_n \overset{w}{\to} v$ ve $\lambda \geq 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 3 ten bir çelişki elde ederiz. $\square$

**Teorem 6.17.** *Troyanski[6] Her yansımalı X Banach Uzayına X ve $X^*$ ın her ikisi de yerel düzgün konveks olacak şekilde denk bir norm tanımlanır.*

**Uyarı 6.18.** *Önceki teoremin bir sonucu olarak denk normlama sonucunda X ve $X^*$ ın Kadee-Klee özelliği olacaktır.*

*Artık Mosco Topoloji $\hat{\tau}_M$ ile ilgili ana sonuç için hazırız.*

**Teorem 6.19.** *X ayrılabilir yansımalı bir uzay ise $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ bir Polish uzayıdır.*

*Kanıt.* Teorem 12 ye göre genelliği bozmadan $X$ ve $X^*$ ın düzgün konveks olduğunu kabul edebiliriz. $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $X$ de yoğun olsun ve $A, C \in P_{fc}(X)$ için
$\xi(A_n, C) = min\{1, \|p(x_n, A) - p(x_n, C)\|\}$, yarı metrikini $P_{fc}(X)$ üzerinde tanımlayalım. Açıktır ki $\{\xi_n(\cdot,\cdot)\}_{n\geq 1}$ yarı metriklerin ayıran bir ailesidir. $(P_{fc}(X), \hat{\tau}_M)$ tamamen regüler olduğundan $\xi(A, C) = \sum_{n\geq 1} \frac{\xi_n(A, C)}{2^n}$ metriği ile metriklenebildiğini söyleyebiliriz. □

## 7. ATTOUCH WETS TOPOLOJİ

Uyarı 14 te belirtildiği şekilde kümelerin düzgün sınırlı dizilerinde bile Mosco yakınsama $h-$ yakınsamaya indirgenemez. Bu sebeple tam olarak bu önemli özelliğe sahip başka bir küme yakınsaması verilecektir.

Bu bölüm boyunca $X$ bir Banach Uzaydır.

**Tanım 7.1.** *$\forall r > 0$ için $A, C \in \hat{P}_f(X)$ olmak üzere*
*$h_r(A,C) = maks\{h^*(A \cap \overline{B}_r, C), h^*(C \cap \overline{B}_r, A)\}$ şeklinde tanımladığımız sayı*
*$r-$ Hausdorff uzaklık olarak isimlendirilir.*

**Önerme 7.1.** *$r-$ Hausdorff uzaklık aşağıdaki özelliklere sahiptir.*

*(a)* $h_r(A,C) \geq 0$

*(b)* $h_r(A,C) = h_r(C,A)$

*(c)* $k \in \{1,2,3\}$ *için* $r > d(0, A_k)$ *olacak şekilde bir* $r$ *için*
$h_r(A_1, A_3) \leq h_{3r}(A_1, A_2) + h_{3r}(A_2, A_3)$

*(d) Her* $r$ *için* $h_r(A,C) = 0$ *olması için gerekli ve yeterli şart* $A = C$ *olmasıdır.*

*Bunların arasında sadece (c) biraz açıklama gerektirir.Diğerleri açıktır.*

$\delta_r(C_1, C_3) = sup\{|d(x,C_1) - d(x,C_3)| : ||x|| \leq r\}$ *olsun.*$C_1$ *veya* $C_3$ *boş küme ise* $\delta_r = +\infty$ *kabul edelim.* $C_1 \cap \overline{B}_r \subseteq \overline{B}_r$ *olduğundan*

$h^*(C_1 \cap \overline{B}_r, C_3) = \sup\{d(y, C_3) : y \in C_1 \cap \overline{B}_r\} \leq \delta_r(C_1, C_3)$ *olur.*

*Benzer şekilde* $h^*(C_3 \cap \overline{B}_r, C_1) \leq \delta_r(C_3, C_1)$ *olur.*

*Sonuç olarak* $h_r(C_1, C_3) \leq \delta_r(C_1, C_3)$ *olur.*

*Diğer taraftan $r > maks\{||y||, d(0,C_1)\}$ olacak şekilde her $r$ için*

$d(y,C_1) \leq d(0,C_1) + r \leq 2r$ *ve böylece de* $d(y,C_1) = d(y, C_1 \cap \bar{B}_{3r})$ *olur. Buradan*

$\sup\{|d(y,C_3) - d(y,C_1)| : ||y|| \leq r\} \leq \sup\{|d(y,C_3) - d(y, C_3 \cap \bar{B}_r)| : y \in X\} = h(C_1 \cap \bar{B}_{3r}, C_3)$.
*olur. $C_1$ ve $C_3$ ün yerini değiştirdiğimizde de simetrik eşitsizliği elde ederiz. Yani $\delta_r(C_1,C_3) \leq h_{3r}(C_1,C_3)$ olur. Sonuç olarak $\delta_r(\cdot,\cdot)$ üçgen eşitsizliğini sağladığından $k \in \{1,2,3\}$ için $r > d(0,C_k)$ olduğunda*

$h_r(C_1,C_3) \leq \delta_r(C_1,C_3) \leq \delta_r(C_1,C_2) + \delta_r(C_2,C_3) \leq h_{3r}(C_1,C_2) + h_{3r}(C_2,C_3)$ *olur.*

**Tanım 7.2.** *$\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq P_f(X)$ dizisi ve $A \in \hat{P}_f(X)$ olsun. $\forall r > 0$ için $h_r(A_n, A) \to 0$ 'Attouch-Wets anlamında' $A_n$ dizisi $A$ kümesine yakınsar denir ve $A_n \overset{AW}{\to} A$ ile gösterilir.*
*Şimdi kendimizi $P_f(X)$ ile sınırlandıralım. Bu bölümde $\{r_n\}_{n\geq 1}$ artan pozitif sayı dizisi $r_n \to \infty$ şeklinde olsun.*

**Tanım 7.3.** *$\hat{\tau}_{AW}$ ile gösterilen Attouch-Wets topolojisi $P_f(X)$ üzerinde*
$d_{AW}(A,C) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{\delta_{r_0}(A,C)}{1+\delta_{r_n}(A,C)}$ *metriği ile tanımlanan bir metrik topolojisidir.*

**Uyarı 7.2.** *$\{r_n\}_{n\geq 1}$ dizisinin seçimi $d_{AW}(\cdot,\cdot)$ metriğini etkiler ancak bu düzgünlüğünü etkilemez. Bu yüzden $\hat{\tau}_{AW}$ topolojisi $\{r_n\}_{n\geq 1}$ dizisinden bağımsızdır.*
*$A, C \in P_f(X)$ ve $r_0 > maks\{d(0,A), d(0,C)\}$ için öncekine benzer bir şekilde $h_r(A,C) \leq \delta(A,C) \leq h_{r_0+2r}(A,C)$ olduğu gösterilebilir. Bu eşitsizliklerden hemen görülebilir ki Attouch-Wets yakınsama topolojik bir kavramdır. Yani $\hat{\tau}_{AW}$ topolojisindeki yakınsamadır.*

**Önerme 7.3.** *$\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subset P_f(X)$ olsun. $A_n \overset{AW}{\to} A$ olması için gerek ve yeter şart $A_n \overset{\hat{\tau}_{AW}}{\to} A$ olmasıdır.*

**Uyarı 7.4.** *$dimX < \infty$ ise Arzela-Ascoli Teoreminden uzaklık fonksiyonları eş sürekli olduğundan, $AW-$ yakınsama ve kümelerin $K-$ yakınsaklığı denktir. Sonsuz boyutlu Banach Uzayları için $\hat{\tau}_{AW}$ topolojisi $\hat{\tau}_M$ topolojisine göre kesin daha incedir. Bununla birlikte Tanım 20 den açıktır ki $P_f(X)$ deki düzgün sınırlı bir dizi için $AW-$ yakınsama ile $h-$ yakınsama aynıdır.(Bu $M-$ yakınsama için geçerli değildir, Uyarı 14 ten). Gerçekte dizideki kümeler bağlantılı ve limit kümesinin sınırlı olduğu varsayımı yeterlidir. Aşağıdaki önermede bu verilmiştir.*

**Önerme 7.5.** *$\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subset P_f(X)$ , $\forall n \geq 1$ için $A_n$ bağlantılı $A$ sınırlı ve $A_n \overset{AW}{\to} A$ ise $A_n \overset{h}{\to} A$ olur.*

*Kanıt.* $A$ sınırlı olduğundan $A \subseteq rB_1$ olacak şekilde bir $r > 0$ bulabiliriz. Ayrıca Önerme 22 den biliyoruz ki $n \geq n_0$ olduğunda
$sup\{|d(x,A_n) - d(x,A)| : ||x|| \leq r+3\} < 1$ olacak şekilde bir $n_0 \geq 1$ vardır. İddia ediyoruz ki $\forall n \geq n_0$ için $A_n \subseteq (r+2)B_1$ olur. Kabul edelim ki olmasın. Bu durumda bir $n \geq n_0$ ve $a_n \in A_n$ vardır öyle ki $||a_n|| > r+2$ olur. $a \in A$ olsun. Buradan $d(a,A_n) < 1$ olur böylece $||c_n|| < r+1$ olacak şekilde bir $c_n \in A_n$ bulabiliriz. $A_n$ bağlantılı olduğundan $||u_n|| = r+2$ olacak şekilde bir $u_n \in A_n$ bulabiliriz. Sonuç olarak $n$ için

$$1 > |d(u_n,A_n) - d(u_n,A)| = d(u_n,A) \geq 2$$

olur, bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $\forall n \geq n_0$ için $A_n \subseteq (r+2)B_1$ olur ve böylece $A_n \xrightarrow{h} A$ olur. $\square$

**Uyarı 7.6.** *Özel olarak önceki önerme $P_{bfc}(X)$ üzerinde $\hat{\tau}_{AW} = \hat{\tau}_H$ olduğunu gösterir. $\hat{P}_f(X) = P_f(X) \cup \{\emptyset\}$ uzayı için $\overset{\wedge}{d}_{AW}(\cdot,\cdot)$ metriğinin ürettiği topoloji $AW-$ yakınsamanın ürettiği topolojiye göre kesin incedir. Örnek olarak $X = R$ , $n \geq 1$ için $A_n = \{n\}$ ve $A = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\forall n > r$ için $h_r(A_n,A) = 0$ olur. Ancak $\forall n \geq 1$ ve $\forall r > 0$ için $\delta_r(A_n,A) = +\infty$ olur. Bunun sebebi boş kümeye yakınsamanın $h_r$ ve $\delta_r$ ye göre farklı karakterizasyonların olmasıdır. Açıkça yazmak gerekirse $A_n \xrightarrow{h_r} \emptyset$ demek $\forall n \geq n_0(r)$ için $A_n \cap rB_1 = \emptyset$ olacak şekilde bir $n_0(r) \geq 1$ sayısının varolmasıdır. Diğer taraftan $A_n \xrightarrow{d_{AW}} \emptyset$ olması $\forall n \geq n_0$ için $A_n = \emptyset$ olacak şekilde $n_0 \geq 1$ sayısının varolmasıdır. $\{r_n\}_{n\geq 1}$ , $R_+$ da artan ve sınırsız bir dizi ve*

$$\hat{\delta}_{r_n}(A,C) = \sup\left\{\left|\frac{d(x,A)}{1+d(x,A} - \frac{d(x,C)}{1+d(x,C)}\right| : ||x|| \leq r_n\right\}$$

*olmak üzere $\hat{P}_f(X)$ için uygun bir metrik*

$$\overset{\wedge}{d}_{AW}(A,C) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\hat{\delta}_{r_n}(A,C)$$

*olur. $(\hat{P}_f(X), \overset{\wedge}{d}_{AW})$, $(\hat{P}_f(X), d_{AW})$ ve $(P_f(X), d_{AW})$ tam metrik uzaylardır.*

Bu bölümü 6 küme topolojisinin karşılaştırılmasıyla sonuçlandıralım.

**Teorem 7.7.** *X yansımalı bir Banach Uzayı ise $P_{fc}(X)$ üzerinde aşağıdaki kapsamlar vardır.*

*(a)* $\overset{\wedge}{\tau}_F \subseteq \overset{\wedge}{\tau}_W \subseteq \overset{\wedge}{\tau}_M \subseteq \overset{\wedge}{\tau}_{AW}$ , $\overset{\wedge}{\tau}_M \subseteq \overset{\wedge}{\tau}_H$ , $\overset{\wedge}{\tau}_M \subseteq \overset{\wedge}{\tau}_V$

*(b) Ek olarak $X$ ayrılabilir ve $X^*$ yerel düzgün konveks ise* $\overset{\wedge}{\tau}_M = \overset{\wedge}{\tau}_W$ *olur*

## KAYNAKLAR


[1] S. Hu , N.S. Papageorgiou,1997, "Countinuity of Multifunctions" ,Handbook of Multi-valued Analysis, *Kluwer Academic Publishers*, Boston,1-35.

[2] E. Klein and A. Thompson, 1984, "Theory of Correspondences", *Wiley Interscience* , New York.

[3] J-P. Aubin and H.Frankowska, 1990, "Set-Valued Analysis" , *Birkhauser*, Boston.

[4] K. Kuratowski,1968, "Topology, Vol. II" ,(Transl. J. Jaworowski), *Academic Press* , New York.

[5] N.Bourbaki,1971, "Elements de Mathematiques, Topology Generale", *Hermann Paris*.

[6] S.Troyanski,1971, "On locally uniformly convex and differantiable norms in certain nonseparable Banach Space", *Stadia Math.*, 173-180.

[7] D.P.Milman,1938, "On some criteria for the regularity of space of the type(B)" , *Nauk USSR, Doklady Akad*,243-246

[8] B.J.Pettis,1939, "A proof that every uniformly convex space is reflexive", *Duke Math. J.*.

[9] J.Diestel,1984, "Sequences and Series in Banach Spaces", Graduate Texts in Math , *Springer-Verlag* ,New York.

**EK 1**

# ÖZGEÇMİŞ

| | |
|---|---|
| **Ad-Soyad** | : Fatma ALTINTAŞ |
| **Uyruğu** | : T.C. |
| **Doğum Tarihi ve Yeri** | : 06/03/1978-Manisa |
| **E-posta** | : fatmatemel45@hotmail.com |

## ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 1999, Marmara Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Bölümü

## MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

| **Yıl** | **Yer** | **Görev** |
|---|---|---|
| 1999-2001 | Hakkari Milli Eğitim Vakfı İlköğretim Okulu | Matematik Öğretmenliği |
| 2001-2005 | Bilecik Fen Lisesi | Matematik Öğretmenliği |
| 2005- | Uşak Fen Lisesi | Matematik Öğretmenliği |

**YABANCI DİL:** İngilizce