T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN KESİR ZİHİNSEL DÜZENEKLERİ VE BU DÜZENEKLERİN CEBİRSEL DÜŞÜNMEDE KULLANILMA DURUMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melike TOPÇU

TEMMUZ 2020

UŞAK

T.C

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN KESİR ZİHİNSEL DÜZENEKLERİ VE BU DÜZENEKLERİN CEBİRSEL DÜŞÜNMEDE KULLANILMA DURUMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melike TOPÇU

UŞAK 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu araştırmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Melike TOPÇU

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN KESİR ZİHİNSEL DÜZENEKLERİ VE BU DÜZENEKLERİN CEBİRSEL DÜŞÜNMEDE KULLANILMA DURUMLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Melike TOPÇU

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2020

ÖZET

Bu çalışmada öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerinin belirlenmesi ve bu düzeneklerin cebirsel düşünmeye ilişkin sorularda kullanılma durumlarının incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışma, Türkiye'nin batısındaki devlet ortaokullarından birisinde öğrenim gören 12 tane 7. sınıf öğrencisi üzerinde uygulanmıştır. Çalışma durum çalışması niteliğinde olup, çalışma verileri birebir görüşmeler yoluyla toplanmış ve toplanan veriler betimsel analiz kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmada öğrencilere iki aşamalı görüşme formu verilmiş ve ilk olarak öğrencilerin kesirleri ifade ederken parça bütün, parçalı birim kesir, basit parçalı birim kesir, çarpımsal bileşim ve bileşik kesir zihinsel düzeneklerini nasıl kullandıkları ortaya çıkarılmış sonrasında ise kesir düzeneklerine ilişkin kritik işlemleri cebirsel düşünme ile ilişkili sorularda kullanma durumları incelenmiştir. Veriler analiz edildiğinde öğrencilerin en fazla küme modeline ilişkin sorularda zorlandıkları ve özellikle de çarpımsal bileşim zihinsel düzeneğine ilişkin zihinsel düzeneklerin problemli olduğu ve kesirlerle ilgili işlemleri cebirsel ifadelerde kullanmakta zorlandıkları görülmüştür. Bulgular ışığında; yapılan öğretim uygulamalarında kesrin parça bütün anlamı kadar diğer anlamlarına da yer verilmesi, kural ezberletmek yerine kavramların anlamına ağırlık verilmesi tavsiye edilebilir.

Bilim Kodu :

Anahtar Kelimeler : Kesir, Kesir Zihinsel Düzenekleri, Cebirsel Düşünme, Ortaokul Öğrencileri

Sayfa Adedi **:** 161 sayfa

Tez Yöneticisi **:** Dr. Öğr. Üyesi Nejla GÜREFE

FRACTION SCHEMES OF MIDDLE SCHOOL STUDENTS AND THE USE OF THESE SCHEMES IN ALGEBRAIC THINKING

(M. Sc. Thesis)

Melike TOPÇU

UNIVERSITY OF UŞAK

GRADUATE EDUCATION INSTITUTE

July 2020

ABSTRACT

In this study, it was aimed to determine the fractional schemes of the middle school students and to examine their use in questions related to algebraic thinking. The study's participants were 12 students from 7th grade students. These students received education from public middle school in the one of Turkey's western city. The study is a case study, the study data were collected through one-on-one interviews and the collected data were analyzed using descriptive analysis. In the study, students were given a two-step interview form. It was revealed how the students used the part-whole, partitive unit fraction, partitive fraction scheme, fraction composition scheme and iterative fraction scheme, then the fractional schemes in algebraic thinking were examined. When the data were analyzed, it was determined that the students had difficulties in the questions related to the cluster model and their multiplicative composition mental schemes were problematic. The students have problem to reflect their experiences on fractions into the algebraic thinking processes. In the light of the findings; It should be focused on the meaning of fraction concept instead of memorizing rules, especially the whole meanings of the fraction in teaching practices.

Science Code :

Key Words : Fraction, Fraction Schemes, Algebraic Thinking, Middle School Students

Page Number : 161 pages

Adviser : Assist. Prof. Dr. Nejla GÜREFE

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenerek araştırma sürecindeki çalışmalarımda değerli görüş ve önerileriyle bana destek olan ve bilgi ve tecrübeleriyle rehberlik edip beni yönlendiren ve tezimi titizlikle inceleyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nejla GÜREFE'ye teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte; ilgi ve destekleriyle her zaman yanımda olan değerli aileme ve veri toplama sürecinde desteklerini esirgemeyen Denizli Sıdıka Çalışkan Ortaokulu müdür yardımcısı Kerim Bulut'a ve öğrencilerine teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	**Açıklama**
MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
NMAP	National Mathematics Advisory Panel
TDK	Türk Dil Kurumu
TTKB	Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı

1. GİRİŞ

Matematik eğitimi ile ilgili araştırmalar incelendiğinde temel kaygının matematiğin doğru bir şekilde öğrenilmesi ve öğretilmesi olduğunu görüyoruz. Bu nedenle araştırmacılar bilginin nasıl öğrenildiği ile ilgili kuramları matematik açısından da ele almıştır. Matematik eğitimini en çok etkileyen kuramcılardan olan Jean Piaget'e (Atun, 2014) göre bilgi bireyden bağımsız değildir ve başkasından da direkt olarak alınamaz. Yani birey yeni bilgiyi mevcut bilgilerinin ve deneyimlerinin üzerine inşa ederek öğrenir (Baki, 2018). Piaget, bireyin yeni bir durumla karşılaşması sonucunda bilişsel dengesinin bozulacağını ve dengenin tekrar özümseme ve düzenleme süreçleri ile sağlanacağını savunur (Olkun ve Uçar, 2014). Yeni bir bilgi ile karşılaşıldığında eğer mevcut bilgiler ve deneyimlerle yapılandırılabilirse özümseme, eğer yeniden düzenlenmesi gerekirse uyarlama gerçekleşir. Piaget bu kavramlara ek olarak özümseme, uyarlama ile denge kurulumunda rol oynayan 'zihinsel düzenek' kavramından bahseder (Zembat, 2016). Piaget'nin 'genelleştirilmiş eylemler' olarak tanımladığı zihinsel düzenek kavramını, Von Glasersfeld (1980) gözlemlenebilir eylemden önce bireyin neler yaptığına odaklanılacak şekilde detaylandırarak; '*durum*', durumla ilgili *'eylem'* ve eylemin '*sonucu*' şeklinde üç bölümden oluşacak biçimde tekrar tanımlamıştır (Steffe 2002). Zihinsel düzenek ve özümseme, uyarlama, denge süreçleriyle öğrenmeyi açıklayan Steffe (Zembat, 2016) ise Piaget'den farklı olarak matematik bilginin yapılandırılması hakkında daha çok bilgi verdiğini düşünerek uyarlamanın özümsemeden daha önemli olduğuna dikkat çekmiştir (Tunç Pekkan, 2016). Bu anlamda da kesirli bilginin yapılandırılması ile ilgili yaptığı çalışmasında öğrencinin kesirli bilgiyi daha önceden var olan sayma düzeneklerinin adaptasyonu ile yapılandırılabileceğine dair bir hipotez oluşturmuştur. Bu hipoteze (Steffe ve Olive, 2010) göre sayı sayma düzenekleri sürekli çokluklarda kullanılarak kesir düzenekleri oluşturulabilir. Steffe'nin ayrık ve sürekli niceliklerde bir ve birim kavramlarının yapılandırılmasındaki paralellik olduğunu düşünmesi bu hipotezin temelini oluştururmuştur (Tunç Pekkan, 2016). Birimlerin tekrarlanabilir birimler olarak düşünüldüğü bu hipotezde bir bütünü ya da kesri elde etmek için birim yinelenir. Kesirlerde tekrarlama bir parçayı tekrar etme yani saymadır (Van de Walle, 2013).Yani kesri, birimin çokluğu belirler (Boyce, Norton 2016). Steffe (2002), Steffe ve Olive (2010) literatüre kazandırdığı kesir düzenekleri; parça bütün kesir zihinsel düzeneği, parçalı birim kesir zihinsel düzeneği, basit parçalı kesir düzeneği, bileşik kesir düzeneği ve çarpımsal bileşim kesir düzeneğidir. Bu çalışmada da öğrencilerin kesir anlayışlarının bu düzeneklere göre incelenmesi amaçlanmıştır.

Kesir kavramı öğrencilerin karşılaştığı ilk matematiksel kavramlardan olup diğer bazı konulara da temel teşkil etmektedir (Haser ve Ubuz, 2002). Aynı zamanda matematik programının en karışık konularından olan kesirlerin (Boulet, 1998; Davis vd., 1993; Alacaci, 2014) öğrenilmesinde çeşitli zorluklar yaşanmaktadır. Kesirlerle ilgili yapılan bazı araştırmalar, öğrencilerin kesri tanımlama, tanımlanmış kesri yazma (Ubuz ve Haser, 2001), eş parçalara ayırma, birim belirleme (Alacaci, 2014) gibi konularda güçlük yaşadığını ortaya koymuştur. Aksu (1997), kesir kavramının anlaşılmasında güçlük yaşanmasının kaynağını kesirlerin yapısından ve kavramsal bilgiden çok işlemsel bilginin ön planda tutulmasına bağlamıştır. Kesirlerin kavranabilmesi için önemli noktalardan biri, kendi içinde ve diğer konularla ilişkilendirilebilmesi için farklı anlamlarının bilinmesi gerekir (Ertuna, 2013). Çeşitli kaynaklarda (Altun, 2005; Van de Walle, 2013; Alacaci 2014) kesirlerin; parça-bütün, ölçme, bölme, işlemci, oran gibi anlamlarına değinilmiştir. En sık kullanılan parça-bütün anlamı (Akbaba Dağ, 2014) bir bütünün eşit parçalara ayrılarak bu parçalardan istenilen kadarının alınmasıdır. Ölçme anlamı, bir uzunluğu belirlenen başka bir uzunluğa göre ölçmede (Van de Walle, 2013), bölme anlamı genellikle paylaşma durumlarında ortaya çıkar. Kesirlerin işlemci anlamı bir doğal sayının kesrini bulmak için kullanılabilir (Van de Walle, 2013). Oran anlamında ise bir bütünün iki parçasının oranı söz konusudur (Alacaci, 2014). Temur'a (2011) göre kesir kavramının gelişebilmesi için gerekli anlamların öğrenilmesi ve kavramlar arasındaki soyut ilişkilerin modeller aracılığıyla somutlaştırılması gerekmektedir. Model kullanımı kesirler ve kesirlerle işlemler ile ilgili kavramsal anlamanın gerçekleştirilmesi ve kolaylaştırmasının yanı sıra işlemlerin matematiksel anlamlarını anlaşılması (Baki 2018), problem çözme becerisinin kazandırılması açısından da önemlidir(Misquitta, 2011; Tirosh, 2000). Kesirlerin öğretiminde farklı öğrenme fırsatları sunan modellere örnek olarak uzunluk, alan ve küme modelleri verilebilir. Uzunluk modelleri sayı doğrusu, çubukları ve şeritleri kapsarken (Van de Walle, 2013) alan modeli geometrik bir şeklin bir bölümünün alanının taranmasını kapsar (Şiap ve Duru, 2004). Küme modelinde ise bir grup nesne bütünü temsil ederken bu nesnelerin bir kısmı kesri temsil etmektedir (Alacaci, 2014). Öğrencilerin bilişsel yapılarını belirlemek için kullanılan bu modeller öğrencilerin eylemlerini açıklayarak öğretim hakkında bilgi verir (McCloskey and Norton, 2009). Bir kavramın öğrenciler tarafından nasıl anlaşıldığının belirlenmesi o kavramla ilgili düşünme biçimlerinin ortaya çıkarılması o kavramın öğretimi açısından önemlidir. Bu açıdan literatür incelendiğinde ise öğrencilerin kesir bilgilerini farklı çerçevelerden değerlendiren çalışmalar olduğu görülmektedir. Örmeci'nin (2012) 7. sınıf öğrencilerin kesirleri kavramsal ve işlemsel anlayışlarını araştırdığı, Kara'nın (2017) 6. sınıf öğrencilerin kesirlerde toplama ve çıkarma konusunda farklı temsilleri kullanma becerilerini değerlendirdiği, Çelebioğlu (2014) öğrencilerin kesir oluşturma süreçlerini RBC+C teorik çerçevesinden, Öksüz'ün (2018) ise kesirleri APOS teorik çerçevesinden ele aldığı görülmüştür. Fakat ülkemizde öğrencilerin kesir anlayışlarını Steffe ve Olive'in (2010) kesir zihinsel düzeneklerini açısından inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Oysa ki bu teori için kritik olan birim kesirlerin ölçü birimi olarak kullanılması işlemi araştırmacılar (Jacobson ve Izsak, 2015; Lee vd., 2011; Son ve Lee, 2016) tarafından kesirlerde kavramsal anlama açısından önemli görülmüştür. Aynı zamanda öğrencilerin kesir bilgilerinin bu teorik çerçeveden incelenmesi öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerinin belirlenebilmesine yani kavramsal yapılarının ortaya çıkmasına imkan sağlayacaktır (Hackenberg, 2006).

Kesirlerin tam anlamıyla kavranabilmesi ilişkili olduğu diğer konuların anlaşılabilmesi açısından da önemlidir. Bu konulardan biri de cebirsel düşünmedir. Cebirsel düşünme, nicel durumları ilişkisel bir şekilde analiz etmede çeşitli temsilleri kullanma yeteneği (Kieran, 1996, s.275), değişkenler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmak için nicel durumları temsil etme kapasitesi (Driscoll, 1999, s.1) şeklinde tanımlanabilmektedir. NCTM'e (2000) göre de cebirsel düşünme sürecinde olan öğrenciler, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel yapı ve durumları farklı şekillerde temsil ve analiz etmeli, nicel ilişkileri temsil etmek ve anlamak için matematiksel modelleri kullanabilmeli, gerçek yaşamda karşılaştıkları farklı durumlardaki değişimleri analiz edebilmelidirler. Alan yazına bakıldığında aritmetik işlemlerle cebirsel düşünmeyi açıklayan araştırmalar incelendiğinde bunların genellikle tam sayıları içeren işlemler olduğu fakat kesirlerle ilişkili çalışmaların (Lamon, 2007; Empson vd., 2011; Lee ve Hackenberg, 2013) daha az olduğu görülmektedir. Bu çalışma ile de öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerine ilişkin bilgilerinin cebirsel düşünme ile ilişkili sorularda kullanma durumlarına da yer verilecektir.

Bu çalışmada ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin kesirlere ilişkin anlayışlarının neler olduğu ve cebirsel düşünmede kesirlerle ilişkili kritik işlemleri ne kadar kullanabildikleri ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu anlamda da çalışmanın alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.1. Araştırmanın Problem Cümlesi

Bu çalışmanın amacı doğrultusunda araştırmanın problem cümlesi *'7. sınıf öğrencilerinin kesir zihinsel düzenekleri ve bu düzenekleri cebirsel düşünmede kullanma durumları nasıldır?'* olarak belirlenmiştir.

1.2. Araştırmanın Alt Problemleri

Çalışmada araştırmanın amacı ve problem durumu doğrultusunda aşağıdaki sorulara cevap aranmıştır.

- 7. sınıf öğrencilerinin parça-bütün zihinsel düzeneğine ilişkin kesir bilgileri nasıldır?
- 7. sınıf öğrencilerinin parçalı birim kesir zihinsel düzeneğine ilişkin kesir bilgileri nasıldır?
- 7. sınıf öğrencilerinin basit parçalı kesir zihinsel düzeneğine ilişkin kesir bilgileri nasıldır?
- 7. sınıf öğrencilerinin çarpımsal bileşim zihinsel düzeneğine ilişkin kesir bilgileri nasıldır?
- 7. sınıf öğrencilerinin bileşik kesir zihinsel düzeneğine ilişkin kesir bilgileri nasıldır?
- 7. sınıf öğrencilerinin kesir bilgilerini cebirsel düşünmede kullanma durumları nasıldır?

1.3.Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada Steffe ve Olive'in (2010) teorik çerçevesinden faydalanılmıştır. Bu çerçeveye göre de çalışmada öğrencilerin uzunluk, alan ve küme modelleri ile temsil edilen durumlarda nasıl yapılandırdıklarını belirleyen kesir bilgileri ve kesir bilgilerini cebirsel düşünmede kullanma durumlarını incelemek amaçlanmıştır.

1.4. Araştırmanın Önemi

Öğrencilerin karşılaştığı ilk soyut konu olan kesirler müfredatımızda geniş bir yere sahiptir. Matematik programının en karmaşık konularından olan kesirler (Alacaci, 2014) birçok konuya da temel teşkil etmektedir. Bu anlamda da öğretimi ayrıca dikkat ve özen isteyen bir konudur. McColesky ve Norton'a (2009) göre kesirlerin öğretiminde, işlemsel bilgiden önce kavramsal anlayışın oluşturulması daha önemlidir. Bu nedenle öğrencilerin kesir kavramını nasıl anlamlandırdıklarının ve kesirle ilgili anlayışlarının, düşünme şekillerinin incelenmesi önemli görülmüştür.

Kesir kavramını geliştirmede ilk hedef bir bütünün kesirsel parçalarını yani eşit büyüklükteki birimlerini bulmaktır (Van De Walle, 2013). Bu bağlamda da kesirlerin parça bütün anlamı yaygın olarak kullanılmaktadır. Parça bütün anlamı kesirlerin öğretimi için gerekli (Charalambous ve Pitta-Pantazi 2005) olsa da kesirleri kavrama, düşünme yolları geliştirebilme ve diğer konularla ilişkilendirebilme bakımından kesirlerin tüm anlamlarının kavranması kritiktir. Bu anlamlardan bir tanesi olan ölçme anlamı, bir uzunluğu belirlenen başka bir uzunluğa göre ölçmeyi ifade eder (Van de Walle, 2013). Lamon'a (2007) göre kesirlerin bütün anlamlarının kavranabilmesi için ölçme anlamının anlaşılması önemlidir. Ayrıca bazı araştırmacılar (Olive ve Çağlayan, 2008; Hackenberg, 2010; Norton ve Wilkins, 2012) öğrencilerin kesirleri ölçülebilir miktarlar olarak algılamasının cebirsel muhakeme yeteneğinin gelişimine katkı sağladığını bulmuşlardır. Bu anlamda da öğrencilerin kesir bilgilerini incelemede, ölçme anlamına paralellik gösterdiği düşünülen (Norton ve Wilkins, 2010) hatta daha açıklayıcı olan (Tunç Pekkan, 2015) Steffe ve Olive (2010) tarafından geliştirilen teorik çerçevenin referans alınması önemli görülmüştür. Bu çalışma ile öğrencilerin kesir kavramını nasıl anlamlandırdıkları tespit edilmeye çalışılmış ve sonuçlarının da kesir öğretimi ile ilgili çalışmalara ışık tutacağı düşünülmüştür.

Bu çalışmada ayrıca öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerine ilişkin kritik işlemleri cebirle ilişkili sorularda nasıl kullandıkları incelenmiştir. Hercovis ve Linchevski'e (1994) göre öğrenciler cebirsel fikirleri mevcut aritmetik bilgilerine göre oluştururlar. NMAP (National Mathematics Advisory Panel) (2008), cebirin doğası gereği, en önemli temel becerinin kesirlerdeki yeterlilik olduğunu ifade etmiştir. Aynı zamanda cebir ve cebirsel düşünme kapsamında yapılan çalışmalarda öğrencilerin bu konularda sıkıntı yaşadığı ortaya konulmuştur. Bu açıdan öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin gelişimine katkı sağlamak açısından cebire ilişkin sorularda aritmetiğin bir kolu olan kesirlerin kullanılma durumlarının incelenmesi önemli görülmüştür.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Araştırmada kullanılan sorulara ilişkin görüşü alınan uzman ve öğretmenlerin objektif ve samimi oldukları varsayılmıştır. Çalışmanın katılımcıları ile birebir görüşmeler yapılmış ve bu yüzden katılımcıların cevaplarının birbirinden etkilenmedikleri, veri toplama araçlarında yer alan sorulara samimi ve içten cevaplar verdikleri varsayılmıştır. Çalışmada kullanılan Steffe ve Olive'in (2010) teorik çerçevesinin öğrencilerin kesir bilgilerini ortaya çıkarmada etkili olduğu ve bu çerçeve kullanılarak hazırlanan soruların da öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerini tespit etmede yeterli olduğu varsayılmıştır. Ayrıca öğrencilerin kesir konusu ve cebir öğrenme alanı ile ilgili gerekli bilgilere sahip oldukları varsayılmıştır.

1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları

Kesirler konusu matematik eğitimi açısından önemli bir konu olup birçok sınıf seviyesinde öğretim programında da yer almaktadır. Ortaokul müfredatında ağırlıklı olarak 5. ve 6. sınıf seviyelerinde yer verilen kesirlerin aksine cebir öğrenme alanına ilişkin konular ise 6. sınıfta başlayıp 7. ve 8. sınıflarda ise daha yoğundur. Bu anlamda çalışmada öğrencilerin hem kesirler hem de cebire ilişkin yeterli bilgi deneyimine sahip olması gerekli görülmüş bu açıdan da çalışma 7. sınıf öğrencileri ile sınırlı kalmıştır. Ayrıca çalışmanın her başarı seviyesinden öğrenci ile gerçekleştirilmesi önemsenmiş fakat başarı düzeyi çok iyi ve düşük olan öğrencilerin gönüllük oranlarının diğer öğrencilere göre daha düşük olması nedeniyle çalışmada her başarı seviyesinden eşit sayıda öğrenci ile çalışılamamıştır.

1.7. Araştırma İle İlgili Sınırlamalar

Araştırma 2018-2019 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde Türkiye'nin batısındaki bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 7. sınıf öğrencileri ile sınırlandırılmıştır. Araştırma nitel bir çalışma olduğu için katılımcı sayısı 7. sınıflardan alınan sadece on iki öğrenci ile sınırlandırılmıştır. Ayrıca araştırmada kullanılan çerçevenin analizi yapılırken kapsamlı bir değerlendirme yapılmış ve bu yüzden araştırmada kullanılan soru sayısı 30 ile sınırlandırılmıştır. Soruların oluşturulma süreci kapsam geçerliğinin belirlenmesi, verilerin analizi ise kodlama güvenirliğinin sağlanması ile sınırlandırılmıştır.

1.8. Tanımlar

Kesir: a ve b doğal sayı ve $b \neq 0$ olmak üzere a/b şeklindeki ifadedir. Buradaki a/b kesri de b eş değer parçanın a'sını temsil etmektedir (Musser, Peterson ve Burgere, 2014).

Kesir Zihinsel Düzeneği: Öğrencilerin kesirler üzerindeki eylemlerini ve ifadelerini açıklamak için öğrencilere atfedilen yapılardır (Eliustaoğlu, 2016).

Parça Bütün Zihinsel Düzeneği: Kesirler, parçanın bütününde ki oranını ifade eder. Sürekli niceliklerin ayrık büyüklükler gibi alınması durumudur (Steffe ve Olive, 2010).

Parçalı Birim Kesir Zihinsel Düzeneği: Bir parçanın bir bütününün ne kadarı olduğunu parça ile bütün arasındaki karşılaştırmaya dayanır. Dolayısıyla, parçalı birim kesir zihinsel düzeneğinin amacı, kesirli bütünün bir birim kesirli kısmını işaretlemek, parçayı ayırmak ve işaretlenen parçanın bütün ile karşılaştırmasını içerir (Steffe ve Olive, 2010).

Basit Parçalı Kesir Düzeneği: Parçalama, ayırma ve tekrarlama işlemlerinin tamamını içeren kesir zihinsel düzeneğidir (Steffe ve Olive, 2010).

Tersine İşleyen Parçalı Basit Kesir Düzeneği: Durum ve sonuç arasındaki ilişkinin tersine işlediği zihinsel düzenektir (Steffe ve Olive, 2010). Zihinsel düzeneğin oluşturulabilmesi için ek olarak yarma operasyonu kullanılmalıdır.

Çarpımsal Bileşim Zihinsel Düzeneği: Kesirlerin çarpımını içeren bu düzenek tersine işleyen basit kesir düzeneğinden farklı olarak dağıtmalı bölme operasyonunu da kapsar (Steffe ve Olive, 2010).

Bileşik Kesir Zihinsel Düzeneği: Bu düzenek birim kesri referans alarak bileşik kesir oluşturmayı içerir, yani herhangi bir kesir birim kesrin bir katıdır (Steffe ve Olive, 2010).

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde kesirler ve anlamları, kesir zihinsel düzenekleri, kesir ve cebirsel düşünce arasındaki ilişki ve bu konularda yapılmış ilgili çalışmalara yer verilmiştir.

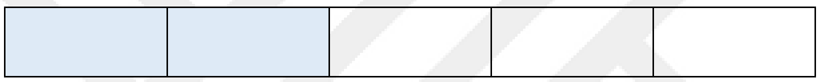
2.1. KESİR KAVRAMI VE ANLAMLARI

Çocukların erken dönemlerde geliştirdiği en temel matematiksel yapılardan biri sayılardır ve buradaki temel aktivite de sayma işlemidir (Olive, 2001). Bütünlerin sayıldığı doğal sayılardan farklı olarak kesirlerde ise parçalar sayılır (Altun, 2014). Norton ve Wilkins'e (2012) göre kesirleri öğrenmek sayılar ve miktarlar arasındaki ilişkiyi anlamayı içerir. Zaten bireyin yeni bilgiyi var olan eski bilgilerinin üzerine inşa ettiği (Skemp, 1971) göz önünde bulundurulduğunda da öğrencilerin kesirleri öğrenirken var olan sayı bilgilerini kullanmaları kaçınılmazdır. Kesirler doğal sayılardan hemen sonra öğretilen bir konu olduğu için öğrenciler kesirleri anlamlandırmak için doğal sayı bilgilerine başvuracaklardır. Doğal sayı bilgisinin kesirlere aktarımının kesirleri anlamaya katkı sağlayacağını düşünenlerin yanı sıra olumsuz etkilediğini düşünenler de mevcuttur (Haser ve Ubuz, 2002 Alacacı, 2014; Van De Walle, 2013). Bu araştırmacılar yaptıkları çalışmalarda öğrencilerin kesirlere doğal sayı gibi davranıldığı için pay ve paydayı ayrı sayılar gibi düşündüklerini, çarpma işlemi yapıldığında sonucun her zaman büyümesi gerektiği düşündüklerini tespit etmişlerdir. Bunlar gibi olumsuz aktarımın olduğu düşünülen durumların temelinde kesirlerle ilgili yeterli kavramsal alt yapı oluşturulmadan işlemsel bilgiye geçilmesi buna bağlı olarak da öğrencilerin doğal sayılarla ilgili işlemleri genelleyerek kesirlere aktarması olduğu görülmektedir (Bezuk ve Biek, 1993). Bu bağlamda kesir kavramının ne ifade ettiğini anlamanın, işlem yapmaktan daha değerli olduğu açıktır (McColesky ve Norton, 2009).

Kesir, a ve b doğal sayı ve b ≠ 0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklindeki ifadedir. Buradaki $\frac{a}{b}$ kesri de b eş değer parçanın a'sını temsil etmektedir (Musser, Peterson ve Burgere, 2014). Kesir sembolik olarak bu şekilde ifade edilse de Kieren (1976), kesir kavramının farklı anlamlara sahip olduğunu ve kesir kavramının anlaşılmasının ancak bu farklı anlamların anlaşılması ile mümkün olabileceğini iddia etmiştir. Kesirler hakkında düşünme yolları geliştirme açısından da bu anlamları öğrenmek önemli görülmüştür (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992). Kesirlerin parça-bütün, ölçme, bölme, işlemci, oran gibi anlamları mevcuttur (Van de Walle, 2013; Alacaci, 2014). Öğrencilerin bu kesir anlamlarını tam olarak kavrayamamaları diğer konulara, örneğin rasyonel sayılar gibi, geçişte onların problemler yaşamalarına sebep olabilmektedir (Lamon, 2007). Hatfield, Edwards, Bitter ve Morrow'un (2008) kesirlerin ilk olarak parça-bütün bakış açısıyla ele alınması gerektiği iddiasından hareketle diğer anlamları ile birlikte bütün anlamlar aşağıda ele alınmıştır:

Parça- bütün anlamı:

Bir bütünün fiziki olarak ya da zihinden parçalara ayrılması işlemlerini içeren anlama denir (Sowder, 1995). "$\frac{a}{b}$" ifadesinde b eşit parçalardan oluşan bütünü, a ise bütünün bir kısmını ifade eder. Örneğin, Şekil 2.1'de görüldüğü gibi $\frac{2}{5}$ kesri bütünün 5 eşit parça olduğu durumda bütünden alınan 2 eş parçayı temsil etmektedir.

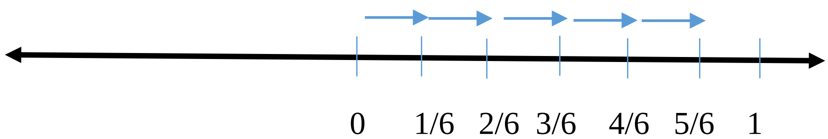


Şekil 2. 1. Kesrin parça-bütün anlamı

Genellikle bir bütünün eş parçalara ayrılıp bu parçaların taranması olarak düşünülen parça bütün anlamı bir grup insanın bir bölümü ya da uzunluğun bir parçası gibi daha kapsamlı da düşünülebilir (Van de Walle, 2013). Kesir kavramının anlaşılması için en kolay anlam olarak düşünülen parça bütün anlamı (Alacacı, 2014) denk kesirlerin anlaşılması ve kesir büyüklüklerinin karşılaştırılması açısından da önemli görülmektedir (Yanık, 2013). Kesir öğretiminde sıklıkla kullanılan parça bütün yorumu kesirlerle çok özdeşleşmiştir hatta kesirler parça ile bütün arasındaki ilişki olarak tanımlanabilmektedir (Altun, 2014).

Ölçü Anlamı:

Ölçü anlamı "$\frac{a}{b}$" ifadesinin a tane $\frac{1}{b}$' birimlik ölçüyü temsil ettiği anlayışına dayanmaktadır (Yanık, 2013). Bu anlam bir ölçü veya uzunluk belirleyerek bir başka uzunluğu ölçmeyi içerir. Örneğin, 5/6 kesri 1/6 kesri seçilmiş uzunluk olarak belirlenerek oluşturulabilir. Yani 5/6, 5 tane 1/6'yı temsil etmektedir (Şekil 2.2.).

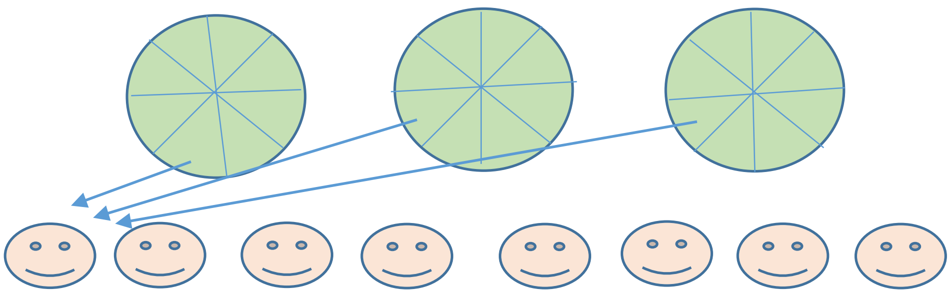


Şekil 2. 2. Kesrin ölçü anlamı

Parça bütün anlamındaki gibi "*kaç tane parça* ?" sorusundan ziyade bu anlamda "*ne kadar?"* sorusuna odaklanılır (Van de Walle, 2013). Tam sayılara benzetilen ölçü yorumunda birimler yan yana eklenerek bütünler oluşturur (Alacaci, 2014). Lamon'a (2007) göre ölçü anlamı, kesrin büyüklüğünü gösteren bir sayı olarak da algılanabilir. Bu anlamda kesir tam sayılar ile temsil edilemeyen uzunluk, alan, ağırlık veya hacim gibi ölçüm miktarlarını temsil etmede kullanılır (Lamon, 1999). Olive'e (1999) göre kesirlerde bölme işleminde özellikle kesrin ölçü anlamının kullanılması işlemin anlamlandırılması açısından önemlidir. Örneğin, 3/4 kesrinin kaç tane 1/8 den oluştuğunu belirlemede ölçü anlamından faydalanılır. 3/4 kesri 3 tane 1/4 demektir. Her bir 1/4 kesri de 2 tane 1/8 kesrinden oluşmaktadır. Dolayısıyla 1 tane 1/4 kesrinde 2 tane 1/8 vardır ve 3 tane ¼ kesrinin içerisinde de 6 tane 1/8 kesrinin olduğu ifade edilebilir. O halde 3/4 kesri 6 tane 1/8 den oluşmaktadır. a/b kesrinin parça bütün anlamında a sayısının yer aldığı paydaki sayı b sayısının yer aldığı paydadan küçük ya da paydaya eşit olmalıdır (Charalambous ve Pitta-Pantazi, 2007).

Bölüm Anlamı:

$\frac{a}{b}$ ifadesi bir bölme işleminin sonucunu göstermekte, yani a sayısının b'ye bölünmesi ile elde edilen sayısal değeri ifade etmektedir (Kieren, 1993). Bölüm anlamı daha çok paylaşma etkinlikleri ile ilişkilendirilmektedir. Bir çokluğun belirli sayıda kişiye eş olarak paylaştırılması ile kişi başına düşen miktar bölüm anlamını açıklamaktadır (Yanık, 2013). Örneğin, 3 pastanın 8 kişi arasında paylaştırılması durumunda bir kişiye ne kadar pastanın düşeceğinin belirlenmesidir Buradaki pay (3 sayısı) (bir bölme işlemindeki bölen) pasta sayısını, payda (8 sayısı) (aynı bölme işlemindeki bölünen) paylaşım yapılan kişi sayısını, sonuç olan 3/8 de (aynı bölme işlemindeki bölüm) kişi başına düşen pasta sayısını belirtmektedir (Şekil 2.3)



Şekil 2. 3. Kesrin bölüm anlamı

Şekil 2.3'e göre her bir öğrenci 1/8 lik parça alarak toplamında her bir kişi 3/8 lik parça almaktadır.

Oran Anlamı:

Oran yorumu miktarlar arasındaki ilişkiyi içerir (Lamon, 2007). İki ölçümü karşılaştırmak için kullanılır. Bu bölümde "$\frac{a}{b}$" ifadesinde a ve b'nin oranı söz konusudur. Burada a parça iken b parçayı ifade edebileceği gibi aynı zamanda bütünü de ifade edebilir. Dolayısıyla oran anlamında parça-parça ve parça bütün ilişkisi söz konusu olabilmektedir (Van de Walle, 2013). Örneğin bir sınıftaki gözlüklü öğrencilerin gözlüksüz öğrencilere oranı veya gözlüklü öğrencilerin tüm sınıfa oranı ifadeleri bu anlam kapsamındadır. Charalambous ve Pitta-Pintazi'ye (2005) göre kesrin oran anlamının denk kesirlerin öğretimi için uygun olacağını belirtmiştir.

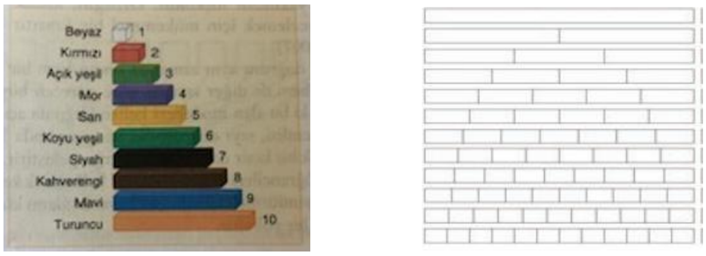
İşlemci Anlamı:

Kesrin bu anlamı Toluk'a (2002) göre çarpma işleminin kuralını, Lamon'a (1999) göre de belirli bir miktarın büyütülmesi ve küçültülmesini (Lamon, 1999) belirtir. Örneğin, bir sayının a/b oranında büyütülmesi ve küçültülmesi durumu söz konusudur. Marshall'a (1993) göre kesir bir kümeye, nesneye ya da bir sayıya etki eden bir fonksiyon olup dönüşümü ifade etmektedir.

2.1.1 KESİR MODELLERİ

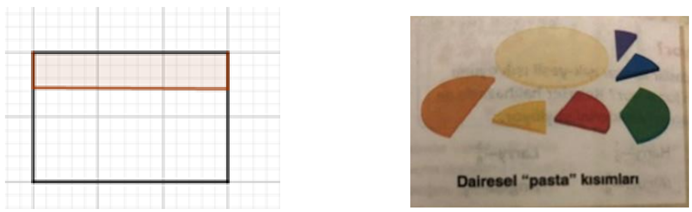
Matematikte kullanılan model kavramını Olkun ve Toptaş (2007) "*matematiksel kavram ya da ilişkileri göstermede kullanılan gerçek nesne, çizim ya da semboller*" şeklinde tanımlanmışlardır. Modeller kesirlerin öğretiminde doğru şekilde kullanıldığında öğrencilere farklı öğrenme fırsatları sunmanın (Van de Walle, 2013) yanı sıra öğrencilerin kesirlere ilişkin işlemleri de anlamlandırmasına katkı sağlayacaktır. Literatür incelendiğinde ise kesirlerle ilgili modellerin araştırmacılar (Altun, 2005; Pesen, 2003; Olkun ve Toluk Uçar, 2007;Van de Walle, 2013) tarafından farklı şekillerde ele alındığı görülmüştür. Bunlar uzunluk, alan, küme, sayı doğrusu, çizgi ve hacim modelleridir. Bu çalışmada ise Van de Walle (2013) tanımladığı şekliye modellerin kullanımına yer verilmiştir. Bunlar ise şu şekildedir:

Uzunluk Modeli: Uzunluk ve ölçümlerin karşılaştırıldığı (Van de Walle, 2013), bu model kapsamında kesir çubukları (Cuisenaire çubukları), sayı doğrusu, kesir şeritleri, kâğıt şeritler, ve ip kullanılmaktadır. Üst düzey ölçme modeli olarak kabul edilen sayı doğrusu modeli, sayı doğrusunda her iki ucun sürekli devam etmesi yani sınırlı olmaması nedeniyle (Ertuna, 2013) farklı bir model olarak değerlendirildiği gibi uzunluk modeli kapsamında da ele alınabilmektedir. Bu kategoride değerlendirilmesi modelin sayılara uzaklığı sayının göreceli büyüklüğü hakkında bilgi vermesiyle ilişkilendirilebilir (Olkun ve Toluk Uçar, 2007). Kesir çubukları ise farklı renklerden 1 den 10'a kadar uzunluktaki parçalara sahiptir. Bu modele ilişkin örneklere Şekil 2.4'de yer verilmiştir.



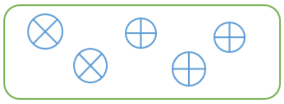
Şekil 2.4. Kesirler için uzunluk modelleri (Van de Walle, 2013)

Bölge/Alan Modeli: Bir alanın ya da bölgenin taranmasını esas alır. Benzer şekillerde gösterime sahip bu modellerden bölge modelinde şeklin eş parçalara ayrılması ön plandayken alan modelinde ise şeklin alanının parçalanması dikkate alınır (Alacaci, 2014). Kesir öğretiminde sıklıkla kullanılan bu modeller diğer modellere göre anlaşılması daha kolay olarak düşünülse de (Alacaci, 2014) öğrencilerin alan bilgisinin kullanılması gerektiğinden bazı öğrenciler için anlaşılması zor olabilmektedir (Armstrong ve Larson, 1995). Bu model kapsamında en sık kullanılan dairesel kesir modelleri (Van de Walle, 2013) parçanın bütüne göre büyüklüğünün algılanmasında avantaj sağlasa da (Cramer, Wyberg ve Leavitt, 2008) öğrencilerin daire şeklini eş parçalara ayırma ile ilgili yaşadıkları sıkıntılar kesir kavramının anlaşılmasında problem oluşturabilmektedir. Bu modelde özellikle düzgün çokgen modellerin kullanımı önemsenmektedir (Kieren, 1998). Bu modele ilişkin örneklere Şekil 2.5'de yer verilmiştir.



Şekil 2.5. Kesirler için alan modelleri (Van de Walle, 2013)

Küme Modeli: Bir grup nesne bütünü temsil ederken bu nesnelerin bir kısmı kesri temsil etmektedir. Bütünün alt kümeleri kesirsel parçaları oluşturur. Bu model öğrencilerin bölme becerileri açısından önemli olduğu gibi (Ertuna, 2013) oran kavramıyla da ilişkilidir (Van de Walle, 2013). Kesir öğretiminde ihmal edilmemesi gereken bu model (Baykul, 2005: s. 281) öğrencilere diğer modellere göre daha zor gelebilmektedir. Bu modele ilişkin örneklere Şekil 2.6'da yer verilmiştir.



Şekil 2.6. Kesirler için küme modeli

Kesirlerin kavranmasında önemli bir yere sahip (Temur, 2011) olan modellerin, kesir şemalarının gelişimine katkı sağlaması da (Ertuna, 2013) göz önünde bulundurulduğunda öğrencilerin kesrin farklı modellerinin nasıl çalıştıklarını incelemek açısından gerekli görülmüştür.

Bu çalışma kapsamında da ilgili kesir soruları alan, uzunluk ve küme modelleriyle ilişkili olarak verilmiş ve ona göre analiz edilmiştir.

2.2. KESİR ZİHİNSEL DÜZENEKLERİ

Piaget (1970, 1972) zihinsel düzenekleri tekrarlanabilir, pekiştirilebilir ve değişen durumlara uygulanabilir bir dizi eylemin genel yapısı olarak tanımlar (Hunting, Davis ve Pearn, 1996, s. 356). Von Glasersfeld (1995) ise bu tanımı detaylandırarak, üç bileşenden oluşan yeni bir yapı oluşturur (Zembat, 2016) ve bu üç bileşeni de düzeneği etkinleştiren *tanınan durum*, durumla ilişkili ortaya çıkan *eylem* ve eylemden beklenen *sonuç* olarak ifade eder (Norton ve Wilkins, 2009). Steffe ise Von Glasersfeld'in şema kavramının yeniden biçimlendirilmesinde gözlemlenebilir eylemden önce bireyin yaptıkları ile ilgilenmesinden ve zihinsel eylemleri kapsamasından dolayı bu tanımı matematik eğitimi ile daha ilişkili görür (Tunç Pekkan, 2016). Buraya kadar bahsedilen şema kavramı "*scheme*" kelimesinden tercüme edilmiş hali olup bazı çalışmalarda şema olarak kullanılsa da Zembat'a (2016) göre bu kelimeyi şema yerine zihinsel düzenek olarak çevirmek daha doğru bulunmuştur. Steffe ve Olive'in (2010) çalışmalarında zihinsel eylemleri önemsemeleri nedeniyle de bu çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde zihinsel düzenek kavramı kullanılacaktır.

Zihinsel düzenekler öğrencilerin eylemlerini ve sözel ifadelerini açıklayan varsayımsal çalışma şekilleri olarak kabul edilirler (Norton ve McCloskey, 2008; Norton ve Wilkins, 2009; Steffe, 2002; Steffe ve Olive, 2010). Bu açıdan da kesir zihinsel düzenekleri öğrencilerin kesirler üzerindeki eylemlerini ve ifadelerini açıklamak için öğrencilere atfedilen yapılar olarak düşünülebilir (Eliustaoğlu, 2016). Steffe ve Olive (2010) çalışmalarında bireyin kesir zihinsel düzeneklerinin sayma zihinsel düzeneklerinin adaptasyonu ile oluşacağına ilişkin yeniden yapılanma hipotezine yer vermiştir. Bu hipotez sayılara ilişkin bilgilerin yeniden organize edilmesi ile kesirli bilginin oluşacağı fikrine dayanır.

Bu açıdan da Steffe'nin ayrık ve sürekli niceliklerde bir ve birim kavramlarının yapılandırılmasında paralellik olduğunu düşünerek kesirlerin yapılandırılmasına ilişkin çalışmalarıyla literatüre bir çok kesir zihinsel düzeneği kazandırmıştır (Tunç Pekkan, 2016).

Bu çalışmada ise Steffe ve Olive'in (2010) öğrencilerin zihinsel işlemler açısından kesirlere ilişkin deneyimlerini yansıtan kesir zihinsel düzeneklerinden (Olive, 1999; Steffe, 2001; Steffe 2002; Hackenberg, 2007; Norton, 2008) parça bütün kesir zihinsel düzeneği, parçalı birim kesir düzeneği, basit parçalı kesir düzeneği, bileşik kesir zihinsel düzeneği ve çarpımsal bileşim kesir düzeneğine yer verilecektir. Bu kesir düzeneklerin tanıtmadan önce bu düzenekler çerçevesinde kesirli bilgi için kritik görünen bazı işlemleri (Hackenberg, 2013) tanıtmak gerekli görülmüştür. Bu işlemler ise şu şekildedir:

Parçalama: Sürekli veya ayrık bir bütünün eşit parçalara bölünmesini içerir (Lamon, 1996; Steffe, 1991). Araştırmacılar (Kieren, 1980; Lamon, 1996; Mack, 2001; Pothier ve Sawada, 1983; Steffe ve Olive, 2010) parçalamayı kesirler için en kritik işlem olarak belirtmişlerdir. Bütün parçalanmadan önce tek bir birim iken parçalamadan sonra eşit parçalar içeren birleşmiş birim, bütün olur (Steffe ve Olive, 2010). Bir pastanın 5 arkadaş tarafından eşit şekilde paylaşılması parçalama işlemi olarak düşünülebilir. Parçalama işlemi ile n parçaya ayrılan bir bütünde bir parçanın "$\frac{1}{n}$" olduğu genellikle bilinse de bu parçaların "$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n}{n}$" şeklinde birleşimi ile bütünün tekrar oluşabileceği her zaman fark edilemeyebilir (Wilkins, Norton ve Boyce, 2013).

Ayırma: Bütünü bozmadan, bütünden bir parçanın kopyasını çıkarmayı içerir (Steffe ve Olive, 2010). Ayırma işlemini gerçekleştirebilen öğrenciler 5 eş parçaya ayrılmış pastanın 2 diliminin nasıl göründüğünü hayal edebilir (Eliustaoğlu, 2016). Bu işlem parça bütün ilişkisinin dayandığı temel işlemdir (Steffe ve Olive 1996, s. 118). Ayırma işlemi bazı araştırmacılar (Tunç Pekkan, 2016) tarafından öğrencilerin fiziksel olarak yapması beklenen bir işlem olarak kabul görürken bazı araştırmacılar (Norton ve Wilkins, 2009, Hackenberg, 2007) tarafından da zihinsel olarak yapılabilecek bir işlem olarak ele alınmıştır. Fiziksel olarak bu işlemin kullanıldığı çalışmalarda genellikle öğrencilerin çeşitli bilgisayar programlarından faydalanarak bu işlemi fiziksel olarak gerçekleştirdiği görülmüştür. Lee (2012) de krtitik işlemleri içselleştirilmiş eylemler olarak tanımlamış yani bu işlemleri fiziksel olarak gerçekleştirmeden zihinsel olarak da gerçekleştirerek kullanabileceğini belirtmiştir. Bu çalışmada ise uygulama yapılacak öğrencilerin bu işleme ilişkin hazır bulunuşlukları da göz önünde bulundurularak öğrencilerin bu işlemi zihinsel olarak gerçekleştirilmesi ayırma işlemi olarak değerlendirilecektir.

Tekrarlama: Daha büyük bir miktar elde etmek için bir birimi veya bir birimin bir kısmını tekrar etmeyi ifade eder (Steffe ve Olive, 2010). Örneğin 5'te 3 kesrinin elde edilebilmesi için 5'te 1 kesrinin üç kere yinelenmesi gerekir. Tekrarlama yani parçaları sayma işlemi pay ve paydanın anlaşılması açısından da önemli görülmektedir (Van de Walle, 2013). Öğrenciler yineleme işlemini yapan orijinal bütünün aynısını ürettiğinin farkındadırlar (Norton ve McCloskey, 2008). Parçadan bütünün elde edilmesi için parçanın n kez yinelenmesi genellikle öğrenciler tarafından kullanılabilse de bileşik kesirlere ilişkin ((n + 1) / n) yinelemeler her zaman kullanılamayabilmektedir (Hackenberg, 2007; Olive ve Steffe, 2001; Steffe ve Olive, 2010; Tzur, 1999).

Yarma: Bu işlem parçalama ve tekrarlama işlemlerinin birleşimi olarak tanımlanmaktadır (Steffe, 2004). Bölme işlemi ile paralellik gösteren bu işlemin uygulamasında çarpımsal olarak birimlerin birbirleriyle olan ilişkileri dikkate alınır (Tunç Pekkan, 2016). Yani bu işlem, örneğin bir bütünün 4'te 3'ü nü temsilen bir şekil verildiğinde bütünü elde etmek için verilen şeklin önce 3 eş parçaya bölünerek elde edilen bir parçanın 4 kez yinelenerek bütünün elde edilmesiyle ilişkilidir.

Steffe (2002), Steffe ve Olive (2010) tarafından geliştirilen kesirlere ilişkin zihinsel düzenekler ise aşağıda ele alınmıştır.

Parça Bütün Zihinsel Düzeneği

Parça bütün zihinsel düzeneğinde kesirler parçanın bütünündeki oranını ifade eder. Yani 3/4 kesri öğrenci için 4 parçadan 3'ü anlamını taşır. Bu düzenekte birim kesirler tekrarlanabilir, birim kesir olarak inşa edilemez (Steffe, 2003, s. 242). Örneğin öğrenciden bir çubuğun 4'te 1'inin bulunması istendiğinde öğrenci verilen çubuğu 4 parçaya bölerek bir parçasını tarar. Fakat kendiliğinden taradığı bir parçayı birim kesir olarak düşünüp, bu parçanın tam 1/4 olduğuna emin olmak için tekrarlayarak bütünle kıyaslama işlemini yapamaz. Bu düzenekte bu işlem ancak öğretmenin yönlendirmesiyle yapılır. Çocukların sürekli nicelikleri ayrık büyüklükler gibi aldığı (Steffe ve Olive, 2010) bu düzenek kesirleri kavramsallaştırmaya imkan sağlasa da bileşik kesri ifade etmek için yetersiz kalacaktır. Çünkü bileşik kesirler bir bütünden daha fazla olduğu için bu düzenekte anlamlandırılamayacaktır (Norton ve Wilkins, 2009).

Parçalı Birim Kesir Zihinsel Düzeneği

Bir parçanın bir bütününün ne kadarı olduğu parça ile bütün arasındaki karşılaştırmaya dayanır. Dolayısıyla, parçalı birim kesir zihinsel düzeneğinin amacı, kesirli bütünün bir birim kesirli kısmını işaretlemek, parçayı ayırmak ve işaretlenen parçanın bütün ile karşılaştırılmasını içerir (Steffe ve Olive 2010). Steffe'nin (2010) ilk gerçek kesir zihinsel düzeneği olarak tanımladığı bu düzenek '*tekrarlama*' operasyonunu içermesi nedeniyle parça bütün düzeneğinden farklılaşır (Boyce ve Norton, 2016). Bu düzeneğe sahip öğrenci bir bütünü 5 birimden oluşan bileşik birim olarak algılayabilir ve 1/5 birim kesrinin 5 kere tekrar edilmesiyle aynı bütünün elde edileceğinin farkına varabilir. Bu düzeneği yapılandıran öğrenciler birim kesirden bütün oluşturabildikleri gibi bütünden de birim kesir oluşturabilirler. Örneğin verilen bir uzunluk diğerinin 5 katı ise verilmeyen diğer uzunluk bulunabilir (Tunç Pekkan, 2016).

Basit Parçalı Kesir Düzeneği

Parçalama, ayırma ve tekrarlama işlemlerinin tamamını içeren kesir zihinsel düzeneğidir (Steffe ve Olive 2010). Parçalı birim kesir zihinsel düzeneğinin genelleştirilmesiyle oluşan bu zihinsel düzenekte öğrenci, 4/7 kesrinin elde edilebilmesi için 1/7'lik birim kesrin 4 kez tekrarlanması gerektiğinin farkındadır (Norton ve Wilkins, 2010). Bu düzenek birim kesirlerin hem pay kadar hem de payda kadar yinelenmesini içerdiği için iki düzeyde birim koordinasyonuna sahiptir (Hackenberg, 2007; Steffe, 2002). Yani bu düzeneğe sahip bir öğrenci 2/5 kesrini elde ederken birim kesrin 2 kez yinelenmesi ile istenilen kesri, 5 kez yinelenmesi ile bütünü elde edebileceğinin farkındadır. Bunun dışında tersine işlem gerektiren; parçası verilen bir bütünden hareketle kendisini elde etme durumu öğrenciler için anlaşılması güç bir durumdur (Tunç Pekkan, 2016). Örneğin, 7 eş parçaya ayrılmış bir bütünün 3 parçası verilerek bu bütünün kendisinin çizilmesi istendiğinde öğrencilerin bu durumda basit kesirden hareketle bir bütün oluşturmak için tersine işleyen kesir düzeneği kullanmaları gerekir (Boyce ve Norton 2016).

Tersine İşleyen Parçalı Basit Kesir Düzeneği

Durum ve sonuç arasındaki ilişkinin tersine işlediği düzenektir (Steffe ve Olive 2010). Düzeneğin oluşturulabilmesi için ek olarak yarma operasyonu kullanılmalıdır Bu düzenekte genel anlamıyla öğrenciler, m/n şeklinde verilen kesri önce m eşit parçaya böler ve sonrasında bu parçalardan birini n kez yineleyerek bütünü oluşturur (Tzur, 2004). Örneğin 5 kişi tarafından paylaşılan bir pastanın 3 kişiye düşen kısmı verilerek tamamı istendiğinde öğrencinin verilen şekli önce 3'e bölerek bir parçayı elde etmesi sonrasında da bu parçanın yinelenmesi ile bütünü elde edebilmesi bu düzenek ile ilişkilendirilir. Bölme işlemine dayanan ilk düzenek olan

(Hackenberg, 2007) bu düzenekte tersine dönüşüm için ek operasyon gerekir (Hackenberg, 2007; Steffe 2010). "*Yarma (splitting)*" olarak adlandırılan bu operasyonu Steffe (2004) bölme ve yineleme işlemlerinin birleşimi olarak tanımlamıştır. Bu operasyonda birimlerin çarpımsal olarak ilişkileri ön plandadır (Tunç Pekkan, 2016).

Çarpımsal Bileşim Zihinsel Düzeneği

Kesirlerin çarpımını içeren bu düzenek tersine işleyen basit kesir düzeneğinden farklı olarak dağıtmalı bölme operasyonunu da kapsar (Steffe ve Olive, 2010). Bu düzenek, örneğin bir bütünün 1/4'in 1/3'ini belirlemek için kullanılan işlem ve kavramlardan oluşur. Bu anlamda dağıtmalı bölme işleminde her bir parçanın 4'te 1'inin 3 kere alınması durumu vardır. Yani 4 pastanın 3 kişi arasında paylaşılması probleminde her pastanın 3'e bölünerek her pastadan 1 tane olmak üzerek 4 parçayı almayı içerir. Ayrıca birim kesirlerin çarpımında kullanılan (Tunç Pekkan, 2016) tekrarlı bölme işleminde 1/4 üzerinden işlem yapılarak 1/3'lük kısım elde edilmeye çalışılır yani ilk olarak 4'e bölünmüş bütünün her parçası 3'e bölünerek 1/12 elde edilir.

Bileşik Kesir Zihinsel Düzeneği

Bu düzenek birim kesri referans alarak bileşik kesir oluşturmayı içerir, yani herhangi bir kesir birim kesrin bir katıdır (Steffe ve Olive, 2010). Bileşik kesir bilgisinin oluşumuyla ilgili olan bu düzenek birim kesri referans alarak bileşik kesir oluşturmayı içerir (Steffe, 2002). Bu düzeneğin inşa edilebilmesi için diğer düzeneklerdeki işlemlere ek olarak üç seviyede birimin kullanılması gerekir. Örneğin 4/3 kesri için; birim 1/3 olarak belirlenebilmeli, bütün yani 3/3=3x1/3 olarak, 4/3'de 4x1/3 olarak oluşturulabilmelidir. Bu düzeneğe sahip öğrenciler herhangi bir kesri birim kesrin bir katı olarak görürler (Steffe ve Olive, 2010) ve bileşik kesir ile bütün arasındaki ilişkinin farkında olurlar (Hackenberg, 2013).

2.3 CEBİRSEL DÜŞÜNME

Cebirsel düşünme denildiğinde akla gelen ilk kavram cebir olsa da cebirsel düşünme kavramı cebirden daha fazlasını kapsar (Akkan, 2016). Öğrencilerin küçük yaşlarda karşılaştığı cebirsel düşünme matematiğin geneline hakim olan ve günlük hayatta matematik kullanımını destekleyen bir kavramdır (Van de Walle, 2013). Literatürde bu kavrama ilişkin farklı tanımlar yer almaktadır. Cebirsel düşünme Driscoll (1999) tarafından "*değişkenler arasındaki ilişkiyi, nicel durumlarla açıklama yeteneği*" olarak tanımlarken, Kieran (2004) tarafından "*niceliksel durumları sembol kullanarak ilişkisel analiz etme şekli*" olarak tanımlamıştır. Van de Walle, Karp ve Bay William (2013) ise cebirsel düşünmeyi, sayı ve işlemlerle genelleme yapıp bunları uygun sembollerle ifade etme, örüntü ve fonksiyon kavramlarını inceleme olarak açıklamışlardır. Genel anlamıyla cebirsel düşünme niceliksel ilişkileri kullanma, sembolleri kullanma, genelleme yapma, ters işlem yapma gibi aritmetik ve fonksiyonel düşünme ile ilgili birçok beceriyi kapsar (Akkan, 2016).

MEB (2018) öğretim programında matematiksel düşünmenin bir alt boyutu olarak kabul edilen cebirsel düşünme, araştırmacılar tarafından aritmetiksel düşünme ile ilişkilendirilmektedir. İki düşünme becerisinin iç içe geçtiğinin savunanların (Warren ve Copper, 2009) aksine iki düşünme biçiminin farklı olduğunu savunan Swafford ve Langrall (2000) cebirsel düşünmenin bilinen niceliklerle işlem yapılan aritmetik muhakemenin aksine nicelik biliniyormuş gibi bilinmeyenlerle işlem yapabilme becerisi olduğunu ifade etmişlerdir. Benzer şekilde Radford (2006) da aritmetik düşünmenin sayısal belirliliği cebirsel düşünmenin ise sayısal belirsizliği içerdiğini ifade etmiştir. Ünlü'ye (2019) göre ise öğrenciler küçük yaşlarda aritmetik ile öğrendikleri deneyimleri cebire geçişte kullanacakları için aritmetiksel düşünme cebirsel düşünmenin ön koşulu olarak ele alınabilir. Fakat aritmetiksel düşünmeden cebirsel düşünmeye geçiş kendiliğinden gelişen bir süreç değildir (Akkan, Baki ve Çakıroğlu 2011). Boulton vd. (2000) aritmetikten cebire geçişte önemli noktalardan birinin aritmetikte bilgi ve becerilerin anlaşılmış olması gerektiğini vurgulamışlardır. Fakat öğrenciler aritmetikte çok iyi olduğu halde cebire geçişte yine zorlanabilmektedirler. Bu açıdan Carpenter vd. (2005) işlemlerin yanı sıra ilişkilerin öğrenilmesinin geçiş sürecini destekleyeceğini belirtmişlerdir. Örneğin sayısal ilişkileri genelleyebilen öğrenciler "a x (b+c) = (a + b) x (a+c)" şeklindeki ifadeleri daha rahat anlamlandırabilir (Akkan, 2016). Aynı zamanda örüntü içeren durumlarda da genelleme yaparak uygun cebirsel ifadeleri yazabilirler.

Aritmetiğin bir parçası olan kesirlerin cebirsel düşünme ve cebir başarısı için gerekli ve önemli olduğu araştırmacılar (Empson ve Levi, 2011; Hackenberg ve Lee, 2015; National Mathematics Advisory Panel [NMAP], 2008, Van de Walle, 2013,) tarafından vurgulanmaktadır. Bu araştırmacılardan Hackenberg (2009) öğrencilerden bir bütünün örneğin 7 inç'lik bir sopanın 3 eş parçaya ayrılması istendiğinde eğer öğrenciler her bir inçlik bölümü 3' e bölerek her bölümden bir parçanın alınması ile sonuca ulaşacağını belirtiyorsa öğrencide çarpımsal farkındalığın oluştuğu, yani bu bireyin birim kesirleri ölçü olarak kullanabildiğini belirtmiştir (Pearn ve Stephens, 2016). Kesirleri ölçülebilir uzunluklar olarak değerlendirmek ise kesirlere nicelik olarak yaklaşmayı ifade eder (Lee, 2012). Yani bir kesrin örneğin "$\frac{3}{4}$" kesrinin 3 tane

$\frac{1}{4}$'lik eş parçanın yan yana gelmesiyle elde etmek kavramın nicel muhakeme ile inşa edildiğini ifade eder (Karagöz Akar, 2016). Smith ve Thompson'a (2007) göre de nicel yaklaşım kesirli bilgi ve cebirsel düşünme için temel olarak görünür. Cebirlere nicelik olarak yaklaşmak ise bilinmeyenlerin henüz ölçülmemiş miktarlar olduğunu (Lee, 2012) fakat değerinin belirlenebileceği miktarlar olarak düşünmeyi içerir (Hackenberg ve Lee, 2013). Ayrıca Hackenberg (2006), "ax=b" ifadesinin temelinde bir bölünme işlemi olduğu, bölünme işleminin de direkt kesirsel akıl yürütme ile ilişkili olduğunu ve 5x=20 ifadesinin çözümünde ilişki örtük olarak kalsa dahi 3x=7 gibi ifadelerde açık hale geldiğini belirtmektedir.

Bu anlamda aritmetikten cebire doğru aktarımın geliştirilebilmesi adına iki alan arasındaki ilişkinin incelenmesi önemli görülmüştür. Bu çalışmada aritmetiğin bir parçası olan kesirler ve kesirlerle işlemler ile cebirsel düşünme ile ilgili sorularda kullanılma durumları incelenmesi amaçlanmıştır.

2.2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Matematik eğitimi ile ilgili araştırmalar incelendiğinde kesirle ilgili çalışmaların önemli bir yere sahip olduğu araştırma çeşitliliğinin de fazla olduğu görülmüştür. Buna karşın cebirsel düşünme ile ilgili çalışmalar kesir çalışmalarına göre geride kalmış olup daha az sayıda çalışmanın olduğu tespit edilmiştir. Kesir bilgisi ile cebirsel düşünmenin bir arada değerlendirildiği çalışma sayısı ise oldukça azdır. Bu bölümde kesir, kesir zihinsel düzenekleri, cebirsel düşünmeye ilişkin çalışmalara yer verilmiştir.

2.2.1 KESİRLERE YÖNELİK ÇALIŞMALAR

Öksüz (2018) ise 5. sınıf öğrencilerinin kesir kavramını oluşturma süreçlerini incelerken APOS teorik çerçevesinden faydalanmıştır. 15 öğrencinin katıldığı çalışmada 5 haftalık öğretim sonucu elde edilen veriler analiz edilerek; kesirleri eylem düzeyinde oluşturan öğrencilerin bütünleri eş parçalara ayırabildiği fakat parçalar arası ilişki kuramadığı, parçası verilen bütünü elde edemedikleri, kesirleri süreç düzeyinde oluşturan öğrencilerin ise eş parçalar oluşturarak bunları kesir olarak ifade edebildikleri, parçası verilen bütünü modeller yardımıyla elde edebildikleri, kesirleri nesne düzeyinde oluşturan öğrencilerin ise parçası verilen bütünün herhangi bir modele ihtiyaç duymadan oluşturabildikleri sonuçlarına ulaşılmıştır.

Kayhan (2010) tarafından hazırlanan çalışmada ise öğrencilerin kesir çeşitlerini birbirine dönüştürme süreçlerinde zihinsel modellerin belirlenmesi hedeflenmiştir. Bu anlamda nitel bir çalışma modeli kullanan araştırmacı 4'ü 5. sınıf 4'ü 8. sınıf olmak üzere 8 öğrenci ile çalışmıştır. Araştırma sonucunda, öğrencilerin ortaya çıkan zihinsel modelleri işlem bilgisi, bölme, bütün-parça, ölçme-karşılaştırma, oran-orantı, genişletme, sadeleştirme, denklik bağıntısı ve paylaştırma kategorileri altında toplanmıştır. Öğrencilerin en çok öğretmenlerinin öğrettiği şekliyle işlem bilgisinin kullandığı ve sınıflar arası anlamlı bir farklılığın olmadığı sonuçlarına ulaşılmıştır.

Çelik (2015) ise öğretmenlerle yürüttüğü çalışmasında öğretmenlerin 5. sınıf kesirler ve kesirlerle işlemler konusunun öğretiminde model kullanım şekillerini incelemiştir. Örnek olay yönteminin kullanıldığı çalışmada 3 öğretmenin ders anlatım süreçleri video kamera ile kayıt altına alınarak analiz edilmiş ve öğretmenlere ayrıca "Matematiksel Modelleme Görüş Formu" uygulanmıştır. Sonuç olarak öğretmenlerin model kullanım düzeylerinin konuya göre değiştiğini, genel olarak bölge ve sayı doğrusu modeli kullanıldığı fakat alan ve küme modelinin oldukça az kullanıldığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmenlerin soru çözümlerinde model kullanmaya çok tercih etmediği bu anlamda öğrencileri de teşvik etmedikleri fakat model kullanıldığında öğrencilerin başarı, derse katılım gibi konularda olumlu bir yaklaşım sergiledikleri sonucuna ulaşmıştır.

Mısral (2009) tarafından hazırlanan çalışmada kesrin farklı anlamlarına göre yapılan öğretimin 6.sınıf öğrencilerinde kesirlerle işlemler konusunda işlemsel ve kavramsal açıdan etkisi olup olmadığı incelenmiştir. Veri toplama aracı olarak "Kesirler Başarı Testi" kullanılan çalışmada ön test-son test kontrol gruplu desen kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda ise ölçme anlamına göre yapılan anlatımın kesirlerde toplama işlemine ilişkin işlemsel düzeyden çok kavramsal düzeyde etkili olduğu, çıkarma işleminde ise hem işlemsel hem kavramsal düzeyde anlamlı bir fark oluşmadığı ve çarpma işleminde ise deney grubunda kavramsal düzeyde bir farklılık oluştuğu elde edilmiştir.

Kara (2017) tarafından hazırlanan çalışmada 6. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama çıkarma konularında hangi temsilleri tercih ettikleri ve temsiller arası nasıl geçiş yaptıkları incelenmiştir. Araştırmada 8 ana sorudan oluşan "Kesirlerde Toplama - Çıkarma İşlemi Çoklu Temsil Testi" uygulanmış olup sonuç olarak sayı doğrusu temsilinin az öğrenci tarafından kullanıldığı tespit edilmiştir. Model kullanan öğrencilerin uygun birimlere bölünmüş bütünleri belirleme, eş parçalara ayırma gibi durumlarda daha fazla zorlandıkları, cebirsel temsillerde ise öğrencilerin pay ve paydayı farklı sayılar gibi algılayarak işlem yaptıkları sonucuna varılmıştır.

Dere (2016), ortaokul öğrencilerinin kesirleri anlama becerilerini incelediği çalışmasında hem nitel hem nicel yöntemler kullanmıştır. Bu kapsamda 575 öğrenci ile çalışmasını yürüten araştırmacı öğrencilere test ve açık uçlu sorulardan oluşan form uygulayarak öğrencilerin kesirleri anlama becerilerini açığa çıkarmayı ve bu becerileri sınıf düzeyi, cinsiyet, akademik başarı gibi değişkenler açısından incelemeyi hedeflemiştir. Sonuç olarak öğrencilerin kesirler, tanıma başarılı olduklarını, Ayrıca genel olarak öğrencilerin denk kesirler, iki doğal sayı arasında kaç kesir sığacağı konularında başarısız oldukları sonucuna ulaşmıştır.

Macit ve Nacar (2019) tarafından hazırlanan çalışmada öğretmen adaylarının rasyonel sayı ve kesir kavramına ilişkin tanım ve imajlarının belirlenmesi hedeflenmiştir. Bu kapsamda 110 katılımcının bulunduğu çalışmada veri toplamak için "Rasyonel Sayı ve Kesir Kavram İmajı Anketi" kullanılmıştır. Sonuç olarak öğretmen adaylarının kesir ile ilgili parça bütün rasyonel sayı ile ilgili ise oran imajına sahip oldukları tespit edilmiştir. Aynı zamanda katılımcılarının çoğunun rasyonel sayılara tam sayıların dahil olduğu fakat kesirlere dahil olmadığına dair bir sonucu da ulaşılmıştır. Çalışmada öğrencilerin "$\frac{x}{2}$" ifadesini kesir ve rasyonel sayı olarak tanımlayabildikleri gibi çoğunluğun x' i değişken olarak kabul ettiğine dair bir sonuca da yer verilmiştir.

Pesen (2007) ise çalışmasında 3. sınıf öğrencilerinin kesirlerin modeli, sembolü ve sözel ifadesine dair kavram yanılgılarını belirlemeyi hedeflemiştir. 113 öğrenci ile yürütülen çalışmada veriler tanı testi ile toplanmıştır. Sonuç olarak öğrencilerin bütünü eş parçalara ayırmakta zorlandıkları özellikle dairesel modellerde dikdörtgen modellere göre daha fazla zorlandıklarını tespit etmiştir. Öğrencilerin bazılarının kesri bir sayı gibi algılayamadığına, payı doğru ifade etseler dahi paydanın kalan bütünde paydan sonra kalan kısım olduğuna dair yanılgıları olduğu sonucuna ulaşmıştır. Eş parçalardan oluşmayan bir bütünün kesir ifade edip edilmeyeceğine ilişkin soruda ise etmeyeceğini düşünen öğrencilerin daha az olduğu tespit edilmiştir.

Altıparmak ve Özüdoğru (2015) tarafından hazırlanan çalışmada ise kesirlerde parça bütün ilişkisine dair kavram yanılgıları incelenmiştir. 73 ortaokul, 113 üniversite öğrencisine 37 soruluk "hata ve kavram yanılgıları teşhis testi" uygulanmıştır. Araştırmanın sonucunda ortaokul öğrencilerinde daha fazla hatalı cevaplar verdiği tespit edilmiştir. Tespit edilen hata ve yanılgılar ise bir bütünün eş olmayan parçalara ayrılması, parça bütün üzerinde genişletme ve sadeleştirme konusunda kavram yanılgısı, sayı doğrusunu parça bütün olarak görme şeklindedir. Ayrıca ulaşılan bir sonuç ise öğrencilerin işlemleri ezberlediğidir.

Ergöl ve Memnun (2020) tarafından hazırlanan çalışmada ise ortaokul öğrencilerinin kesir kavramına ilişkin ürettiği metaforların belirlenmesi hedeflenmiştir. Olgu bilim yöntemi kullanılan çalışmaya 298 öğrenci katılmış olup öğrencilerin 152'si beşinci sınıf 146'sı ise 7. Sınıftır. Öğrencilere yazılı olarak "*Kesir …….gibidir. Çünkü……….*" ifadesi verilmiş olup öğrencilerin bu ifadeye ilişkin cevaplarına göre 298 adet metafor ürettiklerini tespit edilmişlerdir. En çok üretilen metaforlara göre öğrencilerin kesirleri eş parçalara ayrılacak bütünler olarak gördüğü sonucuna ulaşılmıştır.

Taştepe (2018) ise çalışmasında cebirsel kesirlerde toplama ve çıkarma işlemini içeren denklemlerde işlemsel bilgi ve kavramsal bilgilerindeki gelişimi incelemeyi amaçlamıştır. 4 9.sınıf öğrencisi ile yürütülen çalışmada "öğretim deneyi", "klinik görüşmeler" ve "doküman incelemesi" yöntemleri kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda ise öğrencilerin verilen denklemlere problem yazarken en çok kesrin bölüm anlamını kullandıklarını en az ise işlemci ve parça bütün anlamlarının kullanıldığı görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin ölçme anlamı ile ilgili olarak ölçme birimini kullanmada, birimleri birbirine oranlama gibi konularda hata yaptıkları belirlenmiştir.

Örmeci (2012) tarafından hazırlanan yüksek lisans tezinde öğrencilerin kesirler konusundaki kavramsal ve işlemsel bilgileri karşılaştırılmış, aralarındaki ilişkiye bakılmış ve öğrencilerin kesirler konusundaki yaşadıkları zorluklar ortaya çıkarılmıştır. Model olarak karma desenin kullanıldığı çalışmada öğrencilerin kavramsal ve işlemsel bilgileri arasında pozitif yönlü bir ilişkinin olduğu, başarılı öğrencilerin kesirler konusunda kavramsal ve işlemsel bilgilerinin bir arada fakat daha az başarılı öğrencilerin sadece işlemsel bilgiye sahip oldukları belirlenmiştir.

Haser ve Ubuz (2002) tarafından yapılan çalışmada 5. sınıf öğrencilerin kesirlerde kavramsal ve işlemsel performanslarının belirlenmesi hedeflenmiştir. 145 öğrencinin yer aldığı çalışmada öğrencilere 14 soruluk test uygulanmıştır. Testte yer alan öğrenci cevaplarının analizi ile öğrencilerin çizdikleri şekiller ile belirttikleri kesirler arasında tutarsızlık olduğu, öğrencilerin eş parçalamada sıkıntı yaşadıkları, doğal sayı deneyimlerinin kesirlerle işlemlere aktarılması gibi sonuçlara ulaşılmıştır.

Yurtsever (2012) tarafından hazırlanan çalışmada ise öğrencilerin kesirler ve kesirlerle işlemler konusunda yaptıkları hatalar ve yaşadıkları zorluklar incelenmiştir. Bu anlamda hem nicel hem nitel desenin kullanıldığı çalışmanın katılımcılarını 5. sınıfta öğrenim gören 151 öğrenci oluşturmuştur. İlk olarak öğrencilerin tamamına "Kesirlerle İşlemler Anketi" uygulanmış sonrasında ise bu öğrencilerden 16'sı ile yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir.

Çalışmanın sonucunda genel olarak öğrencilerin şekillerin ve sözel temsillerin sembolik temsillere dönüşümü ya da tam tersi, gerçek yaşam problemlerinin sembolik temsillere dönüştürülmesi konusunda hatalar yaptıkları, kesrin anlamını bilmeden daha çok algoritmayı kullanarak işlemler yaptıkları, öğrencilerin basit kesri anlamakta, kesirleri okumakta, denk kesirleri modellemede zorlandıkları tespit edilmiştir.

Karaağaç ve Köse (2015) tarafından hazırlanan çalışmada ise öğretmen ve öğretmen adaylarının öğrencilerin kesirlerdeki kavram yanılgılarına dair bilgileri incelenmiştir. Çalışmada ise 2 öğretmen adayı 4 öğretmen ve 90 öğrenci ile çalışılmıştır. Öğrencilere kavram yanılgısı testinin uygulandığı çalışmada öğretmen ve öğretmen adayları ile ise yarı yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Sonuç olarak öğrencilerin aynı sembollerle gösterilen kesirlerin aynı miktarları temsil edileceğini düşünmesinden dolayı öğrencilerin kesirlerin parça bütün anlamını tam kavrayamadıkları tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmenlerim tamamı öğrencilerin bu yanılgıya düşeceklerini tahmin etmişlerdir. Öğrencilerin pizzanın büyüklüğünü dilim sayısına göre belirledikleri sonucuna da ulaşılmıştır.

Birinci (2018) ise bir öğretmenin kesirler konusunda kendi öğretimini irdeleyerek fark etme becerisinin mesleki gelişimine katkısını incelemiştir. Öğretmenin 5 hafta boyunca kesirler konusunu anlattığı dersler video kamera ile kayıt altına alınmış sonrasında ise ders analizi günlükleri oluşturulmuştur. Sonuç olarak ders sırasında yaptığı hataları fark eden öğretmenin "1/1" kesrini sadece bütün olarak ifade ettiği birim kesir olduğunu vurgulamadığı tespit edilmiştir.

2.2.2 KESİR ZİHİNSEL DÜZENEKLERİNE YÖNELİK ÇALIŞMALAR

Tunç Pekkan (2015) çalışmasında 4. ve 5. sınıf öğrencilerin kesir bilgilerinin daire, dikdörtgen ve sayı doğrusu modellerine göre analizini yapmıştır. Çalışmada öğrencilerin parça bütün kesirsel akıl yürütme gerektiren daire ve dikdörtgen modellerinde benzer performans gösterdiği, ancak problem türlerine karşı sayı doğrusu ile temsil edilmiş sorularda öğrencilerin performansının önemli ölçüde düşük olduğunu tespit etmiştir. Buna ek olarak, temsilden bağımsız, yani temsiller dikkate alınmadan öğrencilerin parça bütün kesirsel muhakemeye kıyasla daha gelişmiş kesirli düşünme gerektiren öğelerdeki performanslarının daha düşük olduğu ortaya konulmuştur. Kesirleri grafiksel gösterimlerle öğretmeye yönelik öğretmenlere çeşitli öneriler sunulmuştur.

Eliustaoğlu (2016) tarafından hazırlanan çalışmada ise 6.sınıf öğrencilerin kesirleri nasıl anladığını incelemek amacıyla kesir şemalarının belirlenmesi hedeflenmiştir. Hem nicel hem nitel yöntemlerin kullanıldığı çalışmanın katılımcılarını ABD' de öğrenim gören 18 öğrenci oluşturmuştur. Steffe ve Olive (2010) teorik çerçevesinden faydalanılan çalışmada, öğrencilerin alan uzunluk ve küme modelleri ile temsil edilen kesir sorularına verdikleri cevaplar bölümleme şemaları, parça bütün, parçalı birim kesir ve basit parçalı kesir düzenekleri açısından ele alınmıştır. Sonuç olarak öğrencilerin parçalı birim kesir ve basit parçalı kesir düzeneklerine ilişkin başarılarının diğer şemalara göre daha düşük olduğu ve model durumuna göre düzeneklerin kullanımının farklılaştığını tespit etmiştir. Ayrıca çalışmada öğrencilerin uzunluk modeline ilişkin başarıları ile küme modeline ilişkin başarıları arasında önemli bir fark olduğu öğrencilerin genellikle küme modellerinde zorlandıkları sonucuna varılmıştır.

Norton ve Wilkins (2009) ise çalışmalarında öğrencilerin kesir zihinsel düzenekleri ve yarma işleminin kullanımının nicel analizini yapmayı hedeflemişlerdir. 84 öğrenci ile yürütülen çalışmada öğrencilerin sorular verdiği yazılı cevaplar ile Steffe'nin düzenekler arası hiyerarşi olduğuna dair hipotezi test edilmiştir. Araştırmacıların bulduğu sonuçlar ise Steffe'nin hipotezini destekler niteliktedir. Ayrıca çalışmada yarma işleminin tersine işlem gerektiren durumlarda gerekli olduğu fakat tek başına bir etken olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Norton ve Wilkins (2010) tarafından yapılan çalışmada ise öğrencilerin parçalama etkinlikleri Kieren'in rasyonel sayı ve Steffe'nin kesir zihinsel düzenekleri çerçevelerinden incelenerek nicel analiz yapılması hedeflenmiştir. Kesirlerin ölçme anlamına ve basit parçalı kesir düzeneğine odaklanılan çalışmada 7.sınıf öğrencileriyle çalışılmıştır. 56 öğrenciye uygulanan 23 soruluk bir test uygulanmış olup öğrenci cevaplarından şemalara ilişkin güçlü bağ bulunan cevaplar 1 ile diğer cevaplar ise 0 ile kodlanmıştır. Sonuç olarak ise diğer çalışmalara benzer şekilde bu çalışmada da öğrencilerin parçalı birim kesir düzeneğini basit parçalı kesir zihinsel düzeneğinden önce inşa edildiği fakat basit kesir düzeneklerinin parçalı birim kesir düzeneğinin genellemesi olarak düşünülemeyeceği tespit edilmiştir. Ayrıca çalışmada birimleri tekrarlanabilir birimler olarak kullanabilen öğrencilerin bir parçanın kesir değerini rahatlıkla belirleyebildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Boyce ve Norton (2015) tarafından hazırlanan çalışmada ise 6. sınıf öğrencilerinin birimleri tam sayılarla koordine etme yöntemleri (çarpımsal kavramları) ve öğrencilerin birimleri kesirlerle koordine etme yolları arasındaki ilişkileri ele alınmıştır. 50 öğrencinin yer aldığı çalışmada görüşme formu Steffe (2010) çalışmasında yer alan parçalı birim kesir düzeneği, basit kesir düzeneği, bileşik kesir düzeneği ve tersine bileşik kesir düzeneği referans alınarak hazırlanmıştır. Araştırmanın sonucunda birimlerin çarpımsal olarak inşası ile kesir zihinsel düzenekleri arasında pozitif yönlü bir ilişki elde edilmiştir. Fakat çalışmada öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerini oluşturmadan çarpımsal kavramlar inşa etmelerine ilişkin bir bulguya rastlanmamıştır. Ayrıca öğrencilerin çoğunluğunun parçalı birim kesir zihinsel düzeneğini inşa edemediklerini tespit etmişlerdir.

2.2.3 CEBİRSEL DÜŞÜNMEYE YÖNELİK ÇALIŞMALAR

Acar (2019) çalışmasında sayı hissi ve cebirsel düşünme arasındaki ilişkiyi farklı değişkenler açısından incelemiştir. 7. ve 8. sınıf öğrencileriyle çalışan araştırmacı 330 öğrenciye Cebirsel Düşünme Testi ve Sayı Duyusu Ölçeği uygulayarak verilerini toplamıştır. Verilerin analizi sonucunda sayı hissi ile cebirsel düşünme arasında pozitif yönde güçlü düzeyde anlamlı bir ilişki olduğu tespit etmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin sayı hissi ile çözülebilecek sorularda kural temelli işlemler yaptıkları sonucuna ulaşmıştır.

Usta ve Gökkurt Özdemir (2018) tarafından hazırlanan çalışmada ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın katılımcıları 6. 7. ve 8. sınıf düzeylerinden 12 öğrenci oluşturmuştur. Veriler "Cebirsel Düşünme Düzeyi Tespit Formu (CDDTF)" ile toplanarak nitel veri analizi teknikleriyle analiz edilmiştir. Sonuç olarak öğrencilerin sözel olarak verilen problem durumuna ilişkin cebirsel ifadeleri yazmaları istendiğinde öğrencilerin sayısal değer kullanamadan yazabildiği, bazı öğrencilerin eşitliği yorumlayamadığı, ve harfleri bilinmeyen olarak algılayamadıkları tespit edilmiştir.

Güvendiren (2019) tarafından hazırlanan çalışmada 6. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme ile birlikte; niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünmelerinin ve varsa bu düşünme biçimleri arasındaki ilişkinin incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışmada 9 öğrenciye açık uçlu sorulardan oluşan veri toplama araçları uygulanmış olup veriler içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Sonuç olarak niceliksel muhakemenin diğer düşünme alanları için merkez olduğu tespit edilmiştir. Aynı zamanda öğrencilerin problem çözerken niceliksel işlemleri anlamlandırmadıkları, ezber bilgiler, formüller ve çözüm yöntemlerinden faydalandıkları, niceliksel işlemlerden ziyade aritmetiğe yönlendikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Kaya vd. (2016) tarafından hazırlanan çalışmada 7. sınıf öğrencilerin cebirsel muhakeme becerilerine ilişkin başarı düzeyi belirlenmeye çalışılmıştır. 146 öğrenciye Cebirsel Muhakeme Değerlendirme Aracı uygulanmıştır. Teste ilişkin sonuçlar incelendiğinde; öğrencilerin, uygun cebirsel muhakemeyi belirleme, cebirsel ifadelere yönelik çıkarımda bulunma, çıkarıma yönelik cebirsel işlemler yapma, sonucun doğruluğuna ve çözüm yoluna karar verme gibi konularda düşük ve orta düzeyde oldukları tespit edilmiştir.

Çelik (2007) çalışmasında öğretmen adaylarını cebirsel düşünme becerilerini incelemiştir. 8 öğretmen adayı ile çalışılmış katılımcılara görüşme formu uygulanarak ve klinik mülakatlar ile veriler toplanmıştır. SOLO taksonomisine göre yapılan analizde, çoğu öğretmen adayı sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma, çoklu gösterimlerden yararlanma ve genellemeleri formül etmede ilişkilendirilmiş yapı düşünme seviyesinin altında yer almıştır. Bu durum sahip oldukları bilgi ve becerileri tutarlı bir yapı içerisinde bütünleştiremedikleri anlamına gelmektedir.

Hackenberg ve Tillema (2009) tarafından hazırlanan bu çalışmada 8 aylık bir öğretim deneyi süresince öğrencilerin kesirle çarpma işlemi yaparken gerçekleştirdikleri faaliyetlerin incelenmesi hedeflenmiştir. Öğretim süresince TIMA, Sticks, JavaBars gibi programlardan faydalanılmıştır. Araştırma boyunca 6. sınıf dört öğrenci çiftiyle çalışılmış fakat bu çalışmada ise iki öğrenci çiftinin verilerine yer verilmiştir. Bu öğrencilerin öğretim süresince gerçekleştirdikleri faaliyetler incelendiğinde genel olarak öğrencilerin tam sayı çarpım kavramlarının, öğrencilerin kesir kompozisyon şemaları için kritik bir kaynaklar olduğu bulunmuştur. Daha özel olarak da, genel kesir bileşimi şemasının oluşturulması için üç seviyeli birimlerin içselleştirilmesinin gerekli olduğu belirlenmiştir. Bu çalışmada elde edilen bulgular nicel birimlerin parçalara ayrılması ve kavramsallaştırılmasını vurgulayan kesirlerle çarpma işleminin oluşturulmasına katkı sağlayacaktır.

Hackenberg ve Lee (2011) ise çalışmalarında öğrencilerin kesirlerle nicel akıl yürütmeleri ve cebirsel akıl yürütmeleri arasındaki ilişkileri incelemeyi amaçlamışlardır. Katılımcılarını ortaokul ve lise öğrencilerinin oluşturduğu çalışma toplam 18 öğrenci ile yürütülmüştür. Öğrencilerle biri kesirlerle ilgili diğeri cebirsel düşünme ile ilgili olmak üzere ortalama 45’er dakikalık mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Yapılan görüşme analizleri sonucunda ise ikinci seviye çarpımsal ilişkilere sahip öğrencilerin birimler üzerinde dağıtma işlemi gerçekleştirebildiği tespit edilmiştir.

Pearn ve Stephens (2016) tarafından hazırlanan çalışmada da öğrencilerin kesir kavramı ve işlemleri ile cebir arasındaki ilişki incelenmiştir. 162 öğrenciye 3 bölümden oluşan kesir tarama testi ve cebirsel düşünme testi uygulanmıştır. Sonuç olarak öğrencilerin birim kesri kullanarak kesirlerle ilgili kavramsal anlayış gerçekleştirdikleri, birim kesri ve bununla ilişkili miktarları oluşturabilen öğrencilerin çarpımsal ilişkileri de oluşturabildiği tespit edilmiştir. Aynı zamanda çalışmada vurgulanan çarpımsal ilişkilerin cebir için önemli olması ile ilişkili olarak kesir ve cebirsel düşünmenin arasında pozitif yönlü bir ilişki olduğu sonucuna varılmıştır.

Lee (2012) öğrencilerin kesir bilgisi ve denklem yazmalarına ilişkin yaptığı araştırmada yer alan iki öğrencinin verilerini sunduğu çalışmada tersine işleyen zihinsel düzeneklerinin denklem yazmayla ilgili olarak iki miktar arsında karşılıklı ilişki kurma açısından önemli olduğu sonucuna varmıştır. Öğrencilere kesirler ve cebir ile ilgili ayrı testlerin uygulandığı çalışmada bir öğrencinin kesri katsayı olarak kullanamadığı tespit edilmiştir.

Lee ve Hackenberg (2013) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin kesir bilgisi ve cebirsel düşünmeleri arasındaki ilişkinin belirlenmesi hedeflenmiştir. 18 öğrenci ile yürütülen çalışmadaki öğrencilerden biri olan 7. sınıf öğrencisi Willa'ya ilişkin bulgular ise bu çalışmada sunulmuştur. Öğrenci ile önce kesir testi sonrasında ise cebir testi uygulanmıştır. Testlerde ise uygun şekilleri çizmeleri ifadeleri yazmaları istenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencinin kesirleri çarpan olarak kullanabilmesinin ve tersine işleyen düzeneği inşa etmesinin nicelikler arasındaki ilişkiyi doğru yazmada etkili olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca problem çözümlerinin şekiller ile desteklenmesinin öğrencinin soyutlamalarını ve niceliksel ilişki kurmasını olumlu yönde etkilediği sonucuna varılmıştır.

Hackenberg (2013) tarafından yapılan bir diğer çalışmada ise temel düzeyde çarpma ilişkilerine sahip altı öğrencinin kesir bilgisi cebirsel düşünmeleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Birbirinden bağımsız olarak uygulanan kesir ve cebirsel düşünme testlerine ilişkin öğrenci cevapları ve birebir görüşmelerin analizi iki aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada öğrencilerin kesir bilgileri, cebir bilgileri belirlenmiş olup sonrasında aradaki ilişki değerlendirilmiştir. Bu açıdan öğrencilerin yineleme işlemlerinin cebirsel işlemleri kolaylaştırdığı fakat ayırma işleminin yapılmaması cebirsel ifadelerin yazılmasında ve genelleştirme yapmada kısıtlama oluşturduğu sonucuna varılmıştır.

Literatürde ilgili çalışmalar incelendiğinde kesirler, kesir zihinsel düzenekleri ve cebirsel düşünme ile ilgili çalışmaların çoğunlukla nitel olarak yapıldığı görülmüştür. Kesirlerle ilgili çok fazla sayıda çalışmanın yapıldığı yapılan çalışmaların ise genel olarak kesir kavramını oluşturma süreçlerini APOS teorik çerçevesinden, kesir çeşitlerini birbirine dönüştürme süreçlerinde zihinsel modellerin belirlenmesini, kesirler ve kesirlerle işlemler konusunun öğretiminde model kullanımını, kesrin farklı anlamlarını, öğrencilerinin kesirleri anlama becerilerini, kesir kavramına ilişkin tanım ve imajları, kesirlerin model, sembol ve sözel ifadesine dair kavram yanılgılarını, kesir çeşitlerini birbirine dönüştürme süreçlerinde zihinsel modelleri, öğrencilerinin kesir kavramına ilişkin ürettiği metaforları, kesirlerde işlemsel bilgi ve kavramsal bilgiyi inceleyen çalışmalar olduğu belirlenmiştir. Ayrıca kesir zihinsel düzeneklerine ilişkin çalışmaların da genel olarak öğrencilerin kesir bilgilerinin kesir modellerine göre analiz eden, kesirleri nasıl anladığını incelemek amacıyla kesir zihinsel düzeneklerini belirleyen, kesir zihinsel düzeneklerinin ve yarma işleminin kullanımının nicel analizini yapan, parçalama etkinliklerini Kieren'in rasyonel sayı ve Steffe'nin kesir zihinsel düzenekleri çerçevelerinden inceleyen, birimleri tam sayılarla koordine etme yöntemleri (çarpımsal kavramları) ve öğrencilerin birimleri kesirlerle koordine etme yolları (kesirler şemaları) arasındaki ilişkileri belirleyen şeklinde olduğu tespit edilmiştir. Cebirsel düşünme ile ilgili olarak da genellikle cebirsel muhakeme becerileri ölçen çalışmalara rastlanılmıştır. Kesir bilgisi ile cebirsel düşünme arasındaki ilişkiyi inceleyen çalışmaların tamamen yurtdışında yapıldığı ve ilgili çalışmaların da öğrencilerin kesirle çarpma işlemi yaparken gerçekleştirdikleri faaliyetlerini inceleyen, kesirlerle nicel akıl yürütmeleri ve cebirsel akıl yürütmeleri arasındaki ilişkileri inceleyen, kesir kavram bilgisi ve işlemleri ile cebir bilgisi arasındaki ilişkiyi inceleyen, kesir bilgisi ve denklem yazmalarına ilişkin, kesir bilgisi ve cebirsel düşünmeleri arasındaki ilişkiyi özellikle çarpımsal anlamda inceleyen araştırmalar şeklinde olduğu görülmüştür. Bakıldığında ülkemizde kesirlere ilişkin öğrencilerin kesir anlayışlarını Steffe ve Olive (2010) teorik çerçevesinden inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Benzer şekilde kesirlere ilişkin kritik işlemlerin cebirsel düşünmeye ilişkin sorularda kullanımını düzenekler açısından ele alan herhangi bir çalışmaya yurt içi kaynaklarda rastlanmamış olup öğrencilerin kesir anlayışlarını ve kesirlerin cebirsel düşünmeye ilişkin sorularda kullanımının kesir düzenekleri çerçevesinden incelemenin matematik eğitimi açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Ayrıca yurt dışındaki çalışmalar incelendiğinde de öğrencilerin kesir bilgilerini beş düzenek çerçevesinden ele alarak cebirsel düşünme becerisiyle karşılaştıran bir çalışmaya da rastlanmamıştır.

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, araştırmanın katılımcıları, araştırmada kullanılan veri toplama araçları ve süreci ve verilerin analizi ile ilgili açıklamalar yer almaktadır.

3.1 Araştırmanın Modeli

Bu çalışmada öğrencilerin kesir zihinsel düzenekleri ve kesir zihinsel düzeneklerini cebirsel düşünmede nasıl kullandıklarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin bilgi ve düşüncelerini ayrıntılı şekilde inceleyebilmek adına çalışmada nitel araştırma yapılmıştır. Araştırmanın modeli ise durum çalışması olarak belirlenmiştir. Durum çalışması bir durum hakkında çoklu bilgi kaynakları (gözlem, mülakat, doküman vb) ile ayrıntılı ve derinlemesine araştırmanın yapıldığı ve sonuç olarak bir durum betimlemesi elde edilen bir yaklaşımdır (Creswell, 2018). Bu çalışmada da öğrencilerin kesir zihinsel düzenekleri ve cebirsel düşünmeye ilişkin sorulara verdikleri cevaplar durum olarak kabul edilmiş olup öğrencilerin cevapları birebir görüşmeler yoluyla da detaylandırılmıştır. Araştırmanın deseni durum çalışmasından iç içe geçmiş tek durumdur. İç içe geçmiş tek durum deseninde bir durum içinde birden fazla alt tabaka veya analiz birimi olabilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu durumda birden fazla analiz birimi söz konusu olacaktır. Bir durum içinde birden fazla alt birim olması dolayısıyla çalışma iç içe geçmiş tek durum desenindedir. Bu araştırmada durum içerisinde ele alınan alt birimler öğrencilerin kesir zihinsel düzenekleri ve bu düzeneklerin cebirsel düşünmede kullanılma durumlarını ortaya çıkaracak sorulardır.

3.2 Araştırmanın Katılımcıları

Bu araştırmanın pilot uygulaması 2018-2019 eğitim öğretim yılı güz ve bahar dönemlerinde Denizli ilinin devlet ortaokulu ve özel okulunda yapılmıştır. Pilot çalışma için devlet ve özel okullardan seçilmiş 5 öğrenci çalışmaya dahil edilmiştir. Güz döneminde özel okuldan 2, devlet okulundan bir, bahar döneminde ise devlet okulundan 2 öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Pilot uygulamadaki katılımcıların özellikleri Tablo 3.1'de verilmiştir. Öğrencilerin başarı durumları ise çok iyi, iyi, orta ve düşük derecededir. Pilot çalışmadaki öğrenciler belirlenirken başarı durumları için karne notları dikkate alınmıştır.

Tablo 3. 1. Uygulamadaki Katılımcı Öğrenci Özellikleri

Pilot katılımcı	Cinsiyet	Sınıf Düzeyi	Okul türü	Başarı durumu	Dönem
PÖ1	Erkek	7. sınıf	Özel	Çok iyi	2018-2019 Güz
PÖ2	Erkek	7. sınıf	Özel	Düşük	2018-2019 Güz
PÖ3	Kız	8. sınıf	Devlet	Orta	2018-2019 Güz
PÖ4	Kız	7. sınıf	Devlet	İyi	2018-2019 Bahar
PÖ5	Erkek	7. sınıf	Devlet	Orta	2018-2019 Bahar

Çalışmanın asıl uygulaması 2018-2019 yılı bahar döneminde yapılmış, katılımcılar ise Denizli ilinin bir devlet ortaokulundan seçilmiştir. Araştırma için bu okulun seçilmesinin nedeni araştırmacının okula kolay ulaşılabilirlik açısından çalışmanın yapılmasının okul idaresi tarafından desteklenmesi ve araştırmacının çalışmasını rahat yürütebilmesidir. Katılımcıları devlet ortaokulunun farklı sınıflarda öğrenim gören 7. sınıf öğrencilerinden 12 öğrenci oluşturmuştur. Öğrencilerin seçiminde seçkisiz olmayan örnekleme yöntemlerinden amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örneklemede, çalışmanın amacına bağlı olarak ihtiyaç duyulan bilgilere sahip olduğuna inanılan bireylerin seçilmesidir (Frankel ve Wallen, 2006). Çalışmada bu örneklem türünün de maksimum çeşitlilik ve kolay ulaşılabilir durum örneklemesi yöntemleri tercih edilmiştir. Bu örnekleme bazı karakteristik özellikler açısından farklılık gösteren durumların veya bireylerin seçimini ele alır (Creswell, 2005). Bu stratejinin amacı çeşitlilik gösteren durumlar arasında herhangi bir ortak ya da paylaşılan olgunun olup olmadığını bulmaya çalışmak ve bu çeşitliliğe göre problemin farklı boyutlarını ortaya koymaktır (Creswel, 2005). Bu çalışmada da katılımcılar 7. sınıflardan başarı düzeyleri çok iyi, iyi, orta, düşük olan öğrencilerden seçilmiştir. Bu öğrencilerin 7. sınıftan seçilme sebebi ise çalışmaya temel teşkil eden konulara dair gerekli kazanımların tamamının bu sınıf seviyesinde öğrenilmiş olmasıdır. Öğrencilerin başarı düzeylerinin belirlenmesinde ise matematik karne notu ve okulun yaptığı deneme sınavındaki matematik puanları dikkate alınmıştır. Kolay ulaşılabilir örnekleme yönteminde de araştırmacı yakın ve erişilmesi kolay olan durum, nesne ya da kişileri seçer. Amacı ise araştırmacıya hız ve pratiklik kazandırmaktır (Merriam, 2009). Bu amaç doğrultusunda da araştırmacı kendi ikamet ettiği ilde kolay iletişime geçebileceği idareci, öğretmen ve öğrencilerinin bulunduğu okulu tercih etmiştir. Araştırmada katılımcıların esas isimleri saklı tutularak pilot uygulamadakiler PÖ1, PÖ2, … şeklinde esas uygulamadaki öğrenciler ise Ö1, Ö2, …şeklinde kodlanmıştır. Katılımcılardan Ö1, Ö2 kodlu olanlar çok iyi

Ö3, Ö4 Ö5 ve Ö6 kodlu olanlar iyi, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu olanlar orta ve Ö11, Ö12 kodlu olanlar da düşük düzey olarak kodlanmıştır. Asıl katılımcılara ait özellikler Tablo 3.2'de verilmiştir.

Tablo 3. 2. Asıl Uygulamadaki Katılımcı Öğrenci Özellikleri

Asıl katılımcı	Cinsiyet	Başarı durumu	Asıl katılımcı	Cinsiyet	Başarı durumu
Ö1	Erkek	Çok iyi	Ö7	Erkek	Orta
Ö2	Kız	Çok iyi	Ö8	Kız	Orta
Ö3	Kız	İyi	Ö9	Erkek	Orta
Ö4	Kız	İyi	Ö10	Kız	Orta
Ö5	Kız	İyi	Ö11	Kız	Düşük
Ö6	Kız	İyi	Ö12	Erkek	Düşük

3.2.1 Araştırmanın Asıl Uygulamadaki Katılımcılarının Belirlenme Süreci

Çalışmanın asıl uygulaması 2018-2019 eğitim öğretim yılı bahar döneminde Denizli'deki bir devlet ortaokulunda yapılmıştır. Bu okulda ilgili çalışmanın yapılabilmesi için İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden gerekli izin alınmıştır (Bkz. Ek 1). Okulu belirleme işleminden sonra okuldaki matematik öğretmenleri ile görüşmeler yapılarak matematik başarı notu çok iyi, iyi, orta ve düşük olanlardan araştırma için de gönüllü olabilecek ancak bunlardan da zengin veri kaynağı sunabilecek olduğunu düşündükleri öğrencileri araştırmacıya iletmesi istenmiştir. Görüşler doğrultusunda belirlenen 14 öğrenciden ikisi pilot katılımcı, diğer 12'si ise asıl katılımcı olarak belirlenmiştir. Öğrencilerle bir tanışma toplantısı yapılarak araştırma hakkında bilgi verilmiş ve öğrencilerin bütünün çalışmaya katılımda gönüllü olup olmadıklarına dair Öğrenci Tanışma Protokolü (Bkz. Ek 2) verilerek gönüllü katılımları sağlanmıştır. Sonrasında öğrencilerin verilerinden de gerekli izinleri alabilmek için öğrencilere Veli İzin Belgesi (Bkz. Ek 3) verilerek ilgili belgeyi ailelerine imzalatmaları istenmiştir. Matematik karne notu, okulun yaptığı denemede matematik başarı puanı, öğretmen görüşleri, öğrencilerin gönüllülüğü ve veli izinleri doğrultusunda 12 öğrenci araştırmanın asıl katılımcıları olarak belirlenmiş ve onlarla birebir görüşmeler yapılmıştır.

3.3 Veri Toplama Aracı ve Süreci

Veriler birebir görüşmeler ve doküman analizi yoluyla toplanmıştır. Araştırmada incelenen dokümanlar, görüşmeler yapılırken öğrencilerin soruları cevaplandırma sürecinde kağıt üzerine çizdikleri şekiller ve işlemler gibi kağıt üzerindeki her türlü işaretlerinden oluşmuştur. Bazı şekil ve işlemler fotoğrafları çekilerek verilmiştir.

Çalışmada veri toplama aracı olarak öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerini ortaya çıkarabilmek için Steffe ve Olive'in (2010) kesir zihinsel düzenekleri ile ilgili sorular ve cebirsel düşünmede ise Hackenberg ve Lee'nin (2013) çalışmasında yer alan sorular referans alınmıştır. Sorular hazırlanmadan önce Hackenberg ve Lee'nin (2013) çalışmasında yer alan soruları kullanabilmek için yazar Amy Hackenberg'den email yoluyla gerekli izin alınmıştır. Sorular hazırlanırken alan yazındaki bu teorilerden yararlanılarak 18 tane kesir zihinsel düzenekleri ve bir-iki öncül şıkların da var olduğu 16 tane de kesir-cebir ilişkisi ile ilgili toplam 34 soru hazırlanmıştır. Kesir-cebir ilişkisi ile ilgili sorular için İngilizce'den Türkçe'ye tercüme yapılarak sorularak düzenlenmiştir. Kesir zihinsel düzenekleri ile ilgili sorular parça bütün, parçalı birim, tersine işleyen basit kesir, basit parçalı kesir, çarpımsal bileşim ve bileşik kesir düzeneklerinin uzunluk, alan ve küme modellerini, kesir bilgisinin cebirde kullanımı ile ilgili sorular da parçalı birim, tersine işleyen basit kesir, basit parçalı kesir, çarpımsal bileşim ve bileşik kesir düzeneklerini içerecek şekilde oluşturulmuştur. Kesir zihinsel düzeneklerle ilgili sorularda her bir düzenek için uzunluk, alan ve küme modellerini içeren üçer soru hazırlanırken, cebir düşünme ile ilgili sorularda ise ilgili cebirsel ifadeyi yazma ve ilgili şekli çizme şeklinde sorular hazırlanmıştır. Hazırlanan sorular için üç öğretim elemanının uzman görüşlerine yer verilmiştir. Öğretim elemanlarından üçü de matematik eğitimi alanında uzmanlaşmış kişilerdir. Bunlardan biri Doçent, diğeri Dr. Öğr. Üyesi ve üçüncü ise Arş. Gör. Dr. dur. Uzman görüşleri doğrultusunda soruların anlaşılmayan kısımları düzenlenmiş ve öğrenciler için zor olabileceğini düşündükleri sorular çalışmadan çıkarılmıştır. Ayrıca pilot çalışma sonrasında da sorular da bazı değişikliğe gidilmiştir. İzin için Milli Eğitime sunulan sorular oradaki matematik eğitimi uzmanları tarafından da değerlendirilmiş, onların görüşleri doğrultusunda soru sayısının azaltılması gerektiği ifade edilerek, soru sayısı 30'a düşürülerek sorulara son hali verilmiştir. En son formdaki soruların 20'si kesir zihinsel düzenekleri, 10'u da kesir zihinsel düzeneklerin cebirsel düşünmede kullanılması ile ilgilidir. Çalışmanın soruları Ek 4'de sunulmuştur. Son formdaki sorulardan kesir zihinsel düzenekleri ile ilişkili olanlarında parçalı birim kesir ve basit kesir düzeneğine ilişkin uzunluk, alan ve küme modelleri ile ilgili dörder soru yer alırken parça bütün, basit parçalı kesir, çarpımsal bileşim ve bileşik kesir zihinsel düzeneklerini içerecek şekilde her bir düzenekle ilgili uzunluk, alan ve küme modelleri ile ilgili üçer soru yer almıştır. Sorulardan uzunluk modeli ile ilgili olanlar çubuk şeklinde, alan modeli ile ilgili olanlar kareli kağıtta daire ve kare şekillerinde verilirken küme modeli ile ilgili olan sorularda nesneler çubuk, daire ve dikdörtgen şekilleri temsil edilerek verilmiştir (Ek 4-Protokol 1). Cebirsel düşünme ile ilgili hazırlanmış 10 soru ise kesir zihinsel düzeneklerini ve cebirsel ifadeleri içerecek nitelikte (Ek 4-Protokol 2) hazırlanmıştır. Sorular hazırlanırken bazı sorular için Hackenberg ve Lee'nin (2013) çalışmasında yer alan sorulardan uyarlama yapılmış, bazı sorular ise araştırmacılar tarafından yazılmıştır. Ayrıca formda yer alan soruları doğru ölçülerde verebilmek için şekillerin çiziminde bilgisayardaki GeoGebra programından faydalanılmıştır. Hazırlanan soruların kapsam geçerliliği için matematik eğitimi alanında uzman görüşleri alınmış, testin güvenirliğini belirlemek için ise uygulamadan önce beş öğrenci ile pilot çalışma yapılmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşme formu iki protokol olarak hazırlanmış, ilk protokol kesir zihinsel düzenekleri, ikinci protokol ise kesir zihinsel düzeneklerinin cebirsel düşünmede kullanılma durumları ile ilgili sorulardan oluşmuştur. Öğrencilere sorular birebir görüşmeler yoluyla iki protokol olarak ancak tek oturumda uygulanmış ve yapılan görüşmeler video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Görüşmeler sırasında ise kullanılan video kamera özellikle öğrencilerin çalışma kâğıtlarını çekecek şekilde konumlandırılmıştır. Her bir öğrenci ile yapılan görüşme yaklaşık olarak 90 dakika sürmüştür. Öğrencilere görüşme formu dağıtıldıktan sonra soruları incelemeleri için fırsat verilmiştir. Öğrencilerin soru çözümü aşamasında araştırmacı tarafından ekstra sorular sorulmuştur. Cebirsel düşünmeye ilişkin sorularda ise öğrencilerden ilgili cebirsel ifadeyi yazmaları ve ifadeye ilişkin şekil çizmeleri istenmiştir. Eğer öğrenciler şekil çizmeden bir sonuç elde ettiler ise bu sonucu tekrar şekil çizerek anlatmaları istenmiştir. Öğrencilerin zihinsel aktivitelerini görüntüsü olarak düşünülebilen şekil çizme işlemi öğrencilerin zihinsel düzeneklerinin ve işlemlerinin görselleştirilmesi olarak da düşünülebilir (Hackenberg, 2005).

3.4 Verilerin Analizi

Araştırmanın uygulamaları sonrasında elde edilen bütün veriler bir araya getirilerek her bir öğrenci için ayrı dosyalar açılmış ve öğrenci dosyalarına ilgili veriler aktarılmıştır. Görüşmeden elde edilen veriler öncelikle bilgisayar ortamında yazıya dökülmüş, transkripti yapılmıştır. Görüşmelerin yazıya aktarılması aşamasında konuşma metinleri olduğu gibi yazıya aktarılmış, bazı konuşma metinleri için görüntüye de ihtiyaç duyulmuş, onun için de görüntüler alınarak painte oradan da worde aktarılmıştır. Transkript yapıldıktan sonra veriler analiz edilmek için uygun hale getirilmiştir. Veriler analiz edilirken betimsel analiz yapılmıştır. Anket formundaki kesirli bilgiye ilişkin soruların analizi için Steffe (2002) ve Steffe ve Olive'in (2010) Kesir

Zihinsel Düzenekleri Teorisine göre kategoriler belirlenmiştir. Hangi öğrenci cevabının ilgili kategoriye ait olduğunu belirlemek için bazı kritik davranışlar belirlenmiştir. Bu kritik davranışların belirlenmesinde literatürde yer alan bazı çalışmalardan (Norton ve Wilkins, 2009; Boyce ve Norton, 2016) yararlanılmıştır. Bu kategoriler, kategorilere dair açıklama ve kritik işlemler Tablo 3.3'de verilmiştir.

Tablo 3. 3. Öğrencilerin Kesir Zihinsel Düzenek Bilgisini Oluşturmada Kullanılan Özellikler

Kategoriler	Açıklama	Kritik İşlemler	Örnek
Parça bütün zihinsel düzeneği	Bir parçayı bölümlenmiş bütünden ayırma	Parçalama Ayırma	Bir bütünü 3 eş parçaya bölerek bir parçasını tarama
Parçalı Birim Kesir Zihinsel Düzeneği	Bir bütün oluşturmak için bir birim kesrinin yinelenmesi Kesirli dilin uygun kullanımı	Parçalama Ayırma Tekrarlama	Bir bütünü 3 eş parçaya ayırıp bir parçasını taradıktan sonra bu parçayı tekrarlayarak bütünle kıyaslama veya yineleme işlemini kullanarak parçanın, bütünün kaçta kaçı olduğunu belirleme
Basit Parçalı Kesir Zihinsel Düzeneği	Basit kesri elde etmek için bütünün birim kesirli parçalar üretecek şekilde parçalama ve birim kesir parçalarını basit kesri ve bütünü yeniden oluşturmak için yineleyerek koordine etme Bütüne göre basit kesrin boyutunu belirleme (iki seviyede koordine edilen birimler)	Parçalama Ayırma Tekrarlama	Bir bütünün 8 de 3'ünün bulunması istendiğinde verilen bütünü önce 3 eş parçaya bölerek 8 de 1'ini bulma ve bu 8 de 1'lik parçayı da tekrarlayarak 8 de 3'ü elde etme.
Tersine İşleyen Parçalı Basit Kesir Düzeneği	Bir kesrin birim kesri elde etmek için bölünmesi ve birim kesrin uygun sayıda tekrarlanmasıyla, bütünün elde edilmesi Parçalamayı ve tekrarlamayı aynı anda koordine etme	Yarma (Parçalama ve yinelemenin eş zamanlı kullanımı)	Bir bütünün temsilen 2/7'lik parçası verildiğinde bütünü elde etmek için önce verilen parçayı 2 ye bölerek 7 de 1 elde ederek bu parçayı da 7 kere tekrarlayıp bütünü elde etme
Çarpımsal Bileşim Zihinsel Düzeneği	İki kesrin çarpımında örneğin $\frac{1}{m}$ x $\frac{1}{n}$ işleminde bütünün önce m parçaya	Tekrarlı Bölme	$\frac{1}{3}$ x $\frac{1}{4}$ işleminin sonucu elde edilirken bütünü önce 3 eş parçaya bölme sonrasında da

	sonra her parçanın n parçaya ayrılarak $\frac{1}{mxn}$'nın elde edilmesi	Dağıtmalı Bölme	her parçayı 4 parçaya bölerek sonucu elde etme
Bileşik Kesir Zihinsel Düzeneği	Bütünü parçalayarak elde edilen birim kesrin yinelenmesiyle bileşik kesri elde etme Birim kesri elde etme, bütünü ve bileşik kesri birim kesrin tekrarı olarak ifade edebilme (üç seviyeli birim koordinasyonu)	Parçalama Ayırma Tekrarlama	Bir bütün verilerek 4/3'ü sorulduğunda bütünü önce 3'e bölerek bir parçasını ayırma ve bu parçayı 4 kere tekrarlayarak bütünü istenen kesri elde etme

Çalışmanın ikinci protokolünde yer alan kesir bilgisi ve cebir düşünmeye dair verilerle ilgili olarak da daha önceden yer alan çalışmalar (Hackenberg, 2005; Hackenberg ve Lee, 2013) incelenerek kategoriler oluşturulmuştur. Bu açıdan öğrencilerin kesir zihinsel düzenekleri ve cebirsel ifade oluşturma şekilleri birlikte ele alınarak veriler analiz edilmiştir. Yapılan analizlere ilişkin bir örnek aşağıda yer almıştır:

Örnek analiz: Ali Bey'in evinin markete olan uzaklığının pazara olan uzaklığının $\frac{2}{5}$'si olduğu bilgisi verilmiş pazara olan uzaklığın x metre olarak ifade edildiğinde markete olan uzaklığını temsil edecek şekli çizmeleri ve cevaba uygun cebirsel ifadeyi yazmaları istenmiştir. Bu soruya ilişkin örneğin, Ö6 kodlu öğrencinin x'i 5'e bölerek bir parçayı bulduğu ve sonrasında istenileni bulmak için toplama yaptığı görülmüştür. 5 parçalık bir bütün çizen öğrenci bir parçayı $\frac{x}{5}$ olarak ifade etmiş sonrasında ise iki parçayı toplayarak $\frac{2x}{5}$ sonucuna ulaşmıştır. İzlenen bu yol öğrencinin cebirsel ifadelerle basit parçalı kesir düzeneğine ilişkin kritik işlemleri kullanabilmesiyle ilişkilendirilmiştir.

3.5 Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Creswell'e (2005) göre bir araştırmanın niteliği, araştırmanın güvenilir ve geçerli olmasına bağlıdır. Bundan dolayı araştırmacı araştırmasının nitelikli olmasını sağlayacak, çalışmanın kalitesini arttıracak "iç geçerlik" için "inandırıcılık", "dış geçerlik" için "aktarılabilirlik", "iç güvenirlik" için "tutarlılık", "dış güvenirlik" için ise "teyit edilebilirlik" gibi stratejileri kullanmalıdır (Lincoln ve Guba, 1985). Bu stratejiler dikkate alınarak çalışmada alınan önlemler aşağıda yer almıştır.

İnandırıcılık:

- Araştırmacı yorumlarının tutarlı olmasını sağlamak amacıyla görüşme sonucu elde ettiği verileri okumasını sağlamak için katılımcılara vermiş, onların fikirlerini almış, onlar tarafından uygun görülmeyen yani onaylamadığı kısımlar araştırmadan çıkarılmıştır. (Katılımcı teyidi-Dönüt alma-İletişimsel geçerleme)
- Araştırmanın verileri, katılımcı öğrenciler ile yapılan birebir görüşmeler, görüşmeler sürecinde öğrencilerin kağıt üzerindeki her türlü yazı ve şekillerini kapsayan doküman analizi ile toplanarak yöntemde çeşitlik yoluna gidilmiştir (Çeşitleme-Yöntemsel çeşitleme)
- Bu araştırma, araştırma hakkında bilgi sahibi olan uzman kişinin araştırmayı çeşitli boyutlarıyla incelemesi ile araştırmacıya alternatif bir bakış açısı kazandırılmıştır. (Uzman Kontrolü)

Aktarılabilirlik:

- Çalışmada araştırmacı, araştırmanın tüm sürecinde yapılanları ayrıntılı olarak anlatmıştır. Yani araştırmacı araştırmanın ne zaman, nerede yapıldığı, katılımcıları belirlemede dikkate aldığı kriterleri, katılımcıların özelliklerini, veri toplama araçlarını, veri analizinde hangi yöntemi kullandığını tüm detayları ile açıklamıştır. (Ayrıntılı betimleme)
- Miles ve Huberman'a (1994) göre bir araştırmanın aktarılabilirliği örneklemin amaçlı olarak seçilmesini ile arttırılabilir. Nitekim bu çalışmada da katılıcımların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. (Amaçlı Örnekleme)

Tutarlılık:

- Araştırmada tutarlılığı arttırmak için de analiz edilen veriler farklı zamanlarda yeniden analiz edilerek her iki analizdeki kategorilerin tutarlılığı sağlanmıştır.

Teyit Edilebilirlik:

- Verilerin transkript edilmesinden sonra araştırmacı tarafından verilerin tamamı kodlanarak veriler analiz edilmiştir. Araştırmacı, araştırmasındaki kodlamanın güvenirliğini kontrol etmek amacıyla verilerin %25'ini matematik eğitimi alanında uzman bir kişiye vererek kodlama güvenirliğini sağlamaya çalışmıştır. Araştırmacı ve uzman tarafından yapılan kodlamaların tutarlılığı % 90 olarak hesaplanmıştır.

Analizlerdeki görüş birliği ve görüş ayrılığı olan kategoriler tartışılarak gerekli düzenlemelerle fikir birliğine varılmıştır.

4. BULGULAR

Çalışmada ilk olarak öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerini incelemeye ilişkin yirmi soru sorulmuş olup bu sorulara dair öğrenci cevaplarına bu bölümde yer verilmiştir. Bununla ilgili bulgular parça-bütün zihinsel düzeneği, parçalı birim kesir zihinsel düzeneği, basit kesir zihinsel düzeneği, çarpımsal bileşim zihinsel düzeneği ve bileşik kesir zihinsel düzeneği başlıkları ile yer verilmiştir. Sonrasında ise kesir zihinsel düzeneklerinin cebirsel düşünmede kullanımına dair sorulan on soruya verilen öğrenci cevapları parçalı birim kesir zihinsel düzeneği, basit kesir zihinsel düzeneği, çarpımsal bileşim zihinsel düzeneği ve bileşik kesir zihinsel düzeneği başlıkları ile yer verilmiştir.

4.1 Kesir Zihinsel Düzeneklerine Ait Bulgular

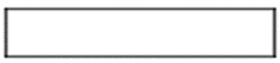
Öğrencilerin kesir düzeneklerine ilişkin uzunluk, alan ve küme modellerinde verdikleri cevaplar bu bölümde incelenmiştir.

4.1.1 Parça Bütün Zihinsel Düzeneğine İlişkin Bulgular

Öğrencilere bu kategoriyle ilişkili olarak uzunluk, alan ve küme modellerinden oluşan üç adet soru sorulmuştur. Verilen bir bütünü parçalamaya ilişkin sorulan üç soru parça bütün zihinsel düzeneği açısından ele alınmıştır. Bu düzenek ile ilgili parçalama ve ayırma işlemlerini kullanmaları beklenen (Steffe ve Olive, 2010) öğrencilerin verilen parçayı elde etmek için çizdiği şekiller izlediği yöntemler değerlendirilmiştir. Bu kategorilere ait bulgular aşağıda yer almıştır.

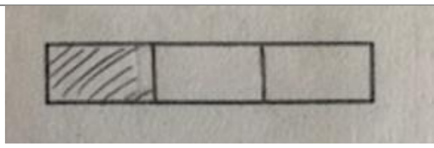
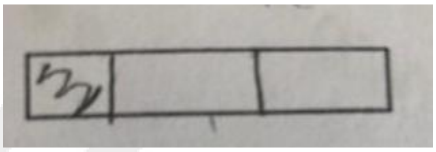
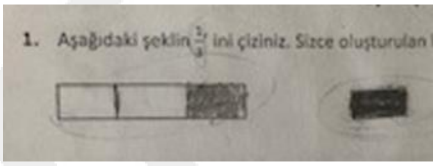
4.1.1.1 Uzunluk Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Uzunluk modeline ilişkin soruda öğrencilere *Aşağıdaki şeklin* $\frac{1}{3}$*' ini çiziniz. Sizce oluşturulan her bir parça bütünün ne kadarıdır?*



şeklinde bir soru sorulmuştur. Bu soruda Ö5 kodlu öğrenci $\frac{1}{3}$'i olduğunu düşündüğü parçayı ayrı çizerken diğer öğrencilerin tamamı bütünün üzerinde ilgili parçayı tarayarak göstermişlerdir. Bu öğrencilerden Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö6, Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrencilerin çizdiği şekildeki parçaların her birinin neredeyse eş olduğu, Ö7, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin elde ettiği parçaların farklı büyüklüklerde olduğu, Ö5 kodlu öğrencinin ise parçayı ayrı çizdiği gözlenmiştir. Öğrencilerin çizdiği şekillere örnekler Tablo 4.1'de sunulmuştur.

Tablo 4. 1. Parça Bütün Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Uzunluk Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Birbirine neredeyse eş parçalar oluşturma	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö6, Ö8, Ö9, Ö10	
Birbirinden farklı büyüklükte parçalar oluşturma	Ö7, Ö11, Ö12	
Parçayı ayrı çizme	Ö5	

Öğrencilerin istenilen kesri şekille gösterdikten sonra görüşme esnasında öğrencilerin tümüne, ek olarak "*Çizdiğin şeklin* $\frac{1}{3}$ *olduğuna emin misin?"* sorusu sorulmuştur. Bu soruya Ö2, Ö6, Ö8 ve Ö12 kodlu öğrenciler "*Evet* $\frac{1}{3}$*'tür*" cevabını verirken Ö1, Ö4, Ö7, Ö9, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrenciler ise "*Hayır tam* $\frac{1}{3}$ *değildir*" cevabını vermişlerdir. Ö5 kodlu öğrenci ise tam emin olmadığını belirtmiş fakat soruyu çözüm aşamasında materyal ile kendince bir ölçme aleti oluşturarak bütünü parçalamaya çalıştığı gözlemlenmiştir Bu öğrenciyle geçen diyalog ise şu şekildedir.

Ö5: Tam emin değilim ama uçla yaptım.

A: Uçla nasıl yaptın?

Ö5: Önce ucu açtım sonra bir parça kadar onu kırdım ona göre de bunu (ek parça) *çizdim.*

A: Neden uç kullandın?

Ö5: Hepsinin eşit olması için.

Öğrenci bir ucu parçalayarak her parçanın eş olmasını amaçlamış, bunun nedenini ise bir parçanın kesir ifade edebilmesi için parçaların eşit olması olarak belirtmiştir. Ö1, Ö4, Ö9 ve Ö11 kodlu öğrenciler ise bir "*ölçme aleti*" olmadığı için bütünü eş parçalayamadıklarını bu nedenle de tam 3 te 1 elde edemediklerini ifade ederken, Ö4, Ö7 kodlu öğrenciler Ö10 kodlu öğrencinin "*Bu parça bu parçadan daha büyük görünüyor, eşit görünmüyor*" cevabına benzer cevap vererek, bütünü parçalayıp elde ettikleri 3 parçayı karşılaştırdıklarını ve 3 parçanın birbiriyle aynı olmamasından dolayı çizdikleri şeklin $\frac{1}{3}$ olmadığını düşünmüşlerdir. Öğrenci cevapları bize öğrencilerin bütünü parçalarken dikkat ettikleri en önemli noktanın eş parçalar elde etmek olduğunu göstermiştir.

Çizdikleri şeklin 3'te 1 olduğunu düşünen öğrencilerden Ö6 ve Ö8 kodlu öğrenciler $\frac{1}{3}$ kesrinin 3 parçadan 1'i olduğunu düşünürken Ö2 kodlu öğrenci, Ö12 kodlu öğrencinin de cevabına benzer şekilde "*Payda parçayı böldüğü kısmı gösterir, pay ise aldığımız kısmı. Ben de 3'e bölüp 1 parçasını almışım*." cevabını vermiştir. Bu öğrencilerin ifadelerinden parçaların eşliğinin önemsemedikleri düşünülse de Ö2, Ö6 ve Ö8 kodlu öğrencilerin çizdikleri şekil açısından eş parçalar elde etmek istedikleri ve bu model için öğrencinin kesri parça bütün olarak değerlendirdikleri düşünülebilir. Diğer öğrencilerden farklı olarak öğrencilere görüşmelerde sorulan "*Çizdiğin şeklin* $\frac{1}{3}$ *olduğuna emin misin*?" sorusuna Ö3 kodlu öğrenci "*Eş parçalar halinde bölmeye çalıştım. Yani göz kararıyla… İlk önce böyle hayali bir çizgi düşündüm aklımda sonra onları birleştirince 3 te 1 olmuştur büyük ihtimalle*" şeklinde cevap vermiştir. Buradan öğrencinin kesri parça bütün anlamının dışına taşıdığını ve elde ettiği ilk parçayı tekrar edip birleştirerek bütünle kıyasladığı düşünülebilir. Bu öğrencinin parçalı birim kesir düzeneğinde kritik olan tekrarlama işlemini zihinden de olsa yaptığı ve bütünle kıyaslama yaparak parçanın $\frac{1}{3}$ olduğunu kontrol ettiği söylenebilir.

Ek olarak öğrencilere çizdikleri parçaları tekrarlayarak aynı bütünü tekrar elde edip edemeyecekleri sorulmuştur. Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö8, Ö9 ve Ö12 kodlu öğrenciler elde edebileceklerini belirtirken, Ö1, Ö7, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrenciler ise elde edemeyeceklerini ifade etmişlerdir. Ö1 ve Ö11 kodlu öğrenciler göz kararı parçalama yaptıkları için parçaların eş olmadığını bu nedenle herhangi birinin tekrarının bütünü oluşturmayacağını düşünmüşlerdir. Ö10 kodlu öğrenci de benzer şekilde parçaların eşit olmamasından dolayı aynı bütünü oluşturamayacağını söylerken, Ö7 kodlu öğrenci ise "*Edemeyiz, bir parçası olmamış olur o zaman*" şeklinde cevap vermiştir. Buradan öğrencinin parçayı ayırma işlemini zihninde tam olarak canlandıramadığı, durumu algılayamadığı anlaşılabilir. Bu açıdan öğrencinin bu model için parça bütün zihinsel düzeneğini inşa edemediği söylenebilir.

Çizilen parçaları tekrarlayarak aynı bütünü elde edebileceğini düşünen öğrencilerden Ö4 ve Ö5 kodlu öğrenciler, çizdikleri şeklin 1 parça olduğunu ve bunun tekrar edilmesiyle aynı parçalardan oluşan 3 parçalık bir şekil elde edeceklerini bu nedenle aynı bütünü elde edebileceklerini ifade etmişlerdir. Bir parçanın 3 te 1 ifade etmesine odaklanan öğrenciler ise aşağıdaki gibi cevaplar vermişlerdir.

Ö2: Evet bu parçayla oluşur, bu $\frac{1}{3}$ *çünkü.*

Ö3: Yani nasıl söylesem $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ *olur bu da zaten 3 te 3 olur. Yani 1 tam olur.*

Ö6: 3 tane $\frac{1}{3}$*'ü toplarsak* $\frac{3}{3}$ *yani 1 tam yapar.*

Ö8: Bundan 2 tane daha olduğunda zaten 3 te 3 oluyor o da bir bütün. Her biri de $\frac{1}{3}$.

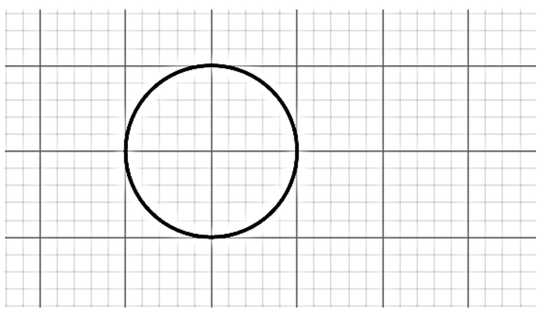
Ö9: Yani hepsini toplarsak evet

Ö12: Bu 3 te 1 olduğu için aynısını tekrar çizeceğimden olur, o parçalarda 3 te 1'dir.

Buradan öğrencilerin bir bütünü 3'te 1'lik 3 parçadan oluşan bileşik bir birim olarak gördüğü anlaşılabilir. Fakat Ö12 kodlu öğrenci dışındaki öğrencilerin söylemlerinden yineleme işlemini kullanıp kullanamadıkları anlaşılamamaktadır. Ö12 kodlu öğrencinin ise 3'te 1'i 3 parçadan 1'i olarak tanımlaması ve çizdiği şekil itibariyle öğrencinin parça bütün düzeneğinin ötesine geçtiği düşüncesine engel olmaktadır.

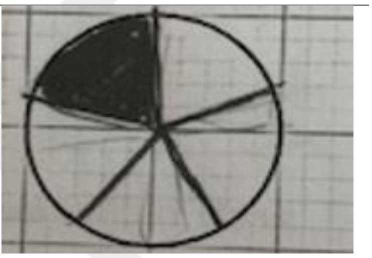
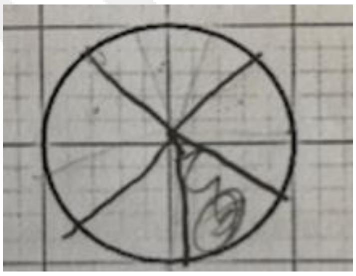
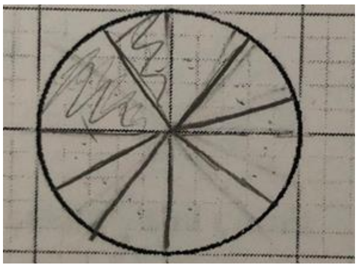
4.1.1.2 Alan Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Bu modele ilişkin soruda öğrencilere *Aşağıda verilen bir pizza, 5 arkadaş arasında her kişinin* $\frac{1}{5}$ *lik dilim alacağı şekilde paylaştırılacaktır. Bir kişinin yiyeceği pizza ne kadardır? Şekil üzerinde gösteriniz.*



şeklinde bir soru sorulmuştur. Bu soruya ilişkin cevaplar incelendiğinde ise Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö8, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrencilerin daireyi 5 eş parçaya ayırmaya çalıştıkları, Ö3 ve Ö4 kodlu öğrencilerin ise verilen kesri genişleterek denk kesre göre parçalama yaptıkları gözlenmiştir. Ö7 kodlu öğrencinin 5 eş parçaya ayırmanın zor ve uzun olacağı düşüncesiyle, Ö9 kodlu öğrenci "*Yuvarlak olduğu için tam bölünmüyor*" ve Ö12 kodlu öğrencinin benzer şekilde "*Yuvarlakların köşeleri olmadığı için olmayabilir*" şeklindeki açıklamalarıyla bu model için eş parçalama yapamayacaklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin çizimlerine örnek şekil ve stratejiler Tablo 4.2'de sunulmuştur.

Tablo 4. 2. Parça Bütün Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Alan Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Bütünü 5 eş parçaya bölme	Ö1,Ö2, Ö4, Ö5,Ö6, Ö8, Ö10	
Bütünü 5 eş parçadan farklı şekilde parçalama	Ö7, Ö9, Ö11, Ö12	
Kesri genişleterek ona göre bütünü parçalama	Ö3, Ö4	

Öğrencilerden sadece Ö1 kodlu öğrencinin alan vurgusu yaptığı tespit edilmiştir. Ö1 kodlu öğrenciyle geçen diyalog ise aşağıdaki gibidir;

Ö1:Ben bunu 5 tane eşit parçaya bölemem.

A: Neden bölemezsin?

Ö1: Çünkü bunun toplam alanını bulup 5'e bölmem lazım eş parçalar oluşturmam için ama herhangi ekstra bir bilgi yok kaç birim falan diye. Hesaplamam için yardımcı bir şey yok.

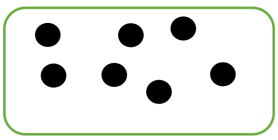
Bu durumda öğrencinin alan modeli hakkında bilgi sahibi olduğu düşünülebilir. Fakat öğrencinin alanı sayısal olarak hesaplayamadığından şeklin eş parçalarını bulmasının da zor olduğunu belirterek alanın anlamının farkında olmadığı, alanı illaki sayısal bir değer olarak düşündüğü söylenebilir.

Öğrencilerin genelinin 5'te 1'lik ifadesinden dolayı daireyi eş parçalara ayırmaya çalıştıkları gözlenmiştir. Ö3 ve Ö4 kodlu öğrencilerin ise verilen kesri genişleterek parçalama yapmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Ö4 kodlu öğrenci bu işlemi "*5 te 1'lik demiş yani bunu 5'e ya da 5'in katlarına bölmemiz lazım.*" şeklinde açıklamış, Ö3'ün çizdiği şekil incelendiğinde ise öğrencinin şeklin 5'te 1'ini taramak yerine 10'da 2'sini taradığı görülmüştür. Bu durum da muhtemelen öğrencilerin daireyi eşit olarak parçalamak istediğinde onu tek sayıya bölmenin çift sayıya bölmeye göre daha olduğunu düşünmesi olabilir. Fakat şekli incelendiğinde bölünen parça büyüklüklerinin pek de eşit olmadığı görülmektedir. Ö2 ve Ö6 kodlu öğrenciler ise şekli önce 4'e bölerek bunların her birini küçültüp 5. parçayı elde ettiklerini belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin de amacı diğer öğrenciler gibi eş parçalar elde etmek olduğu söylenebilir. Bu anlamda bu öğrenciler için, bütünü 5 eş parçaya bölerek bir parçasını taramaları bu soru için parça bütün zihinsel düzeneğini yapılandırdıkları söylenebilir.

Ayrıca Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrenciler 5 eş parçadan birini alma işlemini sırasıyla "*Şu kadarı 5'de 1'lik kısım. Yani 5 eşit parçaya böldüm 1'ini aldım*", "*5 eşit bütüne bölünüp yani parçaya bölünüp 1 parçanın alınması", "Çünkü 5 te 1, 5 eş parçaya bölünüp birinin boyanması"* ifadeleriyle açıklamışlardır. Öğrencilerin cümlelerinden bu model için kesri parça bütün olarak algıladıkları düşünülebilir.

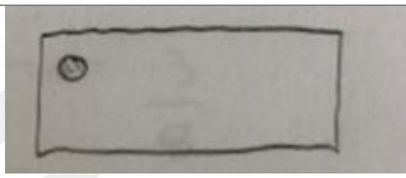
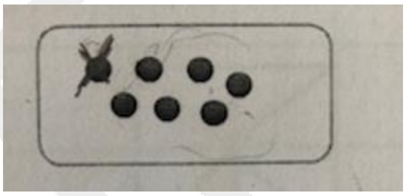
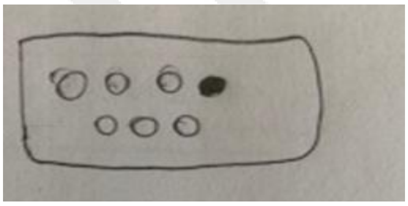
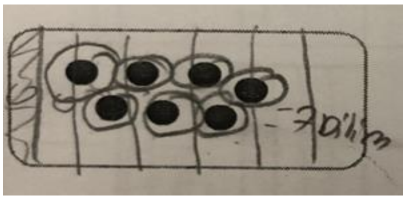
4.1.1.3 Küme Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Küme modelinde ise öğrencilere *Aşağıdaki şekil Doğa'nın tabağında yer alan elmaların sayısını göstermektedir. Poyrazın tabağında ise Doğa'nınkinin* $\frac{1}{7}$*'i kadar elma olduğuna göre Poyraz'ın elmalarının sayısını temsil eden şekli çiziniz.*



şeklinde bir soru sorulmuş ve öğrenci cevapları incelendiğinde Ö1, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8 ve Ö9 kodlu öğrencilerin ayrı bir tabak çizerek bunun içine 1 elmayı temsilen bir şekil çizdikleri, Ö2 ve Ö12 kodlu öğrencilerin verilen şekil üzerinden birini işaretlediği, Ö10 kodlu öğrencinin verilen şeklin aynısını çizerek birini taradığı, Ö11 kodlu öğrencinin ise sürekli bir model gibi düşünerek parçalama yaptığı ve Ö6 kodlu öğrencinin ise uzunluk modelinden yardım alarak bir yeni bütünü oluşturduğu tespit edilmiştir. Öğrenci verilerinden elde edilen bulgular Tablo 4.3'de sunulmuştur.

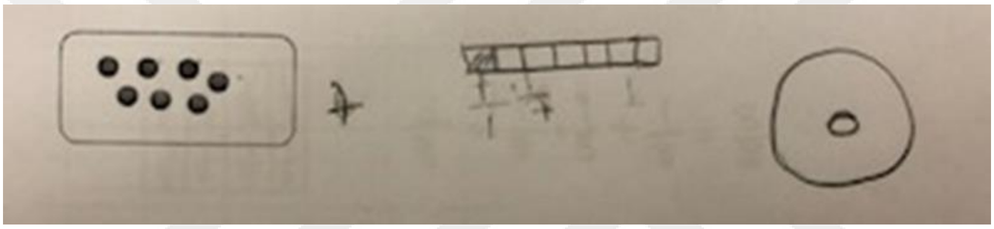
Tablo 4. 3. Parça Bütün Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Küme Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Ayrı bir şekil çizme	Ö1, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9	
Verilen şekilden birini tarama	Ö2 ve Ö12	
Verilen şeklin aynısını çizerek bir tane şekli tarama	Ö10	
Sürekli model gibi işlem yapma	Ö11	

Ö2, Ö3, Ö6 ve Ö8 kodlu öğrenciler ilk olarak verilen şekildeki eleman sayısı ile istenilen kesri çarparak 1 sayısını elde etmişlerdir. Öğrencilerin geneli soruda "*nın*" ekinin yer almasından dolayı ilk olarak çarpma işlemi yapmaları gerektiğini düşünürken, Ö3 kodlu öğrenci ise "*miktarın miktarı*" sorulduğunda çarpma işlemi yapacağını ifade etmiştir. Bu anlamda öğrencilerin ilk olarak düzenekten farklı olarak ezbere işlem yaptıkları söylenebilir.

Öğrencilerden verilen şekli referans alarak açıklama yapmaları istendiğinde ise; Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9 kodlu öğrenciler elma sayısını 7'ye bölerek 1 tanesini aldıklarında 7'de 1'i elde edeceklerini ifade etmişlerdir. Ö2 kodlu öğrenciye benzer şekilde Ö7 kodlu öğrenci de "*Hepsini ilk önce 7'ye böldüm.7 parçaymış gibi düşündüm bunları. Hepsi bir bütünmüş 7'ye böldüm. O da 1 tane oluyor*" şeklinde açıklama yapmıştır. Ö10 kodlu öğrenci ise "*Payda 1 dediği için. Zaten bunlar bir bütün 7 eş parçaya bölünmüş, birini de almamız gerekiyordu*" şeklindeki ifadesiyle paydayı parçalama sayısı payı ise alınan sayı olarak düşündüğü söylenebilir. Aynı zamanda öğrencilerin verilen bütünü 7 parçaya ayırarak 7'de 1'i elde etmeleri ve bir parçayı ayırma işlemini kullanmaları açısından öğrencilerin bu soru için parça bütün zihinsel modelini kullandıkları düşünülebilir.

Bu öğrencilerden farklı olarak Ö6 ve Ö11 kodlu öğrenciler küme modeli dışında farklı modeller kullanarak çözmeyi tercih etmişlerdir. Bunlardan Ö6 kodlu öğrencinin çizdiği şekil Şekil 4.1'te verilmiştir.



Şekil 4. 1. Parça-bütün kesir zihinsel düzeneğinin küme modelinde Ö6 kodlu öğrencinin çizimi

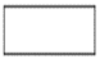
Ö6 kodlu öğrencinin bu çizimiyle zorlandığı bir modeli daha alışkın olduğu model yardımıyla anlaşılır hale getirmeye çalıştığı düşünülebilir. Öğrenci küme modeli yerine uzunluk modelini kullanarak çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Ö11 kodlu öğrenci de Tablo 4.1'deki şekli çizmiş olup öğrenci çiziminde kümeyi uzunluk modeline dönüştürmeye çalışarak modeller arası yanlış aktarım yapmıştır. Ö12 kodlu öğrenci diğer kişinin 7 de 6 alacağını düşünmüş sonrasında ise soruyu yapamayacağını belirtmiştir. Bu öğrencilerin işlemleri ile bağlantılı olarak düzenek için kritik işlemleri bu modelde kullanamadıkları söylenebilir.

4.1.2 Parçalı Birim Kesir Düzeneğine İlişkin Bulgular

Bu kategoride yukarıda verilen üç sorudan farklı olarak parçalı birim kesir düzeneği için kritik olan parçadan bütüne ulaşma işlemine ilişkin dört soru sorulmuştur. Bu sorulardan iki tanesi uzunluk bir tanesi alan bir tanesi de küme modeli ile ilgilidir. Bir bölümleme şeması olarak, bir eş parçalamanın temel amacı eşit (ve özdeş) bölümler üretmek, bir kesir düzeneği olarak, bir bölümsel birim kesir zihinsel düzeneğinin temel amacı, yineleme yoluyla bütüne göre büyüklüğü belirlemektir. Bu kategoride öğrencilerden verilen parçayı ölçü birimi olarak referans alıp bütünü elde etmeleri beklenmiştir. Bu düzeneğe sahip öğrenciler bütünü elde ederken kullandıkları yineleme sayısının bölümlenmemiş bütüne göre kesrin büyüklüğünü belirlediğini anlar (Steffe ve Olive, 2010). Yani parçalı birim kesir düzeneği, birim kesir ile bütün arasında bir seviyede birim koordinasyonunu içerir. Steffe'ye (2002, s. 292) göre, parçalı birim kesir düzeneği "*parça ile bölümlenmiş bütün arasında bire çok ilişkisi kurar*".

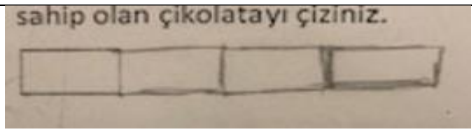
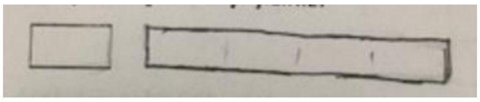
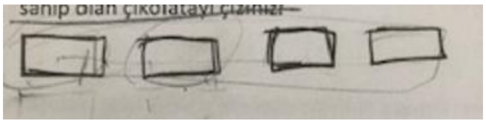
4.1.2.1 Uzunluk Modeline İlişkin Sorulara Ait Bulgular

Uzunluk modelini içeren soru *Aşağıdaki şekil bir çikolatanın belli bir parçasını göstermektedir. Bu parçanın 4 katı uzunluğuna sahip olan çikolatayı çiziniz.*



sorusunda öğrencilerden verilen parçayı yineleyerek bir bütün oluşturmaları beklenmiştir. Bu soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde Ö1, Ö3, Ö6, Ö7, Ö9 ve Ö12 kodlu öğrencilerin verilen parçayı farklı bir yere kopyalayarak sonrasında ise bu parçadan hareketle bir bütün elde ettikleri Ö4, Ö5, Ö8, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrencilerin ise verilen parçayı dahil ederek bir bütün oluşturdukları gözlemlenmiştir. Ö2 kodlu öğrenci ise önce verilen parçanın üç kopyasını oluşturmuş sonrasında ise ilk olarak bu kopyaların birleşimini çizdiği halde sonra kendiliğinden fikrini değiştirerek parçaları ayrık çizdiği gözlenmiştir. İlgili kategoriler ve örnek çizimler Tablo 4.4'de yer almıştır.

Tablo 4. 4. Parçalı Birim Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Uzunluk Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Parçayı Dahil Etme	Ö4, Ö5, Ö8, Ö10, Ö11	
Parçayı Dahil Etmeme	Ö1, Ö3, Ö6, Ö7, Ö9, Ö12	
Parçaları Ayrık Çizme	Ö2	

Ö2 kodlu öğrenci ilk olarak birleşik çizdiği halde sonra 3 ayrı parça çizen Ö2 kodlu öğrenci ile şu şeklide bir diyalog yaşanmıştır;

Ö2: Bu bir bütün bunlar da birer bütün.

A: Yani 4 katı oldu mu?

Ö2: Bunların birleşmesi bunun tek başına halinin 4 katı.

Parçaları neden ayrı çizdiğini açıklamayan öğrencinin bütünü elde etmek için parçaları birleştirmesi gerektiğinin farkında olduğu fakat verilen şekli parçadan ziyade bütün olarak değerlendirdiği için birleştirme işlemi yapmadığı düşünülebilir. Sorunun çözümüne de "*Bu 1 tam ben bunu kesir olarak da yazabilirim yani* $\frac{1}{1}$ *gibi şekille de gösterebilirim"* şeklindeki açıklamasıyla da verilen şekli bütün olarak değerlendirdiği anlaşılabilir. Benzer şeklide, Ö4 kodlu öğrencinin "*Burada 4 katı demiş buna* (verilen parçaya) *1 dersek bundan 4 tane olması lazım*" şeklindeki ifadesiyle verilen şekli bütün olarak değerlendirdiği düşünülebilir.

Bu öğrencilerden farklı olarak verilen parçanın 4'de 1'lik bir parçayı ifade ettiğini düşünen Ö3 kodlu öğrenci ile geçen diyalog aşağıda verilmiştir;

Ö3: Ben burada şuraya hayali bir çizgi koydum yani az görünen (ilk çizdiği dikdörtgenin bitimindeki çizgi*), sonra bu çizginin yanına da dikdörtgenin aynısından düşündüm ve böyle ilerledim.*

A: Peki aynısı olduğuna nasıl karar verdin?

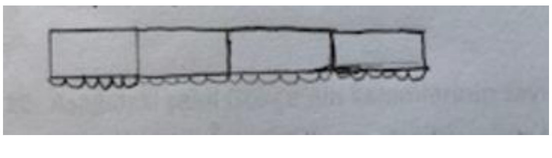
Ö3: Çünkü 4 katı uzunluğu diyor. 4 katı dediği için hani 4 te 1'inin 4 tanesi gibi.

Öğrencinin açıklamalarından dört birimden oluşan birleşik bir bütün elde ettiği sonucuna varılabilir. Aynı zamanda verilen parçayı 4'te 1 olarak ifade etmesi parçalı birim kesir zihinsel düzeneğinin yapılanması açısından da önemli bir adımdır (Tunç Pekkan, 2016). Ö1 kodlu öğrenci de "4 katı" ifadesinin parçadan 4 tane olması gerektiğini anlattığını belirtmiş ve yaptığı işlemi "*bir parçayı 4 tane yan yana koyarak birleştirip bir bütünü elde ettim.*" şeklinde açıklamıştır. Ö5 kodlu öğrenci ise "*Bu 1 parça 4 katı 4x1'den 4*" şeklindeki ifadesiyle 4 aynı parçadan oluşan bir bütün elde ettiğini açıklamıştır. Benzer olarak "*Çünkü bu 1 tane bunu 4 ile çarparsak 4 olur*" şeklinde açıklama yapan Ö9 kodlu öğrencinin ise parçayı "1" olarak ifade etmesi verilen parçayı bütün olarak algıladığını çağrıştırsa da öğrencinin 4 parçadan oluşan birleşik bir bütün çizdiği gözlemlenmiştir.

Diğer öğrencilerden farklı şekilde 5 parçalık ayrı bir bütün çizen Ö6 kodlu öğrenci ise ilk olarak verilen parçayı kopyaladığını sonra bu parçadan da 4 tane çizdiğini ifade etmiştir. Parçayı dahil etmemesini ise "*Bu parçanın* (nın ekini vurgulayarak) *4 kat uzunluğu demiş çünkü yani bu parçayı dahil etmeyeceğiz*" olarak açıklamıştır. Diğer öğrencilere göre farklı bir strateji izleyen Ö7 kodlu öğrenci ise ilk olarak alt alta 3 parça daha çizip sonrasında bu 4 parçayı yan yana "*hayal ederek*" birleştirdiğini ifade etmiştir. Önce bütünü oluşturacak parçaları çizen öğrenci uzunluk dediği için yan yana birleştirmesi gerektiğini alt alta yaparsa "en" olacağını düşünmüştür. 4 katı dediği için 4 parça daha çizmesi gerektiğini düşünen Ö12 kodlu öğrenci ise parçaların birleşim çizgilerini "*çizgileri silersem 4 katı uzunluğunda çizmiş olurum"* ifadesiyle bütün elde etmek için arada çizgilerin olmaması gerektiğini düşünmüştür.

Öğrencilerin tamamı diğer parçaları ilk parçaya göre çizmeleri gerektiğinin farkındadırlar. Ö6 ve Ö12 kodlu öğrenciler sadece dikdörtgen çizmesinin yeterli olacağını düşünürken Ö11 kodlu öğrenci şeklin altına yarım çemberler çizerek ilk şeklin uzunluğunu belirlemiştir. Örnek olarak Ö11 kodlu öğrenci ile geçen diyalog ve Ö11 kodlu öğrencinin çizdiği şekil aşağıda sunulmuştur

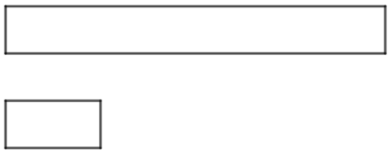
> Ö11: *Bir parçanın 4 katı olması için bu parçadan 4 tane olması lazım. Burada da 4 katı dediği için ben de bundan* (Şekil 4.2) *4 tane olan bir parça çizdim 4 katı dediği için.*
>
> *A: Nasıl yaptın?*
>
> *Ö11: Yuvarlaklarla, hepsini eşit boyda çizmeye çalıştım. 6 tane yuvarlak. Her birini 6 tane yuvarlak çizmeye çalıştım zaten alt taban ile üst tabanda aynı olmuş oluyor.*
>
> *A: Peki neden yuvarlakları çizdin?*
>
> *Ö11: Tam 4 katı demiş. Mesela 4 katı olsun ama şu kadar da eksik olsun diyebilirdi ama dememiş tam 4 katı olarak vermiş. Sadece 4 katı dediği için, elimde 2 lira olsun bunun 4 katı 8 lira yapar. Burada da mesela bir tanesi 2 cm ise hepsini 2 cm hesaplayıp dizmiş oluyorum. Yani verilene eş olarak çiziyorum.*



Şekil 4. 2. Parçalı birim kesir zihinsel düzeneğinin uzunluk modelinde Ö11 kodlu öğrencinin çizimi

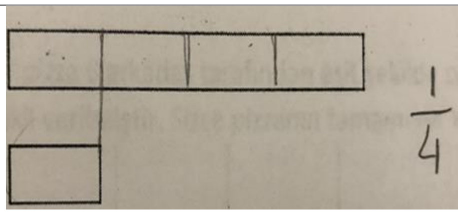
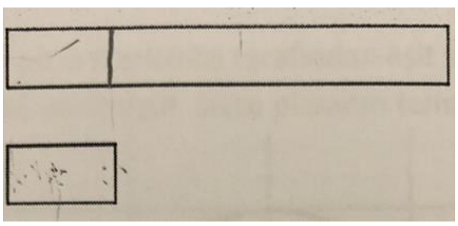
Öğrencinin çizimi ve ifadeleri incelendiğinde öğrenci için eş parçaların bu soru için önemli olduğu görülmektedir.

Uzunluk modeli ile ilişkili olarak verilen *Aşağıda bir bütün pasta ve pasta dilimi gösterilmektedir. Buna göre dilimin pastanın kaçta kaçı olduğunu bulunuz.*



şeklindeki diğer soruda bir bütün ve buna ait bir parça verilerek bu parçanın bütünün kaçta kaçı olduğunu bulmaları istenmiştir. Parçalı birim kesir düzeneği için kritik görülen tekrarlama işleminin kullanılması bu soru açısından da önemli görülmektedir (Norton ve Wilkins, 2009). Bu soru kapsamında öğrencilerden küçük şeklin büyük şeklin içerisinde tekrarlayarak kesir değerini belirlemeleri beklenmektedir. Soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde ise Ö12 kodlu öğrenci dışında tüm öğrencilerin parçanın büyüklüğünü belirleyerek bütünün parçanın ne kadarı olduğunu belirlemeye çalıştıkları ve bütünü verilen dilime göre parçaladıkları tespit edilmiştir. Ö12 kodlu öğrenci ise verilen parçanın ölçü birimi olarak kullanılmasını gerektiğini ifade etse de bütünü bu parçadan hareket ederek bütünü parçalayamamıştır. Ö12 kodlu öğrencinin şekli ve diğer öğrencilerin kullandığı stratejiye ilişkin şekil Tablo 4.5'te sunulmuştur.

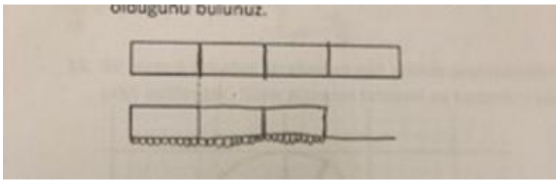
Tablo 4. 5. Parçalı Birim Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Uzunluk Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Parçadan hareketle bütünü parçalama	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7; Ö8, Ö9, Ö10, Ö11	
Bütünü parçalayamama	Ö12	

Ö12 kodlu öğrenci dışındaki diğer öğrenciler çizdikleri şekil itibariyle her ne kadar tekrarlama işlemi yapmış gibi görünseler de öğrencilerin kullandıkları sözel ifadeler incelendiğinde; Ö2 kodlu öğrenci, iki şekli eşitleyerek küçüğün "*ölçüsünü belirlediğini*" buna göre de büyük şekli parçaladığını, Ö3, Ö4, Ö6, Ö9 kodlu öğrenciler ise bir parçanın uzunluğunu belirledikten sonra diğerlerini ona göre belirlediklerini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin bu ifadeleri ile tekrarlama işlemini kullandıkları söylenebilir.

Küçük şekli ölçü birimi olarak kullanan öğrencilerin izlediği yöntemler incelendiğinde ise, Ö5, Ö8 ve Ö10 kodlu öğrencilerin kalem, kalem ucu gibi materyaller kullanarak parçanın uzunluğunu belirlemeye çalıştıkları, Ö11 kodlu öğrencinin ise yarım çemberler çizerek sonuca ulaşmaya çalıştığı gözlenmiştir. Ö7 kodlu öğrenci de ritim tutturarak bulabileceğini ifade etmiştir. Diğer öğrenciler herhangi bir strateji geliştirmese de öğrencilerin çizdikleri şekiller ve kullandıkları sözel ifadeler, bu öğrencilerin de tekrarlama işlemini kullandıklarını göstermiştir. Materyal kullanan öğrencilerden Ö10 kodlu öğrenci "*kalemin ucuyla parçanın boyutunu belirlediğini buna göre yanındakileri çizdiğini*" ifade ederken, materyal kullanan Ö5 ve Ö8 kodlu öğrenciler ise "*parçayı eş parçalamalar yapmak için ölçtüklerini*" ifade etmişlerdir. Bu anlamda Ö5 ve Ö8 kodlu öğrencilerin ifadeleri tekrarlama işlemi yaptıklarını düşünmek için yeterli görülmemiştir. Ö7 kodlu öğrencinin ise önce parmağı ile küçük şekli ölçtüğü sonrasında buna göre diğer parçaları elde ettiği görülmüştür. Öğrenci yaptığı bu işlemi, "*Parmağım 5 cm oda 5 cm 5cm gidiyor gibi düşündüm. Yani yan yana bir ritim tutturmuşum gibi yan yana yapıyorum*." şeklinde açıklamıştır. Kendince strateji geliştiren öğrencilerden Ö11 kodlu öğrenci ise verilen şeklin altına yarım çemberler çizerek onun ölçüsünü belirlemiştir. Bu öğrenciyle neden bu şekilde yaptığına ilişkin yaşanan diyalog aşağıda sunulmuştur.

> *Ö11: Yukarıda bütün verilmiş aşağıda bir parçası yukarıda bölünmüş kısmını göstermemiş. Biz bunu bulmak için mesela bir silgi var kaç tane olduğunu bulmak için silgiyi silginin üstüne koyarak bulabiliriz. Bir tane ölçtüm bir tane daha bir tane daha diye düşünerek kaçıncısıymış acaba diye bulabiliriz*. (Şekil 4.3)
>
> *A: Aşağıdaki yuvarlakları niye çizdin peki?*
>
> *Ö11: İlk önce göz kararı yapmaya çalıştım ama eşit olmayacağını düşündüm. Eşit olmasaydı bunlar kaçta kaçı olduğunu bulamazdık gibi o yüzden.*

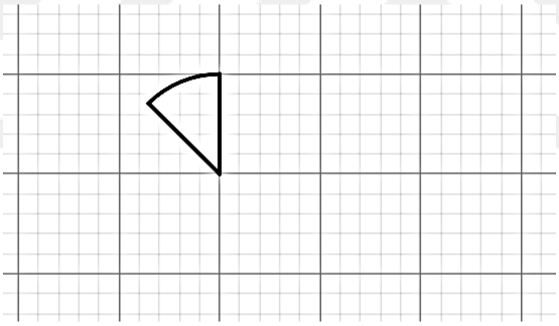


Şekil 4. 3. Parçalı birim kesir zihinsel düzeneğinin uzunluk modelinde Ö11 kodlu öğrencinin çizimi

Öğrencinin "*bir tane daha bir tane daha*" ifadeleri ve izlediği strateji açısından yineleme işlemini kullandığı söylenebilir. Tekrarlama işlemini kullanan bu öğrencilerin bu modelle ilgili olarak parça birim zihinsel düzeneğine sahip oldukları düşünülebilir. Ö12 kodlu öğrencinin ise çizdiği şekilden de anlaşılacağı gibi herhangi bir tekrarlama işlemi yapmadığı tespit edilmiştir. Öğrenci yeterli bilgi olmadığı için bunu bulamayacağını ifade etmiştir.

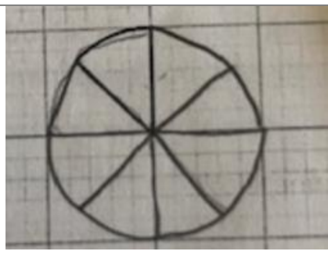
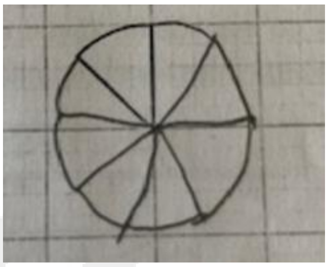
4.1.2.2. Alan Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Alan modeli ile ilişkili olarak öğrencilere *Aşağıda daire şeklinde bir kartondan kesilen* $\frac{1}{8}$ *'lik bir parçanın şekli verilmiştir. Kartonun tamamını temsil eden şekli çiziniz.*



sorusu sorularak öğrencilerden bir parçası verilen bütünün tamamını çizmeleri istenmiştir. Soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde öğrencilerin tamamının 8 parçalık, 8'de 8'e denk bir bütün çizmeleri gerektiğinin farkında ve buna göre çizim yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin çizdiği şekiller incelendiğinde ise genelinin bütünün parçalarının farklı büyüklüklerde çizdiği belirlenirken Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrencilerin diğerlerine göre eş parçalara yakın parçalar çizdiği tespit edilmiştir. Öğrenciler parça bütün kategorisinde daire modeli ile verilen soruda olduğu gibi bu soruda da daire modelini çizmenin zor olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin şekillerinin örnekleri Tablo 4.6'da sunulmuştur.

Tablo 4. 6. Parçalı Birim Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Alan Modelindeki Sorulara İlişkin Bulgular

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Eş parçalamaya yakın	Ö1, Ö2, Ö4,Ö5, Ö6, Ö9, Ö10	
Farklı büyüklükte parçalar	Ö3, Ö7,Ö8, Ö11, Ö12	

Ayrıca öğrencilerin bütünü elde ederken kullandıkları yöntemlerde farklılıklar olduğu tespit edilmiştir. Örneğin Ö1, Ö3, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö12 kodlu öğrencilerin verilen dilimin aynısından 7 tane daha çizerek 8 parçalık bütünü oluşturmaya çalıştıkları, Ö2, Ö4, Ö6 ve Ö10 kodlu öğrencilerin ise ilk olarak bütünü çizip onu 8'e böldükleri tespit edilmiştir.

7 parça daha çizen öğrencilerden Ö1 kodlu öğrencinin "*Bize bir parça vermiş bu 8 de 1'likmiş. Ve tamamını istemiş bizden. Yani bu parçadan 8 tane olan. Yani 8 tane daha 8 de 1'lik parça oluşması gerekiyor. Her iki parça bir karenin içine geliyor daireyi devam ettirdiğimizde, eğer birini karenin dışına doğru çizseydim son çizeceğim küçük olurdu ve eş olmazdı*" şeklindeki ifadeleri, Ö3 kodlu öğrencinin "*Yani şey 8'de 1'lik parçanın aynısını çizin diyor.*" ifadeleri ve Ö9 kodlu öğrencinin "*Bu 8'de 1 miş. Bu parçadan 7 tane daha çizerek tamamını oluşturabiliriz. Bu parçadan bakarak diğerlerini çizdim*" şeklindeki açıklamaları bu öğrencilerin ölçme birimi olarak verilen parçayı kullandıkları ve bu parçanın tekrarlanması ile bütünün elde edileceğinin farkına oldukları düşünülebilir. Bu anlamda öğrencilerin birim kesrin yinelenmesi ile bütünü elde edebileceklerinin farkında olmalarından dolayı bu model türü için parçalı birim kesir düzeneği oluşturdukları söylenebilir. Yedi parça daha çizerek bütünü oluşturan öğrencilere neden 7 parça daha çizdikleri sorulduğunda Ö5 kodlu öğrenci "*Tamamı 8 parçadır bunun*", Ö8 kodlu öğrenci "*8'de 8, 1 tam çünkü*" ve Ö12 kodlu öğrenci "*Bizden tamamını istiyordu. Tamamını çizdik yani 8 parça*" cevaplarını vermişlerdir. Öğrencilerin bu cevapları parçaların tekrarından ziyade parça sayısına odaklandıkları söylenebilir. Benzer şekilde verilen dilimin

3,5 kareye yerleştiğini belirleyen ve buna göre diğer parçaları çizen Ö7 kodlu öğrencinin "*Çünkü her bir parça eşit olmak zorunda diye düşündüm. Zaten yüksekliği eşit, sonra 3,5 kare şeklinde açılacak bir üçgen olacak. O yüzden hepsini 3,5 kare alırsam aynı üçgen şekli olur*." şeklindeki cevabıyla eş parçalar elde etmeye çalıştığı söylenebilir.

Önce bütün çizip sonra 8 parçaya bölen öğrencilerden Ö2 kodlu öğrenci ilk olarak kalan 8 de 7'lik parçayı çizmesi gerektiğini ifade etmiş sonrasında ise bütünü çizerek 8'e böldüğü gözlemlenmiştir. Öğrencinin "*Bu 8'de 1'i tamamı 8'de 8 yani 8'e bölmek demek 8 eş parçaya ayırmak demektir. Burada 8 parçaya bölünmüş 1'i alınmış*" şeklindeki açıklaması parça bütün ilişkisine işaret etmiştir. Benzer işlem yapan Ö4 ve Ö10 kodlu öğrenciler yaptıkları işlemleri aşağıdaki gibi açıklamışlardır.

> *Ö4: Çünkü 8'de 1'i. Şuralardan* (dairenin yerleştiği 4 kareyi göstererek) *yola çıktım ben yine. Buraları şöyle bölünce 8'de 1'lik oluyor.*
>
> *Ö10: Köşelere değdirmek… Bu 8'de 1'iymiş bunu da içine katarak bir yuvarlak çizdim. Ortada bir çizgi olduğu için her bir yarım daireyi 4'e böldüm.*

Ö10 koldu öğrenci neden 8 parça çizdiğini ise *"Bu 8'de 1'miş bunun tamamı 8'de 8 olur"* şeklinde açıklamıştır. Ö6 kodlu öğrenci ise diğerlerinden farklı olarak önce verilen dilimin aynısını çizmiş, buradan çeyrek daire elde etmesi gerektiğini fark ederek bütün oluşturmuştur. Sonrasında ise çeyrek daireleri 2'ye bölerek 8 parça elde ettiğini belirten öğrenci bunu "*Ben 4 parça oluşturmuştum 8 parça dediği için 2'ye böldüm*" şeklinde ifade etmiştir. Öğrenciye yaptığı işlemlerin nedeni sorulduğunda "*parçaların eşit olması*" gerektiğini "*Çünkü bana 8'de1'lik parça verilmiş 8'de 8 çizebilmem için bundan 7 tane daha çizmem gerekir*." olarak açıklamıştır. Bu anlamda öğrencinin birim kesri tekrarlanabilir birim olarak gördüğü ifade edilebilir. Öğrenciler 8'de 8 elde etmek istediklerini bunun için de burada verilen parçadan 8 tane olması gerektiğini ifade etmişlerdir.

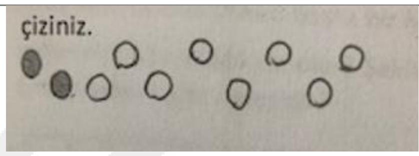
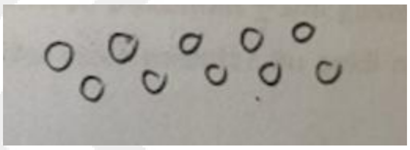
Öğrencilerin şekil çizme yöntemleri incelendiğinde ise öğrenciler alan vurgusu yapmasa da Ö2, Ö4, Ö7, Ö9, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrenciler şeklin altındaki birim karelerden yola çıkarak bütünü oluşturdukları gözlemlenmiştir.

4.1.2.3 Küme Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

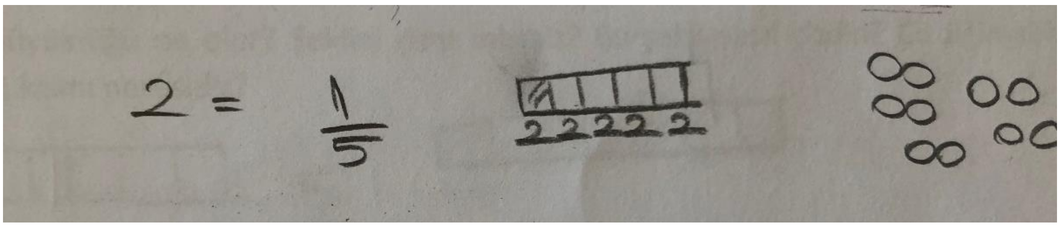
Küme modeli ile ilgili olarak öğrencilere *Aşağıda Ali'nin bilyelerinin sayısının* $\frac{1}{5}$*' i verilmiştir. Ali'nin bilyelerinin tamamını temsil eden şekli çiziniz.*

sorusu sorularak öğrencilerden, $\frac{1}{5}$'i 2 tane olan topların tamamını çizmeleri istenmiştir. Bu soruya ilişkin öğrencilerin çizdiği şekiller incelendiğinde Ö3, Ö5, Ö8, Ö10 kodlu öğrencilerin verilen şekilleri dahil ederek Ö1, Ö2, Ö4, Ö6, Ö7, Ö9, Ö12 kodlu öğrencilerin ise dahil etmeden 10 toptan oluşan bütünü oluşturdukları tespit edilmiştir. Bulgulara ilişkin veriler Tablo 4.7'de sunulmuştur.

Tablo 4. 7. Parçalı Birim Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Küme Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Verilen şekli dahil etme	Ö3, Ö5, Ö8, Ö10	
Verilen şekli dahil etmeme	Ö1, Ö2, Ö4, Ö6, Ö7, Ö9, Ö12	

Öğrencilerin yaptıkları işlemler incelendiğinde ise Ö1, Ö2, Ö4 ve Ö5 kodlu öğrencilerin çarpma işlemi yaptığı, Ö7, Ö8, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin 2 topun 5'te 1'e denk olmasından hareketle bütünü oluşturdukları ve Ö6 kodlu öğrencinin de uzunluk modelinden yardım alarak bütünü elde ettiği tespit edilmiştir. Öğrencilerden Ö6 kodlu öğrencinin bu soruya ilişkin cevabı Şekil 4.4'de verilmiştir.



Şekil 4. 4. Parçalı birim kesir zihinsel düzeneğinin küme modelinde Ö6 kodlu öğrencinin çizimi

Şekil 4.4 incelendiğinde öğrencinin küme modelini daha alışkın olduğu uzunluk modelinden yardım alarak daha anlaşılır hale getirerek çözüme ulaştığı görülmüştür. Çizdiği şekil öğrencinin daha çok parça bütün ilişkisi kurması ile ilişkilendirilebilir. Aynı zamanda "*2 parça varmış* $\frac{1}{5}$*'e eşitmiş.* $\frac{1}{5}$*'lik bir şekil çizdim. Bir parça 2'ye eşitmiş. O yüzden her bir parçanın altına 2 yazdım topladım 10 oldu*" ve "*Tamamını diyor onunla birlikte 5 tane almam lazım*" şeklindeki açıklamaları öğrencinin işlemlerinin parça bütün zihinsel işlemin kapsayacak şekilde olduğu söylenebilir.

Çarpma işlemi yapan öğrenciler bütünü elde etmek için öncelikle verilen nesnenin sayısını yani 2 topu belirleyerek sonrasında top sayısını bütünün parça sayısı ile yani 5 ile çarptıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin soruda yer olan topu ilk olarak bir bütünün biriminden ziyade bir sayı olarak algıladıkları düşünülebilir. Bu öğrencilere neden çarpma işlemi yaptıkları sorulduğunda ise; Ö1 kodlu öğrenci "*5'lik bir bütün içinde 1 taneyi vermiş ve bu da 2'ye denk gelmiş. 5'lik bütünü elde etmek için de 5 tane 2'yi topluyoruz*." cevabını, Ö2 kodlu öğrenci "*Şöyle Ali'nin bilyelerinin* $\frac{1}{5}$*'i demiş bu da bir bütünün 5 parçaya bölünüp 1 tanesinin alınması. Bu da eğer eşit ise 2 bilyeye demek ki 1 parça 2 bilye demektir*." cevabını vermiştir. Bu öğrencilerin açıklamaları parça bütün ilişkisi kurmaları ile daha çok ilişkilendirilirken Ö4 kodlu öğrencinin "*5'te 1'i 2 tane ise 2, 2, 2 diye devam eder*" şeklindeki açıklaması ise tekrarlama işleminin varlığına işaret eder. Benzer şekilde 5'te 1'lik parçaların tekrarı gibi düşünen öğrencilerden Ö7 kodlu öğrenci yaptığı işlemi "*Bu 5'te 1 ise yine yerleştirdim çikolata sorusu gibi.* (Çizdiği şekilleri göstererek) *5'te 1, 5'te 1, 5'te 1..5'te 5 oldu. Birleştirince de 5'te 5 oluyor.."* şeklinde açıklarken Ö8 kodlu öğrenci ise ikili çizimler yaparak "Bu 5'te 1 ise bu 5'te 2' dir bu 5'te 3, bu 5' te 4 bu da 5' te 5." olarak açıklamıştır. Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler de benzer işlem yaparak;

> *Ö11: 5'te 1'i 2 tane ise 5'te 5'i kaç yapar diye düşündüğümde yani 2, 2, 2 olarak hesapladığımda 10 tane yapıyor. Şu 5'te 1 şöyle 5' te 2, 5'te 3, 5'te 4 ve 5'te 5. Bu kesrin üzerinden yani bu kesrin tamamını istiyorsa 10 tane yapıyor.*
>
> *Ö12: Burada Ali'nin bilyelerinin 5' te 1' i çizilmiş. Burada da tamamının çizilmesi istenmiş. Hemen çizelim, şöyle 5' te 1' i, 5' te 2' si, 5 te 3'ü, 5 te 4'ü şöyle de 5 te 5'i. (ikişer ikişer çizdi)…Tamamı 5.*

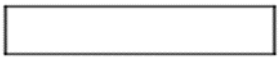
Şeklinde benzer ifadeleri kullanmışlardır. Bu anlamda bu öğrencilerin tekrarlama işlemini kullanmalarıyla yani birim kesri tekrar etmeleri ile bağlantılı olarak bu model için parçalı birim kesir düzeneğini kullandıkları düşünülebilir.

4.1.3 Basit Parçalı Kesir Düzeneğine İlişkin Bulgular

Bu düzeneğe ilişkin ilk olarak verilen bütünün istenilen kesir kadarını bulmakla ilgili dört, bir kısmı temsilen verilen bütünün tamamını bulmakla ilgili üç olmak üzere toplamda yedi soru sorulmuştur. Uzunluk, küme ve alan modellerinde istenilen kesri elde etmeye ilişkin dört sorunun bulguları bu bölümde, diğer üç sorunun bulguları ise tersine işleyen basit kesir düzeneği altında sunulacaktır. Bu kategoride öğrencilerden beklenen kritik işlemler parçalama, ayırma ve yinelemedir (Steffe, 2010). Yani öğrencilerden ilk olarak bütünü eş parçalara ayırmaları sonrasında ise bir parçayı ayırıp tekrar ederek istenen kesri elde etmeleri beklenmektedir. Bu kategoriye ilişkin bulgular şu şeklidedir.

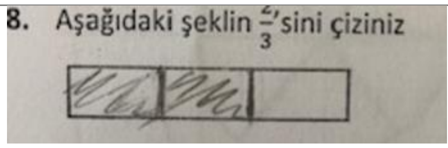
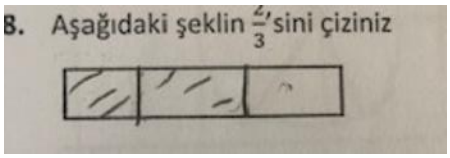
4.1.3.1 Uzunluk Modeline İlişkin Sorulara Ait Bulgular

Uzunluk modeli ile ilgili olarak öğrencilere *Aşağıdaki şeklin* $\frac{2}{3}$ *'sini çiziniz.*

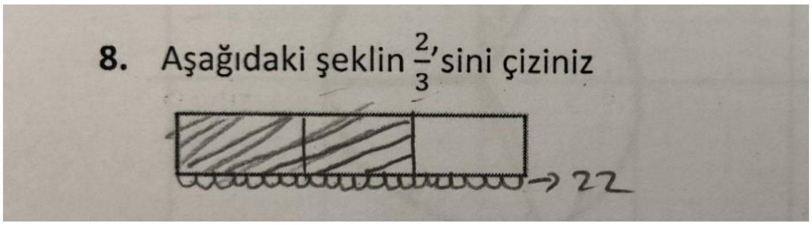


sorusu sorularak öğrencilerden uzunluk modeli ile verilen şeklin 3'te 2'sini göstermeleri istenmiştir. Bu soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde, öğrencilerin tamamı verilen şeklin 3'te 2 olduğunu düşündükleri kısmını taramışlardır. Öğrencilerin çizdiği şekiller incelendiğinde ise Ö2, Ö3, Ö4, Ö7, Ö8 ve Ö9 kodlu öğrencilerin çizdikleri parçaların tam eş olmasa da yakın oldukları, Ö1, Ö5, Ö6, Ö10,Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin ise çizdikleri parçaların farklı büyüklüklerde olduğu gözlenmiştir.

Tablo 4. 8. Basit Parçalı Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Uzunluk Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Eşe yakın parçalar çizme	Ö2, Ö3, Ö4, Ö7, Ö8,Ö9	
Eş olmayan parçalar çizme	Ö1, Ö5, Ö6, Ö10, Ö11, Ö12	

Öğrencilerin izlediği adımlar incelendiğinde ise Ö1, Ö2, Ö3, Ö5, Ö7, Ö9 ve Ö11 kodlu öğrencilerin öncelikle eş parçalar oluşturmaya çalıştıkları gözlenmiştir. Bunlardan Ö3 ve Ö9 kodlu öğrenciler eş parçalama yapmak istediklerini fakat cetvel gibi herhangi bir ölçme aletlerinin olmamasından dolayı eş parçalar oluşturamayacaklarını ifade ederken Ö7 kodlu öğrenci de kareli kağıt olsa eşit parçalar oluşturabileceğini fakat bu durumda göz kararı ile çizdiği parçalara eşit gibi davrandığını belirtmiştir. Ö11 kodlu öğrencinin ise diğer öğrencilerden farklı bir yol izleyerek eş parçalar oluşturmaya çalıştığı tespit edilmiştir. Bu öğrenciye ait çizim Şekil 4.5'de sunulmuştur.



Şekil 4. 5. Basit parçalı kesir zihinsel düzeneğinin uzunluk modelinde Ö11 kodlu öğrencinin çizimi

Öğrencinin verilen şeklin altına yarım çemberler çizerek şeklin uzunluğunu belirlemeye çalıştığı görülmüştür. 22 tane şekil çizen öğrencinin bunu 3'e bölerek yaklaşık bir değer elde ettikten sonra parçalama yaptığı gözlenmiştir. Öğrencinin bu işlemi yapmaktaki amacının eş parçalar elde etmek olduğu belirlenmiştir. Benzer şekilde Ö5 kodlu öğrenci de kalem ucunu kullanarak şeklin uzunluğunu belirlediğini buna göre de şekli parçaladığını ifade etmiştir.

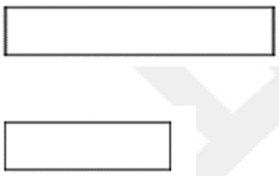
Öğrencilerle yapılan mülakatlarda yaptıkları işlemlere ilişkin açıklamaları şu şekildedir:

> *Ö1:Bir bütünün içinden 3 eş parçadan ikisini almamızı istiyor.*
>
> *Ö2:Kesrin açıklaması şöyle 3 parçaya böl ikisini al. Bende 3 eşit parçaya böldüm 2 sini aldım.*
>
> *Ö4:Bir şeyi 3'e bölmüşsün 2'sini taramışsın ya da almışsın gibi bir şey oluyor.*
>
> *Ö6:2/3 demiş yani paydada 3 var. 3 parçaya ayır ikisini al diyor.*
>
> *Ö8: Bana 3 tane bölüp 2 tane tarayacağımı söylemiş, 3 te 2 demiş.*
>
> *Ö9: 3'e bölüp 2 parçasını aldığımızda 3'te 2 yapar.*
>
> *Ö12:3 parçanın ikisini istiyor.*

Öğrencilerin açıklamaları ve işlemleri tekrarlama işlemini kullanmaları ilişkilendirilemediği için öğrencilerin bu soru için düzeneği kullanmadıkları söylenebilir. Ayrıca öğrencilere taradıkları parçanın bir tanesinin neye denk olduğu sorulduğunda ise hepsi "$\frac{1}{3}$" cevabını vermiştir. Diğer öğrencilerden farklı olarak Ö3 kodlu öğrencinin "*Bir parça 3'te 1. 3'te 2 oluştururken 2 parça alıyoruz*" şeklindeki cevabı öğrencinin 3'te 2'yi 3'te 1'lik iki parça olarak gördüğünü düşündürtse de öğrencinin tekrarlama işlemi yaptığına ilişkin bir bulguya rastlanmamıştır. Öğrencilerin verdiği cevaplardan da anlaşılacağı üzere öğrenciler 3'te 2 kesrini

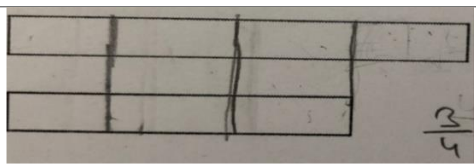
3 eş parçadan 2’si olarak kavramsallaştırmışlardır. Bu açıdan öğrencilerin bu soru için zihinsel düzeneğin basit parçalı kesir düzeneğinden ziyade parça bütün zihinsel düzeneği şeklinde olduğu söylenebilir. Steffe (2003) iki düzenek arasındaki farkı “*Parça-bütün düzeneklerinde* $\frac{3}{5}$*, bütünü oluşturan 5 eşit parçadan 3 parçayı oluşturmakta iken parçalı düzeneklerde* $\frac{3}{5}$*, bütünle büyüklük ilişkisi olan* $\frac{1}{5}$*'in üç kez yinelenmesidir*” şeklinde açıklamıştır. Bu soru için birim kesri ölçme birimi olarak kullanmamalarının yani öğrencilerin bu düzeneği oluşturamamalarının nedeni bu soru tarzı ile öğrencilerin küçük yaşlardan itibaren karşılaşmaları ve karşılaşma durumlarında da çözümü bu şekilde görmeleri olarak düşünülmektedir.

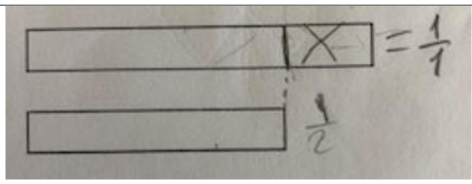
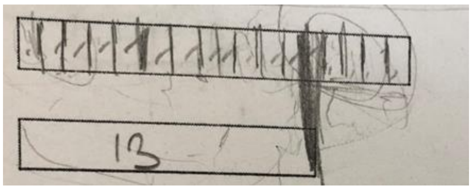
Uzunluk modeline ilişkin olarak öğrencilere *Aşağıda büyük dikdörtgen bir bütün pastayı, küçük dikdörtgen ise büyük dikdörtgenden kesilen pasta dilimini temsil etmektedir. Buradan yola çıkarak dilimin pastanın kaçta kaçı olduğunu yazınız.*



şeklinde ikinci bir soru daha sorularak öğrencilerden küçük şeklin büyük şeklin kaçta kaçı olduğunu belirlemeleri istenmiştir. Bu soruya ilişkin cevaplar incelendiğinde ise öğrencilerin tamamının ilk olarak iki şekli eşitleyecek bir çizgi çektikleri belirlenmiştir. Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrencilerin “kalan parça” olarak adlandırdığı iki şekil arasındaki uzunluk farkını kendilerine ölçme birimi olarak belirledikleri tespit edilmiştir. Ö5 kodlu öğrenci ise ilk olarak uzun şekli parçalamış sonrasında kısa olanın uzunun ne kadarlık kısmına denk geldiğini hesaplayarak “ $\frac{13}{17}$” cevabını vermiştir. Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler de diğerlerinden farklı olarak "$\frac{1}{2}$" cevabını vermişlerdir. Öğrencilerin çizdikleri şekillerle ilgili örnekler Tablo 4.9’da sunulmuştur.

Tablo 4. 9. Basit Parçalı Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Uzunluk Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Kalan Parçayı Referans Alma	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö10	

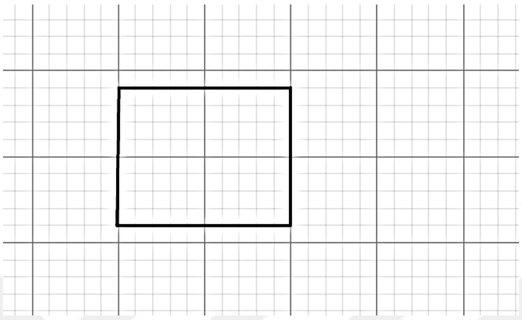
$\frac{1}{2}$ olarak düşünme	Ö11, Ö12	
Bütünü Parçalara Ayırma	Ö5	

Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrencilerin "*kalan parça*" olarak adlandırdığı iki şekil arasındaki uzunluk farkını kendilerine ölçme birimi olarak belirledikleri tespit edilmiştir. Öğrencilere neden "*kalan parçayı*" kullandıkları sorulduğunda bu işlemi yapan öğrencilerin tamamı "*o parçanın bütünün bir parçası olduğunu bu nedenle diğer parçaların da bu parçaya eş olması*" gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu parçaya göre diğer parçaları nasıl elde ettikleri sorulduğunda ise Ö1 ve Ö3 kodlu öğrenciler kalan parçanın aynısını, göz kararı çizerek elde ettiklerini belirtirken Ö4 kodlu öğrenci "*Kalemle çizerek, onu da aklımda tutuyorum. Çizerken belli bir yol gidiyor diğerleri de o kadar yol gidecek onu da elimle ayarlamaya çalışıyorum"* şeklinde açıklamış, Ö6 kodlu öğrenci "*parçayı yatırmış*" gibi hayal ettiğini, Ö7 kodlu öğrenci "*bu parçayı katlıyormuş gibi*" hayal ettiğini ifade etmiştir. Ö10 kodlu öğrenci ise "*Bu* (parça) *burada* (bütünde) *olsaydı diye hayal ediyorum. Bu çizgiyi onun uzunluğu kadar hayal ederek ileriye alıyorum*" şeklinde açıklamıştır. Bu öğrencilerin açıklamaları ve çizimlerinden yola çıkarak öğrencilerin bir yineleme stratejisi geliştirdikleri yani basit parçalı kesirle ilişkili işlemleri kullandıkları ifade edilebilir.

Yineleme ve eşitleme ile bir ilişki oluşturan bu öğrencilerden farklı olarak Ö2 kodlu öğrenci üstteki şeklin 4'te 4, alttaki şeklin 3'te 3 olduğunu, Ö8 kodlu öğrenci ise üsttekinin 4'te 3, alttakinin 3'te 3 olduğunu ifade etmiştir. Ö2 kodlu öğrenci sonrasında yanlış düşündüğünü ifade ederek bir parçanın 4'te 1 olduğunu alttakinin de 3 parça olmasından dolayı 4'te 3 olması gerektiğini belirtmiştir. Ö8 kodlu öğrenci ise üstteki şeklin bir parçasının 4'te 1 alttakinin bir parçasının ise 3'te 1'i ifade ettiğini belirtmiştir. Bu öğrencinin yorumundan alttaki şekli üstekinin bir parçası olarak düşünemediği şekilleri iki farklı şekil gibi algıladığı düşünülebilir. Benzer şekilde yanlış cevap öğrencilerden Ö5, kodlu öğrenci ilk olarak uzun şekli parçalayarak kısa olanın ne kadarlık kısmına denk geldiğini bulmuştur. Öğrencinin bu işlemi bölme ve yineleme işlemlerinin koordinasyonundan ziyade bütün içindeki parça sayısına odaklanması ile ilgili yorumlanabilir. Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler ise şeklin 2'ye bölündüğünü düşünerek $\frac{1}{2}$ cevabını vermişlerdir. Sonrasında ise verilen şeklin kalana göre uzun olduğunu bu nedenle bunun da olmayacağını düşünmüş fakat cevabı bulamayacaklarını belirtmişlerdir.

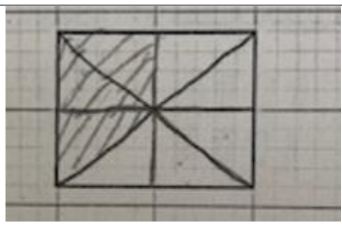
4.1.3.2 Alan Modeline İlişkin Sorulara Ait Bulgular

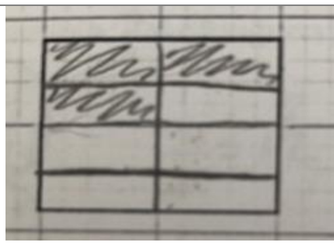
Alan modelinde ise öğrencilere *Aşağıda verilen büyüklükteki bir keki 8 arkadaş eşit şekilde paylaşacaktır. 3 kişiye düşen toplam kek miktarı ne kadardır? Şekille gösteriniz ve açıklayınız.*



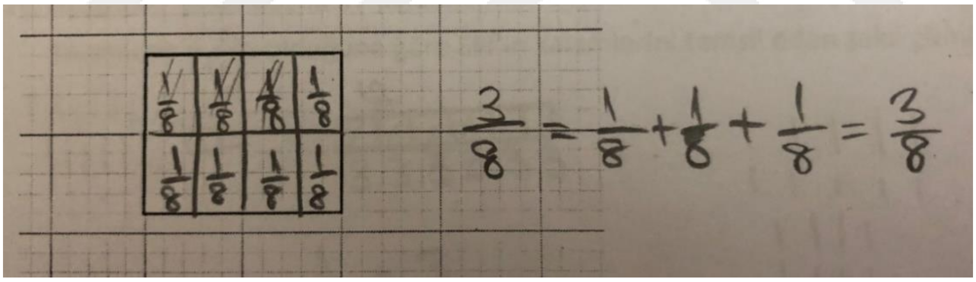
sorusu sorularak öğrencilerden kareli kağıt üzerinde verilen karenin $\frac{3}{8}$'i bulmaları istenmiştir. Bu modelde de öğrencilerin tamamı verilen şekil üzerinde tarama işlemi yapmışlardır. Öğrencilerin ilk olarak kritik işlemlerden biri olan eş parçalama işlemini yaptıkları bunun için de farklı stratejiler izledikleri belirlenmiştir. Bu açıdan öğrenci cevapları incelendiğinde öğrencilerin parçalama yaparken karenin alanını dikkate almadığı büyük çoğunluğun köşegenlerden faydalanarak parçalama yaptığı, diğer öğrencilerin de şeklin yerleştirildiği kareli kâğıttan hareketle parçalama yaptıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin çizdikleri şekillere ilişkin örnekler Tablo 4. 10' da sunulmuştur.

Tablo 4. 10. Basit Parçalı Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Alan Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Köşegenlerden faydalanma	Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö7, Ö9, Ö12	

Boyuna veya enine bölme	Ö3, Ö6, Ö8, Ö11	

Ayrıca öğrencilerin tamamının herhangi bir genişletme yapmadan bütünü 8 eş parçaya ayırdıkları gözlenmiştir. Aynı zamanda bütün öğrenciler bir parçanın $\frac{1}{8}$’e denk olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat öğrencilerin çoğunluğunun bu kesri elde etmek için $\frac{1}{8}$’i yani birim kesri kullanmadığı görülmüştür. Birim kesir ile basit kesir ilişkisine vurgu yapan öğrencilerden Ö9 kodlu öğrenci bir parçanın 8’de 1 olduğunu ve bundan 3 tane alınması gerektiğini vurgulamıştır. Ö12 kodlu öğrenci ise “*Bir kişiye 8’de 1 düştüğüne göre 3 kişiye 8’de 1, 8’de 1, 8’de 1, 8’de 3 olur.”* şeklindeki açılama yaparken, Ö6 kodlu öğrenci de Şekil 4.6’de yer verilen şekli çizerek yaptığı işlemi “*Her biri 8’de 1 oluyor. 3 arkadaş için de 3 tane 8’de 1’lik parçayı toplayınca 3/8 oluyor”* olarak açıklamıştır. Bu öğrenciler her ne kadar birim kesri kullanmış olsalar da öğrencilerin işlemleri yineleme veya çarpma işlemleri ile ilişkilendirilememiştir.



Şekil 4. 6. Basit parçalı kesir zihinsel düzeneğinin alan modelinde Ö6 kodlu öğrencinin çizimi

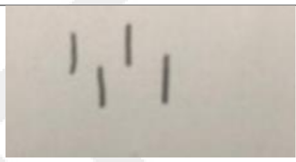
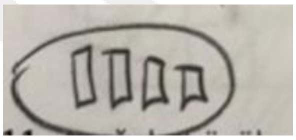
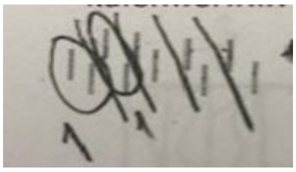
Diğer öğrencilerin ise yaptığı işlemler ve “*8 arkadaş eşit dediğine göre bu paydadır.8 parçaya böleceğim ve bunların hepsi eşit olacak, sonra bunu 3 kişi alacak*”, “*8 eş parçaya böldüm sonra 3 tanesini taradım*”, “*8 eş parçaya böleriz bunu. Buradan da 3 tanesini tararsak 3 kişiye düşen dilimi buluruz.*” şeklindeki açıklamaları öğrencilerin bu model için de kesri 8 eş parçadan 3’ü olarak düşündükleri ve yine bu soru için de parça bütün ilişkisi kurdukları söylenebilir.

4.1.3.3 Küme Modeline İlişkin Sorulara Ait Bulgular

Küme modeline ilişkin problem şeklinde verilen *Aşağıdaki şekil Gökçe’nin kalemlerinin sayısını temsil etmektedir. Emre’nin kalem sayısı Gökçe’nin kalemlerinin* $\frac{2}{5}$ *’si olduğuna göre Emre’nin kalemlerini temsil eden şekli çiziniz.*

sorusunda öğrencilerden 10 kalemin 5’te 2’sini temsil eden şekli çizmeleri istenmiştir. Öğrencilerin bu soruya ilişkin çizimleri incelendiğinde ise Ö11 kodlu öğrenci dışında öğrencilerin tamamının verilen şekilden ayrı olarak şekli çizdiği gözlenmiştir. Ö11 kodlu öğrenci bir sonuç elde edememiş ve yeni bir şekil çizememiştir. Ö8, Ö10 ve Ö12 Kodlu öğrenciler verilen nesnelere benzer şekiller çizerken kodlu öğrenciler ise verilenlerden daha farklı nesneler çizmeyi tercih etmişlerdir. Ö1, Ö2, Ö3, Ö8 ve Ö10 kodlu öğrenciler ise verilen şeklin üzerinde gruplama yapsalar dahi istenilen şekli verilen bütünden ayrı bir yere çizmişlerdir. Bulgulara ilişkin veriler Tablo 4.11’de sunulmuştur.

Tablo 4. 11. Basit Parçalı Kesir Zihinsel Düzeneği İçin Öğrencilerin Küme Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Benzer nesneler kullanma	Ö1,Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö8, Ö10	
Farklı nesneler kullanma	Ö2, Ö7, Ö9	
Verilen şekil üzerinde gruplama	Ö1, Ö3, Ö8 ve Ö10	

Öğrenci çözümleri incelendiğinde Ö1 kodlu öğrencinin 5’li 2 grup oluşturarak, Ö3 kodlu öğrencinin ise 2’li 5 grup oluşturarak bütünü parçaladığı ve Ö2, Ö5 Ö7, Ö8, Ö10 ve Ö12 kodlu öğrencilerin ise kalemleri 5’e bölüp bir parçayı buldukları gözlemlenmiştir. Bunun dışında Ö4 kodlu öğrencinin çarpma işlemi yaptığı, Ö9 kodlu öğrencinin kesri genişleterek, Ö6 ve Ö11 kodlu öğrencilerin ise uzunluk modeli ile ilişkilendirerek istenilen kesri elde etmeye çalıştıkları fakat Ö11 kodlu öğrencinin farklı bir sonuç elde ettiği gözlenmiştir. Öğrencilerin çizdikleri şekiller incelendiğinde ise Ö11 kodlu öğrenci dışında tüm öğrencilerin 4 tane çubuk çizdiği görülmüştür. Ö11 kodlu öğrenci ise 5’te 2’nin 10 kaleme eşit olduğunu düşünerek 5’te 3’lük kısmı bulması gerektiğini düşünmüş ve 10 kalemi 2’ye parçalayarak bir parçanın 5 kaleme böylece 3 parçanın da 15 kaleme eşit olduğunu ifade etmiştir. Öğrencinin sorunun problem şeklinde verilmesinden dolayı soruyu yanlış anlayabileceği düşünülerek soru farklı şekillerde tekrar sorulmuş fakat öğrenci çözümün yine bu şekilde olacağını ifade etmiştir.

Ö1 kodlu öğrenci izlediği yöntemden kaynaklı olarak yanlış sonuç elde etmesi gerekirken doğru sonuç elde etmiştir. Öğrencinin bu durumu tam olarak nasıl düşündüğü açıklamalarından anlaşılamasa da yaptığı işlemler itibariyle öğrencinin birim kesir elde ederek bu kesri oluşturma düşüncesi olmadığı açıktır. Benzer şekilde birim kesri kullanma düşüncesinden uzak hareket eden öğrencilerden Ö2, Ö6 ve Ö8 kodlu öğrenciler ise sürekli niceliklerde olduğu gibi bir bütünü önce 5'e bölerek bir parçasını sonra buradan hareketle de 2 parçanın neye denk olduğunu bularak parça bütün düzeneğini kullanmışlardır. Bu durumu Ö2 kodlu öğrenci "*Çünkü 5'te 2'si demiş. Yani 5'e böl 2'yi al demiş*" şeklinde Ö8 kodlu öğrenci "*Payda 5, o yüzden 5'e bölmem gerekiyor. 5'te 2 demek 5'e bölüp 2'sini almak demek. Bende öyle yaptım*" şeklinde açıklamıştır. Ö9 kodlu öğrencinin de paydanın bütünü temsil ettiğini düşünerek kesri genişletme işlemi yaptığı gözlenmiştir. Öğrenci *"Bu kalem sayısı kesrin alt tarafındaki sayıyı temsil ettiği için"* açıklamasıyla genişletme yaptığını ifade etmiştir.

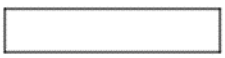
Ö5, Ö7, Ö10 ve Ö12 kodlu öğrenciler ise verilen şekli 5'e parçalayarak 5'te 1'lik parça elde ettiklerini ifade etmişlerdir. Ö12 kodlu öğrenci bu konuda *"Burada 10 kalem var. Bunu ilk olarak 5'e böleriz 2 çıkar. 5'te 1'i 2 kalem olduğuna göre 5'te 2 için 2 ile 2'yi çarparız cevap 4 olur."* açıklamasını yapmıştır. Bu öğrenciler düzenek için kritik olan işlemleri sözel olarak ifade etmeseler de öğrencilerin çarpma işlemini kullanmış olmaları yineleme işlemi ile ilişkilendirilebilir. Bu açıdan öğrencilerin bu model için düzeneği kullandıkları düşünülebilir.

4.1.3.1 Tersine İşleyen Basit Kesir Zihinsel Düzeneği

Öğrencilere bu kategoride uzunluk, alan ve küme modellerinin her birinden 1 tane olacak şekilde toplam 3 soru sorulmuştur.

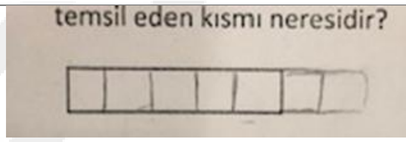
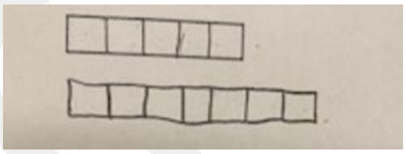
4.1.3.1.1 Uzunluk Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Uzunluk modeline ilişkin sorulan *Aşağıdaki hediye paketi başka bir hediye paketinin* $\frac{5}{7}$ *sini göstermektedir. Buna göre diğer hediye paketinin büyüklüğü ne olur? Şeklini çizer misiniz? Bu şekli nasıl çizdin? Çizdiğin şeklin birimini temsil eden kısmı neresidir?*



sorusunda öğrencilerden $\frac{5}{7}$'si verilen bütünün kendisini çizmeleri istenmiştir. Bu soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde ise Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrencilerin ilk olarak verilen şekli 5'e böldükleri sonrasında ise Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrencilerin verilen şekle iki parça ekleyerek, Ö3, Ö6, Ö7 ve Ö9 kodlu öğrencilerin ise bir parçayı ayırıp bu parçayı tekrarlayarak 7'de 7'lik bir bütün oluşturdukları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin çizdikleri şekillere temsilen verilen şekil ve stratejiler Tablo 4.12'de sunulmuştur.

Tablo 4. 12. Tersine İşleyen Düzenek İçin Öğrencilerin Uzunluk Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
İki parça ekleyenler	Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö10, Ö11	
Farklı bir bütün çizenler	Ö3, Ö6, Ö7, Ö9	

Verilen şekle iki parça daha ekleyen öğrenciler ilk olarak bütünü 5 eş parçaya ayırarak bir parçanın büyüklüğünü bulmuş ve elde ettikleri bir parçaya göre de diğer 2 parçayı eklemişlerdir. Ö5 kodlu öğrenci verilen şekli neden 5'e böldüğünü *"Çünkü bu hediye paketi önde, ilk gelen yukarı yazılır sonra olan aşağı yazılır."* şeklinde açıklarken 2 parçayı eklememe nedenini ise "*7'lik bir hediye paketinin 5'lik hediye paketiymiş. 2 parçalık daha bir şey çizersem olur diye düşündüm. 7 lik paket çizmem için 7-5=2*" şeklinde ifade etmiştir. Benzer şekilde düşünen Ö10 kodlu öğrenci ile aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır.

A: Bu iki parçayı neye göre ekledin?

Ö10: Bu son parçanın aynısını çiziyormuş gibi hayal ettim.

A: Peki neden 2 parça?

Ö10:Burada 5 parça var 7 parça ile arasındaki fark 2 oluyor.

Öğrencilerin söylemleri şekli parça sayısı olarak değerlendirdiklerini buna göre de parça sayısını tamamlamaya çalıştıkları düşünülmüştür. Ö4 kodlu öğrenci de Ö5 ve Ö10 kodlu öğrenci gibi verilenin 5 parça tamamının ise 7 parça olduğunu ifade etmiştir. Bu öğrenciler bu düzenek için kritik olan işlemlerden parçalamayı yapsalar da parçalama işlemi ile eş zamanlı kullanılması beklenen yineleme işlemini kullanmamaları bu öğrencilerle ilgili bu soru için tersine işleyen düzeneğe sahip olmadıkları söylenebilir. Ö1, Ö2 ve Ö11 kodlu öğrenciler ise bu soru için izledikleri yol itibariyle parça bütün kullanmış gibi görünseler de bir parçanın 7'de 1 bütünün 7'de 7 olduğunu vurgulamaları aslında basit parçalı düzeneğe sahip olduklarına işaret etmiştir. Çünkü bu durum iki seviyeli birim koordinasyonu ile ilişkilendirilebilir. Yani öğrenciler birim kesri bulabilir ve bütünü birim kesrin yinelenmesi şeklinde ifade edebilir.

Soruda verilen şekil haricinde 2. şekil çizen öğrencilerin ise ilk olarak verilen şekli 5 eş parçaya ayırmaya çalıştıkları buradan da bir parçasını kopyaladıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin yaptıkları bu işlem bölme ve yineleme işlemleri ile ilişkilendirilebilir. Bu anlamda bölme ve yinelemenin birleşimi olan yarma işlemini kullandıkları düşünülen öğrencilerden Ö7 kodlu öğrenci ile geçen diyalog aşağıdaki gibidir.

Ö7: Bir parçayı buldum 7'de 7'yi bulmam lazım. Bu da 7'de 5 miş zaten. 7'ye değil 5'e bölme gereğinde bulundum. $\frac{5}{7}$ *ise bu da 5 parçası demek oluyor zaten. Bir parçayı aşağı indirdim sonra bir ritim tutturdum kalem itme hızına göre. Yine parçaları eşit uzunluktaymış gibi hayal ederek yaptım, sonra 7 de 7 oldu.*

A: Ritim tutturmak ne demek neden öyle yapıyorsun?

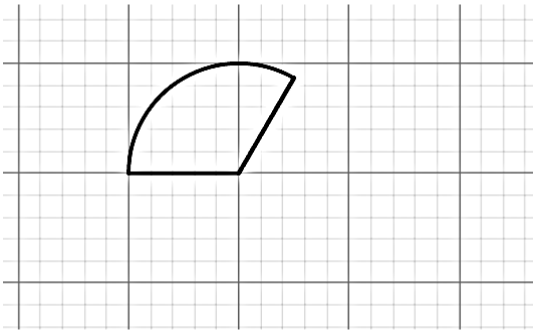
Ö7: Mesela uzun bir şekilde taaaak taaak kısa bir şekilde tak tak gibi, böylelikle uzunluklarını daha iyi belirliyorum.

Bu öğrencinin burada kullandığı "*taaaak taak*" ifadesi ile bir parçanın uzunluğunu belirlediği bunla ilişkili olarak da diğer parçaları çizdiği anlaşılabilir. Bu durumda öğrencinin parçalama ve yineleme işlemini bir arada kullandığı görüşüne paralellik gösterir.

Ö3, Ö6 ve Ö9 kodlu öğrenciler ise 2. şekli oluşturmak için önce verilen şeklin aynısını çizerek bu şekillere 2 parça daha eklemeyi tercih etmişlerdir. Ö9 kodlu öğrenci diğer öğrenciler gibi toplamda 7 parça olduğunu ifade ederken Ö3 ve Ö6 kodlu öğrenciler bütünün 7'de 7 olduğunu belirtmişlerdir. Ö6 kodlu öğrenci 2 parça eklemek işlemi yerine " $\frac{2}{7}$" eklemesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu öğrencilerden farklı olarak Ö8 kodlu öğrenci verilen şeklin 7'de 5'ini bulmaya çalışmıştır. Ö12 kodlu öğrenci ise bir parçanın 7'de 1 olduğunu ifade etmiş fakat bütünü elde etmek için bu parçanın 7 kere tekrarlanması gerektiğini düşünememiştir.

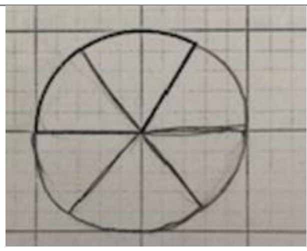
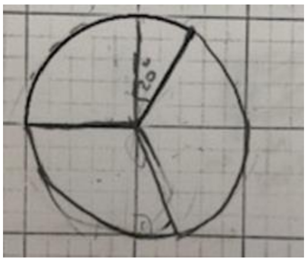
4.1.3.1.2 Alan Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Alan modeli ile ilgili olarak öğrencilere *Bir pizza 6 arkadaş tarafından eşit şekilde paylaşılmıştır. Aşağıda iki arkadaşın yediği pizza diliminin şekli verilmiştir. Sizce pizzanın tamamı ne kadardır? Şekille gösteriniz ve açıklayınız.*



sorusu sorularak öğrencilerden 6'da 2'si verilen bir şeklin tamamını bulmaları istenmiştir. Bu soruya ilişkin cevaplar incelendiğinde öğrencilerin farklı 2 strateji izledikleri belirlenmiştir. Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9, Ö10 ve Ö12 kodlu öğrenciler verilen parçayı 2'ye böldükten sonra elde ettikleri bir parçayı 6 kere tekrarlayarak Ö1, Ö2, Ö7, Ö11 kodlu öğrenciler ise şekilde verilen parçayı 3 kere tekrarlayarak bütünü elde etmişlerdir. Öğrencilerin çizimlerine ilişkin örneklere Tablo 4.13'te yer verilmiştir.

Tablo 4. 13. Tersine İşleyen Düzenek İçin Öğrencilerin Alan Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Verilen şekli ikiye bölerek bir parçasını tekrarlama	Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9, Ö10, Ö12	
Verilen şekli tekrarlayarak bütünü elde etme	Ö1,Ö2, Ö7, Ö11	

Öğrenciler farklı stratejiler kullansa da tamamının bir parçanın 6’da 1, bütününün ise 6’da 6 olduğunun farkında oldukları tespit edilmiştir. Verilen parçayı ikiye bölen öğrenciler “*iki eş parça”* elde etmek istediklerini belirtmiş olup eş parçalama yapmak için de öğrencilerin farklı stratejiler geliştirdikleri gözlemlenmiştir. Örneğin Ö3 kodlu öğrenci, elde ettiği bir parçanın aynısını çizmek için şeklin altındaki karelerden faydalanarak çapraz çizgiler çizdiğini ifade etmiştir. Öğrencinin bu çizim süreçleri incelendiğinde ise çapraz çizgileri dilimlere çizerek kopyasını aldığı tespit edilmiştir. Benzer şekilde Ö5, Ö6 ve Ö10 kodlu öğrenciler de dilimin çizgilerinden faydalandığını belirtirken Ö9 kodlu öğrenci ise dilimin yerleştiği kareleri saydığını ifade etmiştir. Ö12 kodlu öğrenci ise “*ortadan hareketle çizdiğini*” belirterek merkezden çizdiğini göstermiştir. Bu öğrencilerin hepsi kritik işlemlerden “parçalama” işlemini kullanarak bir parçayı elde etseler de Ö4, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9 ve Ö12 kodlu öğrencilerin “*eş değer parçalar*”, *“toplamda 6 parça”* gibi ifadeleri çizmeye çalıştıklarını ifade etmeleri bu öğrencilerin elde ettikleri parçayı yani birimi, ölçme birimi olarak kullanarak bunu yinelemek yerine bütünün eş parçalarını oluşturmaya çalışmaları ile ilişkilendirilmiştir. Buna karşın Ö3 ve Ö10 kodlu öğrencilerin ise elde ettikleri parçanın aynısını çizerek bütünü elde etmeye çalıştıklarını ifade etmeleri ise birimi tekrarlayarak bütünü elde etme işlemi ile ilişkilendirilmiştir. Bu öğrencilerden farklı olarak Ö1, Ö2, Ö7 ve Ö11 kodlu öğrenciler yaptıkları işlemi aşağıdaki gibi açıklamışlardır.

Ö1: *2 tane daha bu şeklin aynısını çizerek bir çember oluşturmam gerekti.*

Ö2: *2 çift daha var 2 tane daha çizeceğim. Çizdiklerimi de ikiye böleceğim. İşte tamamı bu.*

Ö7: *6’da 2, 6’da 2, 6’da 2.*

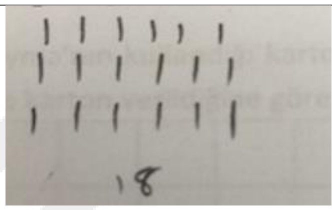
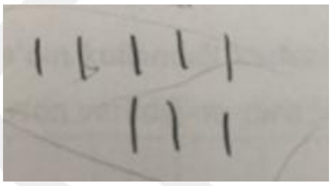
Öğrencilerin bu açıklamaları ve çizimleri doğrultusunda ölçme birimi olarak birim kesri değil de verilen kesri aldıkları söylenebilir.

4.1.3.1.3 Küme Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Küme modelinde öğrencilere *Aşağıdaki şekil Berfin’in kalemlerinin sayısını temsil etmektedir. Berfin’in kalem sayısı Elif’in kalemlerinin* $\frac{4}{6}$*’si olduğuna göre Elif’in kalemlerini temsil eden şekli çiziniz.*

şeklinde bir soru sorularak öğrencilerden $\frac{4}{6}$'ü 12 çubuk ile temsil edilen kalemlerin tamamını bulmaları istenmiştir. Soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde ise Ö1, Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7 kodlu öğrencilerin tersine işlem yaparak 18 kalem çizdiği Ö8, Ö9, Ö10 kodlu öğrencilerin ise verilenin $\frac{4}{6}$'sını bularak 8 kalem çizdikleri tespit edilmiştir. Bulgulara ilişkin veriler Tablo 4.14'de sunulmuştur.

Tablo 4. 14. Tersine İşleyen Düzenek İçin Öğrencilerin Küme Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Tersine işlem ile sonuç elde etme	Ö1, Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7	
Tersine İşlem Yapamama	Ö8, Ö9, Ö10	

Bu soruya ilişkin öğrencilerin kullandıkları yöntemler incelendiğinde ise; Ö1 kodlu öğrencinin genişletme yaptığı, Ö2, Ö3, Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrencilerin ilk olarak verilenin $\frac{4}{6}$'sını bulmaya çalıştıkları, Ö4, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencinin parça sayısını düşünerek hareket ettiği, Ö5 ve Ö7 kodlu öğrencilerin çarpma işlemi yaptığı Ö6 kodlu öğrencinin küme yerine uzunluk modelinden faydalandığı tespit edilmiştir.

Bu kategoride öğrencilerin en zorlandığı soru olan küme modeline ilişkin soruda birçok öğrenci ilk olarak parçadan bütüne gitmek yerine verileni parçalamayı düşünmüştür. Bu şekilde düşünen öğrencilere "*hangisinin kalemleri daha fazladır*?" diye sorulmuş bu sorudan sonra Ö2 ve Ö3 kodlu öğrenciler yanlış yaptıklarını ifade ederek doğru çözüme yönelmişlerdir. Ö2 kodlu öğrenci 12 kalemi Elif'in kalemlerinin 4 parçası olarak ifade ederek, 12'yi 4'e bölmüş sonrasında ise bunu da 6 ile çarpmıştır. Ö3 kodlu öğrenci ise önce $\frac{4}{6}$ ifadesini sadeleştirerek $\frac{2}{3}$ elde ettiğini ve 12'yi 2 gruba ayırarak 6'lı grup elde ettiğini ifade etmiştir. Sonrasında ise bütünü bulmak için bir grup daha ekleyerek sonucu bulmuştur. Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrenciler ise fikirlerini değiştirmemiştir. Fakat araştırmacı öğrencilerin problem durumunu anlamamasından kaynaklı olarak yanlış yaptıklarını düşünerek soruyu tekrar sormuş ancak öğrenciler yine de fikirlerini değiştirmemişlerdir. Bu öğrencilerin bu düzenek kapsamında yer alan kritik işlemleri kullanmamaları nedeniyle bu model için tersine işleyen düzeneği inşa etmedikleri söylenebilir.

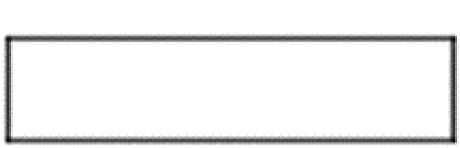
Ö5 ve Ö7 kodlu öğrenciler verilen kalemleri önce 4'e bölerek 6 da 1'i bulduklarını ifade etmiş sonrasında ise buldukları sayıyı 6 ile çarparak tamamını bulmuşlardır. Parça sayısını düşünen öğrenciler ise verilenin 4 parçayı ifade ettiğini bu nedenle 4'e bölerek bir parçayı bulduklarını ifade etmişlerdir. Bunlardan Ö11 kodlu öğrenci ise Elif'in kalemlerini $\frac{2}{6}$ olarak düşünmüş bir parçayı 3 olarak bulduğu için de 2 parçanın da 6 olacağını belirtmiştir. Neden kalanı aldığını ise "*Burada Berfin'in kalemleri verilmiş onun üzerinden hesap yapıyoruz onunkiler daha çokmuş o yüzden kalan Elif'in oluyor*" şeklinde açıklamıştır. Öğrencilerin parça sayısını vurgulamaları tersine işleyen düzenekten çok parça bütün zihinsel düzeneği ile ilişkilendirilebilir.

4.1.4 Çarpımsal Bileşim Zihinsel Düzeneği

Bu düzenek kesirlerin çarpımını kapsamaktadır. Burada diğer düzeneklerden farklı olarak iki işlemden bahsedilebilir. Bunlar dağıtmalı bölme (Steffe ve Olive, 2010) ve tekrarlı bölmedir (Tunç Pekkan, 2016). Bu düzeneğe dair öğrencilere uzunluk, alan ve daire modelleriyle ilişkili olmak üzere toplamda üç soru sorulmuştur. Uzunluk ve küme modeline ait sorular iki kesir çarpımını içerirken, alan modeli ile ilgili verilen soru ise iki bütünün eş bölünmesini içermektedir. Bu sorulara ilişkin bulgular aşağıdaki başlıklarda ele alınmıştır.

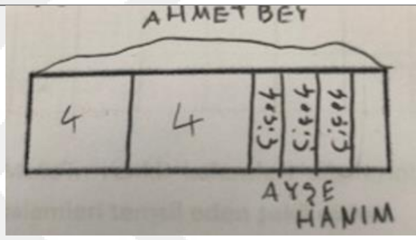
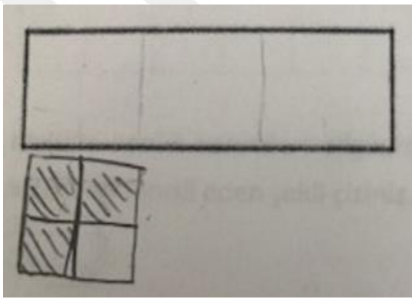
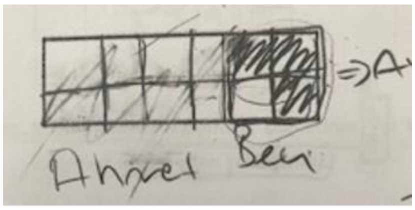
4.1.4.1 Uzunluk Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Uzunluk modeli ilgili olarak öğrencilere *Ayşe Hanım'ın bahçesinin büyüklüğü Ahmet Bey'in bahçesinin büyüklüğünün* $\frac{1}{3}$*'idir. Ayşe Hanım, bahçesinin* $\frac{3}{4}$*'üne çiçek dikerken* $\frac{1}{4}$*'ini boş bırakacaktır. Ahmet Bey'in bahçesinin büyüklüğü aşağıdaki gibi ise Ayşe Hanım'ın çiçek dikeceği yer ne kadardır? Şekil çizerek gösteriniz.*



sorusu sorularak öğrencilerden $\frac{1}{3}$'ün $\frac{3}{4}$'ünü bulmaları ve bunu şekille göstermeleri istenmiştir. Bu soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde ise Ö6 kodlu öğrenci dışındaki tüm öğrencilerin verilen şekli önce 3'e böldükleri gözlenmiştir. Sonrasında ise Ö3, Ö5, Ö7 ve Ö9 kodlu öğrencilerin 3’de 1’lik parçayı farklı bir yere çizerek, Ö1, Ö4, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin ise çizdikleri şeklin üzerinde elde ettikleri 3’de 1’lik parçayı 4’e böleceklerini sözel olarak belirtmişlerdir. Ö2 ve Ö8 kodlu öğrenciler ise verilen şekli 12 parçaya ayırmıştır. Öğrenciler bu işlemleri ile problemde istenilen durumu çizerek göstermeseler de sözel olarak ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerden farklı olarak Ö6 kodlu öğrenci ise ilk olarak verilen şeklin aynısını çizerek bunun 4’te 3’ünü bulmaya çalışmış, sonrasında çizdiği şeklin 3’te 1 olmadığını fark ederek verilen şekli parçalamak yerine onun 3 katını çizmiştir. Öğrencilerin çizimlerine örnekler Tablo 4.15’te yer verilmiştir.

Tablo 4. 15. Çarpımsal Bileşim Düzeneği İçin Öğrencilerin Uzunluk Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Şeklin Üzerinde Gösterme	Ö1, Ö4, Ö10, Ö11, Ö12	
Parçayı Ayırma	Ö3,Ö5,Ö7, Ö9	
Şekli oniki parçaya ayırma	Ö2, Ö8	

Öğrenciler şekli çizdikten sonra onlara “*çizdikleri şeklin bütünün kaçta kaçı olduğu*” sorulmuştur. Bu soru üzerine Ö1, Ö2 ve Ö3 kodlu öğrenciler bütünü 3’e bölerek elde ettikleri tüm parçaları 4’e bölmeyi düşünmüşler ve yaptıkları işlemleri aşağıdaki gibi açıklamışlardır.

> *Ö1: Bahçenin bütününü eş parçalara ayıralım ki bu çiçek dikilen alanı bulabilelim. Burayı 4’e böldüğümüz için buraları da 4’e bölmemiz gerekir. Toplam 12 tane alan vardır ve bunun 3 tanesine çiçek dikiliyor yani* $\frac{3}{12}$.

Ö2: Şimdi birini 2'ye birini 3'e bölsem o zaman birbirlerinin aynısı olmaz o zaman işlem yapamayız o yüzden hepsini 4'e bölmem lazım.

Bu öğrenciler 3'te 1'lik her bir parçanın aynı olması gerektiğini vurgularken Ö3 kodlu öğrenci ise yaptığı işlemin aslında $\frac{1}{3}$'ün $\frac{3}{4}$'ünü bulmak olduğunu ifade etmiştir. Benzer şekilde düşünen Ö4 ve Ö12 kodlu öğrenciler ise bir parçanın 4'e bölünmüş olmasından dolayı 4x3 işlemini kullanmış, Ö12 kodlu öğrenci bunu "*3'te 1'i 4 olduğuna göre 3 ile çarpıyoruz*." şeklinde açıklamıştır. Öğrenciler bu işlemleri ile 12 parçalık bir bütün elde etmiş ve bunlardan 3'ünü taradıkları için kesir değerini $\frac{1}{4}$ olarak ifade etmişlerdir.

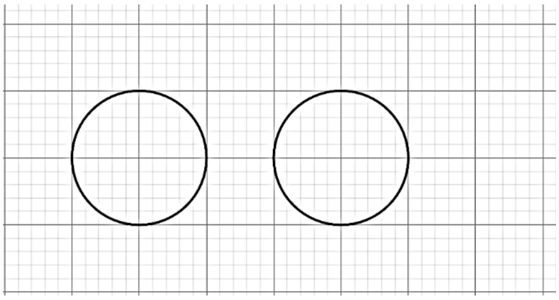
Ö7, Ö8, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrenciler de bütünü ilk olarak 3 eş parça ayırmış sonrasında ise parçaların eşliğinden dolayı her parçayı 4'e bölmeleri gerektiği düşünmüşlerdir. Ö7 kodlu öğrenci yaptığı işlemi "*12 de 3 yani 4 te 1. Bir parça 4' e bölünmüş Ayşe Hanım'ın bahçesinden dolayı. Diğerleri de 4 parça olur yani 4 8 12 olur."* şeklinde açıklarken Ö8 kodlu öğrenci "*Hepsini 4'e bölerim. 12 de 3 olur."* şeklinde ifade etmiştir. Benzer şekilde işlem yapan Ö10 kodlu öğrenci *"Bu parça Ahmet Bey'in bahçesinin 3 te 1'iydi. Bunun aynısından buralarda da var. O zaman toplamda 12 parça oluyor. Zaten 3'ü de taralı yani 12'de 3."* şeklinde ve Ö11 kodlu öğrenci de *"Burayı 4'e bölmüştüm her parçayı da 4'e böldüm zaten 3'ünü almıştım yani 12'de 3'ü olur*." Şeklinde yaptıkları işlemleri açıklamışlardır. Bu öğrencilerin tamamı tekrarlı bölme işlemi yaparak 12 parçalık bir bütün elde etmiş sonrasında ise ilk durumda 3 parçayı taradıklarını göz önünde bulundurarak 12 parçadan 3'ü yani 4'te 1 olarak kesri belirlemişlerdir.

Ö6 ve Ö9 kodlu öğrenciler de çarpma işlemi yapıp 12 parçalık bir bütün elde etmiş fakat her parçanın 3'ünü taramayı düşünerek $\frac{9}{12}$ kesrini elde etmişlerdir. Ö9 kodlu öğrenci çizdiği şekli "*Yani bu 3'te 3 bu da 4'te 3. 4'te 3'ün 3'te 3'ün ne kadarı olduğunu bulabilmek için de eşitlememiz lazım. 12 de eşitlenir bu taralı kısımda 12'de 9 olur*." ifadeleriyle açıklamıştır. Öğrencinin yaptığı işlemde bahçenin 3 te 1'ini almak yerine tamamını kullandığı belirlenmiştir.

Ö5 kodlu öğrenci ise tüm öğrencilerden farklı olarak elde ettiği 3'te 1'lik parçayı 4'e bölüp 3 parçasını taradıktan sonra taradığı kısmın kalem ucu ile ölçüsünü almıştır. Sonrasında ise ölçüsünü belirlediği bu parçanın kesrini belirlemek için ucu tekrarlamış ve doğru sonuca ulaşmıştır. Öğrenci bu soru için beklenen tekrarlı bölme işlemini gerçekleştirmese de parçayı ölçü olarak kullanabilmiştir.

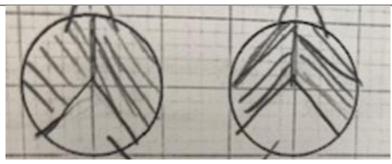
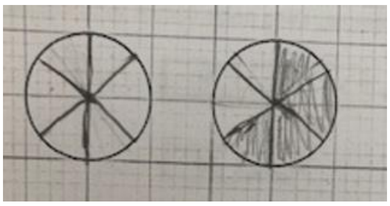
4.1.4.2 Alan Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

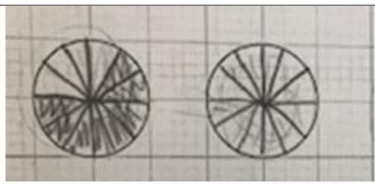
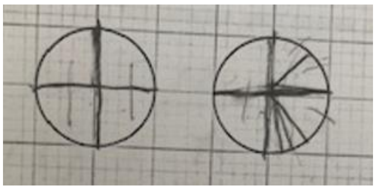
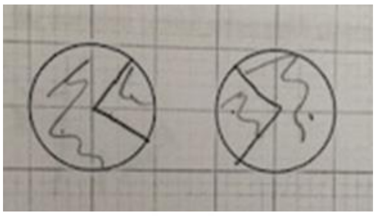
Alan modelinde öğrencilere *Aşağıda verilen 2 pizza 3 arkadaş tarafından eşit şekilde paylaşılacaktır. Bir kişiye düşen pizza miktarının şeklini çizin.*



sorusu sorularak öğrencilerden 2 pizzanın 3 arkadaş tarafından paylaşılması durumunda kişi başına düşen pizza miktarını kesir olarak belirlemeleri istenmiştir. Bu soruda öğrencilerden beklenen işlem ise "*dağıtmalı bölme*" işlemidir. Öğrencilerin çizdiği şekiller incelendiğinde ise; Ö1 ve Ö2 kodlu öğrencilerin 2 bütünün her birini 3 parçaya böldüğü, Ö3, Ö5, Ö6 ve Ö10 kodlu öğrencilerin her iki bütünü de 6 parçaya böldüğü, Ö4 ve Ö11 kodlu öğrencilerin bir bütünü 2'ye diğerini ise önce 2'ye sonrasında bir parçasını önce 4'e sonra 1 parçasını da 3'e böldükleri, Ö7 kodlu öğrencinin her iki bütünü ayrı ayrı 12 parçaya böldüğü, Ö8 ve Ö9 kodlu öğrencilerin ise 2 bütünü 1 bütün gibi düşünerek 2'sini birlikte 3'e bölmeye çalıştıkları tespit edilmiştir. Ö12 kodlu öğrenci ise eşit olarak parçalamanın mümkün olmayacağını düşünmüştür. Öğrencilerin çizdikleri şekillere örnekler Tablo 4. 16' da sunulmuştur.

Tablo 4. 16. Çarpımsal Bileşim Düzeneği İçin Öğrencilerin Alan Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Her iki bütünü 3'e bölme	Ö1, Ö2	
Her iki bütünü 6'ya bölme	Ö3, Ö5, Ö6, Ö10	

Her iki bütünü 12’ye bölme	Ö7	
Parçaları parçalama	Ö4, Ö11	
Bütünmüş gibi düşünme	Ö8, Ö9	

Öğrencilerin bir kişiye düşen kesir miktarlarına ilişkin cevapları incelendiğinde ise; Ö1 ve Ö4 kodlu öğrenciler bir kişiye 3’te 2’lik bir dilim düşeceğini ifade ederken Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8 ve Ö11 kodlu öğrenciler ise 3’te 1’lik bir dilim düşeceğini ifade etmişlerdir. Ö12 kodlu öğrenci ise eşit paylaşılamayacağını düşünmüştür. Ö1 kodlu öğrenci her pizzayı 3’e bölmüş bu durumda bir kişinin 2 dilim pizza almasından dolayı bunu 3’te 2 olarak düşünmüştür. Ö4 kodlu öğrenci ise ilk olarak her pizzayı 2’ye bölerek bir kişinin önce $\frac{1}{2}$ ’lik dilim sonrasında ise kalan $\frac{1}{2}$’lik dilimi paylaşarak $\frac{1}{6}$ alacaklarını bu durumda da bir kişinin toplamda 3’te 2’lik dilim alacağını ifade etmiştir. Benzer şekilde Ö11 kodlu öğrenci de her pizzayı 2’ye bölerek toplamda 4 parça elde etmiş ve her kişiye önce bir parça sonrasında ise kalan parçayı yani $\frac{1}{2}$’lik parçayı 4’e bölerek yine her kişiye bir parça ve son olarak da kalan parçayı yani $\frac{1}{8}$’lik parçayı 3’e bölerek de her kişiye bir parça vererek dağıtma işlemi yapmıştır. Öğrenci her ne kadar doğru değere ulaşacağı bir yol izlese de yaptığı işlemler neticesinde yanlış kesir değeri bulmuştur. Bu öğrencilerden sadece Ö1 kodlu öğrencinin beklenen dağıtmalı bölme işlemini kullandığı söylenebilir.

Bir kişiye düşen pizza miktarını 3’te 1 olarak ifade eden öğrencilerden Ö2 kodlu öğrenci iki pizzayı da önce 3’e bölmüş sonra iki pizzayı bir bütün gibi değerlendirmiştir. Bu öğrenciyle aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır.

Ö2: 2 pizzayı birleştirirsek 6 dilim 1 kişi 2 pizza olduğuna göre dan 1/3 olur.

A: Neden paydayı 6 aldın?

Ö2: Yan, ben bu pizzaları birleştirdiğim de paydaları da birleştirmem lazım o zaman 6 parça olur. Yani bu ikisi bir bütündür.

Benzer şekilde iki pizzayı bir zihninde birleştirerek işlem yapan Ö3, Ö5 ve Ö10 kodlu öğrenciler bir pizzayı 6 parçaya bölerek toplamda 12 parça olduğunu bir kişiye ise 4 parçanın düşeceğini ifade etmişlerdir. Ö7 kodlu öğrenci ise her pizzayı 12 parçaya bölmüş sonrasında toplam 24 parçadan 8'ini bir kişinin yiyeceği parçalar olarak düşünmüştür. Ö6 kodlu öğrenci ise her pizzayı önce 6'ya bölerek bir kişinin alacağı pizzanın kesrini $\frac{2}{6} + \frac{2}{6}$ yani $\frac{4}{6}$ olarak ifade etmiştir. Fakat araştırmacının neden her pizzadan 2 parça aldığını sorması üzerine öğrenci fikrini değiştirip toplamda 12 parça olduğunu bu nedenle bir kişinin alacağı pizzanın kesir değerinin $\frac{4}{12}$ yani $\frac{1}{3}$ olarak ifade etmiştir. $\frac{1}{3}$ olarak düşünen öğrencilerden Ö8 kodlu öğrencinin öğrenciyle yaşanan diyalog da aşağıda sunulmuştur.

Ö8: 3'de 1. 3 eşit parçaya bölmüşüz 1'ini almışız.

A: Ama burada 4 parça var sanki.

Ö8: Bölünmüyor o yüzden ikisini tek parça düşündüm.

A: Neden bölünmüyor?

Ö8: Bilmem. Ama tek bir çizgi atmam gerekiyor ama olmuyor.

A: Nasıl yani?

Ö8: 2 daire var tek bir çizgi yaparsam 3 olur ama eşit olması için şöyle ikisine de atmam gerekiyor o zaman da 4 parça oluyor.

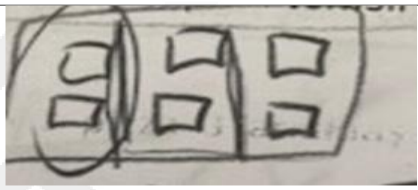
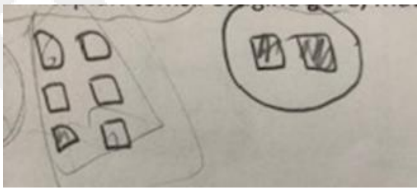
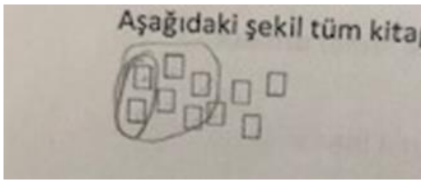
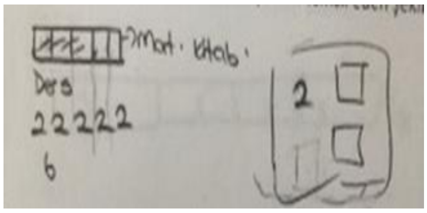
Ö12 kodlu öğrenci de benzer şekilde "*böldüğümüzde ikisini de 4 parça oluyor*" diyerek eşit olması için 4 arkadaşın paylaşması gerektiğini ya da bir tanesini 2 arkadaşın paylaşacağını diğerinin bütünü kalacağını ifade etmiştir.

4.1.4.3 Küme Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Küme modeli ile ilgili olarak öğrencilere *Bir kitaplıkta yer alan kitapların $\frac{3}{5}$'i ders kitabıdır. Ders kitaplarının $\frac{1}{3}$'i de matematik kitabıdır. Aşağıdaki şekil tüm kitapları temsil ettiğine göre, matematik kitaplarını temsil eden şekli çiziniz.*

sorusu sorularak öğrencilerden tüm kitapları temsilen 10 parçadan oluşan bir bütünün $\frac{3}{5}$'ünün $\frac{1}{3}$'ini bulmaları istenmiştir. Bu soruda Ö1, Ö7 ve Ö9 kodlu öğrencilerin kesirleri genişletme yaptığı, Ö6 ve Ö11 kodlu öğrencilerin küme modeli yerine uzunluk modelini kullanarak çözüm yaptıkları belirlenmiştir. Ö2, Ö4, Ö5, Ö8, Ö10 ve Ö12 kodlu öğrenciler ise bütünün önce $\frac{3}{5}$'ini bularak sonra da onun $\frac{1}{3}$'ünü buldukları gözlenmiştir. Öğrencilerin çizdikleri şekiller örnekler ve kullanılan stratejiler Tablo 4. 17'de sunulmuştur.

Tablo 4. 17. Çarpımsal Bileşim Düzeneği İçin Öğrencilerin Küme Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Ders kitaplarını çizerek bunun 2'sini işaretleme	Ö2	
Ders kitaplarını çizdikten sonra matematik kitaplarını ayrı çizme	Ö7	
Şeklin üzerinde önce ders kitaplarını sonra matematik kitaplarını işaretleme	Ö1, Ö3, Ö9	
Sayısal olarak matematik kitap sayısını bularak sadece onları çizme	Ö4, Ö5, Ö6, Ö8, Ö10, Ö12	

Ö3 kodlu öğrenci ise önce $\frac{3}{5}$ ve $\frac{1}{3}$ kesirlerini çarpmış sonrasında ise bütünün 5'te 1'ini bulmuştur. Öğrenci iki kesri çarpmasının nedenini soruda "*nın, nin*" ekinin yer alması olarak açıklamıştır. Şekille göstermesi istendiğinde ise öğrenci $\frac{3}{5}$ kesrini genişleterek 6 parçalık kısmı bulmuş fakat onun $\frac{1}{3}$'ünü şekille gösteremeyeceğini yine çarpma işlemi yaparak bulabileceğini ifade etmiştir.

Kesri genişletme yöntemini tercih eden öğrencilerden Ö1 kodlu öğrenci genişletme işlemini tercih etmesinin nedenini "*Buradaki kitap sayısı ile payda yani kaç parçaya ayıracağımız eşit olursa o zaman paysa olan yani kaç tane seçeceğimiz direkt geliyor yani ders kitapları 6 tane. Bu ders kitaplarının 3'te 1'i matematik kitabıymış. Ben bunu yine genişleterek 6'da 2 diyebilirim. Parçalara ayrılmış bir bütünden 2 tane geliyor yani*" şeklinde açıklamıştır. Benzer şekilde Ö7 kodlu öğrenci de önce $\frac{3}{5}$ kesrini genişletmiş sonra işlem yapmıştır. Öğrenci genişletme yapma sebebini *" Tam bir.. yani 10 tane var ya direkt olarak kaç tane ders kitabı olduğunu veriyor. Ondan sonra ders kitaplarını çizdim 6 tane onun da 3 te 1'i 2. Onu da 6 da eşitledim 2 oldu."* Şeklinde açıklamıştır. Öğrencinin söyleminden nesne sayısı ile paydanın eşit olmasının öğrenciye işlem kolay sağladığı söylenebilir.

Ö9 kodlu öğrenci "*Sayılar aynı olmadığı için eşitlemezsek yanlış olur. Burada 6 bu da 3 (1/3), olmaz yani"* şeklinde açıklama yapmıştır. Bu öğrencinin ise istenilen kesirdeki payda ile nesne sayısının eşit olmaması durumunda işlem yapmakta zorlandığı söylenebilir. Ö2 kodlu öğrenci de ilk olarak kesri genişletmeyi tercih etmiş fakat $\frac{3}{5}$'i 3 ile $\frac{1}{3}$'ü de 5 ile genişleterek işlem yapmaya çalıştığı için bir sonuç elde edememiştir. Öğrencinin bu işlemi ile sorudaki çarpma işlemini anlayamadığı düşünebilir. Şekille çözmeyi deneyen öğrencinin çizdiği şekil (Tablo 4.17) ile ilgili açıklaması ise şu şekildedir; "*Bunun 5'te 3'ü ders kitabı ise bunu 5'e bölüyorum bunun da 3'ü ders kitabıymış. Bu ikisi bu ikisi bu ikisi yani 6 tanesi ders kitabıymış. O altı tane de bu olsun. Sonra diyor ki bunun da 3'te 1'i, o yüzden bunu da 3'e böleceğim, yani 2 tane matematik kitabıymış.*" Bu öğrencilerin açıklamaları ve yaptıkları işlemler göz önüne bulundurulduğunda öğrencilerin tekrarlı bölme işlemini kullanmadıkları yani bu soru için çarpımsal bileşim düzeneğini yapılandıramadıkları düşünülebilir.

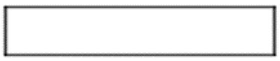
Ö4 ve Ö5 kodlu öğrenciler ise verilen nesneleri 5'e böldükten sonra 3 ile çarptıklarını ifade etmişlerdir. Ö10 kodlu öğrenci ise yaptığı işlemi "*Öncelikle burada 10 parça varmış 10 taneyi 5'e böldüm. Bir tane parça bu kadar* (2 tane) *oluyor. Bundan 3 tane almam gerekiyor. Bunlar ders kitabı. Bunlarında 3'te 1'ini istemiş. O zaman 3 parçadan birini alıyoruz yani o da 2 kare oluyor*." şeklinde açıklamıştır. Ö6 ve Ö11 kodlu öğrenciler diğer öğrencilerden farklı olarak uzunluk modelinden faydalanmışlardır. Ö11 kodlu öğrenci ise uzunluk modeli ile bütünün 5 te 3'ünü bulsa da buradan $\frac{1}{3}$'ünü bulamamıştır. Ö12 kodlu öğrencide kalan değere odaklandığı için sonucu bulamamıştır. Bu öğrencilerin de diğer öğrenciler gibi soruda kullanılması beklenen tekrarlı bölme işlemini kullanmadıkları bununla bağlantılı olarak da bu soru için çarpımsal bileşim düzeneğini kullanamadıkları düşünülebilir.

4.1.5 Bileşik Kesir Zihinsel Düzeneği

Bu düzenek birim kesirlerle bileşik kesir elde etmeyi içerir. Öğrencilerden verilen bütünün birim kesrini belirleyebilmesi, bütünü ve bileşik kesri birim kesir ile ifade edebilmeleri beklenir. Bu kategoriye ilişkin uzunluk, alan ve küme modeli ile ilgili üç soru sorulmuştur. Bu sorulara ilişkin bulgular aşağıda sunulmuştur.

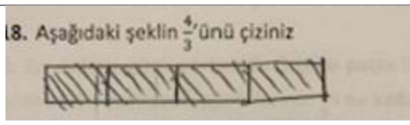
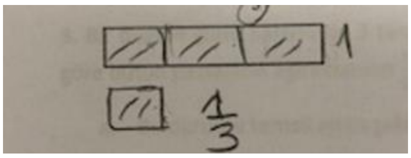
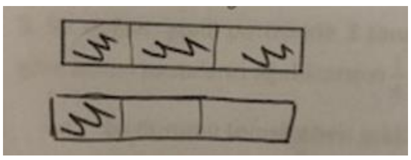
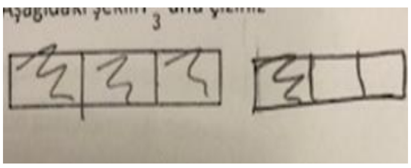
4.1.5.1 Uzunluk Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Uzunluk modeline ilişkin öğrencilere *Aşağıdaki şeklin $\frac{4}{3}$'ünü çiziniz.*



sorusu sorularak öğrencilerden verilen şeklin $\frac{4}{3}$'ü bulmaları istenmiştir. Bu soruyla ilgili öğrenci cevapları ve görüşmeleri incelendiğinde, Ö1 kodlu öğrencinin birim kesri ölçme birimi olarak kullandığı, Ö2, Ö6, Ö8, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin tam sayılı kesre çevirerek işlem yaptığı, Ö3, Ö4, Ö5, Ö7 ve Ö9 kodlu öğrencilerin ise cevabı 3'te 3'ün $\frac{1}{3}$ fazlası olarak düşündükleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin çizdikleri şekilleri temsil eden şekiller ve stratejileri Tablo 4.18'de sunulmuştur.

Tablo 4. 18. Bileşik Kesir Düzeneği İçin Öğrencilerin Uzunluk Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Verilen şekle bitişik bir parça daha ekleme	Ö1, Ö3, Ö7	
Verilen şekilden ayrı bir parça daha çizme	Ö5, Ö6, Ö9	
Verilene benzer 2. bütün çizme	Ö2, Ö4, Ö9, Ö10	
Verilenden farklı ikinci bütünü çizme	Ö8 ve Ö12	

Ö8 ve Ö12 kodlu öğrenciler dışındaki öğrencilerin tamamının ilk olarak verilen bütünü 3 eş parçaya ayırdığı gözlenmiştir. Yaptıkları bu işlem ile öğrencilerin bileşik kesri elde etmede ilk adım olarak düşünülen bütünü parçalayarak birim kesri elde etme işlemini gerçekleştirdikleri söylenebilir. Bu kategori çerçevesinde bu işlemden sonra öğrencilerden elde ettikleri parçayı yani 3'te 1'i standart olmayan bir ölçme birimi olarak düşünmeleri ve bileşik kesri bu birimin yinelenmesiyle elde edebileceklerini fark etmeleri beklenmektedir. Bu duruma paralel bir yol izlediği düşünülen Ö1 kodlu öğrenci yaptığı işlemi şu şekilde açıklamıştır.

> *Ö1*: "*Bir bütünü 3'e bölüyoruz. 3'e böldüğümde 3'te 1'i buldum. 3'te 1'lik parçadan 4 tane istiyor bize o yüzden 3'te 1'lik parçadan 4 tanesini birleştirerek buldum.*"

Öğrencinin sözel ifadeleri bileşik kesri birim kesirlerin tekrarıyla oluşan bileşik bir bütün olarak gördüğü düşünülebilir. Fakat öğrencinin yinelenen 4 parçayı birlikte çizmesi ilk bütünü değiştirmiş olup öğrencinin bileşik kesir kavramını tam olarak yapılandırmadığı söylenebilir. Benzer şekli çizen Ö3 ve Ö7 kodlu öğrenciden Ö7 kodlu öğrenci de bütünü 3 eş parçaya ayırdıktan sonra elde ettiği parçanın parmağı ile ölçüsünü alarak diğer parçaları çizdiği ve böylelikle istenilen kesri elde ettiği belirlenmiştir. Bu öğrencinin Ö1 kodlu öğrenciden farklı olarak bileşik kesri 4 parçanın yinelenmesi olarak değil de var olan 3 parçaya bir parça daha ekleme yaparak işlem yaptığı gözlenmiştir. Öğrenci yaptığı işlemi "*Tamamı 3'te 3 zaten bir parça daha eklememiz gerekiyor. 3'e böldüm bir parçayı buldum, bir parça daha eklemem lazım zaten. Ritim şeyi gibi, hemen hemen diğer parçayı ekledim. 4'te 3'e eşit oldu*." Şeklinde açıklamış olup bu söylemleri öğrencinin bütünü parçalayarak birim kesri elde ettiği ve bununla ilişkili olarak bütünü ve bileşik kesri ifade edebildiğini göstermiştir. Bu öğrencilerle benzer şekil çizen Ö3 kodlu öğrenci de 3'te 3'lük bütüne 3'te 1'lik bir parça eklediğini ifade etmiştir. Bu öğrencilerin çizdikleri şekil itibarıyla birimlerin tekrarını kullanmış görünseler de sözel olarak bunun vurgusunu yapmamışlardır. Ö1, Ö3 ve Ö7 kodlu öğrenciler kullandıkları mantık itibarıyla düzenek için gerekli kritik işlemleri kullanmış görünseler de çizdikleri şekil itibariyle düzeneğin dışında değerlendirilmişlerdir.

Ö5 ve Ö6 kodlu öğrencilerin de bütüne ek olarak bir parça çizdikleri gözlenmiştir. Fakat bu öğrenciler diğer öğrencilerden farklı olarak parçayı bütünden ayrı olarak çizmişlerdir. Ö5 kodlu öğrenci ek olarak çizdiği parçayı uç yardımıyla eklediğini belirtirken Ö6 kodlu öğrenci diğer şekillere benzettiğini söylemiştir. Her iki öğrenci Ö5 kodlu öğrencinin sorulan kesri *"3'te 4 soruyor"* şeklinde Ö6 kodlu öğrenci ise *"3'ün 4'ünü soruyor"* şeklinde açıkladığı görülmüştür. Her iki öğrenci de tamdan fazla olduğunu belirtirken Ö5 kodlu öğrenci 1 parça eklemesi gerektiğini Ö6 kodlu öğrenci ise 3’te 1 eklemesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu öğrencilerin soruyu parça bütün ilişkisine paralel bir düşünceyle değerlendirdikleri söylenebilir.

Diğer öğrencilerden farklı olarak Ö2, Ö4, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrencilerin şeklin aynısını çizerek bir bütün daha oluşturdukları gözlemlenmiştir. Ö2 kodlu öğrencinin çizdiği bütünün tamamını soruda verilen bütünün de 3’te 1’ini, taradığı kesri de 1 tamın 3’te 1 fazlası olarak ifade ettiği görülmüştür. Hackenberg’e (2009) göre kesri tam sayılı olarak ifade eden öğrenci de yineleme işlemi aktifleşmemiştir. Ö4 ve Ö10 kodlu öğrencilerin ise bir bütün daha çizerek verilen bütünün tamamını ve çizdiği bütünün 3’te 1’ini taradığı gözlenmiştir. Ö9 kodlu öğrencinin ise diğer öğrencilerden farklı olarak hem bir bütün daha hem de bir parça daha çizdiği görülmüştür. Ö8 ve Ö12 kodlu öğrencilerin de verilen bütünden bağımsız 3 parçalık bir bütün daha çizdiği belirlenmiştir. Ö8, Ö10 ve Ö12 kodlu öğrencilerin ise verilen bütünün tamamı çizdikleri şeklin 3 te 1’ini taradıkları tespit edilmiştir.

Nasıl çizeceği konusunda kararsız kalan Ö11 kodlu öğrenci ile aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır.

Ö: Bunu 3’e böleriz 4/3 dediği için ama 4’ünü nasıl alacağız.

A: 4’ünü almak için ne yapılabilir?

Ö: Fazladan bir parça çizebilirim. Ya da 3 parça 1 tane de tam. Zaten bu 1 tam 1/3 oluyor. Yani şu bir tam ve bir de şu 3 te 1’lik parça olabilir. Ya da buraya parça eklerim. (3parçalık şekle 4. Parçayı ekleme)

A: Hangisi olabilir?

Ö: Bilmiyorum ikisi de olabilir bence. İlk önce ayrı bir bütün çizmek istedim aslında ama sonra şeklin üzerinde dediğini fark ettim, yani eklersem şeklin üzerinde olmuş olacak. Şeklin üzerinde demese ayrı çizerdim herhalde.

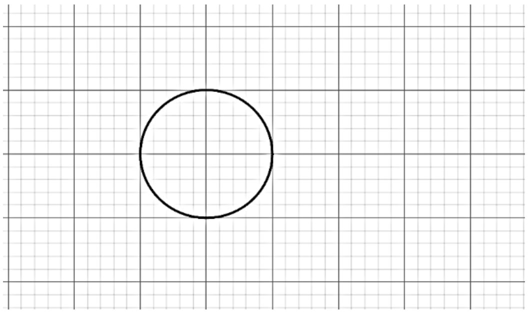
A: Ama şeklin üzerinde dememiş sanki.

Ö: Bu soru şeklin üzerini çiziniz demek oluyor. Ama önceden verilenler de bir tane şekil oluyordu bir de 1/3’Ünü gösteren ikinci bir şekil. Şimdi karar verdim 4 parça olarak değil böyle iki şekille gösterilecek.

Öğrenci ilk olarak 3 parçadan 4’ünü almak olarak düşündüğü için bunu nasıl çizeceğini canlandıramamıştır. Aynı zamanda Ö9, Ö10, Ö5 ve Ö12 kodlu öğrencilerin bu kesri 3’te 4 olarak okudukları tespit edilmiştir.

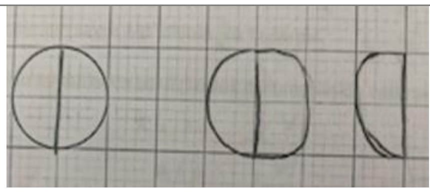
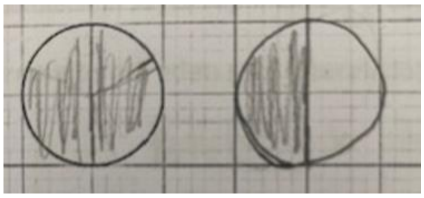
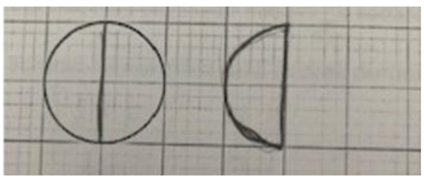
4.1.5.2 Alan Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Alan modelinde ise öğrencilere *Şeyda ödevi için Şeyma'nın kullandığı kartonun $\frac{3}{2}$'si büyüklükte bir karton kullanmıştır. Aşağıda Şeyma'nın kullandığı karton verildiğine göre Şeyda'nın ödev için kullandığı kartonu da siz çizin.*



sorusu sorularak öğrencilerden kareli kağıt üzerinde verilin kartonun $\frac{3}{2}$'si bulmaları istenmiştir. Bu kategorideki sorular içerisinde bu sorunun öğrencilerin en rahat yaptıkları soru olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin cevapları incelendiğinde ise Ö1 ve Ö7 kodlu öğrencilerin 1 bütün ve 1 parça çizdikleri Ö2, Ö8, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin 2 bütün çizerek bir şeklin tamamının diğerinin yarısını taradıkları Ö3, Ö4, Ö5, Ö6 ve Ö9 kodlu öğrencilerin ise verilen şekil dışında bir parça çizdikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin cevaplarına ilişkin bulgular Tablo 4.19'da sunulmuştur.

Tablo 4. 19. Bileşik Kesir Düzeneği İçin Öğrencilerin Alan Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Bir bütün bir parça çizme	Ö1, Ö7	
İki bütün çizme	Ö2, Ö8, Ö10, Ö11, Ö12	
Bir parça daha çizme	Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö9	

Öğrenci cevaplar incelendiğinde Ö1 kodlu öğrencinin “*2’ye böldüğümüz şu parçadan 3 tane seçmemizi istiyor. O yüzden 2’ye böldüğümüz şu parçadan 3 tane yapıyoruz*” diyerek bir bütün ve bir tane 2’de 1’lik parça çizdiği tespit edilmiştir. Ö7 kodlu öğrenci de benzer şekilde soruda 3 parça istendiğini belirterek bir bütün ve bir tane 2’de 1’lik parça çizmiştir.

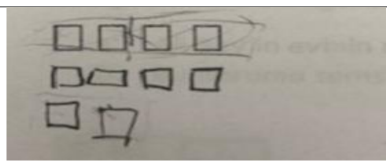
Ö2 ve Ö10 kodlu öğrencilerin verilen durumu 2 parçadan 3’ünü alma olarak ifade ettikleri, Ö3, Ö5 ve Ö9 kodlu öğrencilerin ise 2’de 2’ye 1 parça daha ekleme olarak belirttikleri tespit edilmiştir. Ö4, Ö6, Ö8, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler ise tam sayılı kesre çevirme işlemi yaparak cevabı 1 tam 2’de 1 olarak değerlendirmişlerdir. Öğrencilerin çizdikleri şekiller incelendiğinde ise hiç birinin alan vurgusu yapmadığı görülürken sadece Ö7 kodlu öğrenci sorunun yerleştirildiği birim karelerden faydalandığını belirtmiştir. Ö1, Ö7 ve Ö9 kodlu öğrencilerin bir bütün ve bir tane 2’de 1’lik parça çizdikleri, Ö2, Ö8, Ö10 ve Ö12 kodlu öğrencilerin bir bütün daha çizerek onun 2’de 1’ini taradıkları, Ö3, Ö4, Ö5 ve Ö6 kodlu öğrencilerin bir tane 2’de 1’lik parça çizdikleri ve Ö11 kodlu öğrencinin de bir bütün daha çizerek verilenin 2’de 1’ini taradığı tespit edilmiştir.

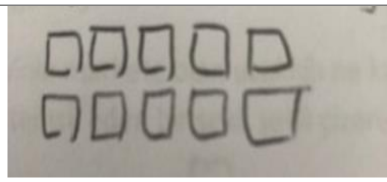
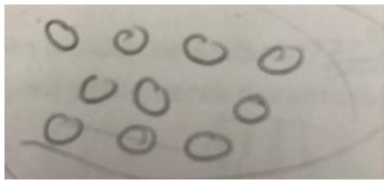
4.1.5.3 Küme Modeline İlişkin Soruya Ait Bulgular

Küme modeline ilişkin *Melis’in kalemleri Melek’in kalemlerinin* $\frac{5}{2}$*’si kadardır. Aşağıdaki şekil Melek’in kalemlerini temsil ettiğine göre Melis’in kalemlerini temsil eden şekli çiziniz.*

şeklinde verilen soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde ise; Ö6 ve Ö11 kodlu öğrencilerin yeni bir bütün çizemediği Ö12 kodlu öğrencinin verilen şekilleri dahil ederek, diğer öğrencilerin ise verilen şekilden haricen 10 nesneden oluşan yeni bir bütün çizdikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin çizdiği yeni bütüne ilişkin şekiller (Tablo 4.20) incelendiğinde ise kodlu öğrencilerin verilen şekildeki nesnelere benzer nesneler kullanarak Ö3, Ö7 kodlu öğrencilerin ise farklı nesneler kullanarak yeni bütün oluşturdukları tespit edilmiştir.

Tablo 4. 20. Bileşik Kesir Düzeneği İçin Öğrencilerin Küme Modelindeki Sorulara İlişkin Bulguları

Strateji	Öğrenciler	Şekil
Verilen şekilleri dahil ederek yeni bütün oluşturma	Ö12	

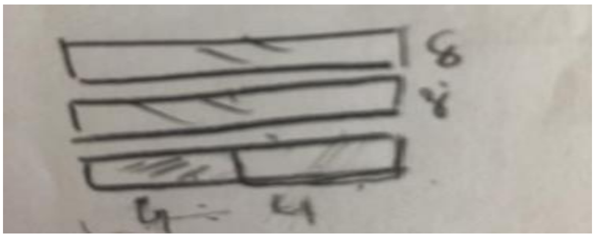
Verilen şekilden haricen benzer nesnelerle yeni bütün oluşturma	Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö8, Ö9, Ö10	
Verilen şekilden haricen farklı nesnelerle yeni bütün oluşturma	Ö3, Ö7,	

Ö1 ve Ö10 kodlu öğrencilerin verilen şekli 2 eş parçaya ayırarak sonrasında bir parçanın yani $\frac{1}{2}$' lik parçayı yineleyerek Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7 ve Ö9 kodlu öğrencilerin ise parçayı böldükten sonra 5 ile çarparak 10 nesneden oluşan yeni bütünü elde ettikleri tespit edilmiştir. Ö1 kodlu öğrencinin "*Bu 2'de 1. Bize bundan 5 tane istiyor"* ve Ö10 kodlu öğrencinin "*2'de 1'den 5 tane çizdim 10 oldu*." şeklindeki söylemleri ve çizdikleri şekiller bu öğrenciler için önce birim kesri elde ettikleri sonrasında ise bu kesrin yinelenmesiyle istenilen bileşik kesri elde ettikleri yani bu model için bileşik kesir düzeneğine ilişkin işlemleri yerine getirdikleri söylenebilir. Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7 ve Ö9 kodlu öğrenciler önce birim kesir elde etmeleri ve sonrasında bir çarpma işlemi kullanmaları nedeniyle yineleme işlemini kullanmış olabilecekleri düşünülse de Ö2 kodlu öğrencinin "*Payda da 2 var o yüzden. 2'ye böldüğümde bunu 2 yapıyor pay da 5 olduğu için 5 ile 2'yi çarparım*" şeklindeki, Ö4 kodlu öğrencinin "Yani adedi 2 tane ise 5 adedi kaç tanedir" şeklindeki ifadeleri ile Ö5 ve Ö7 kodlu öğrencilerin oran kullandıklarını belirtmesi bu öğrencilerin bileşik kesir düzeneğini bu soru için yapılandırmadıklarını gösterir.

Ö9 kodlu öğrenci ise diğerlerinden farklı olarak 2'de 1'lik parçadan 5 tane istenildiğini bu nedenle çarpma işlemi yaptığını belirtmiş olup öğrencinin bu ifadesi onun yineleme işlemini kullanmasıyla ilişkilendirilebilir. Ö8 ve Ö12 kodlu öğrencinin tam sayılı kesre çevirdikleri tespit edilmiştir. Ö3 kodlu öğrenci ise verilen şeklideki eleman sayısını belirlemiş sonrasında ise bu sayı ile soruda istenen kesir değerini çarparak 10 sayısını elde etmiştir. Öğrenci elde ettiği sonuçtan hareket ederek de 10 tane nesne çizmiştir.

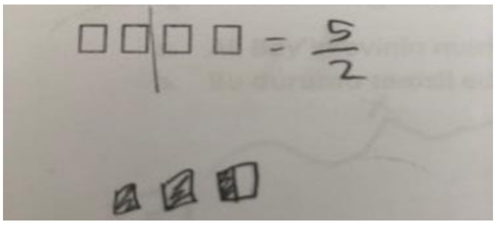
Ö6 kodlu öğrenci de ilk olarak nesnelerin sayısını belirlemiş sonrasında ise oran kullanarak 10 sayısını elde etmiştir. Öğrenciden şeklini çizmesi istendiğinde ise önce verilen kesri tam sayılı kesre çevirmiş sonrasında ise formda yer alan küme modelleri ile ilişkili diğer sorularda yaptığı bu soruda da uzunluk modelinden yararlanmak istemiş fakat bir sonuç elde edememiştir.

Öğrenci Şekil 4.7' de görüldüğü gibi uzunluk modeli ile temsil ettiği şekilde 2 bütünün ve bir bütünün de yarısını kullanacağını ifade etmiştir.



Şekil 4. 7. Bileşik kesir zihinsel düzeneğinin küme modelinde Ö6 kodlu öğrencinin çizimi

Fakat öğrenci yarıya böldüğü şeklin bir parçasının 4'e eşit olduğunu düşünmüş ve bu durumda 20 sonucunu elde etmiştir. İlk yaptığı işlem ile bu işlemde farklı sonuçlar elde etmesinin nedenini fark edememiş bu nedenle de bir bütün oluşturamamıştır. Bütün oluşturamayan bir diğer öğrenci olan Ö11 kodlu öğrenci ise ilk olarak yaptığı işlemi "*5'te 2'si (5/2) 4 tane ise 5'te 1 için 2 ye böleriz o da 2 tane olur. Bir tanesi iki tane bir tanesi iki tane olur*" şeklinde açıklamıştır. Fakat öğrenci verilmeyen kişinin kalemlerinin kesir değerini "$\frac{5}{3}$" olduğunu düşünmüş bu nedenle bir sonuç elde edememiştir. Öğrencinin bu işlemi ile pay paydayı karıştırdığı söylenebilir. Görüşme esnasında öğrencinin yanlış işlem yapmasının sorunun problem şeklinde verilmesi ile ilişkili olabileceği düşünülerek öğrenciye burada verilen şeklin "$\frac{5}{2}$" sini nasıl bulacağı sorulmuştur. Öğrenci burada çarpma işlemi yapacağını belirtmiş fakat neden bu işlemi yapacağını açıklayamamıştır. Öğrenciden soruyu şekilden yola çıkarak çözmesi istenmiş öğrenci ise Şekil 4. 8'de yer verildiği gibi bir yol izlemiştir.



Şekil 4. 8. Bileşik kesir zihinsel düzeneğinin küme modelinde Ö11 kodlu öğrencinin çizimi

Öğrencinin çizdiği şekil ile *"Bu 2 tane 2 tam bir de şu yarım da $\frac{1}{2}$ olur diye düşündüm."* Şeklinde açıklamıştır. Öğrencinin yarım olarak düşündüğü kısmı bütün üzerinden değil bütünün içinde verilen nesneleri bölerek gösterdiği görülmektedir.

4.2 Kesir Bilgisini Cebirsel Düşünmede Kullanmaya İlişkin Sorulara Ait Bulgular

Çalışmada öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerini cebirsel düşünmede kullanmalarına ilişkin on soru sorulmuştur. Bu sorular ilişkilendirildikleri kesir düzeneğine göre farklılaşmaktadır. Öğrencilerden verilen soruları öncelikle şekille sonrasında ise değişkenlerle temsil etmeleri istenmiştir. Bu on soruya verdikleri cevaplar ve görüşmelerin analizi bu bölümde sunulmuştur.

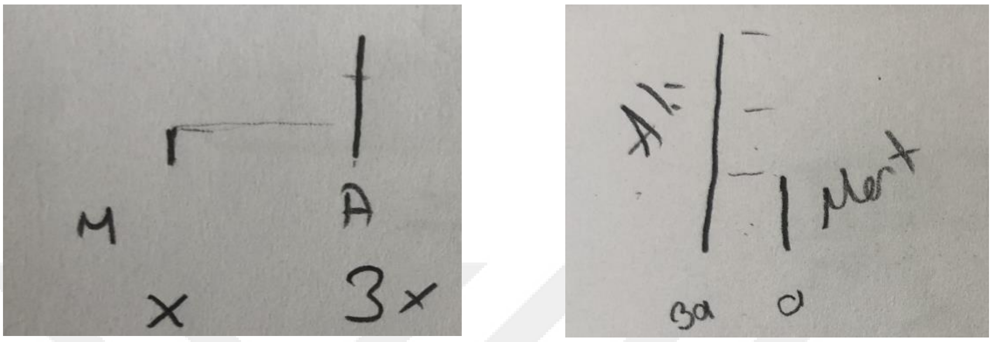
4.2.1 Parçalı Birim Kesir Düzeneği ve Cebirsel Düşünmeye İlişkin Bulgular

Bu kategoride öğrencilere, miktarlar arasındaki ilişkiyi tekrarlanan uzunluklar olarak değerlendirme ile alakalı iki soru sorulmuştur. Bu sorularda öğrencilerin kesir zihinsel düzeneklerinden parça birim kesir düzeneğine ilişkin kullandıkları kritik işlemleri cebirle ilişkili sorularda da kullanmaları beklenmiştir. Yani bu kategoride öğrencilerden parçalama, ayırma, tekrar etme gibi bu düzeneğe ait kritik işlemleri cebirsel ifadeler için de kullanmalarının yanı sıra bir parçanın yinelenmesi ile bütünün elde edilmesini cebirsel ifadelerle ilişkilendirmeleri beklenmiştir.

Bu kategoriye ilişkin birinci soruda öğrencilerden ilk olarak "*Ali'nin kaleminin uzunluğunun Mert'in kaleminin uzunluğunun 3 katıdır*" ifadesini şekille göstermeleri ve sonrasında ise cevaba ilişkin cebirsel ifadenin yazılması istenmiştir.

Bu soru ile ilgili öğrenci cevapları incelendiğinde ise öğrencelerin tamamının doğru cebirsel ifadeyi yazabildikleri görülmüştür. Bu soruda öğrencilerin çizdikleri şekiller incelendiğinde ise Ö1, Ö3, Ö5, Ö6, Ö9, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin Mert'in kaleminin uzunluğunu temsilen bir dikdörtgen, Ali'nin kaleminin uzunluğunu temsilen ise bu şekilden 3 kere yineleme yaparak bir şekil çizdikleri gözlemlenmiştir. Bu 3 parçayı birleşik olarak gösteren Ö1, Ö6 ve Ö12 kodlu öğrencilerin bu işlemleri için kesir bilgisi ile ilgili bölümde yer alan soruya benzer şekilde bir parçanın tekrarı ile diğer bütünü oluşturdukları yani birleşik bütün elde ettikleri söylenebilir. Ö1 kodlu öğrenci ise "*3 katı demiş yani 3 tanesini birleştirmemizi istiyor bu soruda. Çizdiğim bu şekiller aynı ama ben bunları eş çizemiyorum.*" şeklinde bir açıklama yaparak bütünü birleşik birim olarak algıladığını göstermiştir. Ö3, Ö5, Ö9 ve Ö11 kodlu öğrencilerin ise Ali'nin kalemini temsilen çizdikleri şeklin ayrık parçalardan oluştuğu görülmüştür. Bu öğrenciler özellikle önce cebirsel ifade yazmış, sonrasında şekil çizmiştir. Öğrencilerin ayrık parçalardan oluşan şekil çizmeleri önce cebirsel ifadeyi yazıp sonra şekli çizmelerinden kaynaklı olabileceği düşünülmektedir.

Ö4 kodlu öğrenci ise bir çizgi çizerek sonrasında bu çizginin 3 katı uzunlukta bir çizgi çizmiştir (Şekil 4.9a). Ö8 kodlu öğrenci ise önce Ali'nin kaleminin uzunluğunu temsilen bir çizgi çizmiş, sonrasında bu çizginin 3'te 1'ini ayırarak bunun Mert'in kalemini uzunluğunu temsil ettiğini ifade etmiş (Şekil 4.9b), yaptığı işlemi de "*Ali bu ise Mert'inki de budur. Çünkü bu bunun 3 katı yani bundan burada 3 tane var.*" şeklinde açıklayarak Ali'nin kaleminin daha uzun olduğunu belirtmiştir

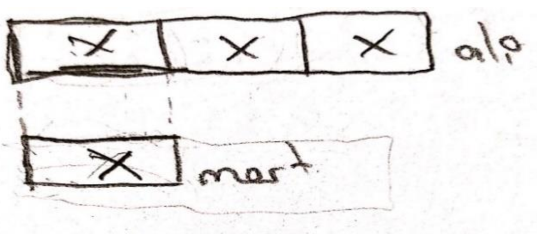


Şekil 4. 9 a. Cebirsel düşünme parçalı birim kesir düzeneğinde Ö4 kodlu öğrencinin çizimi b. Aynı zihinsel düzenekte Ö8 kodlu öğrencinin çizimi

Ö8 kodlu öğrencinin cevabına benzer şekilde önce Ali'nin kaleminin uzunluğundan yola çıkan Ö10 kodlu öğrenci de cevabını aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

> *Ö10: Ali'ninki 3 katmış. Bir tane rastgele dikdörtgen çizdim onu 3 eş parçaya ayırmaya çalıştım. Ve eş parçadan bir tanesine göre aşağıya bir parça daha çizdim ve ona Mert'inki dedim* (Şekil 4.10'daki şekli çiziyor).

Ö10 kodlu eş parçadan bir tane daha çizme sebebini ise *"Mesela şöyle uzun çizseydim tam onun 3'te 1'i olmazdı."* şeklinde açıklamıştır. Ö8 kodlu öğrenci şekli çubuk ile temsil ederken benzer açıklamalarla şekil olarak Ö8'den farklı olarak Ö10 kodlu öğrenci dikdörtgen model kullanmıştır. Aslında her iki öğrenci de bu soruda uzunluk modelini kullanmıştır.



Şekil 4. 10. Cebirsel Düşünme Parçalı Birim Kesir Düzeneğinde Ö10 kodlu öğrencinin çizimi

Ö8 ve Ö10 kodlu öğrencilerin çizdikleri şekil ve sözel ifadelerinden bu soru için parçalı birim kesir düzeneğinden ziyade parça bütün zihinsel düzeneğine için kritik olan parçalama ve ayırma işlemlerini yaptıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin bu işlemleri aritmetiktekinden farklılaşmıştır. Ö4 kodlu öğrenci ise bu öğrencilerden farklı olarak parça birim zihinsel düzeneği için kritik olan tekrarlama işlemini kullanarak uygun cebirsel ifadeyi yazmıştır.

Ö6 kodlu öğrencinin "*Ali'nin kaleminin uzunluğu x, Mert'in 3x yani Ali'nin kaleminden 3 tane gerekiyor Mert'in kalemini bulmamız için. Yani şuna (çizdiği ilk şekle) x dersem buda x, x, x yani 3x olur.*" şeklindeki ifadesiyle çarpımsal ilişkiden ziyade tekrarlı toplama işlemine vurgu yaptığı görülmüştür. Benzer şekilde Ö12 kodlu öğrenci de çizdiği ilk parçayı x değişkeni ile ifade edeceğini bu durumda her parçanın x olmasından dolayı 3 parçanın 3x'e eşit olacağını belirtmiştir. Bu öğrencilerin yineleme işlemini kullanmış olabilecekleri düşünülmüştür. Ö7 kodlu öğrenci ise 3'e bölünmüş 2 benzer şekil çizerek birinde 1 parçasını diğerinde ise üç parçasını taramıştır. Öğrencinin bu çizdiği şekil ve "*Ali'nin kaleminin uzunluğu Mert'in kaleminin uzunluğunun 3 katı diyor. O yüzden Ali'ye 3x dedim yani Mert x oluyor daha az olduğu için. Temsil eden şekilde ise bir bütünü 3'e böldüm, Mert'in kalemleri x zaten. Bütününün tamamı da 3x'e eşit. Ali'de 3x ediyordu şeklin tamamı da Ali'nin kalemleri olur*" şeklindeki ifadesi iki durumu birbiri ile ilişkilendirmediği ayrıca düzenek için kritik olan işlemleri de kullanmadığı tespit edilmiştir. Öğrenci şekil olarak yaptığı bir bütünü parçalama ve tarama işlemini cebirsel olarak yaptığı da söylenebilir. Bu açıdan bu öğrencinin parça bütün düzeneği ile ilgili cevaplar verdiği söylenebilir.

Öğrencilerin diğer öncülde yer alan "*Mert'in kalemi Ali'nin kaleminin 3'te 1'i olsaydı cebirsel ifadeyi nasıl yazardın?*" sorusuna ilişkin cevapları incelendiğinde Ö1 ve Ö4 kodlu öğrenciler baştaki durumla aynı olduğunu fakat bu sefer ilk olarak Ali'nin kalem uzunluğunu x değişkeni ile ifade edeceklerini bu durumda Mert'in kalem uzunluğunun $\frac{x}{3}$ olacağını belirtmişlerdir. Öğrencilerin bu yazım şekli öğrencilerin kesri katsayı olarak çarpım şeklinde kullanabildiklerine işaret eder. Benzer şekilde Ö2 ve Ö3 kodlu öğrenciler ise iki durumun aynı olduğunu belirtmiş fakat bu öğrenciler Ali'nin kalem uzunluğunu 3x değişkeni ile ifade edeceklerini bu durumda Mert'in kalem uzunluğunun x olacağını belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin ifadeleri parçalama işlemi yapmaları ile ilişkilendirilmiştir fakat düzenek için gerekli diğer kritik işlemleri kullandıkları düşünülemez. Ö5 kodlu öğrenci de kalem uzunlukları arasında 3'te 1'lik bir ilişki olduğundan aynı cebirsel ifadeyi yazacağını belirtmiştir. Benzer şekilde Ö6 kodlu öğrenci yine Ali'nin kalem uzunluğunun daha fazla olduğunu düşünerek, Ö7, Ö8, Ö10 ve Ö12 kodlu öğrenciler de Ali'nin kalem uzunluğunu yine diğerinin 3 katı olduğunu bildiklerini belirterek aynı cebirsel ifadeyi yazmışlardır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar kullandıkları işlemler açısından açıklayıcı olmaması nedeniyle öğrencilerin bu madde için cevaplarının hangi düzeneğe ait olduğu değerlendirilememiştir.

İlk verilen soru durumunda, 3 katı ifadesinden dolayı 3x yazdığını belirten Ö11 kodlu öğrenciyle bu soruya dair aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır:

Ö11: x çarpı $\frac{1}{3}$ *yapardım o zaman.*

A: Hangisi için kullanırdın bu ifadeyi?

Ö11: Bu sefer Ali'ye göre hesaplıyoruz sanırım o zaman Mert'e derdim.

A: Peki uzunluklar değişir mi?

Ö11: Onu bilmiyorum.

Öğrencinin söyleminden nicelikler arası ilişki kuramadığı ezbere bir çarpma işlemi yaparak sonuç elde etmeye çalıştığı söylenebilir.

İkinci soruda ise öğrencilere *"Bir masada biri diğerinin 4 katı kadar su dolu olan iki bardak vardır. a. Bu durumu temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız. b. Bir masada biri diğerinin* $\frac{1}{4}$*'i katı kadar su dolu olan iki bardak vardır, ifadesine ilişkin uygun cebirsel ifadeyi yazınız."* soruları sorularak öğrencilerden önce biri diğerinin 4 katı su içeren iki bardağı temsil eden şekli çizmeleri ve sonra da buna uygun cebirsel ifadeyi yazmaları istenmiştir. Birinci soruyla benzer becerileri ölçen bu soruya, öğrencilerin cebir problemlerinde sık karşılaşmaları fakat kesir sorularında daha az kullanılan bir soru çeşidi olması nedeniyle yer verilmiştir.

Öğrencilerin verdiği cevaplar ve izledikleri adımlar incelendiğinde Ö1, Ö3, Ö6 kodlu öğrenciler parçanın yinelenmesi işlemi ile bütünü elde ettikleri için parçalı birim kesir düzeneğinde, Ö2, Ö4, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler de parçalama ve ayırma işlemleri yaptıkları için parçalı bütün zihinsel düzeneğinde yer almıştır.

Öğrencilerin soruya verdikleri cevaplar ele alındığında sadece Ö1 kodlu öğrencinin, birinde bir parçanın diğerinde 4 parçanın gösterildiği iki bardak şekli çizdiği tespit edilmiştir. Öğrenci 2 bardak çizerek ilkinde bir parça göstermiş diğer bardakta ise bu parçanın aynısından 4 parça oluşturarak istenen durumu temsil etmiştir. Öğrencinin çizdiği görselde parçalar tam birbirine eşit olmasa da, öğrencinin "*Ben bu iki bardaktan birine rastgele su miktarı yazayım. Diğeri de 4 katıymış yani bunun 4 tanesini bir kabın içine koyarak elde ettiğimiz olur. Buradaki su* *miktarının 4 tanesi yani 4 katı vardır*." şeklindeki açıklamalarından da anlaşılabileceği gibi öğrenci bir parçanın tekrarlanmasıyla diğer parçaları elde etmiştir. Bir parçayı x değişkeniyle temsil eden öğrenci dört parçayı da 4x olarak ifade etmiştir. Tekrarlama işlemini kullanan Ö3 kodlu öğrenci ise öncelikle bir bardak çizmiş 4 katını temsilen ise aynı bardaktan 4 tane daha çizmiştir. Cebirsel olarak x ve 4x ifadelerini kullanan öğrenci çizdiği şeklin verilen durumu tam olarak temsil etmediğini fark etse de şekilde herhangi bir değişiklik yapmamıştır. Ö6 kodlu öğrenci öncelikle x değişkenini temsil eden bir şekil çizdikten sonra bu şeklin 4 tanesinin birleşimiyle elde ettiği şekli de 4x olarak ifade etmiş olup, "*Buna x dedim bu 4 katıymış o zaman 4 tane x gerekir*." şeklindeki ifadesiyle de öğrencinin yineleme işlemini kullandığı söylenebilir. Bu öğrencilerin belirledikleri parçaları hem şekil olarak hem de cebirsel olarak tekrarlayıp bütünü elde etmeleri parçalı birim zihinsel düzeneği ile ilişkilendirilebilir.

Bu öğrencilerden farklı olarak Ö4, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler bardağı temsilen 2 şekil çizerek birinde bir parça diğerinde 4 parça taramışlardır. Ö4, Ö7, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler sözel olarak buradaki parçaların eş parçalar olduklarını ifade etseler de görsel olarak parçaların eş olmadığı gözlemlenmiştir. Öğrencilerin bardak olarak temsil ettikleri şekillerde parçalama ve tarama işlemlerini kullandıklarını yani parça bütün düzeneğine ilişkin cevaplar verdiklerini gösterirken cebirsel ifadelerde parça bütün zihinsel düzeneğini dahi kullandıkları tam olarak söylenemez. Çünkü farklı büyüklükteki parçaları aynı değişkenlerle temsil ederek ilişki kurmaya çalışmışlardır. Öğrenciler ilk bardaktaki su miktarını x değişkeni ile temsil ettiklerinde diğer bardaktaki su miktarını 4x ile temsil edeceklerini ifade etseleler de öğrencilerin çizdikleri şekiller kesirlerin parça bütün anlamını çağrıştırsa da cebirsel olarak bu düzeneği dahi kullandıkları düşünülmemiş yani bu açıdan bu soruya ilişkin verilen cevaplar ilk soruya verilen cevaplardan farklılaşmıştır. Ö10 kodlu öğrenci ise tüm öğrencilerden farklı olarak öncelikle 4 parçalık bir şekil çizmiş olup sonrasında ise parçalardan birinin kopyasını çizerek bir parçayı x değişkeni ile temsil etmiştir. Bu öğrencinin işlemi ise parçalama ve ayırma kritik işlemleriyle ilişkili olarak parça bütün zihinsel düzeneğinde değerlendirilmiştir.

Öğrencilere b öncülünde *4'te 1'i su olan iki bardak bulunmaktadır* ifadesini temsil eden cebirsel ifadeyi nasıl yazacakları sorulmuştur. Benzer şekilde Ö1, Ö4 ve Ö11 kodlu öğrenciler aynı durumu temsil etse de x ve $\frac{x}{4}$ ifadelerini kullanmayı tercih edeceklerini belirtmişlerdir. Ö6 kodlu öğrenci ise "$\frac{x}{4}$ *dersem bu da* $\frac{4x}{4}$*'ten x olur*." şeklinde bir açıklama yapmıştır. Öğrencinin ifadesinden cebirsel ifadeyi yinelediği düşünülse de parça birim kesirli düzeneğini kullandığı tam olarak anlaşılamamaktadır. Çünkü öğrencinin iki ifade arasındaki ilişkiyi nasıl kurduğu tam anlaşılamamıştır. Yani yineleme işlemi kullandığı düşünülse de öğrencinin söylemi bunun için yeterli görülmemiştir. Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrenciler ilk durumda kullandıkları x ve 4x ifadelerini yine kullanacaklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin bu maddeye ilişkin cevaplarında parçalı birim zihinsel düzeneğini kullandıklarına ilişkin herhangi bir bulguya rastlanmamıştır. Dolayısıyla öğrencilerin çizdikleri şekiller açısından parça bütün zihinsel düzeneğinde olduğu söylenilebilse de cebirsel anlamda bu net değildir.

4.2.2 Basit Parçalı Birim Kesir Düzeneği ve Cebirsel Düşünmeye Ait Bulgular

Bu kategoriye ilişkin öğrencilere, 3 soru sorulmuş olup sorulardan ikisi basit kesirleri cebirsel ifadelerle kullanma ile ilgiliyken, bir tanesi ise tersine işlem gerektiren durumlarda cebirsel ifadeleri kullanmaları ile ilişkilidir. Öğrencilerden bu sorularda aritmetiksel kesirli işlemlerde kullandıkları parçalama, ayırma, yineleme işlemlerinin yanı sıra yarma işlemlerini cebirsel ifadelerde kullanmaları beklenmiştir. Öğrencilerden sadece Ö2, Ö6 ve Ö9 kodlu öğrenciler ilk olarak bütünü değişken ile temsil edip sonrasında birimi bulmaları ve birimi referans alarak istenilen kesri elde etmeleri nedeniyle basit zihinsel düzeneği kategorisinde değerlendirilmişlerdir.

Basit kesirli ifadeleri içeren bu soruların ilkinde öğrencilere *"Kerem'in kalemleri Alp'inkinin* $\frac{3}{4}$*'ü kadardır. Bu durumu temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız."* şeklinde bir soru yöneltilerek öğrencilerden ilgili durumu temsil eden bir şekil çizmeleri ve uygun cebirsel ifade yazmaları istenmiştir.

Bu soruya dair öğrenci cevapları incelendiğinde ise Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrencilerin önce şekil çizerek ilgili cebirsel ifadeyi yazdığı diğerlerinin ise önce cebirsel ifadeyi yazarak sonrasında şekil çizdikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin ilgili sorudaki şekilleri incelendiğinde Ö3, Ö4 ve Ö5 kodlu öğrencilerin ayrık niceliklerden yararlandığı, Ö1, Ö2, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin ise 3 veya 4 parçadan oluşan sürekli nicelikler kullandıkları belirlenmiştir.

Çizdikleri şekle göre uygun cebirsel ifadeyi yazan öğrencilerden Ö2, Ö6, Ö8 ve Ö9 kodlu öğrencilerin Alp'in kalem sayısının tamamını x değişkeni ile temsil ederek, Kerem'in kalem sayılarının temsili için kesirli katsayı kullandıkları belirlenmiştir. Örneğin, Ö2 kodlu öğrenci ilk olarak Kerem'in kalem sayısını x değişkeni ile temsil etmiş fakat sonrasında Kerem'in kalemlerinin daha az olduğunu belirterek Alp'in kalem sayısını x olarak temsil etmiştir. Kerem'in kalem sayısının az olmasını ise "*Çünkü Alp'inki 4'e bölünmüş bunun 3'ü Kerem'e* *eşit olmuş. Bunun şeklini nasıl çizeceğim ki ben. Şimdi Kerem'e 4'te 3 dedik. O zaman x,x,x şu 3x Kerem'in şekli oluyor.*" ifadesiyle açıklamıştır.

Ö2:Bir dakika bu çizdiğim şekil de Alp zaten. Bu 3 tane de Kerem'dir.

A: Peki cebirsel ifade nedir?

Ö2: Alp'in yani tamamı $\frac{4x}{4}$*Kerem'de* $\frac{3x}{4}$.

A: O zaman bir parça nedir?

Ö2: $\frac{x.}{4}$

Öğrenci ile yaşanan bu diyalogda öğrencinin parçayı $\frac{x}{4}$, istenen kesri $\frac{3x}{4}$ ve bütünü de $\frac{4x}{4}$ olarak kullanması öğrencinin basit parçalı kesir zihinsel düzeneği ile ilişkili iki seviyede birim koordinasyonunu cebirsel ifadelerle de kurduğu söylenebilir.

Benzer şekilde Alp'in kalem sayısını "x" değişkeni ile temsil eden Ö6 kodlu öğrenci dört parçalık bir bütün çizmiş olup ilk olarak Kerem'in kalemlerinin sayısının $\frac{x}{3}$ olduğunu düşünmüştür. Bu durumu ise "*Alp'e x dedim sonra onu da 3'e böldüm, yani* $\frac{3}{4}$ *dediği için yani 3 parça istediği için*" şeklinde açıklayan öğrenci sonra kendiliğinden yanlış düşündüğünü fark etmiş sonrasında "*4 parça var her bir parçayı bulayım ki Kerem'in kalemlerini bulabileyim.*" şeklinde düşünmüş ve bir parçayı $\frac{x}{4}$ olarak ifade etmiştir. Bu öğrenci ile aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır.

A: Peki Kerem'in kalemleri ne bu durumda?

Ö6: $\frac{x}{4} + 3$ *olur.*

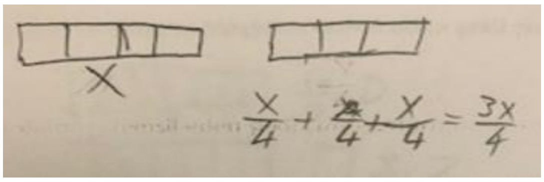
A: Neden 3 ile topluyoruz?

Ö6: Çünkü 3 parçanın toplamı Kerem'i ifade ediyor.

A: 3 parça nasıl bulunur peki?

Ö6: 2 tane daha parça ekleyerek yani 2 tane $\frac{x}{4}$ *eklerim. O yüzden bu 3 gereksiz oldu. Yani* $\frac{3x}{4}$ *aslında.*

Öğrenci ilk olarak her parçayı değişken olarak düşünememiş fakat sonra yanlış yaptığını fark ederek daha önceden yaptığı gibi tekrarlı toplama işlemine başvurmuştur. Parçaların toplamı gibi düşünen öğrencilerden Ö9 kodlu öğrenci çizdiği şekil (Şekil 4.11) ile diğer öğrencilerden farklılaşmaktadır.



Şekil 4. 11. Cebirsel Düşünme ve Basit Parçalı Kesir Düzeneğinde Ö9 kodlu öğrencinin çizimi

Şekil 4.11'e göre öğrenci Alp'in kalemlerini temsilen 4 parçalık bir bütün Kerem'in kalemlerini temsilen ise 3 parçalık bir bütün çizmiştir. Öğrencinin cebirsel ifadeyi nasıl yazdığına dair yaşanan diyalog da aşağıda sunulmuştur:

Ö9: Tamam ben Alp'e x derim. Kerem'in kalemleri 4 te 3 müş, bunu 4'e bölerim. Bu 3 tanesi Kerem'in oluyor. Bu da x/4 yapar, sayıları tam bilmediğimiz için.

A: Neden x/4 yapar?

Ö9: Şimdi bunun tamamı x bir parçasını bulabilmek için 4'e böleriz. Bu da x /4'tür.

A: 3 parçası nedir peki?

Ö9: 3x.. yok olmaz o zaman daha da büyür sanırım.

A: Neden büyür sayı?

Ö9: x bunun tamamı olduğu için, 3x olduğunda daha da büyür. Aslında şöyle 3x/4 olduğunda büyümez. Bunun bir tanesi $\frac{x}{4}$, 3' ünü topladığımızda $\frac{3x}{4}$ olur yine.

Ö9 kodlu öğrenci bütünü x değişkeni ile temsil ettikten sonra bir parçayı yani birimi $\frac{x}{4}$ olarak ifade etmiştir. Öğrencinin bu cevabı parçalama işlemini cebirsel ifadeyle temsil etmesiyle ilişkilendirilebilir. Aynı zamanda öğrenci bir parçayı kullanarak basit kesri cebirsel olarak da belirleyebilmiştir. Ö6 kodlu öğrenci de soruda Ö9 ile benzer cevaplar vermiştir.

Alp'in kalem sayısını x ile temsil eden Ö8 kodlu öğrenci 4 parçalık 2 şekil çizerek, bir şeklin 3 parçasının Kerem'in kalem sayısını diğerinin tamamının Alp'in kalem sayısının temsil ettiğini düşünmüş ve öğrenci bu durumu, *"Kerem'in kalemleri Alp'inkinin 4 te 3'ymüş. Yani 4'e bölüp 3'ünü almam lazım. Bu da Alp'in zaten bunun aynısı 4'e bölünmüş şekilde."* olarak açıklamıştır. Bu durumu cebirsel olarak nasıl ifade edeceğinin sorulması üzerine öğrenci ile aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır:

Ö8: x çarpı 4 te 3.

A: Neden çarptık peki?

Ö8: Burada nin demiş. Öyle yapıyoruz yani.

A: Bu çarpımların sonuçları ne olur?

Ö8: Onu bilemeyiz.

A: Peki ben burada bir parçaya a desem Alp ve Kerem'e ne derim?

Ö8: Alp 4a Kerem 3a olur.

Öğrencinin kesri çarpan olarak kullanamadığı bu durum öğrencinin bu konuyu kavramsal olarak değil de işlemsel olarak anlamasıyla ilişkilendirilebilir. Çünkü öğrenci çarpma işlemi yapmasının nedenini *"nın"* eki ile ilişkilendirmiş fakat neden bu işlemi yaptığı hakkında fikir yürütememiştir. Benzer şekilde Ö11 kodlu öğrenci de cebirsel ifadenin *"x çarpı 4'te 3"* olacağını belirtmiş fakat bunu $\frac{3x}{4}$olarak ifade edememiştir. Neden çarpma yaptığını öğrenci, "*Değer verseydi direkt bulurduk da. Burada da Alp'in kalem sayısı varmış Kerem'inde onun ¾'üymüş o yüzden. "nın" eki çarpma işlemi değil miydi? Ben öyle hatırlıyorum*" ifadeleriyle açıklamıştır. Öğrencinin değer verirse bulunabileceğini düşünmesi değişkenleri nicelik olarak algılamaması ile ilişkilendirilebilir. Öğrencinin bu durumu şekille temsil etmesi istendiğinde ise normalde bir bütünü 4'e bölüp 3'ünü tarayacağını fakat " *bu çarptığım için daha fazlaymış gibi bir his veriyor*" şeklinde açıkladığı için şekil ile temsil edemeyeceğini göstermiştir. Araştırmacı tarafından çarpma işleminin sonucu olarak hangisinin kaleminin daha fazla olduğunu düşündüğü sorulduğunda ise *"Alp'inkine göre Kerem'i hesapladığımıza göre Alp daha çok*" cevabını vermiştir. Sonrasında kafasının karıştığını ifade eden öğrenci soruya devam edememiştir. Öğrenciye soruya ilişkin çözümünden basit kesir zihinsel düzeneğini cebirsel ifadeler için kullanamadığı söylenebilir.

Ö7 kodlu öğrenci ise Kerem'in kalem sayısını x ile temsil etmesiyle diğer öğrencilerden farklılaşmıştır. İki tane 4 parçalık bütün çizen öğrenci 3 parçanın taralı olduğu şeklin Kerem'in kalem sayısını, tamamının taralı olduğu şeklin ise Alp'in kalem sayısını temsil ettiğini belirtmiştir. Kerem'in kalem sayısının daha az olmasından dolayı onu x değişkeni ile temsil ettiğini ifade eden öğrenci Alp'in kalem sayısının nasıl temsil edeceğini ilk olarak "*Kerem'in şekli 4 parçada 3 parça. Alp ise 4 parça. Bir parça da fazla olduğu için oraya* $x+\frac{x}{4}$ *dedim.*" şeklinde açıklamış fakat sonrasında öğrenci kendiliğinden fikrini değiştirerek "*Pardon 3 parça* *x o zaman bir parça* $\frac{x}{3}$ *olur. Yani x* $+\frac{x}{3}$ *olur.*" şeklinde ifade etmiştir. Bu açıklamasından öğrencinin Alp'in kalem sayısını bir bütünün bir parça fazlası olarak düşündüğü, kesirli işlemleri de değişkenlerle de kullanabildiği anlaşılabilir. Öğrenci kesirle ilgili işlemleri cebirsel ifadelerle kullansa da düzeneğe ilişkin kritik işlemleri kullanmamasından dolayı öğrencinin cevabının bu düzenekle ilişkili olmadığı söylenebilir.

Ö5 ve Ö10 kodlu öğrenciler ile önce cebirsel ifadeleri yazarak sonrasında şekil çizen Ö1, Ö3, Ö4 ve Ö12 kodlu öğrencilerin kesirli kat sayı kullanmak yerine Alp'in kalem sayısını 4x Kerem'in kalem sayısını 3x olarak ifade ettikleri tespit edilmiştir. Bu öğrencilere yazdıkları cebirsel ifadeye göre x değişkeni ile neyi temsil ettikleri sorulduğunda ise Ö1 kodlu öğrenci "*Alp'i kalemlerinin 4'te 1'i*", Ö3 kodlu öğrenci ise şekilden yola çıkarak "*bir parça*" olarak açıklamıştır. Benzer şekilde çizdiği şekildeki bir parçanın x'i temsil ettiğini söyleyen Ö5 kodlu öğrenci "*Bu durumda da x, x, x Kerem 3x oluyor*" şeklindeki söylemi ile 3 parçanın toplamını aldığını vurgulamıştır. Ö4 kodlu öğrenci ise oran olarak düşündüğünü söyleyerek "3x" ve "4x" ifadelerini kullandığını belirtmiştir. Kesirleri kat sayı olarak kullanmayan bu öğrencilerin elde ettikleri cebirsel ifadeleri birimden hareketle elde etmedikleri, direkt cebirsel ifadeyi yazdıkları fakat araştırmacının sorusu üzerine parçaya vurgu yaptıkları tespit edilmiştir. Bu anlamda bu öğrenciler için basit parçalı kesir düzeneğini ile ilişkili kritik işlemleri değişkenlerle kullandıklarına dair bir bulguya rastlanmamıştır.

Basit kesirleri içeren diğer bir soruda ise öğrencilere "*Ali Bey'in evinin markete olan uzaklığı, evin pazara olan uzaklığının* $\frac{2}{5}$*'si kadardır. Evin markete olan uzaklığı x metre olduğuna göre; a. Ali Bey'in evinin pazara olan uzaklığı ne kadardır? b. Bu durumu temsil eden bir şekil şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız."* şeklinde sorular sorularak onlardan ilgili uzaklığı temsil eden şekli çizmeleri ve uygun cebirsel ifadeyi yazmaları istenmiştir.

Bu soruya ilişkin cevaplar incelendiğinde ise Ö1, Ö2, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin önce şekil çizerek sonrasında uygun cebirsel ifadeyi yazdığı Ö3, Ö4 kodlu öğrencilerin ise önce cebirsel ifadeyi yazarak sonrasında şekil çizdikleri belirlenmiştir. Ö1, Ö4, Ö5, Ö11 kodlu öğrenciler şekli çizgi ile temsil ederken Ö3,Ö6, Ö10, Ö12 kodlu öğrencilere 5 parçadan oluşan dörtgenler ile, Ö2, Ö7, Ö8, Ö9 kodlu öğrenciler de 2 ayrı şekil çizerek temsil etmişlerdir. Bu soruda öğrencilerden parçalama, ayırma ve tekrarlama kritik işlemlerini yapmaları beklenmiş ve öğrencilerden Ö1, Ö5 kodlu öğrenciler parçalama, ayırma, tekrarlama kritik işlemlerini yaparak basit parçalı kesir düzeneğinde değerlendirilmişlerdir.

Ö1 kodlu öğrenci bütünü 5 parça olarak düşünmüş ve "*1 tanesini aldığımız durumda yani x dediğimiz de 5 parçadan birini alırız o zaman oradan da 1 tanesini almamız gerekir yani bu durumda orada da 5 parçadan birini alırız. Yani* $\frac{2x}{5}$ *olur*." şeklinde ki açıklamasıyla değişkeni de bölerek $\frac{x}{5}$ olarak ifade edebilmiştir. Aynı zamanda öğrencinin 2 parçayı $\frac{2x}{5}$ olarak ifade etmesi yineleme işlemini kullanmasıyla ilişkilendirilebilir. Ö6 kodlu öğrenci de ilk olarak verilen x metre uzunluğu 2'ye bölmesi gerektiğini söylemiş sonrasında ise fikrini değiştirerek x'i 5'e bölerek bir parçayı sonrasında da istenileni toplayarak bulabileceğini ifade etmiştir. 5 parçalık bir bütün çizen öğrenci bir parçayı $\frac{x}{5}$ olarak ifade etmiş sonrasında ise iki parçayı toplayarak $\frac{2x}{5}$ sonucuna ulaşmıştır. Benzer şekilde toplama işlemi yapan Ö7 kodlu öğrenci de ilk olarak pazarın uzaklığını 5 parça, marketin uzaklığını ise 2 parça olarak belirtmiş, sonrasında ise marketin uzaklığı için "x-3" ifadesini yazmıştır. Fakat öğrenciye bunu nasıl yazdığı sorulduğunda ise fikrini değiştirerek iki parçanın toplamının $\frac{2x}{5}$ olacağını ifade etmiştir. Öğrencinin ilk yazdığı ifade öğrencinin bütünü yani x değişkenini değişen nicelik olarak değerlendirmemesi veya parça sayısına odaklanması ile ilişkilendirilebilir. Ö9 ve Ö11 kodlu öğrencilerin ise x'in 5'te 5'i temsil ettiğini düşünerek işlem yaptıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden Ö9 kodlu öğrencinin sonrasında $\frac{5x}{5}$ yazarak 5 parçanın 5x'i 2 parçanın 2x'i temsil edeceğini bu durumda ifadenin de $\frac{2x}{5}$ olarak yazılabileceğini ifade etmiştir. Ö11 kodlu öğrenci ise x ile $\frac{2}{5}$'i çarpması gerektiğini ifade etmiştir. Yaptığı işlemden emin olmayan öğrenci, bunu "*Normalde bir değer olurdu, çarpar çarpardım sonra sadeleştirirdim sonra sonucu bulurdum, şıklara filan bakardım. İlk onu denerdim yani. Genelde çarpma kullanılıyor. Bölme çok kullanılmıyor ama burada da 5'e bölme var yani bölme işlemi olabilir*." şeklindeki açıklamalarıyla ifade etmiştir. Akıl yürütmeden ziyade ezbere işlem yapan öğrenciye bir parçanın ne ifade ettiği sorulduğunda $\frac{x}{5}$ cevabını vermiş buradan yola çıkarak da sonucun $\frac{x}{5}+1$ olacağını düşünmüştür. Ö8 kodlu öğrencinin ise diğer sorularda olduğu gibi sonucu $x.\frac{2}{5}$ olarak bıraktığı görülmüştür. Bu çarpımın sonucunun ne olacağı tekrar sorulduğunda ise $\frac{2x}{5}$ olabileceğini ifade etmiştir.

Ö4 kodlu öğrencinin ilk olarak "x=5" şeklinde bir ifade yazdığı tespit edilmiştir. Buna göre markete olan uzaklığın ne olacağı sorulduğunda ise "*5'e bölünmüş 2 alınmış yani* $\frac{2}{5}$ *olmaz mı?*

Yani $\frac{2x}{5}$" cevabını vermiştir. Öğrenciye neden bu şekilde yazdığı sorulduğunda ise bütünüm 5 parça olduğunu bir parçanın $\frac{x}{5}$'i ifade ettiğini belirtse de $\frac{2x}{5}$'i nasıl yazdığını açıklayamamıştır. Ö4 kodlu öğrencinin önce aritmetiksel olarak kesri 5 parçadan 2'si olarak belirlediği sonrasında ise bunu kat sayı olarak değişken ile çarptığı söylenebilir. Öğrencinin çözüm aşamasında basit kesir düzeneği için kritik olan işlemleri değişken ile kullanmadığı yani cevabının bu düzenekle ilişkili olmadığı söylenebilir.

Ö5 kodlu öğrenci ise ilk olarak x ifadesini 2'ye, sonrasında ise kendiliğinden fikrini değiştirerek 5'e bölmüştür. Öğrenciye neden böyle yaptığı sorulduğunda ise "*5'te 2'si kadar. O zaman 5'e bölüp 2 ile çarpmalıyım. Yani* $\frac{x}{5}$ *çarpı 2 olmalı o zaman* $\frac{2x}{10}$ *olur*" şeklinde cevap vermiştir. $\frac{2x}{10}$'u nasıl yazdığını açıklayamayan öğrenci neden 2 ile çarptığını ise "*5'e bölünce* $\frac{x}{5}$ *oldu burada da 2 var (5'te 2) o yüzden 2 ile çarptım*." şeklinde açıklamıştır. Benzer şekilde çapma sonucu ilk olarak $\frac{2x}{10}$ ifadesini kullanan Ö10 kodlu öğrenci ise bunun ne ifade ettiğini düşünerek "*Parça sayısını da arttırmış oluyoruz, artmaması lazım* $\frac{2x}{5}$ *olmalı*" şeklinde düşünerek cevabını sonradan değiştirmiştir. Benzer işlemler yapan iki öğrenciden Ö5 kodlu öğrencinin basit kesri birim kesri tekrarlayarak elde ettiği söylenebilirken Ö10 kodlu öğrencinin bu işlemi tam olarak anlamlandıramadığı ve daha çok parça bütün ilişkisi kurduğu söylenebilir.

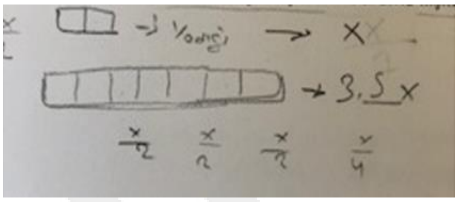
Ö2 ve Ö3 kodlu öğrencilerin de kesirli ifadeyi çarpan olarak kullanmadıkları gözlemlenmiştir. Bu anlamda öğrenciler ilk olarak 2x ve 5x olarak değişkenleri yazmış sonrasında bir parçanın x olabileceğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin bu işlemi bir bütünün parçasını elde etmekle ilişkilendirilebilir. Fakat bu öğrenciler için basit parçalı kesir düzeneğini ile ilişkili kritik işlemleri değişkenlerle kullandıkları düşünülemez.

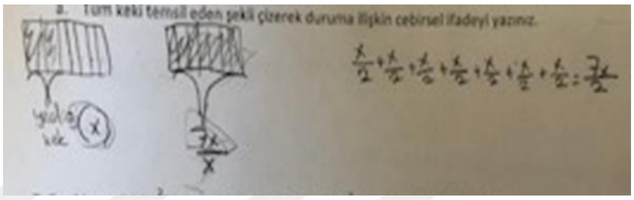
4.2.2.1 Tersine İşleyen Basit Kesir Düzeneği ve Cebirsel Düşünmeye Ait Bulgular

Bu kategoride öğrencilere sadece bir soru sorulmuş ve sorulan soru ise *"Merve'nin yediği kek dilimi tüm kekin* $\frac{2}{7}$*'si kadardır. Merve'nin yediği kek diliminden yola çıkarak tüm keki temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.*" şeklindedir. Soruda öğrencilerden Merve'nin yediği kek dilimini değişken ile temsil ederek tüm keki bulmaları istenmiştir. Bu soruda öğrencilerden parçalama ve yineleme işlemini eş zamanlı kullanması beklenmiştir.

Bu soruda öğrencilerden Ö3, Ö4 ve Ö6 kodlu öğrencilerin parçalama ve yineleme kritik işlemlerini eş zamanlı yaparak tersine işleyen düzeneğe ilişkin cevaplar verdikleri, Ö1, Ö2, Ö5, Ö9, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin ise basit kesri birim kesir ile ifade ettikleri düşünülerek basit parçalı kesir düzeneğinde cevaplar verdikleri görülmüştür. Ö8 kodlu öğrencinin işlemi ise düzeneklerle ilişkilendirilememiştir.

Öğrenci cevapları incelendiğine Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin önce şekil çizerek sonrasında cebirsel ifadeyi yazdıkları, Ö1, Ö9 kodlu öğrencileri ise önce cebirsel ifadeyi yazıp sonrasında uygun şekli çizdikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin tamamı model olarak 7 parçaya ayrılmış dörtgen kullanmış olup Ö4 (Şekil 4.12a) ve Ö7 (Şekil 4.12b) kodlu öğrenciler 2 şekil kullanmışlardır.





Şekil 4. 12. a. Tersine işleyen basit kesir düzeneği ve cebirsel düşünmede Ö4 kodlu öğrencinin çizimi b. Aynı düzenek için Ö7 kodlu öğrencinin çizimi

Ö1, Ö3, Ö5, Ö10 ve Ö12 kodlu öğrenciler çizdikleri 7 parçalık bütünün bir parçasını “x” değişkeni ile temsil ederek Merve’nin yediği keki “2x”, bütünü de “7x” olarak ifade etmiştir. Bu öğrencileri katsayı olarak kesirli ifade kullanmak yerine tam sayı kullanmayı tercih etmiş olmaları düzenek ile ilişkisiz olarak görünse de öğrencilerin çizdiklerin şekillerin ve çözüm yollarının daha açıklayıcı olacağı düşünülmektedir. Bu anlamda Ö1 kodlu öğrenci ilk olarak cebirsel ifadeyi yazarak Merve’nin yediği kek dilimini 2x olarak ifade etmiştir. Öğrenciye x’in neyi temsil ettiği sorulduğunda ise *“7’de 1 olur x o da bir dilim kek olur”* cevabını vermiştir. Öğrenci aritmetiksel olarak kritik işlemleri kullanmış olarak görünse de cebir kapsamında aynı şey düşünülememiştir. Ö3 kodlu öğrenci de Merve’nin yediği dilimi “2x” olarak belirtmiş ve *“7’de 2 dediği için bir şekli 7’ye böldüm 2 tane parça aldım, x x olarak o da 2x ediyor*” yani öğrenci 2 parça olmasından dolayı her parçayı “x” bütünü ise 7x olarak düşünmüştür. Bu öğrenci her ne kadar kesirli ifadeyi katsayı olarak kullanmasa da kesirlerde kullandıkları tersine işlemi uyarlayarak cebir içeren sorularda da kullanmıştır denilebilir.

Ö5 kodlu öğrenci ise çizdiği şekilden yola çıkarak bir dilimi yani $\frac{1}{7}$’i x olarak belirtmiş, öğrencinin “*Merve* $\frac{2}{7}$ *olduğu için de 2x olur*” şeklindeki ifadesi ve işlemleri her ne kadar tersine işlem yaptığına dair bir bulgu sunmasa da öğrencinin basit kesri birim kesrin yinelenmesi olarak ifade edebildiği yani iki seviyeli birim koordinasyonunu cebirsel ifadelerde kullandığı söylenebilir. Ö10 ve Ö12 kodlu öğrenciler de parça sayısına odaklanmış ve bir parçanın x olması nedeniyle yenilen kekin 2x, tamamının ise 7x olduğunu belirtmişlerdir.

Ö2 kodlu öğrenci ise 7 parçalık bir bütün çizerek 2 parçasını taramıştır. Merve'nin yediği kek dilimini '$\frac{2x}{7}$' olarak ifade eden öğrenci ilk olarak bütüne "7x" demiş fakat şekille kontrol edince her parçanın $\frac{x}{7}$'yi ifade ettiğini belirterek tüm keki "$\frac{7x}{7}$ *yani x*" olarak ifade etmiştir. Öğrenci çizdiği şekilde de cebirsel olarak önce bütünü belirlemiş sonrasında parçaları oluşturmuştur. Öğrencinin işlemleri tersine işleyen düzenek ile ilişkilendirilememiştir. Fakat öğrencinin parçayı belirleyerek bütünü ve istenilen kesri bir parçaya göre ifade edebilmesi basit parçalı kesir düzeneği kapsamında değerlendirilebilir. Ö9 kodlu öğrenci de "*Tüm kek x'tir. 7'e böleceğimiz için büyük kek çizelim. O zaman biri* $\frac{x}{7}$ *olur. Merve'de Bir kekin 7 de 2'sini yemiş o yüzden bir keki çizip 7'ye böldüm. İşte kekin tamamı x Merve'nin yediği de* $\frac{2x}{7}$ *olur*." şeklinde kullandığı işlemler doğrultusunda basit parçalı kesir düzeneği kapsamında değerlendirilebilir.

Ö4, Ö6 ve Ö7 kodlu öğrenciler ise Merve'nin yediği dilime "x" diyerek bir parçayı $\frac{x}{2}$ve bütünü de $\frac{7x}{2}$olarak ifade etmişlerdir. Merve'nin yediği dilimi x olarak ifade eden Ö6 kodlu öğrenci ilk olarak çizdiği 7 parçalık bütünde her parçayı bulmak yerine her ikili parçaya x diyerek ilerlemiş ve bütünü 3x,5 yani 3x buçuk olarak ifade etmiştir. Sonrasında kendiliğinden Merve'nin yediği dilime 2x demeyi tercih eden Ö6 ile aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Ö6: Yok Merve'nin yediği dilime 2x dersem tüm kek de 7x olur.

A: Neden Merve'nin yediği dilime önce x sonra 2x dedin?

Ö6: Eğer 2 dilime x deseydim daha küçük bir sonuç çıkardı o yüzden onun yerine her bir dilime x dedim.

A: Dilimler mi küçük olacak?

Ö6: Hayır sonuç küçük olacaktı 7 dilim olmuyordu.

A: Neden?

Ö6: 2 dilime x dersek 3x buçuk gibi bir şey çıkıyordu.

A: Neden küçük oluyordu?

Ö6: Aslında öyle de çıkardı 2 ile çarptığımızda 7x olurdu.

Ö6 kodlu öğrenci parçalama ve yineleme işlemlerini eş zamanlı kullanmasından dolayı işlemleri düzenek kapsamında değerlendirilmiştir. Fakat öğrencinin ilk olarak dilim sayısı ile kat sayının farklı olması nedeniyle sonucun küçük olacağını düşünmesi öğrenci yaptığı işlemi tam anlamlandıramadığı söylenebilir.

Merve'nin yediği dilimi x değişkeni ile temsil eden Ö4 kodlu öğrenci ile de aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

A: Merve'ye x dersek bir parça ne olur?

Ö4: Yediğine x dersek. Tamamı 7x gibi bir şey. Ya da 3,5x gibi (Öğrenci Şekil 4.12a'daki şekli çiziyor).

A: Nasıl yaptın?

Ö4: İkiye böldüm. Ya tam bilmiyorum.

A: Merve'ye x dersek bir parça ne olur.

Ö4: $\frac{x}{2}$.

A: Tamamını nasıl buluruz?

Ö4: : $\frac{x}{2}$ *, :* $\frac{x}{2}$*... :* $\frac{x}{2}$*'yi 7 tane toplamış oluyoruz.*

A: Neden 7 tane topladık?

Ö4: Çünkü 7 parça var.

Ö7 kodlu öğrenci de Merve'nin yediği dilimi x değişkeni ile temsil ederek "*bir parça x/2, kekin tamamı ise* $\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+.....=\frac{7x}{2}$." şeklinde yaptığı işlemi açıklamıştır Aynı işlemleri kullanan bu iki öğrenciden Ö4 kodlu öğrenci için çizdiği şekil (Şekil 4.12a) ve açıklamaları düzenek için kritik parçalama ve yineleme işlemlerini kullandığı söylenebilirken, Ö7 kodlu öğrencinin çizdiği şekil (Şekil 4.12b) açısından parçalama işlemi yaptığı tespit edilebilirken yineleme işlemini kullanmış olması tam olarak tespit edilememiştir. Bu anlamda Ö4 kodlu öğrencinin işlemleri düzenek kapsamında değerlendirilirken Ö7 kodlu öğrencinin işlemleri düzenek kapsamında değerlendirilmemiştir.

Ö8 kodlu öğrenci ise 7 parçalık bir bütün çizerek bütüne x demiş Merve'nin 2 . $\frac{x}{7}$ olarak devam edeceğini ifade etmiştir. Bu cevap öğrencinin tersine işlem gerektiren soruları çözmediğini göstermiştir.

4.2.3 Çarpımsal Bileşim Zihinsel Düzeneği ve Cebirsel Düşünmeye Ait Bulgular

Bu kategoride birim kesirlerin çarpımını içeren 2 tane, dağıtmalı bölme ile ilişkili bir tane soru sorulmuştur. Bu kategoride öğrencilerden kesirlerle çarpma ile ilgili tekrarlı ve dağıtmalı işlemlerini cebirsel ifadelerde de kullanmaları beklenmiş ve genel olarak öğrencilerin tekrarlı bölme ve dağıtmalı bölme işlemlerini cebirsel ifadelerle ilişkilendiremedikleri tespit edilmiştir.

Dağıtmalı bölme ile ilişkili olan soruda öğrencilere *"Bir doğum günü partisinde 3 tane pasta bulunmaktadır. Her bir pasta x gram ağırlığındadır. Buna göre bütün pastaların ağırlıklarının* $\frac{1}{5}$ *i ne kadardır? Bu durumu temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız."* sorusu sorularak öğrencilerden her biri x gram olan 3 pastanın $\frac{1}{5}$'inin şeklini çizerek, cebirsel ifadesini yazmaları istenerek çarpımsal ilişkiye ve dağıtmalı bölme işlemine dikkat edilmiştir.

Bu soruya ilişkin cevaplar incelendiğinde Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö8 ve Ö9 kodlu öğrencilerin önce cebirsel ifade yazarak buna uygun şekil çizmeye çalıştıkları Ö7, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrencilerin ise önce şekil çizerek sonrasında cebirsel ifadeyi yazdıkları tespit edilmiştir. Ö12 kodlu öğrenci ise herhangi bir cebirsel ifade yazamamıştır. Önce cebirsel ifadeyi yazan öğrencilerin verdikleri cevaplar değerlendirildiğinde öğrencilerin bu tarz sorularda çarpma işlemi yapmaları gerektiğini bildikleri fakat bu bilgiyi sadece ezbere işlem niteliğinde kullanabildikleri görülmüştür. Öğrenciler çarpma işleminin yapılacağını bilse dahi Ö1, Ö2 ve Ö3 kodlu öğrenciler haricindeki diğer öğrencilerin bu durumu modelleyemediği tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden de Ö1 kodlu öğrencinin sadece bu durumu kesirlere ilişkilendirebildiği fakat cebirsel ifadelerle kullanamadığı görülmüştür. Bu soruda hiçbir öğrencinin ilk çözüm yöntemi dağıtmalı bölme olmasa da Ö2 ve Ö3 kodlu öğrencilerin araştırmacının soruları doğrultusunda cebir ile dağıtmalı bölme işlemini ilişkilendirebildikleri tespit edilmiştir.

Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö11 kodlu öğrencilerin ilk olarak 3x ile $\frac{1}{5}$'i çarptıkları belirlenmiştir. Ö8, Ö9 ve Ö11 kodlu öğrencilerin dışındaki öğrenciler bunu $\frac{3x}{5}$ olarak yazabilirken, Ö8, Ö9 ve Ö11 kodlu öğrenciler ise $3x.\frac{1}{5}$ olacağını ifade etmişlerdir. Öğrencilerden yaptıkları işlemleri açıklamaları istendiğinde Ö1 kodlu öğrenci her pastayı 5'e bölerek toplamda 15 parça pasta elde ettiğini ve 5'te 1'i sorulduğu için her birinden bir parça alarak toplamda 15'te 3 elde ettiğini ifade etmiştir. Sonrasında ise 3x ile $\frac{3}{15}$'i çarpan öğrenci yaptığı işlemi, *"Tüm pastamız 3x ve ben toplamda tüm pastadan* $\frac{3}{15}$ *dilim almışım o zaman bunu 3x ile çarparım yani 15 te 9x olur. Çünkü 3x'lik pastadan bunu almışım."* ifadeleriyle açıklamıştır. Öğrencinin açıklamaları ile bağlantılı olarak kesirlerde kritik işlemleri kullanabildiğini fakat bunu cebire uygulayamadığı söylenebilir. Çünkü öğrenci kesir olarak $\frac{3}{15}$ doğru cevabını elde edebilmiş fakat cebirsel olarak ifade etmek için bütünün bulduğu kesir kadar değerini hesaplamaya çalışmıştır.

Ö7 kodlu öğrenci ise 15 parçalık bir bütün çizerek bunun 3 parçasını taramıştır. Öğrenciye cebirsel ifadenin ne olacağı sorulduğunda ise, *"3x ile* $\frac{1}{5}$*'in çarpımı olabilirdi"* cevabını vermiştir. Öğrenci neden çarpma işlemi yaptığını açıklayamamış soruya *"Ya zaten 1'den küçük bir sayı ile çarpınca küçülüyor."* şeklinde bir cevap vermiştir. Bunun üzerine öğrenciye bir parçanın cebirsel ifadesi sorulmuştur. Öğrencinin verdiği cevap ise şu şekildedir;

Ö7: Immm. 3x'in 15'te 1'i 3x çarpı 15 te 1 olabilir.

A: Neden çarpıyoruz ben tam anlayamadım o kısmı?

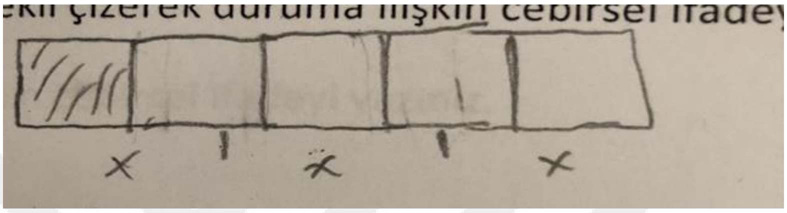
Ö7: Ya aslında 3x'i 15 'e bölüyorum

Öğrencinin açıklamaları doğrultusunda dağıtmalı bölme işlemini cebire uygulayamadığı görülmüştür. Ayrıca öğrencinin bütünü 15'e bölme düşüncesi ile öğrencinin parça bütün ilişkisi kurduğu söylenebilir.

İlk olarak toplam pasta gramını temsilen yazdığı 3x ile $\frac{1}{5}$'i çarpacağını ifade eden öğrencilerden Ö2 kodlu öğrenciden bu durumu temsil eden bir şekil çizmesi istendiğinde her parçanın "x" olduğunu düşündüğü 5 parçalık bir bütün çizdiği ve sonrasında 3 parçasını taradığı tespit edilmiştir. Araştırmacı tarafından, her paçanın x ile temsil edildiği 5 parçalık bir bütünün tamamını temsil eden ifadenin ne olacağının sorulması üzerine öğrenci kendiliğinden çizdiği şekil ile yazdığı ifadenin tutarsızlığını fark etmiştir. Bunun üzerine yapması gereken işlemi *"O zaman* $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{5}$ *de yapabilirim. Yani şimdi bu x, bu da x, bu da, bunları teker teker 5'e bölersem bir parça* $\frac{x}{5}$ *olur ve 3 ünü toplayınca da* $\frac{3x}{5}$ *olur."* olarak açıklamıştır. Öğrencinin son açıklaması cebir ve dağıtmalı bölme işlemini ilişkilendirebilmesi ile açıklanabilir. Benzer şekilde Ö3 kodlu öğrenci de ilk olarak 5 parçalık bir bütün çizerek 3'ünü taramıştır. Fakat bütünün tamamını x ile temsil etmesinden dolayı istediği sonucu elde edememiştir.

Araştırmacının bir pastanın x gram olduğunu hatırlatması ile x gramlık 3 şekil çizerek her birinden 5'te 1'lik parça alarak istediği sonucu elde etmiştir.

Ö4, Ö5, Ö6, Ö8 ve Ö10 kodlu öğrenciler ise ilk olarak ayrı çizdikleri 3 pastayı birleştirdiklerini ifade ettikleri yeni bir pasta çizmişlerdir. Sonrasında bu şekli 5'e bölerek 3'ünü taramışlardır. Fakat Ö10 kodlu öğrencinin dışındaki öğrencilerin yeni çizdikleri şekiller öncekilerin 3 katı şeklinde olmadığı belirlenmiştir. Hatta Ö8 kodlu öğrenci ilk daire şeklinde çizdiği şekillerin birleşimini dikdörtgen olarak çizmiştir. Bu öğrencilerin bu düzenek için kritik işlem olan dağıtmalı bölme işlemini aritmetiksel olarak dahi kullanamadıkları ve modelleyemedikleri düşünülebilir. Ö10 kodlu öğrencinin çizdiği şekil ise Şekil 4.13'deki gibidir.



Şekil 4. 13. Çarpımsal bileşim zihinsel düzeneği ve cebirsel düşünmede Ö10 kodlu öğrencinin çizimi

Şekil 4.13'e göre şekli ayrı çizmenin zor olacağını düşünen Ö10 kodlu öğrenci 3 pastayı birleştirerek 5'e parçalamıştır. Parçalama işlemini yaparken birleştirdiği çizgilerin şekillerini de göz ardı etmemiştir. Fakat öğrencinin bu işlemi de dağıtmalı bölme işlemi ile ilişkilendirilememiştir.

Kesirlerle çarpma işlemini içeren diğer iki soruda öğrencilerin cebirsel olarak bu durumu nasıl algıladıklarını belirlemek adına kullandıkları yöntemler incelenmiştir. Bu sorularda öğrencilerden tekrarlı bölme işlemi ile birimin başka birim açısından ifade etmesi beklenmiştir. Bu sorularda genel olarak öğrencilerin tekrarlı bölme işlemini aritmetiksel olarak kullandıkları fakat cebirsel ifadelere yansıtmadıkları tespit edilmiştir.

Bu kategoride öğrencilere ilk olarak *"Ece bir sandviçin* $\frac{2}{3}$*'sini yemiştir. Kalan sandviçin* $\frac{1}{4}$*'ini ise kardeşi yemiştir. Ece'nin kardeşinin yediği sandviçi temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız."* soruları sorulmuş ve öğrencilerden ilgili durumu temsil edecek bir şekil çizmeleri ve problem durumuna uygun bir cebirsel ifade yazmaları istenmiştir.

Bu soruya ait öğrenci cevapları incelendiğinde Ö1, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrencilerin durumu temsil eden bir şekil çizdikleri sonrasında uygun cebirsel ifadeyi yazdıkları gözlemlenmiştir. Ö3 ve Ö4 kodlu öğrenciler ise önce sonuç için gerekli iki kesrin çarpmış ve buradan hareketle uygun cebirsel ifadeyi yazmışlardır.

Ö1 ve Ö6 kodlu öğrenciler ilk olarak bir şekli 3'e bölmüş bir parçayı da 4'e bölerek kardeşin bütünün 12'de 1'ini yediğini belirlemiştir. Sonrasında ise 3'te 1'lik parçayı x olarak, kardeşin yediğini $\frac{x}{4}$, tamamını ise 3x olarak ifade etmişlerdir. Ö3 kodlu öğrenci ise 3'te 1'lik kısmı 12x, kardeşin yediğini 3x, tamamı ise 36x olarak ifade etmiştir. Yani öğrenciler ilk olarak sayısal değerlerle işlem yapmış sonrasında değişkenleri kullanarak uygun cebirsel ifadeyi oluşturmuşlardır. Bu anlamda öğrencilerin cebirsel ifadelerde kesirlere ilişkin tekrarlı bölme işlemini kullandıklarına ilişkin bir bulguya rastlanmamıştır. Ö4 kodlu öğrenci de benzer şekilde önce çarpma işlemini yapmış, sonrasında değişken kullanmış yani bu öğrencide cebirsel ifadelerde kesirlerde kullandığı işlemleri kullanmamıştır.

Ö2 kodlu öğrenci bütünü x olarak ifade ettikten sonra 3'te 1'i $\frac{x}{3}$, kardeşin yediğini ise $\frac{x}{3}.\frac{1}{4}$ olarak ifade etmiştir. 4 te 1'i yenmiş yani benim bunu 4'e bölüp 1 ile çarpmam gerekiyor. $\frac{x}{12}$ olur bu da. Öğrenci çarpma işlemini neden yaptığını ise kural böyle diyerek açıklamıştır. Benzer şekilde sandviçin bütününü x değişkeni ile temsil eden Ö9 kodlu öğrenci ise eşitleme yapacağını ifade ederek payda eşitlemiş bunun sonucunda elde ettiği 12 sayısını bütünün parça sayısı olarak kullanmıştır. Ö5 kodlu öğrenci de benzer şekilde eşitleme yapması gerektiğini ifade etmiştir. Neden böyle yaptıkları sorulduğunda ise "*böyle öğrendik*" diyerek herhangi bir açıklama yapamamışlardır. Ö8 ve Ö10 kodlu öğrenciler de kardeşin yediğini x değişkeni ile temsil ederek tamamının 12x olacağını düşünmüşlerdir. Ö8 kodlu öğrenci ise ilk olarak 3'te 1'lik parçaya x demiş kardeşin yediğini ise $x.\frac{1}{4}$ olarak ifade etmiştir. Sonrasında fikrini değiştirerek küçük parçaya x, tamamına 12x demiştir. Öğrencinin kesirli katsayıları kullanamaması sonuca ulaşmasını engellemiş fakat aritmetik bilgisi çizdiği şekil için uygun cebirsel ifadeyi yazmasını sağlamıştır. Bir parçayı x olarak temsil eden öğrencilerden Ö10 kodlu öğrenci ile aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır.

> *Ö10: Öncelikle 3 parçaya böldüm 2'sini Ece yemiş. Kalan bir parçayı da 4'e bölerek birini boyadım, bunu da kardeşi yemiş. Küçük olana x demek daha kolay oluyor, o yüzden kardeşinin yediğine x dersek buralarda da aynısı oluyor yani 4 tane x vardı.*
>
> *A: Neden küçük olana x demek kolay oluyor sence?*
>
> *Ö10: Çünkü bölü olarak yazmak daha zor.*

A: Peki tamamına x deseydik kardeşin yediğine ne derdik?

Ö10: 12/x. Yok hayır bir dakika, 12 parça var o yüzden 12 de x.

Ö7 kodlu öğrenci ise Ece'nin yediği kısmı "x" olarak ifade etmiş bu durumda kardeşinin yediğini x/8, tamamını ise x + $\frac{x}{2}$'den $\frac{3x}{2}$ olarak ifade etmiştir. Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler ise önce herhangi bir sonuç elde edememişler sonrasında ise araştırmacının yönlendirmesiyle parçaya x diyerek tamamını 12x olarak ifade edebilmişlerdir.

Kesirlerle çarpma işlemi ile ilişkili olarak verilen diğer soruda öğrencilere *"Bir kasa elmanın $\frac{1}{2}$'si çürümüştür. Kalanların ise $\frac{1}{3}$'i satılmıştır. Ne kadar elma satıldığını anlamamızı sağlayan ifadenin şeklini çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız."* sorusu sorularak öğrencilerden $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1'}{3}$ ün çarpımı için kritik görülen tekrarlı bölme işlemini cebirsel olarak da kullanabilmeleri beklenmiştir. Öğrencilerden temsili şekli çizerek uygun cebirsel ifadeyi yazmaları istenmiştir. Bu soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin bir şekil çizerek çarpma işlemini şekil üzerinde doğru gösterdikleri buna göre de uygun cebirsel ifadeleri kullandıkları, Ö3 kodlu öğrencinin önce çarpma işlemi yaparak, Ö9 kodlu öğrencinin ise payda eşitleme yaparak sonrasında uygun değişkenleri kullandığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu soruda Ö3 kodlu dışındaki öğrencilerin tamamının düzenek için kritik tekrarlı bölme işlemini aritmetiksel olarak kullandıkları fakat sadece Ö2 kodlu öğrencinin bu işlemi cebirsel ifadelere uyarlayabildiği tespit edilmiştir. Bu soruda elma sayısı kullanılmasından dolayı öğrencilerin küme modeli kullanabileceği düşünülse de öğrencilerin tamamı uzunluk modeli kullanmayı tercih etmişlerdir.

Ö1, Ö6, Ö7, Ö8 kodlu öğrenciler kalanı yani yarısını x değişkeni ile temsil ederek satılan kısmı $\frac{x}{3}$, tamamını ise 2x olarak ifade etmişlerdir. Kalanı x değişkeni ile temsil eden öğrencilerin düzenek için kritik olarak tekrarlı bölme işlemini bu soruda cebirsel olarak kullanmadıkları söylenebilir. Çünkü bu öğrenciler x'i 3'e bölerek kalan olarak ifade ettikleri parçanın birimini bulmuşlardır. Oysaki öğrencilerden birimin birimini bulmaları yani bütünü temsil için kullandıkları ifadenin önce $\frac{1}{2}$'sini yani birimi bulmaları sonrasında her parçayı 3'e bölerek birimin birimi bulmaları beklenmektedir. Soruya ilişkin Ö8 kodlu öğrenci ile aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır.

Ö8: Şöyle yarısı çürükmüş kalanların da 3 te 1'i satılmış. Yani x çarpı 3 te 1 satılmıştır.

A: x ne bu durumda?

Ö8: Sadece şurası (Kalanlar)

A: Tamamı ne olur bu durumda?

Ö8: x çarpı 6 da 6 olur.

A: 6 da 6 nasıl oldu?

Ö8: Yarısında 3 parça var diğer yarısında da 3 parça olur yani 6 tane.

Öğrencinin söylemlerinden çarpma işlemini beklenen şekilde tekrarlı bölme kullanarak modellediği fakat aynı işlemleri cebirsel olarak kullanmadığı söylenebilir. Çünkü öğrenci önce kesir olarak sonucu bulmuş sonrasında değişken ile çarparak uygun ifadeyi yazmaya çalışmıştır.

Ö2 kodlu öğrenci bütünü x değişkeni ile temsil ederek bütünü önce 2'ye böldüğü için bir parçayı $\frac{x}{2}$ olarak ifade etmiştir. Sonrasında ise bu parçaları da 3'e böldüğünü bu nedenle bir parçanın $\frac{x}{6}$ olduğunu belirtmiştir. Öğrencinin çözümünden x değişkenini önce 2' ye bölerek birimi belirlediği sonrasında da bunu 3'e bölerek tekrar birimleri belirlediği böylelikle de tekrarlı bölme işlemini cebirsel ifadelerde de kullanabildiği söylenebilir. Yani öğrenci düzenek için gerekli işlemi cebirsel ifadelere uyarlayabilmiştir.

Ö11 kodlu öğrenci ise benzer şekilde bütünü x değişkeni ile temsil ederek yarısını $\frac{x}{2}$ olarak ifade etmiştir. Fakat öğrenci bunun 1/3'ünü bulmak için 3'e bölse de ifadeyi $\frac{\frac{x}{2}}{3}$ şeklinde bırakarak devam ettirememiştir. Ö12 kodlu öğrenci de bütünü x değişkeni ile temsil etmiş fakat işlemin devamını getirememiştir. Benzer şekilde düşünen Ö9 kodlu öğrenci ile yaşanan diyalog aşağıda sunulmuştur.

Ö9:Şöyle bir şekil çizelim ikisini 6 'da eşitleyelim daha kolay işlem yapabilmek için.

A: Eşitlemeden yapılmaz mı?

Ö9: Yapılır ama çok zor yapılır.

A: Neden zor olur?

Ö9: Çünkü sayıları farklı olduğu için miktarlarda farklı olur.. Şöyle 6 parça oldu. Bunun 3 parçası çürümüş 2 parçası satılmış geriye de 1 parça kalmış.

A: Cebirsel ne olur?

Ö9: Yine tamamı x olur, 6x/6 yani. 3x/6 Çürüyenler. Satılan 2x/6 kalan x/6 olur.

Ö9 kodlu öğrenci 6 parçalık bir bütün çizerek düzenek için kritik tekrarlı bölme işlemini kullanmamıştır. Öğrencinin payda ile çarpma işleminde payda eşitlemeye çalışması nedeniyle öğrencinin kesirlerde işlemler arasında yanlış aktarımlar yaptığı düşünülebilir. Ö3 kodlu öğrenci de önce iki kesri çarparak 6 parçalık bir bütün çizmiş, buna göre de bir parçayı x değişkeni ile temsil etmiştir. Bu öğrencilerin soru için önce cebirsel olarak değil de aritmetiksel düşündükleri söylenebilir. Satılanı x değişkeni ile temsil eden Ö10 kodlu öğrenci de bütünü 6x olarak ifade etmiştir. Bu öğrenciler bütünün x olması durumunda parçanın $\frac{x}{6}$ olarak ifade edebileceğinin farkında olsalar da $\frac{x}{6}$ ifadesini tekrarlı bölme işlemi ile elde ettiklerine ilişkin herhangi bir bulguya rastlanamamıştır. Benzer şekilde Ö5 kodlu öğrenci de satılanı x değişkeni ile bütünü ise 6x olarak ifade etmiştir. Çizdiği şekle göre değişken kullanmaya çalışan öğrencinin cebirsel ifadelerde ise tekrarlı bölme işlemini kullanmadığı belirlenmiştir.

4.2.4 Bileşik Kesir Düzeneği ve Cebirsel Düşünmeye Ait Bulgular

Bu kategoriye ilişkin sorularda öğrencilerin bileşik kesirle ilişkili sorularda cebirsel düşünceyi nasıl kullandıklarını belirlemek amaçlanmıştır. Bu kategoride öğrencilere 2 soru sorulmuştur. Sorularda öğrencilerden verilen bütünün birimini belirleyebilmeleri, bütünü ve istenen kesri de bu birime göre elde etmeleri aynı zamanda bu işlemleri cebirsel olarak ifade etmeleri beklenmiş, ilk soruda öğrencilerin geneli doğru sonuç elde etse de öğrencilerin düzeneğe ilişkin kritik işlemleri kullanmadıkları, ikinci soruda da Ö1 ve Ö2 kodlu öğrencilerin kritik işlemleri kullanabildikleri, diğer öğrencilerin ise kullanamadığı görülmüştür.

Bu düzenekle ilgili olarak öğrencilere ilk olarak *"Zeynep'in harçlığı Deniz'in harçlığının $\frac{7}{6}$'sıdır. Zeynep ve Deniz'in harçlığını temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız."* sorusu sorulmuştur.

Soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde Ö1, Ö2, Ö3, Ö5, Ö7, Ö8 ve Ö11 kodlu öğrencilerin önce cebirsel ifade yazdığı sonrasında şekil çizdiği, Ö4,Ö6, Ö9, Ö10 ve Ö12 kodlu öğrencilerin ise şekil çizerek uygun cebirsel ifadeyi yazdıkları belirlenmiştir. Bu soruda öğrencilerden verilen bütünün birimini belirleyebilmeleri, bütünü ve istenen kesri de bu birime göre elde etmeleri aynı zamanda bu işlemleri cebirsel olarak ifade etmeleri beklenmiştir. Öğrencilerin çizdikleri şekiller incelendiğinde Ö1, Ö2, Ö3, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrencilerin sürekli nicelikler çizdiği bunlardan Ö1 kodlu öğrencinin 6 parçalık bir bütüne birleşik bir parça daha çizdiği, Ö2 ve Ö9 kodlu öğrencilerin 2 eş bütün çizerek tarama yaptığı, Ö3, Ö7, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrencilerin 6 parçalık bir bütün ve yanına ayrı bir parça daha çizdikleri, Ö6 kodlu öğrencinin farklı büyüklüklerde iki bütün çizerek işlem yaptığı, Ö8 kodlu öğrencinin ise Deniz'in harçlığını temsilen bir bütün Zeynep'inkini temsilen ise 2 bütün kullandığı tespit edilmiştir. Ö4 ve Ö5 kodlu öğrencilerin ise ayrık nicelikler kullandığı belirlenmiştir.

Ö1 kodlu öğrenci Deniz'in harçlığını 6x olarak temsil etmiştir. Öğrencinin "*6 eş parçadan bir tane daha yani bir x daha geldiğinde de 7x olur bu da Zeynep'in harçlığıdır*" ifadesinden de anlaşılacağı gibi öğrenci parçalardan hareket etmiş fakat herhangi bir çarpma işlemi yapmamıştır. Bu öğrenci bir parçanın x değişkeni ile temsil edildiği durumlarda bütünün ve bileşik kesrin nasıl elde edileceğinin farkında olsa da öğrencinin yineleme işlemi kullandığına dair bir bulguya rastlanmamıştır. Öğrencinin çizdiği şekil göz önüne alındığında ise ilk çizdiği bütüne birleşik şekilde parça daha eklemesi dikkat çekmiştir. Öğrencinin oluşturmuş olduğu bütün ilk bütün göre farklı büyüklükte olmuştur.

Ö1 kodlu öğrenciden farklı olarak ilk çizdiği bütüne eklediği parçayı ayrık çizen Ö3 kodlu öğrenci yaptığı işlemi "*6'da 7'si dediği için bir 6'lık bütün yaptım bir de 6'da 7'si dediği için bir tane daha ekledim. Bu bir parça da x oldu. Yani Deniz 6x, Zeynep 7x oldu.*" şeklinde açıklamıştır. Öğrencinin çizimi ve işleminden öğrencinin öncelikle sayısal değerlerle bileşik kesir oluşturduğu sonrasında değişkenleri kullanarak uygun cebirsel ifadeyi yazdığı anlaşılmıştır. Öğrenci ilk olarak bileşik kesir düzeneğine ilişkin birim elde etme ve bunun yinelenmesiyle bileşik kesri elde etme işlemlerini yapmış sonrasında buradaki bir parçayı değişkenle temsil ettiği için bu soruda bileşik kesir düzeneğini kullandığı söylenemez. Fakat öğrenci ilk olarak bütünü bir değişkenle temsil bunu 6 parçaya ayırıp bütünün belirleyerek birime göre de bileşik kesri elde etseydi işlemleri düzenek kapsamında değerlendirilebilirdi. Benzer şekil çizen öğrencilerden Ö7 kodlu öğrencinin yaptığı işleme ilişkin "*Zeynep 7 parça, Deniz 6 parça. Deniz'e x demiştim bir parça* $\frac{x}{6}$ *olur. O zaman Zeynep* $x+\frac{x}{6}$ *olur*" şeklinde bir açıklama yapmıştır. Buna benzer açıklama yapan ve aynı sonucu elde eden Ö10 kodlu öğrenci ile yaşanan diyalog aşağıda sunulmuştur:

A: O bir parçayı neye göre ekledin?

Ö10:Çünkü Zeynep Deniz'den bir fazla. 6 da 1 kadar fazla.

A: Hmm cebirsel ifademiz ne olur peki?

Ö10: Deniz x ise Zeynep x+1 olur.

A: Buradaki 1 ne peki?

Ö10: Bu yani bir parça.

A: Deniz'e x dersem bu bir parça ne olur?

Ö10: 1 biraz saçma oldu. Ne yazabilirdim sanırım $\frac{x}{6}$.

A: Nasıl oldu peki?

Ö10: Burası x bu bir parça da x'in 6'ya bölümündeki bir parça o da x/6 olur.

Ö7 ve Ö10 kodlu öğrencilerin çizdikleri şekiller ve sözel ifadeleri incelendiğinde Ö3 kodlu öğrenciden farklı olarak kesre ilişkin işlemleri cebirde de kullanabilmişlerdir. Her iki öğrencinin de kesir işlemlerinde birim kesri buldukları şekliyle buradaki bir parçanın değerini bulabildikleri, bütünün ise buldukları değerin 6 katı olduğunun farkında oldukları belirlenmiştir. Fakat Ö10 kodlu öğrencinin ilk başta bir parçayı $\frac{x}{6}$ olarak değil de 1 olarak ifade etmesi öğrencinin parça sayısına odaklanması ile ya da bütünü nicelik olarak temsil etmeyi tam yapılandırmaması ile ilişkilendirilebilir. Ayrıca bileşik kesir düzeneği için kritik olan bileşik kesri birim kesrin tekrarı olarak ifade etmeye ilişkin net bir bulguya rastlanmamıştır. Öğrencilerin çizdikleri şekil bunu işaret etse de söylemleri yinelemeden ziyade tam sayılı kesir mantığı kurduklarına işaret etmiştir. Benzer şekil çizen Ö11 kodlu öğrenci ise Deniz'in harçlığını a değişkeni ile temsil ederek Zeynep'in harçlığının $a.\frac{7}{6}$ olacağını belirtmiş fakat burada bir parçanın $\frac{a}{6}$ mı yoksa $\frac{a}{7}$ mi olacağına karar verememiştir. Öğrencinin birimi cebirsel olarak belirleyememesi bu düzeneğin inşasına engel bir durum olarak görülmektedir.

Parça eklemeyi düşünen bir diğer öğrenci ise Ö2 kodlu öğrencidir. Fakat bu öğrenci diğerlerinden farklı olarak eş iki bütün çizmiş birinin tamamını diğerinin ise bir parçasını taramıştır. Öğrencinin bu çizimi sıklıkla karşılaşılan bileşik kesir gösterimine aşina olması ile ilişkilendirilebilir. Öğrenci bir bütünü x değişkeni ile temsil ederek çizdiği şekli önce 6'ya böleceğini bunun da 7'sini alacağını ifade etmiştir. Öğrencinin "*6'ya bölüp 6'sını aldığım,* $\frac{x}{6}$*, x/6, x/6*" şeklindeki ifadesi ile bağlantılı olarak cebirsel ifadede birimi belirleyip yineleme işlemi ile bütünü elde ettiğini yani bileşik kesir düzeneği için kritik olan üç seviyeli birim koordinasyonundan ikisini gerçekleştirdiği söylenebilir. Öğrenci yaptığı işlemin devamını ise "*Burada bir bütün vardı bir tane daha aldığımda* $x+\frac{x}{6}=\frac{7x}{6}$ *olur*" şeklinde açıklamıştır. Bu açıklamadan yineleme işlemini kullandığı anlaşılamamıştır yani öğrencinin üçüncü birim koordinasyonunu yani bileşik kesri birim kesrin yinelemesi olarak düşündüğü tespit edilememiştir. Ö9 kodlu öğrenci de benzer bir şekil çizerek, "*Deniz'in harçlığı 6 'a 6 yani x o da 6x/6 olur. Zeynep'in harçlığı da 1 tam + 1 tane daha yani Deniz* $\frac{6x}{6}$ *, Zeynep ise* $\frac{7x}{6}$ *olur.*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Ö9'un açıklaması da Ö2 kodlu öğrenci ile paraleldir. Bu öğrencinin de iki birim koordinasyonunu gerçekleştirmiş, fakat her iki öğrencinin de üçüncü birim koordinasyonunu gerçekleştirip gerçekleştirmediğine ilişkin net bir bulguya rastlanmamıştır. Ö4 kodlu öğrenci de Deniz'in harçlığını x değişkeni ile ifade ederek bir parçanın $\frac{x}{6}$, Zeynep'inkinin ise $\frac{7x}{6}$ olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencilerin kesirli ifadeleri katsayı olarak yapılandırabildikleri söylenebilir.

Ö8 kodlu öğrenci diğer öğrencilerden farklı olarak diğer sorularda olduğu gibi çarpma işlemi yapmış fakat bu işlemin sonucunu yazamamıştır. Cebirsel ifadeyi "*Deniz x, Zeynep x, çarpı 6'da 7*" şeklinde ifade eden öğrenciye araştırmacı tarafından *"Deniz'in harçlığı 42 lira dersem Zeynep'in harçlığı ne kadar olur?"* sorusu sorulmuştur. Öğrenci ise bu işlemi rahatlıkla yaparak *"42 bölü 6, 7 olur çarparsam da 7 kere 7, 49 olur."* cevabını vermiştir. Ö5 ve Ö6 kodlu öğrenciler de kesirli katsayı yerine tam sayı kullanarak 6x ve 7x ifadelerini kullanmayı tercih etmişlerdir. Harçlığın az ve fazla olması ile ilişkili olarak değişken kullanmayı tercih eden Ö6 kodlu öğrenci Deniz'in harçlığını 6x, Zeynep'in harçlığını 7x olarak ifade etmesine rağmen Deniz'in harçlığının daha fazla olduğunu belirtmiştir. Bunu ise " *Çünkü Deniz'in harçlığının demiş (burada nın ekini vurguluyor).*" şeklinde açıklamıştır. Öğrencinin 7x ile 6x arasındaki ilişkiyi kuramamasına ilişkin açıklaması öğrencinin ezbere işlem yapması ile ilişkilendirilebilir. Ö12 kodlu öğrenci ise kesrin bileşik kesir olduğunu fark ederek 2 bütün çizmiş fakat Zeynep'in harçlığının 2. bütünde kalan 5 parçalık kısım olduğunu düşünerek işlem yapmış ve doğru bir sonuç elde edememiştir.

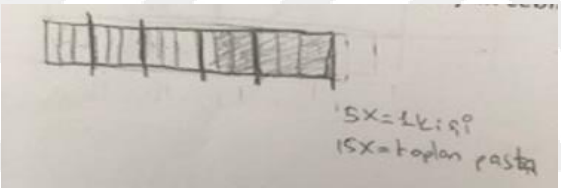
Bu düzeneğe ilişkin öğrencilere ayrıca "*5 pasta 3 kişi arasında eşit şekilde paylaştırılacaktır. a. Bir kişiye ne kadar pasta düşer? b. Bu durumu gösteren şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız."* sorusu sorulmuştur.

Bu soruya ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8 Ö9, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrencilerin önce şekil çizdiği sonrasında uygun cebirsel ifadeyi yazdıkları tespit edilmiştir. Ö12 kodlu öğrenci ise böyle bir işlemin mümkün olmayacağını ifade etmiştir. Öğrencilerin kullandıkları stratejiler incelendiğinde ise Ö1, Ö2 ve Ö6 kodlu öğrencilerin her pastayı 3'e bölerek dağıtım yaptığı, Ö3, Ö5 kodlu öğrencilerin her pastayı 6'ya bölerek toplamı dağıttığı, Ö4 kodlu öğrencinin herkese bir pasta verdikten sonra kalan 2 pastayı paylaştırdığı, Ö7, Ö9, Ö10 kodlu öğrencilerin 5 pastayı birleştirerek bölmeye çalıştığı, Ö8 kodlu öğrencinin direkt çarpma işlemi yazdığı Ö11 kodlu öğrencinin ise bir kişiye bir pasta diğerlerine 2 pasta olacak şekilde paylaştırdığı tespit edilmiştir. Bu soruda öğrencilerden birimi cebirsel olarak belirlemeleri ve buna göre de bileşik kesri elde etmeleri beklenmiştir. Ö1, Ö2 kodlu öğrenciler değişken kullanarak birimi belirlemiş ve bunla ilişkili olarak da istenen kesri elde ederek düzeneği gerçekleştirmişlerdir.

Ö1 ve Ö2 kodlu öğrenciler her birini x değişkeni ile temsil ettikleri 5 pasta çizerek hepsini 3'e bölmüş ve her birinden bir dilim alarak uygun ifadenin $\frac{5x}{3}$ olacağını ifade etmişlerdir. Ö1 kodlu öğrenci yaptığı işlemi "*Her birini 3'e böldüm, çünkü bir pastanın 3'e ayrılmış dilimlerinden 5 tane istiyor bizden*." şeklinde açıklarken Ö2 kodlu öğrenci ise "*3 kişi var çünkü, hepsi her pastadan birer birer alır. Her birinden $\frac{x}{3}$ alır 5 tane de olduğuna göre $\frac{5x}{3}$ olur*." olarak açıklamıştır. Bu anlamda öğrencilerin dağıtmalı bölme işlemini cebirsel ifadelerde de kullanabildiği söylenebilir. Aynı zamanda pastaları bir bütün şeklinde değil de tek tek paylaştırmaları onların çarpımsal ilişki kurabilmeleri ile yani cebirsel akıl yürütme kullanabilmeleri ile ilişkilendirilebilir (Hackenberg, 2005). Bu öğrencilerin bileşik kesri birimin yinelemesi şeklinde elde etmelerinden bu soruda düzeneği kullandıkları söylenebilir. Ö6 kodlu öğrenci ise bir parçanın $\frac{x}{3}$, beş parçanın toplamını da $\frac{5x}{3}$ olarak ifade etmiştir. Bu öğrencinin ise işlem ve açıklamalarından dağıtmalı bölme işlemi yaptığı düşünülebilirken öğrencinin çarpma işleminden ziyade toplama işlemi kullanmış olması öğrencinin çarpımsal ilişki kullanması ile tam olarak ilişkilendirilememiştir.

Ö3 ve Ö5 kodlu öğrenciler ise her keki 3'e bölmek yerine 6 parçaya bölerek 30 parça elde etmişlerdir. Her dilimi x değişkeni ile ifade eden öğrenciler bir kişiye düşen kek dilimini ise toplam parçanın 3'te 1'i olarak düşünerek 10x olarak belirtmişlerdir. Öğrencilerin toplam parçanın 3 te 1'ini bulma işlemleri parça sayısına odaklanmalarıyla ilişkilendirilmiştir. Aynı zamanda bu öğrencilerin çözümü niceliksel düşünemediklerini göstermiş olup (Hackenberg, 2005) öğrencilerin bu soru için cebirsel düşünme becerisini kullanmadıkları söylenebilir. Ö4 kodlu öğrenci ise herkese bir pasta düştüğünü, kalanı da 3'e bölerek paylaştırdığını ifade etmiş ve bu durumun cebirsel ifadesini ise $x+\frac{1}{3}$ olarak yazmıştır. Araştırmacının soruları üzerine fikrini değiştirerek $x+\frac{2x}{3}$ yani $\frac{5x}{3}$ olacağını düşünmüştür. Bu öğrenci de ilk olarak değişkeni kullanmayarak sayısaldan değişkene geçiş yapamamış fakat sonrasında yaptığı hatayı kendiliğinden fark etmiştir. Fakat öğrencinin izlediği yola göre öğrencinin istenen şekilde dağıtma işlemi yapmadığı söylenebilir.

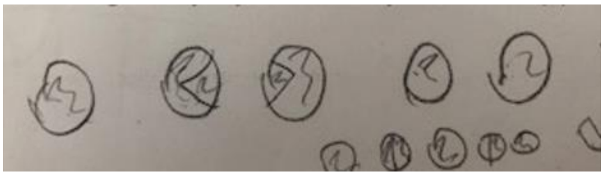
Problem durumunda verilen 5 pastayı ayrı ayrı olarak değil de birleşik gibi düşünen Ö7 kodlu öğrenci tüm pastaları x değişkeni ile bir kişiye düşeni ise x/3, bir pastayı da x/5 olarak ifade etmiştir. Bu öğrenci cebirsel ifadeyi kesirli olarak kullanabilse de öğrencinin düzenek için kritik işlemleri kullandığına ilişkin bir bulguya rastlanmamıştır. Ö9 kodlu öğrenci ise bir kişiye düşen pasayı $\frac{5x}{3}$ olarak ifade etmiş pastaları ayrı ayrı paylaştırılması istendiğinde ise %75 olacağını düşünerek paylaştırma yapamamıştır. Tüm pastaları 15x olarak düşünen Ö10 kodlu öğrenci bir pastanın x olarak ifade edilmesi durumunda ne yapacağı sorulduğunda ise cebirsel ifadenin $x+\frac{2}{3}$ olacağını söylemiştir. Öğrencinin çizdiği şekilde (Şekil 4.14) dağıtmalı bölme işlemi yapmış olarak görünse de öğrencinin toplam parça sayısına odaklandığı söylenebilir.



Şekil 4. 14. Cebirsel düşünme bileşik kesir zihinsel düzeneğinde Ö10 kodlu öğrencinin çizimi

Şekil 4.14'deki şekilden öğrencinin kesir olarak beklenen işlemi yaptığı fakat bunu cebire aktaramadığı söylenebilir. Dolayısıyla Ö9 ve Ö10 öğrencilerin niceliğin değil de kesrin değerini bulmaya çalıştıklarından kesirli katsayıyı kullanmadıkları söylenebilir.

Ö8 kodlu öğrenci ise 5 pastayı bir bütün gibi düşünmüş ve ona göre parçalama yapmaya çalışmıştır (Şekil 4.15).



Şekil 4. 15. Cebirsel düşünme bileşik kesir zihinsel düzeneğinde Ö8 kodlu öğrencinin çizimi

Öğrencinin çizdiği Şekil 4.15'teki şekilden onun eşliği göz ardı ettiği görülmüştür. Öğrenci aynı zamanda çarpma işlemi yapacağını belirtmiş fakat yine çarpma işleminin sonucunu yazamamıştır. Benzer şekilde çarpma işleminin sonucunu ifade edemeyen Ö11 kodlu öğrenci ile soru çözme aşamasında yaptığı işlemlere ilişkin yaşanan diyalog ise aşağıda sunulmuştur:

> *Ö11: Böyle olur. (a+a/2+a/3)*
>
> *A: Ne yaptın?*
>
> *Ö11: 5 tane pasta çizdim. Farklı kişi olduğu için farklı değer verdim. Diğer 4 pastayı da ikiye böldüm.*
>
> *A: Hmm şu pastaları birer birer dağıttın.*
>
> *Ö11: Evet. Geriye kalanları ikiye böldüm. Sonra geri kalanı da 3'e bölüp bir kişiye verdim.*
>
> *A: Hmm a dediğin ne peki?*
>
> *Ö11: Bir pasta. Sonra bunu ikiye böldüm a/2. Sonra 3'e böldüm. a/3. Yani a/2/3 olacak.*
>
> *A: Sonuç olarak ne olur peki?*
>
> *Ö11: Böyle kalsın.*

Yukarıdaki diyalogdan öğrencinin kesirli ifadeyi yine kullanamadığı tespit edilmiştir. Bunun üzerine araştırmacı öğrenciye küçük parçaya a denilirse bütünün neyi ifade edeceğini sormuş, öğrenci de bu soruya doğru cevap vermiştir. Fakat bu öğrenci de beklenen işlemleri cebirsel ifadelerde kullanamamıştır.

5. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öğrencilerin kesir zihinsel düzenekleri ve bu düzeneklerin cebirsel düşünmede kullanılma durumlarının incelenmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin uzunluk, alan ve küme modelleri ile verilmiş kesir modellerini nasıl ifade ettikleri ve bu ifade etme sürecinde parça bütün, parçalı birim kesir, basit parçalı kesir, çarpımsal bileşim ve bileşik kesir zihinsel düzeneklerini nasıl kullandıkları değerlendirilmiştir. Ayrıca öğrencilerin kesirlerle ilişkili verilen cebir sorularını çözme süreçleri kesir zihinsel düzenekleri açısından analiz edilmiştir. Bulguların analizi ile elde edilen sonuçlar ise aşağıda sunulmuştur.

Parça bütün zihinsel düzeneği ile ilgili sorulan sorularda istenilen birim kesri öğrencilerin tamamına yakının şekil üzerinde tarayarak rahatlıkla elde edebildikleri gözlemlenmiştir. Uzunluk ve alan modeline ilişkin sorularda öğrencilerin çoğunluğunun eş parçalar elde etmeye çalıştığı fakat uzunluk modeli ile verilen soruda bunun için farklı stratejiler kullanırken alan modeli ile ilgili soruda ise bu durumu sadece sözel olarak ifade ettikleri tespit edilmiştir. Alan modelinde bütünün daire şekli ile temsil edilmesinden dolayı öğrencilerin eş parçalar elde etmede zorlandıkları görülmüştür. Benzer bulguya Pesen'in (2007) çalışmasında da rastlanmış, orada da öğrenciler daire şeklinde verilen bütünleri eş parçalara ayırırken zorlanmışlardır. Bazı öğrencilerin ise verilen şekli neden eş parçalayamadıklarını "*Yuvarlak olduğu için tam bölünmüyor.*" ve "*Yuvarlakların köşeleri olmadığı için olmayabilir*" şeklinde açıklamaları öğrencilerin daire şeklinde verilen modelleri eş parçaya bölemedikleri sonucuna ulaştırmıştır. Öğrencilerin daire modeli ile verilen şekli eş parçalamada zorlanmaları daire şekli ile verilen modelin $\frac{1}{5}$'lik parçasının, yani tek sayıya parçalanmasının istenilmesinden kaynaklı olabileceği de düşünülmektedir. Nitekim formdaki diğer tüm daire soruları incelendiğinde, öğrencilerin çift sayıda parçalama gerektiren soruları tek sayıda parçalama gerektiren sorulara göre daha rahat çözdükleri tespit edilmiştir. Benzer şekilde Eroğlu, Camci ve Tanışlı (2019) yaptıkları çalışmada öğrencilerin daireyi nasıl parçalayacaklarının ve çift sayıda parçaya ayırma ile tek sayıda parçaya ayırmada farklı yöntemler izlemeleri gerektiğinin tam farkında olmadıkları sonucuna ulaşmışlardır. Küme modelinde ise verilen nesneleri bir bütün olarak düşünen öğrenciler olduğu gibi nesnelerin sayısına odaklanıp çarpma işlemi yapan öğrencilerin olduğu belirlenmiştir. Direkt çarpma işlemi yapan öğrencilerin ayrık nicelikleri sürekli nicelikler gibi bir bütün olarak göremedikleri düşünülebilir. Bu durum aynı zamanda öğrencilerin küme modeli ile diğer modeller kadar karşılaşmamaları ile de ilişkilendirilebilir. Çünkü Ö6 ve Ö11 kodlu öğrenciler küme modeline ilişkin soruyu uzunluk modeli ile ilişkilendirerek çözmeyi tercih etmiştir. Bu bulgu Çelik'in (2015) bulgusunu destekler niteliktedir. Çelik (2015) öğretmenlerle kesirlerin modellenmesiyle ilgili yaptığı çalışmasında, öğretmenlerin küme modelini çok az kullandığını bu nedenle öğretmenlerin modellerle ilgili bilgilerinin sınırlı olabileceğini belirlemiştir. Ayrıca bu düzenekte Ö2 ve Ö12 kodlu öğrenciler kesirlerde paydayı parçalanma sayısı payı ise alınan parça sayısı olarak tanımlamış buna göre işlem yapmışlardır. Bu tanımla parçalarının eşliğinin göz ardı edildiği düşünülen öğrencilerden Ö2 kodlu öğrenci çizdiği şekillerin eş parçalardan oluştuğu fakat Ö12 kodlunun ise eşliği göz ardı ettiği belirlenmiştir. Buna karşın parçaların eş olmasını vurguladıkları halde boyut olarak çok farklı parçalar çizen öğrenciler de olduğu tespit edilmiştir. Yani eşlik ifadesi ilgili bazı öğrencilerin sadece sözel olarak farkında oldukları parçaların eşliğini tam yapılandıramadıkları anlaşılmıştır. Bu anlamda bu öğrencilerin parçaları yinelenebilir birimler olarak görmemeleri normal kabul edilebilir.

Parçalı birim kesir düzeneğinde ise öğrencilere bir parçası verilmiş bütünün elde edilmesine ilişkin sorulara yer verilmiştir. Uzunluk modeline ilişkin soruda Ö12 kodlu öğrenci dışındaki öğrencilerin tamamının bir parçanın yinelenmesiyle bütünü elde edebileceklerinin farkında oldukları görülmüştür. Norton ve McCloskey'e (2008) göre bu durum öğrencilerin parçalı birim kesir düzeneğinin yapılandırıldığının göstergesidir. Alan modelinde ise parçanın yinelenmesiyle bütünü elde edeceğini vurgulayan öğrenciler olduğu gibi parça sayısına odaklanan öğrenciler de olmuştur. Bu durum alan modeline ilişkin soruda kesir değerinin verilmiş olmasıyla ilişkilendirilebilir. Küme modelinde ise diğer modellerde olduğu gibi bütünü parça sayısı olarak düşünen öğrencilerin yanı sıra birimlerin tekrarı olarak değerlendiren öğrenciler de olmuştur. Bu anlamda her üç model için de öğrencilerin genelinin parça birim zihinsel düzeneğinin farkında oldukları fakat önceki deneyimleri doğrultusunda parça bütün ilişkisi kurdukları düşünülebilir. Çünkü uzunluk modeline ilişkin olan soru diğer modellerde sorulan sorulara göre daha az karşılaşılan bir soru tarzı olup öğrencinin bu soruya ilişkin deneyiminin diğer sorulara göre daha az olduğu düşünülmektedir. Bu açıdan da öğrencilerin ezbere bilgilerinden faydalanmak yerine akıl yürüterek sonuca ulaştığı bu anlamda da yineleme mantığını ortaya çıkarabildiği düşünülmektedir.

Öğrenciler basit parçalı kesir düzeneği ve parçalı birim kesir düzeneğine ilişkin kategoride kritik olan eş parçalama işlemini yaptıklarını ifade etseler de öğrencilerin genelinin parçayı tekrarlanabilir bir birim olarak düşünmediği ancak kesri bir bütünün eş parçaları olarak algıladıkları tespit edilmiştir. Bu durumun Alacaci (2014), Karaağaç ve Köse'nin (2015) çalışmalarında da yer verildiği gibi öğrencilerin sıklıkla kesirlerin parça bütün anlamı ile karşılaşmasıyla ilişkili olabileceği düşünülmektedir. Bu anlamda parçalı birim kesir düzeneğine ilişkin tersine işlem gerektiren soruların bulguları öğrencilerin bu düzeneklere ilişkin bilgileri hakkında daha açıklayıcı olacaktır. Tersine işlem gerektiren sorularda öğrencilerin çoğu özellikle başarı düzeyi yüksek öğrencilerin verilen parçaları ölçme birimi olarak kullanabildikleri bütünü birim kesrin tekrarı olarak düşünebildikleri tespit edilmiştir. Bu durumun öğrencilerin parçalı birim kesir düzeneğini oluşturduğu fakat öğrencilerin bu kategoriye ilişkin verdiği cevapların konuyu öğreniş şekilleriyle yani o gösterime alışkın olmamaları ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Birinci'nin (2018) öğretmenlerin mesleki gelişimleri ile ilgili yaptığı çalışmasında, bir öğretmenin kendi anlattığı dersi değerlendirirken bir öğrencinin 1/1 kesrinin birim kesir olup olmadığı sorusuna "1/1 bir bütündür" şeklinde cevap verdiği belirlenmiştir. Birim kesir için bütünün eş parçalarından biri olduğunu vurgulamadığını video analizi yaparken yakaladığına yer verilmiştir. Bu durumdan da anlaşılacağı gibi bütünün eş parçaları kesir için önemi sıklıkla vurgulanırken bir parçanın birim kesri temsil etmesinin daha geri planda kalabildiği görülmektedir.

Parçalı birim kesir düzeneğine ve yarma işlemine sahip öğrenciler birim olmayan kesirlerden birim kesirler üretebilir ve bunun tersi de mümkündür ve öğrencilerin yinelemeleri tekrarlanabilir bir birim 1'e dayanabilir (Steffe, 2010). Boyce ve Norton'a (2016) göre parçalı birim kesir düzeneğinin genellemesi olarak kabul edilen basit parçalı kesir düzeneğinde, öğrencilerin hiçbiri uzunluk modelinde birim kesirleri göz önünde bulundurmazken alan modelinde ise üç öğrenci (Ö3, Ö6, Ö7, Ö12) birim kesirleri referans alarak istenilen kesri şekil üzerinde taramıştır. Her iki modelde de paydanın bütünün kaç parçaya ayrılacağını, payın ise bütünden alınacak parça sayısı olduğunu ifade eden öğrenciler olmuş ve bu öğrenciler diğer sorularda olduğu gibi bu soruda da parçaların eş olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin tamamına yakınının 2/3 kesri için 3 parçadan 2'si ya da $\frac{3}{8}$ kesri için 8 parçadan 3'ü şeklindeki ifadeleri kullanması ve yaptıkları işlemler kesir için onların akıllarına gelen kavramın parça sayısı olduğunu düşündürmüştür. Yine öğrencilerin çoğunluğunun (Ö2, Ö4, Ö5, Ö8, Ö9, Ö10) parçaların eşliğini vurgulaması onların bütünü eş parçaların birleşimi olarak algıladığı sonucuna ulaştırsa da çok az öğrencinin (Ö6, Ö7) bir parçanın birim kesre denk olduğundan bahsetmesi onların kesirleri ilk adımda birleşik birimler olarak algılamadığını göstermiştir. Kesirleri nasıl elde ettikleri sorulan öğrencilerden alınan *"1. Sınıftan bu yana hep aynı şey"* şeklindeki cevaplar da öğrencilerin genellikle kesri parça bütün olarak gördüklerini ve birim kesri kullanmaya alışkın olmamalarından dolayı bu şekilde işlem yaptıklarını göstermiştir. Aynı zamanda formda yer alan verilen bir bütünün kesir kadarını bulmaya yönelik sorular öğrencilerin öğretim sırasında sıklıkla karşılaştıkları soru şekilleri olduğu için öğrencilerin ezbere yani daha önce gördükleri şekliyle işlem yaptıkları şeklinde yorumlanabilir. Farklı soru tarzları ile karşılaştıklarında öğrencilerin parça bütün ilişkisinin ötesine geçerek farklı yorumlar yapabildikleri gözlenmiştir. Örneğin öğrenciler bir parçası verilen bütünün kesir değeri sorulduğunda bu parçanın yinelenerek bütünü elde edilebileceğinin farkında olduklarını göstermiştir. Tersine işlem gerektiren soruların çözümü öğrencilerin bu düzeneğe ilişkin bilgileri hakkında daha açıklayıcı olacaktır. Bu bölümde uzunluk modeline ilişkin sorularda öğrencilerin genelinin verilen bütünü doğru şekilde parçalayarak asıl bütünü elde ettiği görülmüştür. Şekli oluşturamayan öğrencilerin ise basit parçalı kesir düzeneğinde yer alan uzunluk modeli sorusunda hata yaptıkları tespit edilmiştir. Alan modelinde her iki düzenekte de öğrencilerin benzer stratejiler izleyerek doğru sonuca ulaştıkları görülmüştür. Parçalı birim kesir düzeneğini inşa etmeden basit parçalı kesir düzeneği inşa edebilen herhangi bir öğrenciye rastlanmamıştır. Bu anlamda bu çalışmanın sonuçları da basit parçalı düzeneğin, parçalı birim kesir düzeneğinin genellemesiyle oluşturulduğu düşüncesini destekler niteliktedir. Norton ve Wilkins (2009) de çalışmalarında tersine işleyen basit kesir düzeneği inşa edebilen öğrencilerin genellikle öncesinde basit parçalı kesir düzeneğini de yapılandırdığı sonucuna ulaşmıştır. Fakat bu çalışmada bazı öğrenciler basit parçalı kesir düzeneğine ilişkin kritik işlemleri kesri elde ederken kullanmadığı halde tersine işlem gerektiren düzeneği inşa edebildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Küme modeline ilişkin sorunun bu kategori de en çok zorlanılan model olduğu belirlenmiştir. Öğrenciler diğer modellerde kurduğu tersine ilişkiyi bu model için kullanmakta zorlanmışlardır. Benzer şekilde Eroğlu, Camci ve Tanışlı (2019) öğrencilerin küme modelini kullanmakta zorlandıklarını verilen kesir ile ilgili eleman sayısını belirlemekte güçlük çektiklerini bulmuşlardır.

Çarpımsal bileşim zihinsel düzeneğinde öğrencilerin genel olarak ezberledikleri kurallarla çarpma işlemini yaptıkları yani iki kesrin paylarını çarparak paya, paydalarını çarparak ise paydaya yazdıkları, bunları modellerle açıklayamadıkları tespit edilmiştir. Bunun nedenini Ö3 kodlu öğrenci *"Burada "nın, nin" eki var, öyle deyince çarpma işlemi yapmam gerektiğini anlıyorum"* gibi ifadelerle açıklarken bazı öğrenciler ise kural böyle şeklinde açıklamışlardır.

Öğrencilerin burada uzunluk, alan ve küme modelinin her birinde zorlandıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde Dağ (2014) çalışmasında öğretmenlere, kesirlerde çarpma işleminin bir kesrin başka kesir kadarının bulunmasından yola çıkarak çarpma işlemi ile ilgili bir soru yöneltmiş, sonucunda ise öğretmenlerin bu konuyla ilgili model kullanma, problem kurma gibi alanlarda sınırlı olduklarını tespit etmiştir. Bu çalışmada elde edilen bulgu Armstrong ve Bezuk'un (1995) ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerde çarpma işlemini modellemede zorlandıklarını, referans birimleri belirleyemedikleri sonucunu desteklemiştir. Öğretmenlerin bu konulardaki yetersizliğinin öğrencilerin de bu konuyu sadece kural olarak öğrenmelerine neden olabileceği düşünülmektedir.

Bileşik kesir düzeneğinde ise öğrencilerin genellikle verilen kesri tam sayılı kesre çevirme eğiliminde oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin bu düzenekte en az alan modelinde en çok küme modelinde zorlandıkları tespit edilmiştir. Bu durumun alan modelinin kareli kağıtla verilmesi aynı zamanda öncesinde verilen uzunluk modeli deneyimlerini bu soruya aktarmaları ile ilişkilendirilebilir. Uzunluk modelinde öğrencilerin ikinci bir bütün çizme ya da tek parça ekleme konusunda kararsız kaldıkları, bu durumun da bileşik kesir konusundaki eksikliklerle ilgili olduğu tespit edilmiştir. Nitekim Ö1 ve Ö3 kodlu öğrenciler bu düzenek için kritik olan işlemlerin tamamını kullanmışlar fakat bütüne bir parça daha ekleyerek bütünün ilk baştaki büyüklüğünü değiştirmişlerdir. Küme modelinde ise $\frac{5}{2}$ şeklinde verilen kesri öğrencilerin geneli 2 tam $\frac{1}{2}$ olarak düşündükleri fakat şekli çizerken $\frac{1}{2}$'yi nasıl temsil edecekleri noktasında zorlandıkları görülmüştür. Bu durumun birim kesrin tam olarak belirlenememesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Ayrıca öğrencilerin (Ö3, Ö8, Ö9, Ö10) verilen kesirleri örneğin $\frac{3}{2}$ kesrini *"2'de 3"* ya da *"2'ye bölünmüş 3 parçası alınmış"* şeklinde okudukları ve bu kesirlerin şeklini çizmede zorlandıkları ve hatta şekil çizerken öğrencilerin daha öncesinde gördükleri şekliyle ezbere bir çizim yaptıkları tespit edilmiştir. Bu durum öğrencilerin bileşik kesir kavramını tam olarak kavrayamadıklarını göstermektedir.

Düzenekler ilerledikçe öğrencilerin performanslarında düşüş gözlenmiştir. Daha önceki araştırmalarda da (Eliustaoğlu, 2016; Norton ve Wilkins, 2009, 2010; Steffe ve Olive, 2010; Tunc-Pekkan, 2015) benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu durumun düzenek ilerledikçe öğrencilerden beklenen becerilerin fazla olması ile ilişkili olabileceği düşünülmektedir.

Uzunluk modeline ilişkin sorularda çubuk modeli kullanılmış ve öğrencilerin soruları genel olarak rahatlıkla cevaplandırdığı gözlenmiştir. Bu model ile ilgili sorularda yaşanan sıkıntıların da genellikle modelle alakalı olmayıp kesir bilgisi ile ilgili eksiklerden kaynaklandığı düşünülmektedir. Örneğin bileşik kesir düzeneği modelinde öğrenciler ikinci bir bütün çizme ya da tek parça ekleme konusunda kararsız kalmış, bu durumun nedeninin ise öğrencilerin bileşik kesir konusundaki eksiklikleri olduğu düşünülmüştür. Alan modelinde ise sorularda daire ve dikdörtgen modelleri kullanılmıştır. Bu modelde öğrencilerinden sadece bir tanesi bir soruda alan vurgusu yapmış olup diğer öğrencilerin alanı göz ardı ettikleri tespit edilmiştir. Özellikle kareli kağıtta verilen sorularda birim karelerden yararlanan öğrencilerin sayısının az olduğu tespit edilmiştir. Kare şeklinde verilen soruda daireye göre karelerin kullanımının daha fazla olduğu görülmüştür. Ayrıca daire modellerinde dikdörtgen modeline göre daha fazla zorlanılmıştır.

Küme modelinde ise sorularda daire, çubuk ve dikdörtgenler kullanıldı. Küme modeli ile ilgili sorulardan öğrencilerin en çok zorlandıkları düzeneğin tersine işlemler olduğu görülmüştür. Kategorilerin genelinde öğrencilerin uzunluk modelinde daha rahat çözüm yaptıkları küme modelinde ise sıkıntı yaşadıkları tespit edilmiştir. Bunun nedeninin sınıf içi uygulamalarda küme modeline diğer modellere göre daha az yer verilmesi olabilir. Nitekim Çelik'in (2015) öğretmenlerle kesirlerin modellenmesiyle ilgili yaptığı çalışmasında, öğretmenlerin küme modelini çok az kullandığını bu nedenle öğretmenlerin modellerle ilgili bilgilerinin sınırlı olabileceği tespiti de bu durumu destekler niteliktedir. Küme modeline ilişkin sorularda öğrencilerin verilen kümeyi içerisindeki nesnelerle bir bütün olarak düşünmek yerine verilen nesne adedini sayarak çarpma işlemi yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin kavramsal bilgisinden çok işlemsel bilgilerini koyan bu duruma Aksu'nun (1997) çalışmasında da rastlanılmıştır.

Ayrıca kesir zihinsel düzeneklerinin cebirsel düşünmede kullanımının incelendiği bu çalışmada, önceki araştırmalara (Ellis, 2007; Empson vd., 2011; Hackenberg, 2013) benzer şekilde öğrencilerin bazılarının kesir zihinsel düzeneklerde sahip oldukları bilgiyi cebire ilişkin durumlara da aktarabildikleri görülmüştür. Örneğin Ö2 kodlu öğrenci kesir düzeneklerinde çarpma işlemi içeren soruda tekrarlı bölme işlemini kullanarak çarpma işleminin sonucunu elde ettiği gibi değişkenleri içeren sorularda da aynı işlemi kullanarak uygun cebirsel ifadeyi yazabilmiştir.

Cebirsel düşünme ve parçalı birim kesir düzeneğine ilişkin sorularda öğrencilerin bu bölümdeki diğer kategorilere göre kesirle ilgili bilgilerini cebirsel ifadelere daha fazla yansıtabildikleri tespit edilmiştir. Bu kategorideki sorularda birimi değişken ile temsil ederek birim elde edebilen öğrenciler olduğu gibi önce bütünü değişkenle temsil edip onu parçalayarak birimi elde eden öğrencilerin de olduğu belirlenmiştir. Bu kategori dışındaki diğer kategorilerde düzeneklere ilişkin kritik işlemleri cebirsel ifadelerde kullanabilen öğrenci sayısının oldukça az olduğu tespit edilmiştir.

Basit kesir düzeneği ve cebirsel düşünme ile ilişkili sorularda değişkenleri kullanarak birimi ve birimi yineleyerek istenilen kesri elde edebilen öğrenciler olduğu gibi bütünü belirledikten sonra birimi belirleyemeyen öğrencilerin de olduğu belirlenmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Ö7 kodlu öğrenci bütünü x değişkeni ile temsil etmiş bu ifadenin $\frac{2}{5}$'ini ise "x-3" olarak belirtmiştir. Öğrencinin bu sonucu nasıl elde ettiği irdelendiğinde ise 5 te 2'kesrini 5 parçanın 2 si olarak düşündüğü 2 buna bağlı olarak x değişkeni ile temsil ettiği 5 parçalık bütünden 3 parçasını çıkardığında 2 parçayı elde edeceğini düşünerek "x-3" ifadesini yazdığı belirlenmiştir. Bu anlamda da öğrencinin kesri parça bütün olarak ele almasının yanlış cebirsel ifade yazmasına neden olduğu sonucuna varılmıştır.

Cebirsel düşünme ve kesirlerde çarpma işleminin ilişkili olduğu sorularda ise çarpma işlemi ile ilgili kritik işlemleri değişkenlerle ilişkilendirerek uygun cebirsel ifadeyi yazan öğrencilerin oldukça az olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin çoğunluğu problem durumunda yer alan çarpma işlemini önce yaptıkları böylelikle iki durum arasındaki ilişkiyi sayısal olarak belirleyip bu sayıyı ise cebirsel ifadede kat sayı olarak kullandıkları tespit edilmiştir. Yani bazı öğrenciler $\frac{1}{2} x \frac{1}{3}$ işleminin sonucunun $\frac{1}{6}$ olduğunu bulmuşlar sonrasında x ve 6x temsillerini kullanmışlardır. Aynı zamanda öğrencilerin bu şekilde ilişkileri kesirli katsayı kullanarak değil de tam sayı kullanarak temsil etme eğiliminde oldukları sonucuna varılmıştır. Ayrıca çalışmada verilen problem durumunu kesir ile ifade edebilirken aynı durumu cebir ile temsil edemeyen öğrencilerin olduğu görülmüştür. 2 pizzanın 3 kişiye paylaştırılması durumunu kesir olarak ifade etmekte zorlanan öğrenciler benzer şekilde 3 pastanın 5 kişi arasında paylaştırılmasına ilişkin duruma ait cebirsel ifadeyi yazarken de benzer hatalar yaparak yanlış ifadeler yazmışlardır. Aynı zamanda bazı öğrencilerin özellikle başarı düzeyi düşük öğrencilerin kesirli ifadeleri katsayı olarak kullanmadıkları, sonucu tahmin etseler dahi cevabı $\frac{2}{3}.x$ şeklinde bıraktıkları ve bu işlemi daha fazla ilerletemeyecekleri görülmüştür. Bu öğrencilerin kesirlere ilişkin sorularda çözüm yaparken de kesirleri parça bütün ilişkisinin ötesine taşıyamadığı tespit edilmiştir. Bu durum öğrencilerin kavramsal bir ilişki kurmaktan ziyade ezbere işlem yapmaları ile ilişkili olabilir. Çünkü öğrenciler cebirsel ifadeleri nasıl yazdıkları sorulduğunda ise *"biz böyle öğrendik"* ya da burada *"nın"* eki kullanılmış o yüzden çarpma yapmalıyız şeklinde ifadeler kullanmışlardır.

Bileşik kesir düzeneğinde ise değişken kullanarak birimi elde eden ve bunla ilişkili istenilen kesri elde eden öğrencilerin sayıca az olduğu dolayısıyla öğrencilerin kesirli kat sayı kullanmak yerine genellikle örneğin Deniz'in harçlığını 6 parçalık bütünle Zeynep'in harçlığını 7 parçalık bütünle temsil ederek 6x ve 7x cebirsel ifadelerini kullandıkları belirlenmiştir.

Bazı öğrencilerin probleme uygun cebirsel temsili ilk olarak yazamadığı fakat bunu kesir bilgisi ile modellediğinde uygun bir cebirsel ifade yazdığı da tespit edilmiştir. Örneğin Ö11 kodlu öğrenci $\frac{1}{2} x \frac{1}{3}$ işleminin cebirsel ifadelerle ilişkilendirmesi beklenen soruyu $\frac{x/2}{3}$ olarak bırakmış sonucunun neye eşit olacağını ifade edememiştir. Fakat ilgili çarpma işlemini şekil ile modelledikten sonra küçük parçanın a tamamının ise 6a olacağını belirleyebilmiştir. Öğrenci her ne kadar beklenen kritik işlemi yapmasa da modellemesi sayesinde aradaki ilişkiyi belirleyerek uygun cebirsel ifadeyi yazabilmiştir.

Çalışmada bazı öğrencilerin değişkenleri tam olarak anlayamadığı bütünü ilk başta değişken ile temsil ettiği fakat bununla ilgili bir işlem gerektiğinde sayısal bir değer gibi davrandığı tespit edilmiştir. Öğrencinin değişkenle temsil ettiği bütünün 3'te 1'ini temsil etmesi beklenirken öğrenci bunu 1 olarak yani 3 parçadan 1'i olarak yazmıştır. Bu durum öğrencinin kesirleri parça bütün olarak yapılandırmasıyla ilişkili olabilir. Hackenberg (2009) çalışmasında cebirsel problemlerde akıl yürütülmesi için kesirli işlemlerde üç seviyeli birim koordinasyonun anlaşılabiliyor olması gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Bu sonuç bu çalışmada elde edilen; parça bütün düzeneğine sahip öğrencilerin cebirde problem yaşamasını destekler niteliktedir.

Öğrencilerin cebirsel problemleri çözümleri incelendiğinde öğrencilerin değişken olarak genellikle "x" temsilini kullandıkları oldukça az sayıda öğrencinin ise farklı olarak "a" temsilini kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin neyi değişken ile temsil edeceklerine karar verirken soruda verilen ifadelerin azlığına çokluğuna ya da büyüklüğüne küçüklüğüne dikkat ettikleri bazı öğrencilerin ise bunu bir kural gibi düşündükleri tespit edilmiştir. Örneğin basit kesirlere ilişkin soruda neden Kerem'in kalemlerini x değişkeni ile temsil ettiği sorulduğunda. "Kerem'in kalem sayısının daha az olduğu için" cevabını vermiştir. Ö2 kodlu öğrenci ise tam tersini düşünerek Kerem'in kalem sayısının daha az olduğu için Alp'in kalemlerini x ile temsil etmeliyim cevabını vermiştir.

Öğrencilerden başarı durumu yüksek olan Ö1 ve Ö2 kodlu öğrenciler başarı durumu iyi olan Ö3, Ö4, Ö5 ve Ö6 kodlu öğrenciler, başarı durumu orta düzeyde olan Ö7, Ö8 Ö9 ve Ö10 kodlu öğrenciler ve başarı durumu kötü olan Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerin cevapları karşılaştırıldığında öğrencilerin başarı durumları ve kesir zihinsel düzenekleri ile ilişkili genel bir sonuca ulaşılamamıştır. Fakat kesir bilgisini cebirsel düşünmede kullanmada başarı durumları arasında pozitif yönlü bir ilişki olduğu saptanmıştır. Kesir düzenekleri ile ilgili sorularda örneğin başarı durumu yüksek olan Ö2 kodlu öğrenci birim kesrin yineleme işleminden bahsetmezken başarı durumu kötü olan Ö12 kodlu öğrenci yineleme işlemine vurgu yapabilmektedir. Bu durumun sebebi başarı durumu yüksek olan öğrencilerin bunu vurgulaması gerektiğinin farkında olmaması olabilir, yani bu öğrenciler bu durumun vurgulanmaya değer olduğunu düşünmeyebilirler. Başka bir örnekte de benzer şekilde başarı durumu orta düzey olan Ö5 kodlu öğrenci birim kesri referans alarak istenilen kesri elde etmeye çalışmamış ve yanlış sonuç bulmuş fakat başarı durumu kötü olan Ö10 kodlu öğrenci beklenen ilişkiyi kurmuş ve doğru sonuca ulaşmıştır. Cebirle ilişkili sorularda ise başarı durumu yüksek olan Ö1 ve Ö2 kodlu öğrenciler kesirleri katsayı olarak kullanabilmenin yanı sıra bilinmeyenlerde bilinenler gibi işlem yapabilmiş kesirle ilgili kritik işlemleri cebire aktarabilmişlerdir. Fakat buna karşın başarı durumu kötü olan Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler kesirleri kat sayı olarak yazamamış ve ilgili işlemleri de hiçbir düzenekte kullanamamışlardır.

5.2 ÖNERİLER

Çalışmada elde edilen bulgular neticesinde eğitim fakültelerine, matematik öğretmenlerine ve araştırmacılara çeşitli önerilerde bulunulmuştur:

- Bu çalışmada öğrencilerin kesir anlayışları literatürde yer alan çalışmalardan farklı bir teorik çerçeveden ele alınmıştır. Çalışmadan elde edilen sonuçlar doğrultusunda öğretim planları yeniden düzenlenebilir, birim kesirlere ilişkin çalışmalara daha fazla yer verilebilir.
- Öğrencilerin kesirleri genel olarak parça bütün anlamıyla değerlendirdikleri tespit edilmiştir. Bu açıdan derslerde ve ders kitaplarında kesirlerin tüm anlamlarına eşit olarak yer verilmesi önerilebilir.
- Bu çalışmada öğrencilerin kesirleri temsilen kullanılan modellerden küme modeline ilişkin soruları çözmekte diğer modellere göre daha fazla zorlanıldıkları ve alan modelinde öğrencilerin şeklin alanını neredeyse hiç kullanmadığı ortaya konulmuştur. Daha önceki çalışmalarda ise öğretmenlerin derslerinde en az tercih ettiği modelin küme modeli olduğu belirlenmiştir. Bu durumla ilgili olarak öncelikle öğretmenlerin kesrin her modeli ilgili yeterli bilgiye sahip olacak şekilde kendilerini geliştirmesi, sınıf içi uygulamalarda kesirlerin anlatımında her modele ilişkin örneklere yer vermesi ve ders kitaplarında kesrin her modeline ilişkin örneklere yer vermesi tavsiye edilebilir.
- Çalışmada bazı öğrencilerde daire modeli ile temsil edilen bütünlerin tek sayılı parçalara bölünemeyeceği konusunda bir yanlış anlayış geliştiği tespit edilmiştir. Bu anlamda konunun öğretimi sırasında daire modeline ilişkin tek sayılı parçalamalara ağırlık verilmesi ve öğrencilerin somut materyallerle bunu deneyimlemesine fırsat verilmesi iyi bir uygulama olabilir.
- Öğrencilerin bazı durumlarda özellikle çarpma işlemine ilişkin sorularda yaptıkları işlemleri açıklayamadığı daha çok ezbere işlem yaptıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerde kavramsal anlayışın oluşturulabilmesi için bu konuların kural olarak öğretilmesinden kaçınılarak, öğretim sırasında görsel temsillere yer verilmesi özellikle de GeoGebra gibi bilgisayar programlarından faydalanılabilir.
- Bu çalışma öğrencilerin hem kesir zihinsel düzeneklerini hem de kesir zihinsel düzeneklerine ait kritik işlemleri cebirsel düşünmede kullanma durumunu ortaya

çıkarmayı amaçlamıştır. Kesir konusu ile cebirsel düşünme becerisi arasındaki ilişkinin daha net ortaya konulabilmesi için sadece kesirlerle çarpma konusunun ve cebirsel düşünmenin değerlendirildiği farklı bir çalışma yapılabilir.

- Bu çalışmada öğrencilerin var olan zihinsel düzeneklerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu çalışmadan farklı olarak Steffe'nin (2010) teorik çerçevesi referans alınarak düzenlenmiş bir ders öğretim sürecinin öğrencilerin kesirleri anlamaya katkısını ölçmek için öğretim deneyi yönteminin kullanıldığı bir çalışma yapılabilir.
- Daha önceki çalışmalarda (Doğanlar, 2018) öğretmenlerin yaptıkları hataların aynısının öğrencilerin de yaptığı tespit edilmiştir. Bu anlamda bu çalışmanın öğretmen ve öğretmen adayları ile yapılması önerilebilir.
- Bu çalışma nitel bir araştırma olup çalışmanın katılımcıları bir okuldaki on iki öğrenci ile sınırlıdır. Bu anlamda örneklem sayısı arttırılarak farklı araştırmalar gerçekleştirilebilir ve ayrıca nitel araştırmanın yanında nicel araştırmalar da yapılabilir.

KAYNAKLAR

Acar, S. (2019). *Sayı hissi ile cebirsel düşünme becerisi arasındaki ilişkinin farklı değişkenler açısından incelenmesi*. Yayımlanmış yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.

Alacaci, C. (2014). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları. E. Bingölbali ve M. F. Özmantar (Ed.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* (s. 63-95). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Altıparmak, K. & Özüdoğru, M. (2015). Hata ve kavram yanılgısı: Kesir ve parça bütün ilişkisi. *International Journal of Human Sciences,* 12(2), 1465-1483.

Altun, M. (2005). *Matematik öğretimi*. Bursa: Alfa Aktüel Yayın Dağıtım.

Altun, M. (2014). *Ortaokullarda matematik öğretimi.* Bursa: Aktüel Yayınları.

Akbaba Dağ, S. (2014). Mikroöğretim ders imecesi modeli ile sınıf öğretmeni adaylarının kesir öğretim bilgilerinin geliştirilmesine yönelik bir uygulama. Yayımlanmış Doktora Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya

Akkan, Y. (2016). Matematik eğitiminde teoriler. Bingölbali, E., Arslan, S. & Zembat, İ.Ö. (Eds.). *Cebirsel düşünme* (s. 43-62). Ankara: Pegem Akademi.

Akkan, Y., Baki, A. & Çakıroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: Cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online,* 10(3), 812-823.

Aksu M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *The Journal Of Educational Research,* 90(6), 375-380

Armstrong, B. E. & Larson, C. N. (1995). Students' use of part-whole and direct comparison strategies for comparing partitoned rectangles. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(1), 2-19.

Baki, A. (2018). *Matematiği öğretme bilgisi.* Ankara: Pegem Akademi.

Baykul, Y. (2005). *İlköğretimde matematik öğretimi (1-5. sınıflar).* Ankara: Pegem Akademi.

Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). *Rational number, ratio and proportion*. In D. A. Grows (Ed.), Handbook on research on mathematics teaching and learning (296 – 333). New York: Macmillan.

Bezuk, N. & Bieck, M. (1993). Current research on rational numbers and common fractions: summary and implications for teachers. In D. Owens (Ed.). *Research Ideas for the*

Classroom: Middle Grades Mathematics. (pg. 118-158). New York: MacMillan Publishing Company.

Birinci, M. (2018). *Bir ortaokul matematik öğretmeninin mesleki gelişiminden yansımalar: Kesir öğretiminde fark etme becerisinin işe koşulması*. Yayımlamış yüksek lisans tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Boulet, G. (1998). Didactical implications of children’s difficulties in learning the fraction concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20(4), 19–34.

Boyce S. & Norton A. (2016). Co-construction of fractions schemes and units coordinating structures. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 10–25.

Charalambous, C. Y. & Pitta- Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students’ understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293–316.

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pintazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 233-240.

Cramer, K., Wyberg, T. & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 490–497.

Creswell, J. W. (2005). *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (2. Baskı). USA: Pearson Education Inc.

Creswell, J. W. (2018). *Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Siyasal Kitabevi

Çelik, B. (2015). *Beşinci sınıf kesirler konusunun öğretim sürecinin matematiksel modeller açısından incelenmesi.* Yayımlamış yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarını cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi*. Yayınlanmış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Davis, G., Hunting, R.P. & Pearn, C. (1993). What might a fraction mean to a child and how would a teacher know?. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 12(1), 63–76.

Dere, D. (2016). *Ortaokul öğrencilerinin kesirleri anlama becerilerinin incelenmesi.* Yayımlamış yüksek lisans tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, Grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Doğanlar, H. (2018). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin cebirsel zihin alışkanlıklarının belirlenmesi ve derslerine yansımaları*. Yayımlamış yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Eliustaoğlu, E. (2016). *Investıgatıon of fraction schemes and models as a means to understand how sixth grade students make sense of fractions*. Master thesis, Kent State University.

Empson, S. B. & Levi, L. (2011). Extending childre's mathematics: Fractions and decimals. Portsmouth, NH: Heinemann.

Ergöl, H. & Sezgin-Memun, D. (2020). Ortaokul öğrencilerinin kesir kavramına ilişkin ürettikleri metaforlar. *Uluslararası Toplum Araştırmaları Dergisi,* 15(23), 1920-1939.

Eroğlu, D., Camci F. & Tanışlı, D. (2019). Altıncı sınıf öğrencilerinin kesirler ve kesirlerdeki toplama-çıkarma konusundaki bilgilerinin yapılandırılmasına ilişkin tahmini öğrenme yol haritası. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 45, 116-143.

Ertuna L. (2013). *İlköğretim 4-7. sınıf öğrencilerinin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin incelenmesi*. Yayımlamış yüksek lisans tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Fraenkel, J.R. & Wallen, N.E. (2006). *How to design and evaluate research in education* (Sixth edition). Boston: McGraw-Hill Pub.

Güvendiren, G. N. (2019). *Altıncı sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmelerinin üç parametreyle birlikte incelenmesi: Niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünme*. Yayımlamış yüksek lisans tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Hackenberg, A. J. (2009). *Relationships between students' fraction knowledge and equation solving.* Paper presentation at the Research Pre-session of the annual conference of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C.

Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32, 538–563.

Hackenberg, A. J. & Lee, M.Y. (2011). *Students' distributive reasoning with fractions and unknowns*. In T. Lamberg & L. Wiest (Eds.), Proceedings of the Thirty-second Annual

Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education [CD-ROM]. Reno, NV: University of Nevada.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, 28(4), 383–432.

Hackenberg, A. J. & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, 28, 1-18.

Hackenberg, A. J. (2006). *Sixth grades' construction of quantitative reasoning as a foundation for algebraic reasoning*. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations.* Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Hackenberg, A. J. (2005). *Construction of algebraic reasoning and mathematical caring relations*. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia.

Haser Ç. & Ubuz B. (2001). İlköğretim 5. sınıf öğrencilerinin kesirler konusunda kavramsal anlama ve işlem yapma performansı. IV. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi, s: 609-612, MEB Yay., Ankara.

Haser Ç. & Ubuz B.(2002). Kesirlerde kavramsal ve işlemsel performans. *Eğitim ve Bilim*, 27(126), 53-61.

Hatfield, M. M., Edwards, N. T., Bitter, G. G. & Morrow, J. (2008). *Mathematics methods for elementary and middle school teachers*. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59–78.

Hunting, R. P., Davis, G. & Pearn, C. A. (1996). Engaging whole-number knowledge for rational-number learning using a computer-based tool. *Journal forResearch in Mathematics Education*, 27(3), 354–379.

Işık, C. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde çarpma ve bölmeye yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 41, 231-243.

Izsák, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction*, 26(1), 95–143.

Jacobson, E., & Izsák, A. (2015). Knowledge and motivation as mediators in mathematics teaching practice: The case of drawn models for fraction arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 18(5), 467-488.

Kar, T. & Işık A. (2015). Ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerle çıkarma işlemine yönelik problem kurma becerilerinin incelenmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi,* 24(2015) 243-276.

Kara, F. (2017). *Altıncı sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama ve çıkarma işlemlerinde farklı temsilleri kullanma becerilerinin incelenmesi*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi, Kastamonu.

Karaağaç, M. K. & Köse, L. (2015). Öğretmen ve öğretmen adaylarının öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları ile ilgili bilgilerinin incelenmesi. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (30), 72-92.

Karagöz-Akar, G. (2016). Matematik eğitiminde teoriler. Bingölbali, E., Arslan, S. & Zembat, İ.Ö. (Eds.). *Nicel Muhakeme ve Nicel Muhakeme İle Kesirler Üzerinden Gerçek Sayıların İnşası* (s. 117-133). Ankara: Pegem Akademi

Kaya, D., Keşan, C., İzgiol, D. & Erkuş, Y. (2016) Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakeme becerilerine yönelik başarı düzeyi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education,* 7(1), 142-163.

Kayhan, H. C. (2010). *İlköğretim öğrencilerinin kesir çeşitlerini birbirine dönüştürme süreçlerindeki zihinsel modellerinin belirlenmesi*. Yayımlanmış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. Rational numbers*: An integration of research*, 49-84.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C.Laborde, & A. Pérez (Eds.), 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kocaoğlu, T. & Yenilmez, K. (2010). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesir problemlerinde yaptıkları hatalar ve kavram yanılgıları. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi,* 14, 71-85.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: *Its role in children's partitioning strategies. Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 170–193.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook ofresearch on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lee, M.Y. (2012). *Fractional Knowledge and equation writing: The cases of Peter and Willa*. Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education 8 – 15th July, 2012, Seoul, Korea. Last accessed 19th March 2014 from http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0766.pdf

Lee, M.Y. & Hackenburg, A. (2013). Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: The case of Willa. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(4), 975-1000.

Lee, S. J., Brown, R. E., & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(3), 198-220.

Macit, E. & Nacar S. (2019). İlköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin rasyonel sayı ve kesir kavram imajları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi,* 6(11), 50-62.

Macit, H., Tunç-Pekkan, Z. & Karatoprak, R. (2013). Materyal kullanımının matematiksel düşünme becerisine etkisi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*,9(4), 544-556.

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3), 267–295.

McCloskey, A. V. & Norton A. (2009). Using Steffe's advanced fraction schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(1), 44-56.

Merriam, S. B. (2009). Qualitative research a guide to design and implementation. San Francisco, CA Jossey-Bass.

Mısral, M. (2009). *Kesrin farklı anlamlarına göre yapılan öğretimin ilköğretim 6. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama çıkarma ve çarpma işlemlerinde kavramsal ve işlemsel bilgi düzeylerine etkisi*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis*. 2nd ed. Thousand Oaks: Sage,

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1,2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar).* Ankara.

Misquitta, R. (2011). A review of the literature: Fraction instruction for struggling learners in mathematics. Learning Disabilities Research & Practice, 26, 109–119.

Musser, G. L., Peterson, B. E., & Burger, W. F. (2014). Mathematics for elementary teachers: a contemporary approach, 10th Edition, Wiley. Retrieved from https://www.wiley.com/enus/Mathematics+for+Elementary+Teachers%3A+A+Contemporary+Approach%2C+10th+Edition-p-9781118457443

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Mathematics Advisory Panel [NMAP]. (2008). The final report of the national mathematics advisory panel. Retrieved January 17, 2017, from http://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/finalreport.pdf

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychology*, 40(1), 27–52.

Norton, A. H. & McCloskey, A. V. (2008). Modeling students' mathematics using Steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics*, 15(1), 48-54.

Norton, A. & Wilkins, J. L. M. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(2/3), 150–161.

Norton, A. & Wilkins, J. L. M. (2010). Students' partitive reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(4), 181–194.

Norton, A. & Wilkins, J. L. M. (2012). The splitting group. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(5), 557–583.

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic: *A reorganization hypothesis. Mathematical Thinking and Learning*, 1(4), 279–314.

Olive, J. (2001). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, 11(1), 4–9.

Olive, J. & Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(4), 413–437. 115

Olive, J. & Caglayan, G. (2008). Learners' difficulties with quantitative units in algebraic word problems and the teacher's interpretation of those difficulties. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6, 269–292

Olkun, S. & Toluk U.Z., (2007) *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Ankara: Maya Akademi.

Olkun, S. & Toptaş, V. (2007). *Resimli matematik terimleri sözlüğü*. Ankara: Maya.

Olkun, S. & Toluk-Uçar, Z. (2014). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Pegem Akademi.

Öksüz R. (2018). *5. sınıf öğrencilerinin kesir kavramını oluşturma süreçlerinin Apos teorik çerçevesinde incelenmesi*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Örmeci, Ş. (2012). *Seventh grade students' conceptual and procedural understanding of fractions: comparison between successful and less successful students*. Master Thesis, Bilkent University, Ankara.

Pearn, C. & Stephens, M. (2016). Competence with fractions in fifth or sixth grade as a unique predictor of algebraic thinking. (Edited by: M. Chinnappan and S. Treholm). *Opening up Mathematics Education Reserch*, 519- 526.

Pesen, C. (2003). *Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenleri için matematik öğretimi*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Pesen C. (2007). Öğrencilerin kesirlerle ilgili kavram yanılgıları. *Eğitim ve Bilim*, 32(143), 79-88.

Piaget, J. (1972). *The principles of genetic epistemology*. London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1970). Genetic epistemology. New York, NY: Columbia University Press.

Piaget, J. (1970). Structuralism. New York, NY: Basic Books.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter (Cilt 1, ss. 2-21).Skemp, R.R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin, Middlesex, UK.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191–228.

Smith, J. & Thompson, P. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. Kaput & D. Carraher (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Son, J. W. & Lee, J. E. (2016). Pre-service teachers' understanding of fraction multiplication, representational knowledge, and computational skills. *Mathematics Teacher Education and Development*, 18(2), 5-28.

Sowder, J. T. (1995). Instructing for rational number sense. *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*, 15-30.

Steffe, L. P. (2001, December 9–14). *What is algebraic about children's numerical operating?* Paper presented at the Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra, University of Melbourne, Australia.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 267–307.

Steffe, L. P. & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York, NY: Springer.

Swafford, J. O. & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 89-112.

Şiap, İ. & Duru, A.(2004). Kesirlerde geometriksel modelleri kullanabilme becerisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12 (1), 89-96.

Taştepe, M. (2018). *İşlemsel ve kavramsal bilginin gelişiminin cebirsel kesirleri içeren denklemler bağlamında incelenmesi*. Yayımlanmış Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Temur, Ö. (2011) Dördüncü ve beşinci sınıf öğretmenlerinin kesir öğretimine ilişkin görüşleri: fenomenografik araştırma. *Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 29, 203-212.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teacher' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.

Toluk Z. (2002). İlkokul öğrencilerinin bölme işlemi ve rasyonel sayıları ilişkilendirme süreçleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 19(2) 81-103.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children’s fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 89(1), 1–23.

Tunç-Pekkan, Z. (2016). Matematik eğitiminde teoriler. Bingölbali, E., Arslan, S. & Zembat, İ.Ö. (Eds.). *Steffe’nin Doğal Sayılar ve Kesir Bilgilerinin Yapılandırılmasına Yönelik Öğrenme Modeli* (s. 489-507). Ankara: Pegem Akademi.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children’s construction of improper fractions and the teacher’s role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390–416.

Tzur, R. (2004). Teachers’ and students’ joint production of a reversible fraction conception. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 93–114.

Usta, N. & Gökkurt Özdemir, B. (2018). Ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin incelenmesi. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi – Journal of Qualitative Research in Education*, 6(3), 427-453.

Ünlü, M. (2019). Uygulama örnekleriyle cebirsel düşünme ve öğretimi. Sarpkaya-Aktaş G. (Ed.). *Cebirsel Düşünme ve Cebirsel Düşünmenin Matematik Öğretimindeki Yeri*. (s.23-41). Ankara: Pegem Akademi.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2013). *İlkokul ve ortaokul matematiği, gelişimsel yaklaşımla öğretim* (S. Durmuş, Çev.). Ankara: Nobel.

Von Glasersfeld, E. (1980). Viability and the concept of selection. *American Psychologist*, 35, 970-974.

Von Glasersfeld, E. (1995). Radical constructivism: A way of knowing and learning (vol. 6). New York: Routledge Falmer

Von Glasersfeld, E. & Steffe, L. P. (1991). Conceptual models in educational research and practice. *Journal of Educational Thought*, 25(2), 91–103.

Warren, E. & Cooper, T. J. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: The case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 76-95.

Wilkins, J. L. M., Norton, A. & Boyce, S. J. (2013). Validating a written instrument for assessing students’ fractions schemes and operations. *The Mathematics Educator*, 22(2), 31–54.

Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator*, 25(2), 10–17.

Yanık, B. (2013). Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar. Zembat, İ., Ö., Özmantar, M., F., Bingölbali, E., Şandır, H. ve Delice, A. (Edt.). *Rasyonel Sayılar*. (sf. 95-110). Ankara: Pegem Akademi

Yurtsever, N. (2012). *A study on fifth grade students’ mistakes, difficulties and misconceptions regarding basic fractional concepts and operations*. Master Thesis, Middle East Technical University, Ankara.

Zembat İ. Ö. (2016). Matematik eğitiminde teoriler. Bingölbali, E., Arslan, S. & Zembat, İ.Ö. (Eds.). *Piaget’nin merceğinden yapılandırmacılık ve zihinsel Düzenekler* (s. 475-486). Ankara: Pegem Akademi.

EKLER

EK–1. Araştırma İzni Belgesi

T.C.
DENİZLİ VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 16605029/44-E.7273151 10/04/2019
Konu : Anket Uygulama İzni

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : Uşak Üniversitesi Rektörlüğü'nün 29/03/2019 tarih ve 1859 sayılı yazıları.

Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı Tezli Yüksek Lisans programı öğrencisi Melike TOPÇU'nun " Ortaokul Öğrencilerinin Kesir Şemalarının ve Kesir Bilgisi ile Cebirsel Düşünmeleri Arasındaki İlişkinin Belirlenmesi " başlıklı araştırms çalışması kapsanında hazırlamış olduğu anket/ölçek formlarını İlgi yazı gereği Müdürlüğümüze bağlı Denizli İli Merkezefendi İlçesinde bulunan Sıdıka Çalışkan Ortaokulu, Abalıoğlu Yem Sanayi Ortaokulu, Servergazi İmam Hatip Ortaokulu, Hacı Şakir Meliha Nilüfer Öz Ortaokulu ve Pamukkale İlçesinde bulunan Lütfi Ege Ortaokulu, Pamukkale Merkez Ortaokulu, Ticaret Borsası Ortaokulu'nda öğrenim gören öğrencilere uygulamak istemektedir.

Yukarıda adı geçen müracaat ile ilgili (Lisans/Lisansüstü/Doktora) öğrencileri ve Öğretim Görevlilerinin ilgi yazıları ekinde belirtmiş oldukları okullarda, (Ortaöğretim/İlköğretim/Okulöncesi) konuları ile ilgili anket çalışmalarının "Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri" Genelgesinde belirtilen esaslar gereğince; Okul ve kurumların eğitim-öğretim faaliyetlerini aksatmayacak şekilde 2018/2019 eğitim-öğretim yılı içerisinde uygulamaları Müdürlüğümüzce uygun görülmüştür.

Olurlarınıza arz ederim.

Mahmut OĞUZ
Milli Eğitim Müdürü

OLUR
10/04/2019
Hakkı ÜNAL
Vali a.
Vali Yardımcısı

Güvenli Elektronik İmzalı
Aslı İle Aynıdır
Mahmut TUR
Memur
..10./04./2019...

T.C
DENİZLİ VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

UŞAK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE

Kurumunuzca Müdürlüğümüzden talep edilen araştırma isteklerine ait Makam Onayı ve Müdürlüğümüzce Onay verilen anket formları ekte gönderilmiştir.

Gereğini rica ederim.

Hakkı ÜNAL
Vali a.
Vali Yardımcısı

Ek:
1-Anket Formları

Sırakapılar Mah. Saltak Cad. No: 76 20100/DENİZLİ
Elektronik Ağ : http://denizli.meb.gov.tr
e-posta: ab20@meb.gov.tr

Ayrıntılı Bilgi İçin : Sefa GELMİŞ - Şef
Telefon :(0 258) 234 20 92
Belgegeçer : (0 258) 265 01 69-Strateji Şb.

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. https://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden c746-36a4-345a-a664-ce9e kodu ile teyit edilebilir.

EK–2. Öğrenci Tanışma Protokolü

Merhaba,

Benim adım Melike, Uşak Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalında yüksek lisans yapmaktayım. Tez çalışmamda kesir zihinsel düzeneklerini ve bu düzenekleri cebirsel düşünmede nasıl kullandığını ortaya çıkarmak istiyorum. Bu anlamda *ortaokul öğrencilerinin kesir zihinsel düzenekleri nasıldır?, Kesir kavramına ilişkin kritik işlemlerin cebirsel düşünmeye ilişkin sorularda kullanımı nasıldır?* sorularına yanıt bulmayı hedefliyorum. Bu araştırmayı gerçekleştirebilmem için kesir ve cebire ilişkin bazı konularda sahip olduğun bilgilere ihtiyacım var.

Araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceğin görüşlerinin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Bunun için de seninle bir çalışma yapmam gerekmektedir. Seninle ders içi veya ders dışı saatlerde görüşme yapmayı planlamış bulunmaktayım.

Görüşmeler video kamera ile kayıt edilecektir. Görüşmeyi izin verirsen kaydetmek istiyorum. Tez çalışmasında ismin doğrudan verilmeyecek, isim gizliliği için şifreleme yapılacak ve yapılan kayıtlar senin iznin olmadığı sürece hiç kimse ile paylaşılmayacaktır.

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğin ilgi ve bana ayırdığın zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve senin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır. Araştırmama katıldığın ve bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığın için tekrardan çok teşekkür ederim. Çalışma ile ilgili sormak istediğin herhangi bir soru varsa sorabilirsin, memnuniyetle yanıtlarım.

Sevgiler

Melike Topçu

Yukarıdaki açıklamaları okudum ve anladım. Bu araştırmaya gönüllü olarak katılıyorum. Çalışmaya düzenli olarak devam edeceğim.

Tarih:

Öğrencinin Adı-Soyadı:

EK–3. Veli İzin Belgesi

Sayın Veli,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve öğrencinizin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır.

Ben ortaokul öğrencilerinin kesir zihinsel düzeneklerini ve bu düzenekleri cebirsel düşünmede nasıl kullandıklarını ortaya çıkarmak istiyorum. Bu tez çalışması ile; ortaokul öğrencilerinin kesir zihinsel düzenekleri nasıldır? Kesir kavramına ilişkin kritik işlemlerin cebirsel düşünmeye ilişkin sorularda kullanımı nasıldır? sorularına yanıt bulmayı hedefliyorum.

Velisi bulunduğunuz öğrencinin araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceği görüşlerin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca uygulamalar sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri video kamera ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak uygulamalar, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır.

İzniniz olmadığı takdirde, öğrencinizin ismi bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilecektir. Öğrenci istediği zaman çalışmadan ayrılabilir.

Bu formu okuyup, bu araştırmaya velisi bulunduğunuz öğrencinin gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim size verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyorum. Velisi bulunduğunuz öğrencinin bu araştırmaya katılmasına izin verdiğinizi gösteren bu formu okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederim.

Melike Topçu

Uşak Üniversitesi

Yukarıdaki açıklamaları okudum ve anladım. Velisi bulunduğum öğrencinin bu araştırmaya katılmasını kabul ediyorum.

Tarih:

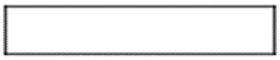
Velinin Adı-Soyadı:

İmza:

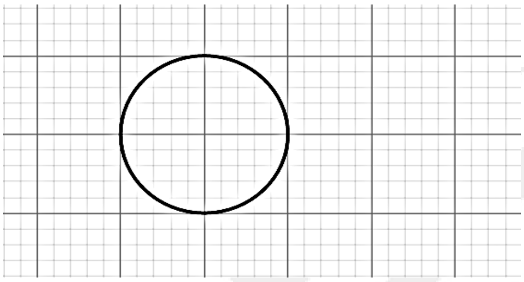
EK–4. Araştırmanın Soruları

PROTOKOL-1 (KESİR ZİHİNSEL DÜZENEK BİLGİSİ SORULARI)

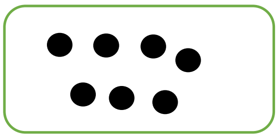
1. Aşağıdaki şeklin $\frac{1}{3}$’ ini çiziniz. Sizce oluşturulan her bir parça bütünün ne kadarıdır?



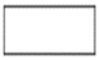
2. Aşağıda verilen bir pizza, 5 arkadaş arasında her kişinin $\frac{1}{5}$ ‘lik dilim alacağı şekilde paylaştırılacaktır. Bir kişinin yiyeceği pizza ne kadardır? Şekil üzerinde gösteriniz.



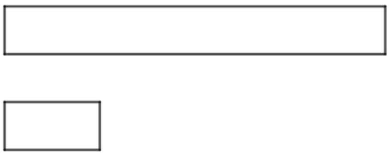
3. Aşağıdaki şekil Doğa’nın tabağında yer alan elmaların sayısını göstermektedir. Poyrazın tabağında ise Doğa’nınkinin $\frac{1}{7}$’i kadar elma olduğuna göre Poyraz’ın elmalarının sayısını temsil eden şekli çiziniz.



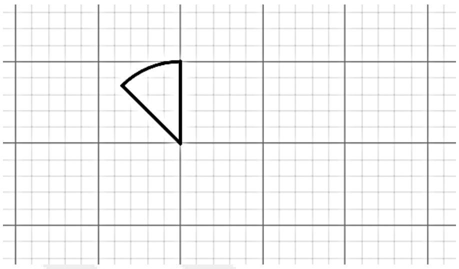
4. Aşağıdaki şekil bir çikolatanın belli bir parçasını göstermektedir. Bu parçanın 4 katı uzunluğuna sahip olan çikolatayı çiziniz.



5. Aşağıda bir bütün pasta ve pasta dilimi gösterilmektedir. Buna göre dilimin pastanın kaçta kaçı olduğunu bulunuz.

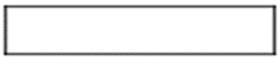


6. Aşağıda daire şeklinde bir kartondan kesilen $\frac{1}{8}$'lik bir parçanın şekli verilmiştir. Kartonunun tamamını temsil eden şekli çiziniz.

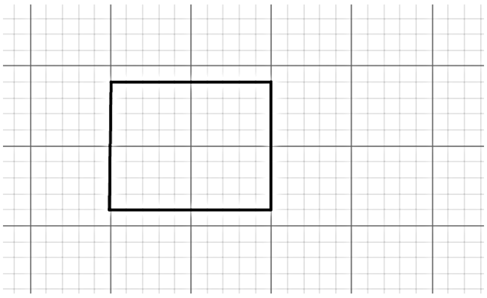


7. Aşağıda Ali'nin bilyelerinin sayısının $\frac{1}{5}$ 'i verilmiştir. Ali'nin bilyelerinin tamamını temsil eden şekli çiziniz.

8. Aşağıdaki şeklin $\frac{2}{3}$'sini çiziniz

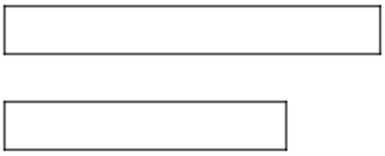


9. Aşağıda verilen büyüklükteki bir keki 8 arkadaş eşit şekilde paylaşacaktır. 3 kişiye düşen toplam kek miktarı ne kadardır? Şekille gösteriniz ve açıklayınız

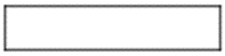


10. Aşağıdaki şekil Gökçe’nin kalemlerinin sayısını temsil etmektedir. Emre’nin kalem sayısı Gökçe’nin kalemlerinin $\frac{2}{5}$’si olduğuna göre Emre’nin kalemlerini temsil eden şekli çiziniz.

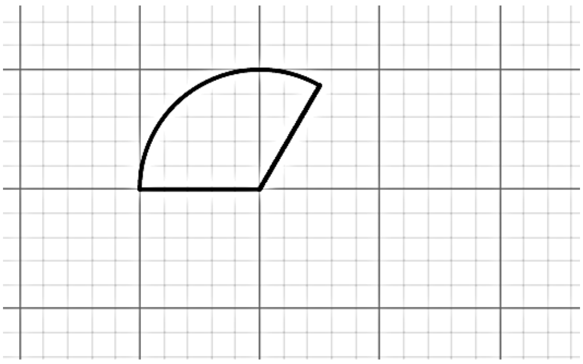
11. Aşağıda büyük dikdörtgen bir bütün pastayı, küçük dikdörtgen ise büyük dikdörtgenden kesilen pasta dilimini temsil etmektedir. Buradan yola çıkarak dilimin pastanın kaçta kaçı olduğunu yazınız.



12. Aşağıdaki hediye paketi başka bir hediye paketinin $\frac{5}{7}$ sini göstermektedir. Buna göre diğer hediye paketinin büyüklüğü ne olur? Şeklini çizer misiniz? Bu şekli nasıl çizdin? Çizdiğin şeklin birimini temsil eden kısmı neresidir?



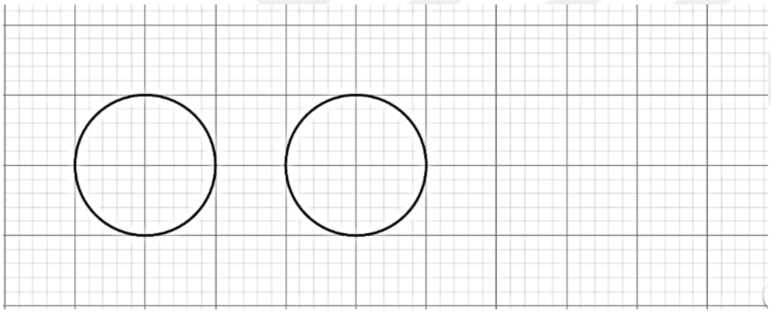
13. Bir pizza 6 arkadaş tarafından eşit şekilde paylaşılmıştır. Aşağıda iki arkadaşın yediği pizza diliminin şekli verilmiştir. Sizce pizzanın tamamı ne kadardır? Şekille gösteriniz ve açıklayınız.



14. Aşağıdaki şekil Berfin’in kalemlerinin sayısını temsil etmektedir. Berfin’in kalem sayısı Elif’in kalemlerinin $\frac{4}{6}$’si olduğuna göre Elif’in kalemlerini temsil eden şekli çiziniz

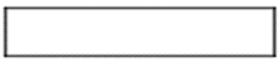
15. Ayşe Hanım’ın bahçesinin büyüklüğü Ahmet Bey’in bahçesinin büyüklüğünün $\frac{1}{3}$’idir. Ayşe Hanım, bahçesinin $\frac{3}{4}$'üne çiçek dikerken $\frac{1}{4}$ ’ ini boş bırakacaktır. Ahmet Bey’in bahçesinin büyüklüğü aşağıdaki gibi ise Ayşe Hanım’ın çiçek dikeceği yer ne kadardır? Şekil çizerek gösteriniz.

16. Aşağıda verilen 2 pizza 3 arkadaş tarafından eşit şekilde paylaşılacaktır. Bir kişiye düşen pizza miktarının şeklini çizin

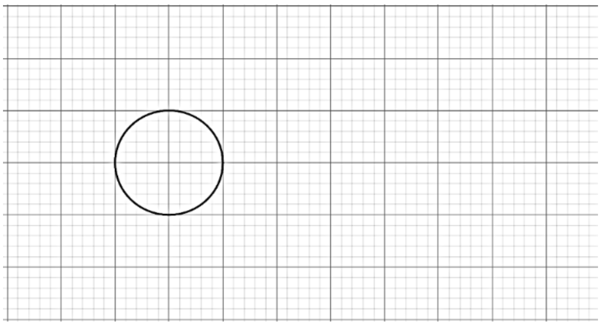


17. Bir kitaplıkta yer alan kitapların $\frac{3}{5}$’i ders kitabıdır. Ders kitaplarının $\frac{1}{3}$’i de matematik kitabıdır. Aşağıdaki şekil tüm kitapları temsil ettiğine göre, matematik kitaplarını temsil eden şekli çiziniz.

18. Aşağıdaki şeklin $\frac{4}{3}$’ünü çiziniz



19. Şeyda ödevi için Şeyma'nın kullandığı kartonun $\frac{3}{2}$'si büyüklükte bir karton kullanmıştır. Aşağıda Şeyma'nın kullandığı karton verildiğine göre Şeyda'nın ödev için kullandığı kartonu da siz çizin.



20. Melis'in kalemleri Melek'in kalemlerinin $\frac{5}{2}$'si kadardır. Aşağıdaki şekil Melek'in kalemlerini temsil ettiğine göre Melis'in kalemlerini temsil eden şekli çiziniz.

PROTOKOL-2 (KESİR –CEBİR İLİŞKİSİ SORULARI)

1. Ali'nin kaleminin uzunluğu Mert'in kaleminin uzunluğunun 3 katıdır.

- **a.** Bu durumu temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.
- **b.** "Mert'in kaleminin uzunluğu Ali'nin kaleminin uzunluğunun $\frac{1}{3}$'dir." İfadesine ilişkin uygun cebirsel ifadeyi yazınız.

2. Bir masada biri diğerinin 4 katı kadar su dolu olan iki bardak vardır.

- a. Bu durumu temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.
- b. "Bir masada biri diğerinin $\frac{1}{4}'i$ katı kadar su dolu olan iki bardak vardır." İfadesine ilişkin uygun cebirsel ifadeyi yazınız.

3. Bir doğum günü partisinde 3 tane pasta bulunmaktadır. Her bir pasta x gram ağırlığındadır. Buna göre bütün pastaların ağırlıklarının $\frac{1}{5}$ i ne kadardır?

Bu durumu temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.

4. Kerem'in kalemleri Alp'inkinin $\frac{3}{4}$'ü kadardır.

Bu durumu temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.

5. Ali Bey'in evinin markete olan uzaklığı, evin pazara olan uzaklığının $\frac{2}{5}$'si kadardır. Evin markete olan uzaklığı x metre olduğuna göre;

- a. Ali Bey'in evinin pazara olan uzaklığı ne kadardır?
- b. Bu durumu temsil eden bir şekil şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.

6. Merve'nin yediği kek dilimi tüm kekin $\frac{2}{7}$'si kadardır. Merve'nin yediği kek diliminden yola çıkarak

- a. Tüm keki temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.

7. Ece bir sandviçin $\frac{2}{3}$'sini yemiştir. Kalan sandviçin $\frac{1}{4}$'ini ise kardeşi yemiştir.

- a. Ece'nin kardeşinin yediği sandviçi temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.

8. Bir kasa elmanın $\frac{1}{2}$'si çürümüştür. Kalanların ise $\frac{1}{3}$'i satılmıştır. Ne kadar elma satıldığını anlamamızı sağlayan ifadenin

- a. Şeklini çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.

9. Zeynep'in harçlığı Deniz'in harçlığının $\frac{7}{6}$'sıdır.

- a. Zeynep ve Deniz'in harçlığını temsil eden şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.

10. 5 pasta 3 kişi arasında eşit şekilde paylaştırılacaktır.

a. Bir kişiye ne kadar pasta düşer?
b. Bu durumu gösteren şekli çizerek duruma ilişkin cebirsel ifadeyi yazınız.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Melike TOPÇU

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri: 10.01.1993 - DENİZLİ

Lisans Öğretimi : Pamukkale Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği

Yabancı Dil : İngilizce

İletişim : melike.mtopcu@gmail.com

Bilimsel Faaliyetler:

Makale

Topçu, M. & Gürefe, N. (2020). 7. sınıf öğrencilerinin kesir şemalarının belirlenmesi. *The Journal of International Education Science*, 22 (7), 97-118.

Bildiriler

Gürefe, N. & Topçu M. (2018). *Matematik ders kitaplarındaki bazı geometrik kavram tanımlarının incelenmesi*. V. International Eurasian Educational Research Congress (EJER), 2-5 May, Antalya, Turkey.

Gürefe, N., Doğa, E. & Topçu, M. (2018). *Ortaokul 5. ve 8. sınıf öğrencilerinin geometrik kavram tanım bilgileri*. 2. Uluslararası Eğitim Araştırmaları ve Öğretmen Eğitimi Kongresi, 13-15 Eylül, Kuşadası-Aydın.

Gürefe, N. & Topçu, M. (2018). *8. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadelerle ilgili kavram imajlarını incelenmesi*, 13. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 4-6 Ekim, Denizli, Türkiye.