T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BETA KESİRLİ TÜREVİ VE EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA KORKMAZ

ŞUBAT 2020
UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BETA KESİRLİ TÜREVİ VE EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA KORKMAZ

UŞAK 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma KORKMAZ

BETA KESİRLİ TÜREVİ VE EŞİTSİZLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma KORKMAZ

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2020

ÖZET

Bu tez çalışmasında beta kesirli analizi incelenmiş ve bazı önemli eşitsizlikler beta-integrali yardımıyla genelleştirilmiştir. Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Tezin giriş bölümünde kesirli analiz kavramı tanıtılmış ve konunun tarihçesiyle ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde bazı önemli tanım ve teoremler üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde uyumlu kesirli integraller için yeni Hermite-Hadamard eşitsizlikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde uyumlu kesirli integraller için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler incelenmiştir. Beşinci bölümde beta-türevi yardımıyla Taylor Formülü, Lagrange Kalan Terimi, Steffensen eşitsizliği elde edilmiştir. Altıncı bölümde ise beta-integrali yardımıyla bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Son olarak da sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Bilim Kodu: 403.06.00, 403.06.01

Anahtar Kelimeler: Türev, integral, kesirli türev, kesirli integral, Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Sayfa Adedi: 80

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Deniz UÇAR

BETA FRACTIONAL DERIVATIVE AND INEQUALITIES

(M. Sc. Thesis)

Fatma KORKMAZ

UNIVERSITY OF UŞAK

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2020

ABSTRACT

In this thesis, beta fractional analysis is examined and some important inequalities are generalized with the help of beta-integral. This thesis consists of seven parts. In the introductory part of the thesis, the concepts of fractional analysis and information about the history of the subject is given. In the second part, some important definitions and theorems are emphasized. In the third part, new Hermite-Hadamard inequalities are examined for conformable fractional integrals. In the fourth part, Hermite-Hadamard type inequalities are examined for conformable fractional integrals. In the fifth chapter, Taylor formula, Lagrange Remainder Term, Steffensen inequality were obtained with the help of beta-derivative. In the sixth part, some new integral inequalities are obtained with the help of beta-integral.

Finally, results and suggestions are given.

Science Code: 403.06.00, 403.06.01

Key Words: Derivative, integral, fractional derivative, fractional integral, Hermite-Hadamard inequalities

Page Number: 80

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Deniz UÇAR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında benimle düşüncelerini, bilgilerini paylaşan, yardımlarını, hoşgörüsünü, değerli zamanını esirgemeyen, elinden gelenden fazlasını sunan her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini esirgemeyen, danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren değerli hocam sayın Doç. Dr. Deniz UÇAR'a sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Fatma KORKMAZ
Şubat 2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

SİMGELER	AÇIKLAMA
K_s^2	İkinci anlamda s −konveks fonksiyonlar sınıfı
$\Gamma(x)$	Euler-Gama fonksiyonu
$\beta(x,y)$	Euler-Beta fonksiyonu
$L[a,b]$	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
sup	Üst sınırların en küçüğü
inf	Alt sınırların en büyüğü
$L_\alpha^1([a,b])$	$[a,b]$ aralığında α −kesirli integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
D_α	α −kesirli türevi
I_α^a	a. mertebeden α −kesirli integrali
I	$\mathbb{R}$ de bir aralık
I^0	I nın içi
${}_0^A D_x^\beta(f(x))$	f fonksiyonunun β − kesirli türevi
${}_0^A I_t^\beta(f(t))$	f fonksiyonunun β − kesirli integrali
$R_{n,f}(s,t)$	Taylor serisi kalan terimi

1. GİRİŞ

Kesirli hesabın tarihi 17. yüzyıla dayanmaktadır. Kesirli mertebeden türev ve integral, klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmesidir. Kesirli mertebeden türev aslında herhangi bir mertebeden türevdir. Kesirli türev kavramı ilk kez L'Hospital ve Leibnitz arasındaki mektuplaşma sırasında ortaya çıkmıştır. Bu mektuptan sonra pek çok matematikçi bu konuda çalışmalar yapmıştır. Bu konuda ilk uygulamanın yazılması 1823'de Niels Henrik Abel'e aittir. Abel bir çalışmasında karşısına çıkan bir integral denklem çözümünde kesirli basamaktan türevleri uygulamıştır. Abel'in bu güzel çözümü, Liouville'nin dikkatini çekmiş ve ilk olarak Liouville tarafından kesirli basamaktan türev için mantıklı bir tanım verilmesini sağlamıştır. Liouville'nin tanımını birçok matematikçi zaman zaman yeniden ele alarak daha genel biçimler elde etmişlerdir. Bunlardan bazıları Emil Post, Caputo, Euler, Fourier, Riemann, Harold Thayer Davis, Atangana'dır.

Kesirli analiz nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisinde, elektrik devrelerinde, elektro-analitik kimya gibi diğer birçok alanda kullanılmaktadır.

Tam sayı mertebeden türevlerin kullanılmasıyla yapılan standart matematiksel modellemeler bazı durumlarda özellikle lineer olmayan modellemelerde, istenen sonucu tam olarak ifade etmeyebilir. Günümüzde kesirli mertebeden türevlerle yapılan modellemelerde daha uygun sonuçlar elde edilebildiği görülmektedir.

Kesirli türevin kullanılmasının avantajlı olduğu durumlardan birkaçı şu şekildedir. Riemann-Liouville kesirli türevinde, keyfi bir fonksiyonun orijinde sürekli olması ve türevlenebilir olması gerekmez. Jumarie kesirli türev tanımında herhangi bir sürekli fonksiyonun diferensiyellenebilir olması gerekmez. Caputo kesirli türevinin en önemli avantajlarından birisi problemin formüle edilmesinde başlangıç ve sınır değer koşullarını içermesine izin vermesidir. Ayrıca sabit fonksiyonun türevi sıfırdır. Caputo türevi gerçek Dünya problemlerinin modellenmesinde kullanılan en uygun kesirli operatördür.

Kesirli türevin dezavantajlı olduğu durumlarla da karşılaşılmaktadır. Kesirli türevler her durumda uygulanabilir değildir. Riemann-Liouville türevi ile gerçek Dünya olaylarını kesirli diferansiyellerle modellemeye çaşılırken bazı dezavantajlarının olduğu görülür. Sabit bir fonksiyonun Riemann-Liouville türevi sıfır değildir. Ayrıca herhangi bir fonksiyon orijinde sabit ise bu fonksiyonun kesirli türevi orijinde bir singüleriteye sahiptir. Bu dezavantajlar Riemann-Liouville kesirli türevinin uygulama alanlarını daraltır.

Caputo türevi diferensiyellenebilirlik için büyük şartlar gerektirir. Bir fonksiyonun Caputo kesirli türevini hesaplamak için önce adi türevinin hesaplanması gerekir. Caputo türevleri sadece Riemann-Liouville anlamında birden daha düşük mertebeli kesirli türeve sahip fakat 1. mertebeden türevleri olmayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar için tanımlıdır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanılan bazı önemli tanımlar verilmiş, tezde kullanılan önemli teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Tanım 2.1 (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık olsun. O zaman bir $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonu I üzerinde konvekstir denir.

Ayrıca f fonksiyonunun konkav olabilmesi için (2.1) eşitsizliğinin ters yönde sağlanması gerekir. Konveks fonksiyonun birkaç genelleştirmesi vardır. Burada $s-$konveks fonksiyonunun temel tanımı ve koordinat konveks fonksiyonu tanımları üzerinde durulacaktır. Hudzik ve Maligranda, [1] numaralı makalede, ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonu olarak bilinen konveks fonksiyonun genelleştirilmesini ele almışlardır. Bu fonksiyon sınıfı şu şekilde tanımlanır:

Tanım 2.2 ($s-$konveks Fonksiyon): Bir $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \ge 0$, $\lambda \in [0,1]$ ve sabit $s \in (0,1]$ için,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y) \tag{2.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyondur denir. İkinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar sınıfı genellikle K_s^2 şeklinde gösterilir.

[2] numaralı makalede, iki değişkenli düzlemin iki boyutlu aralığının koordinatları üzerinde tanımlanan konveks fonksiyonlar kavramı tanıtılmıştır.

Tanım 2.3 (Koordinat Konveks Fonksiyon): $a < b$ ve $c < d$ için $\mathbb{R}^2$de $\Delta := [a,b] \times [c,d]$ bölgesini ele alalım. $\emptyset_y: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\emptyset_y(t) := \emptyset(t,y)$ ve $\emptyset_x: [c,d] \to \mathbb{R}$, $\emptyset_x(s) := \emptyset(x,s)$ kısmi dönüşümleri $\forall x \in [a,b], y \in [c,d]$ için konveks ise $\emptyset: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konvekstir.

Uyarı 2.4: Her konveks fonksiyon $\emptyset: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ koordinat düzleminde konvekstir fakat tersi her zaman geçerli değildir.

Bu fonksiyon sınıfı için birçok önemli eşitsizlik elde edilmiştir, ancak burada bunlardan en önemlisi olan Hermite-Hadamard eşitsizliği incelenecektir.

Tanım 2.5 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I aralığında bir konveks fonksiyon ise $a, b \in I$ ve $a \neq b$ için, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.3}$$

f fonksiyonu I aralığında konkav ise her iki eşitsizlik de tersine döner. Bu dikkate değer sonuç ([3],1893) olarak verilmiştir ve literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinmektedir.

Bulunduğundan itibaren bu eşitsizlik üzerinde pek çok çalışma yapılmıştır. Aynı zamanda matematiksel eşitsizlikler teorisinde (2.3) eşitsizliğinin değişik formları, genelleştirmesi üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

Uyumlu kesirli analiz teorisinde kullanılan bazı temel tanım ve önemli sonuçlar şu şekildedir.

Tanım 2.6 (α −ıncı Mertebeden Uyumlu Kesirli Türev): [4] f: $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun α −ıncı mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$D_{\alpha}(f)(t) = lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer f uyumlu kesirli türevinin α −mertebesi varsa, f α −diferensiyellenebilirdir denir. f, $(0, \alpha)$ aralığında α −diferensiyellenebilir olsun ve $lim_{t \rightarrow 0^+} f^{\alpha}(t)$ var olsun,

$$f^{\alpha}(0) = lim_{t \rightarrow 0^+} f^{\alpha}(t)$$

tanımlanabilir. Bu tezde bundan sonra $D_\alpha(f)(t)$ gösterimi yerine f fonksiyonunun $\alpha-$mertebeli uyumlu kesirli türevleri olan $f^\alpha(t)$ ve $(d_\alpha/d_\alpha t)(f)$ ifadeleri kullanılacaktır.

Teorem 2.7: [4] $\alpha \in (0,1]$ ve $t > 0$ noktasında $f,\ g\ \alpha-$diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(t^n) = n.t^{n-\alpha}, \forall n \in \mathbb{R}$

(2) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(c) = 0,\ her\ sabit\ fonksiyon\ için\ f(t) = c$

(3) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(af(t) + bg(t)) = a\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(f(t)\big) + b\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(g(t)\big),\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

(4) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(f(t)g(t)) = f(t)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(g(t)\big) + g(t)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(f(t))$

(5) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{f(t)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(g(t)) - g(t)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(f(t))}{(g(t))^2}$

(6) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}((fog)(t)) = f'\big(g(t)\big)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(g(t)\big).$

İspat:

(1) Türev tanımı ve L'Hospital yardımıyla

$$\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(t^n) = lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^n - t^n}{\varepsilon} = lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^n(1+\varepsilon t^{-\alpha})^n - t^n}{\varepsilon}$$

$$= lim_{\varepsilon\to 0}t^n\frac{(1+\varepsilon t^{-\alpha})^n - 1}{\varepsilon} = t^n lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon t^{-\alpha})^n - 1}{\varepsilon}$$

$$= t^n lim_{\varepsilon\to 0}\frac{n(1+\varepsilon t^{-\alpha})^{n-1}t^{-\alpha}}{1} = n.t^{n-\alpha}$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(t^n) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}(t^n) = t^{1-\alpha}.n.t^{n-1} = n.t^{n-\alpha}$$

şeklinde de gösterilebilir.

(2) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(c) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}(c) = t^{1-\alpha}.0 = 0$

elde edilir.

(3) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(af(t)+bg(t)) = lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(af(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+bg(t+\epsilon t^{1-\alpha}))-(af(t)+b(g(t))}{\varepsilon}$

$$= lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a(f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t))+b(g(t+\epsilon t^{1-\alpha})-g(t))}{\varepsilon}$$

$$= a\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(f(t)\big)+b\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(g(t)\big)$$

olur.

(4) f ve g iki fonksiyon olmak üzere çarpımlarının türevi için türevin tanımı kullanılır ve $f(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})$ eklenir ve çıkarılırsa,

$$\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(f(t)g(t)) = lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\epsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\epsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})+f(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= lim_{\varepsilon\to 0}\{\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}g(t+\epsilon t^{1-\alpha})+f(t)\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}\}$$

$$= f(t)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(g(t)\big)+g(t)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(f(t)\big)$$

elde edilir.

(5) Diğer ispatlara benzer şekilde türevin tanımı kullanılarak,

$$\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)}{g(t+\epsilon t^{1-\alpha})}-\frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon}\right)$$

$$= lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)-f(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon g(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})}$$

$$= lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)-f(t)g(t)+f(t)g(t)-f(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon g(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})}$$

$$= lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{g(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})}\left[\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}g(t)-f(t)\frac{g(t+\epsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}\right]$$

$$= lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t) - f(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon g(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha})}$$

$$= \frac{f(t)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(g(t)\big) - g(t)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(f(t))}{(g(t))^2}$$

elde edilir.

(6) Bileşke fonksiyonların türevi şu şekildedir;

$$\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}((fog)(t)) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\big((fog)(t)\big)$$

$$= t^{1-\alpha} f'\big(g(t)\big)g'(t)$$

$$= f'(g(t))t^{1-\alpha}g'(t)$$

$$= f'\big(g(t)\big)\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\big(g(t)\big)$$

Ek olarak, f diferensiyellenebilir fonksiyon için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(f(t)) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}(f(t))$$

Ayrıca, aşağıdaki eşitlikler de sağlanmaktadır.

(1) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(1) = 0$

(2) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(e^{ax}) = a.x^{1-\alpha}e^{ax}, a \in \mathbb{R}$

(3) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(\sin(ax)) = a.x^{1-\alpha}\cos(ax)\, , a \in \mathbb{R}$

(4) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(\cos(ax)) = a.x^{1-\alpha}\sin(ax)\, , a \in \mathbb{R}$

(5) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$

(6) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}(sin\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)) = \cos(\frac{t^\alpha}{\alpha})$

(7) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\left(cos\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right) = -\sin(\frac{t^\alpha}{\alpha})$

(8) $\frac{d_\alpha}{d_\alpha t}\left(e^{\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)}\right) = e^{\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)}$

İspat: (1) Sabit fonksiyonun türevi sıfır olduğu için ispat açıktır.

(2) $D_\alpha(e^{ax}) = lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{a(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}-e^{ax}}{\varepsilon}$

$= lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{ax}e^{a\varepsilon t^{1-\alpha}}-e^{ax}}{\varepsilon}$

$= e^{at} lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{a\varepsilon t^{1-\alpha}}-1}{\varepsilon}$

L'Hospital yardımıyla,

$= e^{ax} lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a.t^{1-\alpha}e^{a\varepsilon t^{1-\alpha}}}{1}$

$= e^{at}.a.t^{1-\alpha}$

elde edilir.

(3), (4) ün ispatı açıktır.

(5) $D_\alpha\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = t^{1-\alpha}.\frac{1}{\alpha}.\alpha t^{\alpha-1} = 1$

(6) $D_\alpha(sin\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)) = t^{1-\alpha}.\cos(\frac{t^\alpha}{\alpha}).\frac{\alpha}{\alpha}t^{\alpha-1}$

(7) ve (8) in ispatı açıktır.

Tanım 2.8 (Uyumlu Kesirli İntegral): [5] $\alpha \in (0,1)$ ve $0 \le a < b$ olsun. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$\int_a^b f(x)d_\alpha x \coloneqq \int_a^b f(x)x^{\alpha-1}dx \tag{2.5}$$

integrali var ve sonlu ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $\alpha -$kesirli integrallenebilirdir. Bu fonksiyonlar $L_\alpha^1([a,b])$ şeklinde belirtilir.

Uyarı 2.9: Riemann integrali ve uyumlu kesirli integral arasında şöyle bir bağıntı vardır.

$$I_\alpha^a(f)(t) = I_1^a(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx, \quad \alpha \in (0,1] \tag{2.6}$$

$\alpha -$ kesirli integrallenebilir fonksiyonlar ve kesirli Lebesgue ve Sobolev uzayları güçlü bir şekilde ilişkilidir.

Tanım 2.10 ($\boldsymbol{\beta} -$ Türevi): $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \geq a, \beta \in (0,1]$ için f fonksiyonunun β −türevi;

$${}_0^A D_x^\beta\big(f(x)\big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon\left(\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer yukarıdaki limit varsa, f fonksiyonu $\beta -$ türevlenebilirdir denir. $\beta -$ türev ile adi türev arasındaki ilişki şu şekildedir;

$${}_0^A D_t^\beta\big(f(t)\big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon\left(\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t)}{\varepsilon}$$

Burada,

$$\varepsilon.(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta} = h\,, \qquad\qquad \varepsilon = h.(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}$$

olarak alınırsa,

$${}_0^A D_t^\beta\big(f(t)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h.(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}}$$

$${}_0^A D_t^\beta\big(f(t)\big) = (t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta} \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$${}_0^A D_t^\beta\big(f(t)\big) = (t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta} f'(t)$$

elde edilir.

Tanım 2.11 ($\boldsymbol{\beta}$ − İntegrali): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli olsun. O halde f fonksiyonunun β −integrali

$$ {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\big(f(t)\big)=\int_{0}^{t}(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}f(\tau)d\tau $$

olarak tanımlanır. Bu integral aynı zamanda Atangana Beta İntegrali olarak da bilinir.

Bu integral kolaylık olması açısından

$$ {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\big(f(t)\big)=\int_{0}^{t}(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}f(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}f(\tau)d_{\beta}\tau $$

$$ \int_{0}^{t}f(\tau)d_{\beta}\tau\coloneqq\int_{0}^{t}(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}f(\tau)d\tau $$

şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 2.12 (Gamma Fonksiyonu): Gamma fonksiyonu $n>0$ için,

$$ \Gamma(n)=\int_{0}^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx $$

ile tanımlanır. Bu integral $n>0$ için yakınsaktır. Bazı önemli özellikleri şu şekildedir;

i. $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Tanım 2.13 (Beta Fonksiyonu): Beta fonksiyonu $m,n>0$ için,

$$ \beta(m,n)\ =\int_{0}^{1}x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx $$

ile tanımlıdır. Beta fonksiyonu ve gama fonksiyonu arasında şöyle bir ilişki vardır;

$$ \beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} $$

Tanım 2.14 (Senkronize Fonksiyonlar): $\forall x, y \geq 0$ için f ve g fonksiyonları $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ şeklinde ise f ve g fonksiyonları senkronize fonksiyonlardır denir.

Tanım 2.15 (Taylor Formülü): Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ civarındaki Taylor seri açılımı,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.16 (Riemann İntegrali):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.17 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$, $q > 1$ sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlasın. f ve $g, [a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p, |g|^q, [a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 2.18 (Montgomery Özdeşliği): Montgomery özdeşliği $x \in [a, b]$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlıdır;

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt + \frac{1}{b-a} \int_a^b \rho(x,t) f'(t)dt$$

burada

$$\rho(x,t) := \begin{cases} t-a, a \leq t \leq x \\ t-b, x \leq t \leq b \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 2.19 (Power-Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|, |g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.20 (Rolle Teoremi): $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevli ve $f(a) = f(b)$ ise $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ vardır.

Teorem 2.21 (Ortalama Değer Teoremi): $y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ise

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

eşitliğini sağlayan en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

3. UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN YENİ HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde uyumlu kesirli integral ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve Hermite-Hadamard gibi bazı önemli eşitsizlikler yeni kesirli integral tanımı yardımıyla araştırılmıştır [11].

Teorem 3.1: [6] $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\forall t > a$ için,

$$I_\alpha^a D_\alpha^a(f)(t) = f(t) - f(a) \tag{3.1}$$

yazılabilir.

Teorem 3.2: [6] $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, fg diferensiyellenebilir olmak üzere iki fonksiyon olsun. Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\int_a^b f(x) D_\alpha^a(g)(x) d_\alpha x = fg|_a^b - \int_a^b g(x) D_\alpha^a(f)(x) d_\alpha x \tag{3.2}$$

İspat:

$$I_\alpha^a D_\alpha^a(f)(t) = f(t) - f(a)$$

$$D_\alpha(fg) = f D_\alpha(g) + g D_\alpha(f)$$

Her iki taraf a dan b ye integrallenirse,

$$\int_a^b D_\alpha(fg) = \int_a^b f D_\alpha(g) + g D_\alpha(f)$$

$$\int_a^b D_\alpha(fg)(t) d_\alpha t = \int_a^b f(t) D_\alpha(g(t)) d_\alpha t + \int_a^b g(t) D_\alpha(f(t)) d_\alpha t$$

$$fg(b) - fg(a) = \int_a^b f(t) D_\alpha(g(t)) d_\alpha t = fg|_a^b - \int_a^b g(t) D_\alpha(f(t)) d_\alpha t$$

elde edilir.

Teorem 3.3: [6] $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f^{(n)}(t)$ sürekli fonksiyon olmak üzere $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \geq a$ için,

$$D_\alpha^a I_\alpha^a(f)(t) = f(t) \tag{3.3}$$

fonksiyonu kabul edilir.

Anderson [5] nolu çalışmasında, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin aşağıdaki uyumlu integral versiyonunu bulmuştur.

Teorem 3.4: [5] $\alpha \in (0,1]$ olsun. $D_\alpha f$ artan olmak üzere $0 < a < b$ için $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha -$diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha} \int_a^b f(t) d_\alpha t \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{3.4}$$

$f, [a, b]$ üzerinde azalan bir fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha} \int_a^b f(t) d_\alpha t \tag{3.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.5: Yukarıda $\alpha = 1$ seçilirse (3.4) ve (3.5) eşitsizlikleri (2.3) eşitsizliğine dönüşür. Bu bölümde, konveks fonksiyon, $s -$konveks ve koordinat konveks fonksiyonlar kullanılarak uyumlu kesirli integraller için yeni Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ispatlanmıştır. Uyumlu kesirli integral için yeni Montgomery özdeşliği ispatlanmıştır. Bu özdeşlik kullanılarak Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler elde edilir. Burdaki sonuçlar önceki sonuçların bir genelleştirmesidir.

3.1. Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Teorem 3.6: $\alpha \in (0,1]$, $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu $0 < a < b$ iken $[a, b]$ üzerinde tanımlı konveks fonksiyon olsun. Aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\alpha(a+b)^{\alpha-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\alpha}{b-a}\int_a^b f(t)d_\alpha t$$

$$\leq\min\left\{a^{\alpha-1}\left(\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}\right),b^{\alpha-1}\left(\frac{f(a)+\alpha f(b)}{\alpha+1}\right)\right\} \quad (3.6)$$

İspat: $[a,b]$ üzerinde bir g fonksiyonu tanımlayalım.

$$g(t)=(\frac{t}{t-a})^{\alpha-1} \quad (3.7)$$

Açıkça g fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde artan ve sürekli fonksiyondur.

$$g'(t)=(\alpha-1)\left(\frac{t}{t-a}\right)^{\alpha-2}\left(\frac{t-a-t}{(t-a)^2}\right)=(1-\alpha)\left(\frac{a}{(t-a)^2}\right)\left(\frac{t}{t-a}\right)^{\alpha-2}$$

olduğu için $g'(t)>0$ artandır. Bu nedenle,

$$k_1 := max_{t\in[a,b]}g(t)=\left(\frac{b}{b-a}\right)^{\alpha-1} \quad (3.8)$$

tanımlanırsa buradan

$$t^{\alpha-1}\leq k_1(t-a)^{\alpha-1}, \qquad \forall t\in[a,b], \qquad \alpha\in(0,1] \quad (3.9)$$

yazılabilir.

$$t^{\alpha-1}\leq k_1 t^{\alpha-1}$$

$$t>\ t-a\ \Rightarrow\ t^{\alpha-1}\leq(t-a)^{\alpha-1}$$

$$t^{\alpha-1}\leq k_1(t-a)^{\alpha-1}$$

Şimdi, (3.9) kullanılarak,

$$\int_a^b f(t)d_\alpha t=\int_a^b f(t)t^{\alpha-1}dt\leq k_1\int_a^b f(t)(t-a)^{\alpha-1}dt \quad (3.10)$$

yazılır.

f fonksiyonunun konveksliğinden ve değişken değiştirmeden,

$$\int_a^b f(t)d_\alpha t \leq k_1(b-a)^\alpha \int_0^1 f(tb+(1-t)a)t^{\alpha-1}dt$$

$$\leq k_1(b-a)^\alpha \int_0^1 (tf(b)+(1-t)f(a))t^{\alpha-1}dt$$

$$= b^{\alpha-1}(b-a)\left[\frac{f(a)}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{f(b)}{\alpha+1}\right]$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{\alpha}{b-a}\int_a^b f(t)d_\alpha t \leq b^{\alpha-1}\left(\frac{f(a)+\alpha f(b)}{(\alpha+1)}\right) \tag{3.11}$$

yazılabilir.

$t \ = \ tb+(1-t)a$ dönüşümü yapılırsa,

$dt \ = \ (b-a)dt$

$a = \ tb+a-at, \qquad t=0$

$b = \ tb+a-at, \qquad t=1$

$$f(tb+(1-t)a) \leq tf(b)+(1-t)f(a)$$

$$\leq k_1 \int_0^1 f(tb+(1-t)a)\,(tb+a-at-a)^{\alpha-1}(b-a)dt$$

$$\leq k_1 \int_0^1 f(tb+(1-t)a)\,t^{\alpha-1}(b-a)^{\alpha-1}(b-a)dt$$

$$\leq k_1(b-a)^\alpha \int_0^1 f(tb+(1-t)a)\,t^{\alpha-1}d$$

$$\leq k_1(b-a)^{\alpha}\int_0^1 t\,f(b)+(1-t)f(a)t^{\alpha-1}dt$$

$$\leq k_1(b-a)^{\alpha}\left[f(b)\int_0^1 t^{\alpha}dt+f(a)\int_0^1(1-t)t^{\alpha-1}dt\right]$$

$$\leq k_1(b-a)^{\alpha}\left[f(b)\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+f(a)(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}-\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1})|_0^1\right]$$

$$\leq k_1(b-a)^{\alpha}\left[\frac{f(b)}{\alpha+1}+f(a)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}\right)\right]$$

$$k_1=\frac{b^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha}}\leq b^{\alpha-1}\left(\frac{f(a)+\alpha f(b)}{\alpha+1}\right)$$

Şimdi de $[a,b]$ kapalı aralığında h fonksiyonunu tanımlansın.

$$h(t)=(\frac{t}{b-t})^{\alpha-1} \tag{3.12}$$

Açıkça h, $[a,b]$ aralığında azalan ve sürekli fonksiyondur. Bu nedenle,

$$k_2:=max_{t\in[a,b]}h(t)=\left(\frac{a}{b-a}\right)^{\alpha-1} \tag{3.13}$$

ve buradan

$$t^{\alpha-1}\leq k_2(b-t)^{\alpha-1},\qquad \forall t\in[a,b],\alpha\in(0,1] \tag{3.14}$$

yazılır.

$$\int_a^b f(t)d_{\alpha}t=\int_a^b f(t)t^{\alpha-1}dt\leq k_2\int_a^b f(t)(b-t)^{\alpha-1}dt$$

$$=k_2(b-a)^{\alpha}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,t^{\alpha-1}dt$$

$$\leq k_2(b-a)^{\alpha}\int_0^1 t\,f(a)+(1-t)f(b)t^{\alpha-1}dt$$

$$= a^{\alpha-1}(b-a)\left[\frac{f(a)}{\alpha+1}+\frac{f(b)}{\alpha(\alpha+1)}\right] \tag{3.15}$$

Bundan dolayı

$$\frac{\alpha}{b-a}\int_a^b f(t)d_\alpha t \leq a^{\alpha-1}\left(\frac{\alpha f(a)+f(b)}{(\alpha+1)}\right) \tag{3.16}$$

yazılır. (3.11) ve (3.16) dan (3.6) nın sağ tarafı elde edilir. Şimdi (3.6) eşitsizliğinin sol tarafı ispat edilsin. İyi biliniyor ki,

$$\int_a^b f(t)d_\alpha t = \int_a^{(a+b)/2} f(t)d_\alpha t + \int_{(a+b)/2}^b f(t)d_\alpha t \tag{3.17}$$

Ayrıca, g ve h fonksiyonlarının (3.7) ve (3.12) deki tanımlarından,

$$k = min_{t\in[(a+b)/2,b]}g(t) = min_{t\in[a,(a+b)/2]}h(t) = (\frac{a+b}{b-a})^{\alpha-1} \tag{3.18}$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$\int_a^{(a+b)/2} f(t)d_\alpha t = \int_a^{(a+b)/2} f(t)t^{\alpha-1}\,dt \geq k\int_a^{(a+b)/2} f(t)(b-t)^{\alpha-1}\,dt$$

$$\int_{(a+b)/2}^b f(t)d_\alpha t = \int_{(a+b)/2}^b f(t)t^{\alpha-1}\,dt \geq k\int_{(a+b)/2}^b f(t)(t-a)^{\alpha-1}\,dt \tag{3.19}$$

yazılır. (3.17) de (3.19) kullanılırsa,

$$\int_a^b f(t)d_\alpha t \geq k[\int_a^{(a+b)/2} f(t)(b-t)^{\alpha-1}\,dt + \int_{(a+b)/2}^b f(t)(t-a)^{\alpha-1}\,dt] \tag{3.20}$$

elde edilir. Şimdi, değişken değiştirerek ve $x \in [0,1]$ için $(2-x)^{\alpha-1} \geq 2^{\alpha-1}$ kullanarak,

$$t = a + \frac{x(b-a)}{2}$$

$$dt = \frac{b-a}{2} dx$$

$$\int_a^{(a+b)/_2} f(t)(b-t)^{\alpha-1} \, dt = \int_0^1 f(a + \frac{x(b-a)}{2})(b - a - \frac{x(b-a)}{2})^{\alpha-1}(\frac{b-a}{2})dx$$

$$= \int_0^1 f(a + \frac{x(b-a)}{2})(\frac{2(b-a) - x(b-a)}{2})^{\alpha-1}(\frac{b-a}{2})dx$$

$$= \int_0^1 f(a + \frac{x(b-a)}{2})(\frac{(2-x)(b-a)}{2})^{\alpha-1}(\frac{b-a}{2})dx$$

$$\geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha} 2^{\alpha-1} \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{(b-a)^{\alpha}}{2} \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \tag{3.21}$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$t = b - \frac{x(b-a)}{2}$$

$$dt = -\frac{(b-a)}{2} dx$$

$$\int_{(a+b)/_2}^{b} f(t)(t-a)^{\alpha-1} \, dt = \int_1^0 f(b - \frac{x(b-a)}{2})(b - \frac{x(b-a)}{2} - a)^{\alpha-1}(-\frac{b-a}{2})dx$$

$$= \int_1^0 f(b - \frac{x(b-a)}{2})(\frac{2(b-a) - x(b-a)}{2})^{\alpha-1}(-\frac{b-a}{2})dx$$

$$= \int_1^0 f(b - \frac{x(b-a)}{2})(\frac{(b-a)(2-x)}{2})^{\alpha-1}(-\frac{b-a}{2})dx$$

$$\geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha} 2^{\alpha-1} \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{(b-a)^{\alpha}}{2} \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \tag{3.22}$$

elde edilir.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_0^1 f(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)\right] dt. \tag{3.23}$$

Burada (3.19), (3.21), (3.22) ve (3.23) birleştirilirse,

$$\int_a^b f(t) d_\alpha t \geq k(b-a)^{\alpha} [\frac{1}{2} \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f(b - \frac{t(b-a)}{2})) dt]$$

$$\geq (a+b)^{\alpha-1} (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.24}$$

(3.6) daki sol eşitsizliğe eşittir.

Sonuç 3.7: Teorem 3.6 nın varsayımları altında, eğer $\alpha = 1$ alınırsa konveks fonksiyonları için aşağıdaki iyi bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \ \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{3.25}$$

Şimdi, s −konveks fonksiyonunu kullanarak uyumlu kesirli integral için Hermite-Hadamard eşitsizliği ispatlanacaktır.

Teorem 3.8: $s, \alpha \in (0,1]$ ve $f: [a,b] \to [0, +\infty)$ olsun. $0 < a < b$ için $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı s −konveks fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlikler yazılır:

$$(a+b)^{\alpha-1} 2^{s-1} f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_\alpha t$$

$$\leq \min \left\{ a^{\alpha-1} \left(\frac{f(a)}{s+\alpha} + f(b)\beta(\alpha, s+1) \right), b^{\alpha-1} \left(f(a)\beta(\alpha, s+1) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{f(b)}{s+\alpha} \right) \right\} \tag{3.26}$$

Burada $\beta(x,y),\ x,y > 0$ için tanımlı Euler Beta fonksiyonudur.

İspat: s −konveks fonksiyon tanımından,

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b)$$

$$f(tb+(1-t)a) \leq t^s f(b) + (1-t)^s f(a), \forall t \in (0,1) \tag{3.27}$$

yazılır.

g fonksiyonu (3.7) deki gibi tanımlanırsa, Teorem 3.6 nın ispatına benzer şekilde,

$$k_1 := max_{t\in[a,b]} g(t) = \left(\frac{b}{b-a}\right)^{\alpha-1} \tag{3.28}$$

$$t^{\alpha-1} \leq k_1(t-a)^{\alpha-1}, \forall t \in [a,b], \alpha \in (0,1] \tag{3.29}$$

elde edilir. Burada (3.29) kullanılarak,

$$\int_a^b f(t) d_\alpha t = \int_a^b f(t) t^{\alpha-1} dt \leq k_1 \int_a^b f(t)(t-a)^{\alpha-1} dt \tag{3.30}$$

bulunur. f fonksiyonu s −konveks olduğundan ve değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) d_\alpha t &\leq k_1(b-a)^\alpha \int_0^1 f(tb+(1-t)a) t^{\alpha-1} dt \\
&\leq k_1(b-a)^\alpha \int_0^1 \big(t^s f(b) + (1-t)^s f(a)\big) t^{\alpha-1} dt \\
&\leq k_1(b-a)^\alpha [\int_0^1 t^s f(b) t^{\alpha-1} dt + \int_0^1 (1-t)^s f(a) t^{\alpha-1} dt \\
&\leq k_1(b-a)^\alpha [\int_0^1 t^{s+\alpha-1} f(b) dt + \int_0^1 (1-t)^s f(a) t^{\alpha-1} dt \\
&= k_1(b-a)^\alpha \frac{t^{\alpha+s}}{\alpha+s} f(b)|_0^1 + \int_0^1 (1-t)^s t^{\alpha-1} f(a) dt
\end{aligned}$$

$$= k_1(b-a)^\alpha \frac{1}{\alpha+s} f(b) + \beta(\alpha, s+1) f(a)$$

$$= b^{\alpha-1}(b-a)\left(f(a)\beta(\alpha, s+1) + \frac{f(b)}{\alpha+s}\right) \tag{3.31}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t) d_\alpha t \leq b^{\alpha-1}\left(f(a)\beta(\alpha, s+1) + \frac{f(b)}{s+\alpha}\right) \tag{3.32}$$

bulunur.

h, (3.12) deki gibi tanımlansın. Benzer ispat kullanılarak,

$$k_2 \coloneqq max_{t\in[a,b]} h(t) = (\frac{a}{b-a})^{\alpha-1}$$

$$t^{\alpha-1} \leq k_2(b-t)^{\alpha-1}, \forall t \in [a,b], \alpha \in (0,1] \tag{3.33}$$

elde edilir.

$$\int_a^b f(t) d_\alpha t = \int_a^b f(t) t^{\alpha-1} dt \leq k_2 \int_a^b f(t)(b-t)^{\alpha-1} dt$$

$$= k_2(b-a)^\alpha \int_0^1 f(ta + (1-t)b) t^{\alpha-1} dt$$

$$\leq k_2(b-a)^\alpha \int_0^1 \left(t^s f(a) + (1-t)^s f(b)\right) t^{\alpha-1} dt$$

$$= a^{\alpha-1}(b-a)\left(\frac{f(a)}{s+\alpha} + f(b)\beta(\alpha, s+1)\right) \tag{3.34}$$

Bundan dolayı,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t) d_\alpha t \leq a^{\alpha-1}\left(\frac{f(a)}{s+\alpha} + f(b)\beta(\alpha, s+1)\right) \tag{3.35}$$

(3.32) ve (3.35) den (3.26) nın sağ tarafı elde edilir.

(3.26) eşitsizliğinin sol tarafının ispatı için

$$\int_a^b f(t)d_\alpha t = \int_a^{(a+b)/2} f(t)d_\alpha t + \int_{(a+b)/2}^b f(t)d_\alpha t \tag{3.36}$$

yazılabilir. Ayrıca f ve g fonksiyonlarının (3.7) ve (3.12) deki tanımlarından,

$$k \coloneqq min_{t\in[(a+b)/2,b]} g(t) = min_{t\in[a,(a+b)/2]} h(t) = \left(\frac{a+b}{b-a}\right)^{\alpha-1} \tag{3.37}$$

yazılır.Bu nedenle,

$$\int_a^{(a+b)/2} f(t)d_\alpha t = \int_a^{(a+b)/2} f(t)\, t^{\alpha-1}dt \geq k \int_a^{(a+b)/2} f(t)\,(b-t)^{\alpha-1}dt$$

$$\int_{(a+b)/2}^b f(t)d_\alpha t = \int_{(a+b)/2}^b f(t)\, t^{\alpha-1}dt \geq k \int_{(a+b)/2}^b f(t)\,(t-a)^{\alpha-1}dt \tag{3.38}$$

(3.36) da (3.38) kullanılarak,

$$\int_a^b f(t)d_\alpha t \geq k\left[\int_a^{(a+b)/2} f(t)\,(b-t)^{\alpha-1}dt + \int_{(a+b)/2}^b f(t)\,(t-a)^{\alpha-1}dt\right] \tag{3.39}$$

elde edilir. (3.21) e benzer olarak

$$\int_a^{(a+b)/2} f(t)\,(b-t)^{\alpha-1}dt \geq \frac{(b-a)^\alpha}{2}\int_0^1 f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)dt \tag{3.40}$$

$$\int_{(a+b)/2}^b f(t)\,(t-a)^{\alpha-1}dt \geq \frac{(b-a)^\alpha}{2}\int_0^1 f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt \tag{3.41}$$

yazılır.

Şimdi, f fonksiyonunun s −konveksliği kullanılarak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_0^1 f(\frac{a}{2}+\frac{b}{2})\,dt$$

$$\leq \frac{1}{2^s}\int_0^1 \left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt \qquad (3.42)$$

yazılır. (3.39), (3.40), (3.41) ve (3.42) birleştirilerek,

$$\int_a^b f(t)d_\alpha t \geq k(b-a)^\alpha\left[\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right)dt\right]$$

$$\geq (a+b)^{\alpha-1}(b-a)2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (3.43)$$

elde edilir. Bu ifade (3.26) daki eşitsizliğin sol kısmına eşittir.

Sonuç 3.9: Teorem 3.8 in varsayımları altında, $\alpha = 1$ seçilirse $s-$konveks fonksiyonu için aşağıdaki iyi bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir. [7]

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \qquad (3.44)$$

Aşağıdaki teoremde, koordinat konveks fonksiyon kullanılarak uyumlu kesirli integral için Hermite-Hadamard eşitsizliği ispatlanmıştır.

Teorem 3.10: $\alpha \in (0,1]$ olsun. $0< a< b$ ve $0< c< d$ olmak üzere $f{:}\,\Delta=[a,b]\times[c,d]\rightarrow[0,+\infty)$ konveks fonksiyonu Δ koordinatlarda tanımlansın. Aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(c+d)^{\alpha-1}}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)d_\alpha x+\frac{(a+b)^{\alpha-1}}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)d_\alpha y\right]$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\iint_{ac}^{bd} f(x,y)d_\alpha x d_\alpha y$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}\left[\frac{d^{\alpha-1}}{b-a}\int_a^b\big(f(x,c)+\alpha f(x,d)\big)d_\alpha x+\frac{b^{\alpha-1}}{d-c}\int_c^d\big(f(a,y)+\alpha f(b,y)\big)d_\alpha y\right] \qquad (3.45)$$

İspat: $f\colon \Delta \to [0,+\infty)$ koordinatlar üzerinde konveks olduğu için, bu $f_x\colon [c,d] \to [0,+\infty)$ $f_x(y) = f(x,y)$ dönüşümü her $x \in [a,b]$ için $[c,d]$ üzerinde konveks olduğu görülür. Sonra, Teorem 3.6'dan

$$(c+d)^{\alpha-1} f_x\left(\frac{c+d}{2}\right) \le \frac{1}{d-c}\int_c^d f_x(y)\,d_\alpha y \qquad ,x \in [a,b] \tag{3.46}$$

$$(c+d)^{\alpha-1} f\left(x,\frac{c+d}{2}\right) \le \frac{1}{d-c}\int_c^d f(x,y)\,d_\alpha y \qquad ,x \in [a,b] \tag{3.47}$$

yazılır. $[a,b]$ kapalı aralığında (3.47) eşitsizliği integrallenirse,

$$\int_a^b (c+d)^{\alpha-1} f\left(x,\frac{c+d}{2}\right) d_\alpha x \le \int_a^b \left(\frac{1}{d-c}\int_c^d f(x,y)\,d_\alpha y\right) d_\alpha x$$

$$(c+d)^{\alpha-1}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right) d_\alpha x \le \frac{1}{d-c}\iint_{ac}^{bd} f(x,y)\,d_\alpha x\, d_\alpha y$$

$$\frac{(c+d)^{\alpha-1}}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right) d_\alpha x \le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\iint_{ac}^{bd} f(x,y)\,d_\alpha x\, d_\alpha y \tag{3.48}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $f_y\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ $f_y(x) = f(x,y)$ dönüşümü için,

$$\frac{(a+b)^{\alpha-1}}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right) d_\alpha y \le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\iint_{ac}^{bd} f(x,y)\,d_\alpha x\, d_\alpha y \tag{3.49}$$

yazılır.

(3.48) ve (3.49) eşitsizlikleri birleştirilerek, (3.45) ün sol tarafı elde edilir. (3.45) eşitsizliğinin sağ tarafının ispatı için Teorem 3.6' dan, (3.11) eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)}\iint_{ac}^{bd} f(x,y)\,d_\alpha x\, d_\alpha y = \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_c^d \left[\int_a^b f_y(x)\,d_\alpha x\right] d_\alpha y$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_c^d \left[\frac{b^{\alpha-1}(b-a)}{\alpha}.\frac{f_y(a)+\alpha f_y(b)}{\alpha+1}\right] d_\alpha y$$

$$= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_c^d \left[\frac{b^{\alpha-1}(b-a)}{\alpha(\alpha+1)}(f(a,y)+\alpha f(b,y))\right] d_\alpha y$$

$$= \frac{b^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha+1)(d-c)}\int_c^d (f(a,y)+\alpha f(b,y)) d_\alpha y \qquad (3.50)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.16) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)}\iint_{ac}^{bd} f(x,y) d_\alpha x d_\alpha y = \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b [\int_c^d f_x(y) d_\alpha y]\, d_\alpha x$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b \left[d^{\alpha-1}(d-c)(\frac{f(x,c)}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{f(x,d)}{\alpha+1}\right] d_\alpha x$$

$$= \frac{d^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha+1)(b-a)}\int_a^b (f(x,c)+\alpha f(x,d)) d_\alpha x \qquad (3.51)$$

yazılır. (3.50) ve (3.51) eşitsizlikleri birleştirilerek (3.45) in sağ tarafı elde edilmiş olur.

Uyarı 3.11: Teorem 3.10'un varsayımları altında, $\alpha = 1$ seçilirse, [2] de Dragomir tarafından elde edilen koordinat konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.12: Teorem 3.10'un varsayımları altında (3.48), (3.49), (3.50) ve (3.51) eşitsizlikleri kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\max\{\frac{(c+d)^{\alpha-1}}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right) d_\alpha x, \frac{(a+b)^{\alpha-1}}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right) d_\alpha y\}$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\iint_{ac}^{bd} f(x,y) d_\alpha x d_\alpha y$$

$$\leq \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \min\{\frac{d^{\alpha-1}}{b-a} \int_{a}^{b} \big(f(x,c) + \alpha f(x,d)\big) d_\alpha x\,, \frac{b^{\alpha-1}}{d-c} \int_{c}^{d} \big(f(a,y)$$
$$+ \alpha f(b,y)\big) d_\alpha y\} \tag{3.52}$$

3.2. Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Bu bölümde, yeni bir Montgomery özdeşliği kullanarak Teorem 3.6'da verilen uyumlu kesirli integral için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı için bazı yeni yaklaşımlar incelenecektir.

Lemma 3.13 (Montgomery Özdeşliği): $a, b \in \mathbb{R}$ ile $0 \leq a < b$ olsun. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ α −kesirli diferensiyellenebilir fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$ olsun.

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(s)\, d_\alpha s + \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} \rho\,(t,s) D_\alpha f(s) d_\alpha s + \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
$$+ \frac{a^\alpha f(a) - b^\alpha f(b)}{\alpha(b-a)} \tag{3.53}$$

Burada,

$$\rho(t,s) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{s^\alpha}{\alpha} + \dfrac{b-a}{2}: \ a \leq s < t, \\ \dfrac{s^\alpha}{\alpha} - \dfrac{b-a}{2}: \ t \leq s \leq b. \end{cases} \tag{3.54}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İspat: Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\int_{a}^{t} \left(\frac{s^\alpha}{\alpha} + \frac{b-a}{2}\right) D_\alpha f(s) d_\alpha s = \left(\frac{s^\alpha}{\alpha} + \frac{b-a}{2}\right) f(s)|_a^t - \int s^{\alpha-1} f(s) ds$$

$$\left(\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{b-a}{2}\right) f(t) - \left(\frac{a^\alpha}{\alpha} + \frac{b-a}{2}\right) f(a) - \int_{a}^{t} f(s)\, d_\alpha s$$

$u = \left(\frac{s^\alpha}{\alpha} + \frac{b-a}{2}\right)$ dönüşümü uygulanırsa,

$du = s^{\alpha-1}ds$

$D_\alpha f(s) d_\alpha s = dv \qquad\qquad f(s) = v$

elde edilir. Böylece,

$$\int_t^b \left(\frac{s^\alpha}{\alpha} - \frac{b-a}{2}\right) D_\alpha f(s) d_\alpha s = \left(\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{b-a}{2}\right) f(b) - \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{b-a}{2}\right) f(t)$$

$$- \int_t^b f(s)\, d_\alpha s \tag{3.55}$$

f için çözülürse istenen sonuç elde edilir.

$$\int_a^b \rho\,(t,s) D_\alpha f(s) d_\alpha s = (b-a)f(t) - \left(\frac{a^\alpha}{\alpha} + \frac{b-a}{2}\right) f(a) + \left(\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{b-a}{2}\right) f(b) - \int_a^b f(s)\, d_\alpha s$$

$$= (b-a)f(t) - \left(\frac{a^\alpha}{\alpha} f(a) - \frac{b^\alpha}{\alpha} f(b)\right) - \left(\frac{b-a}{2}\right)\big(f(a) + f(b)\big) - \int_a^b f(s)\, d_\alpha s$$

Teorem 3.14: $f: [a,b] \to [0,+\infty)$ bir α −kesirli türevli olsun. $0 < a < b$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $|f|^q$ bir konveks fonksiyon olarak kabul edilsin. O halde, $q > 1$ için ve

$p^{-1} + q^{-1} = 1$ için,

$$\left|(a+b)^{\alpha-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, d_\alpha t\right|$$
$$\le C(f; a, b, p, q) + |K|$$
$$+ M\xi\big[2\alpha(b-a)t^\alpha + (a^\alpha + b^\alpha)\big(b^\alpha - a^\alpha - \alpha(b-a)\big)\big] \tag{3.56}$$

eşitsizliği yazılır. Burada,

$M \coloneqq sup_{t\in[a,b]} |D_\alpha f(t)|$,

$\xi \coloneqq \frac{(a+b)^{\alpha-1}}{2\alpha^2(b-a)}$,

$$K := \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{a^{\alpha}f(a) - b^{\alpha}f(b)}{\alpha(b-a)},$$

$$C(f;\alpha,a,b,p,q)$$

$$:= \frac{|(a+b)^{\alpha-1}-1|}{b-a}\left(\frac{b^{p(\alpha-1)+1} - a^{p(\alpha-1)+1}}{p(\alpha-1)+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[(b - a)\left(\frac{f^q(a)+f^q(b)}{2}\right)\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{3.57}$$

İspat: $\rho(t,s)$ (3.54) teki gibi tanımlanmak üzere, Lemma 3.13'ü kullanarak, f^q konveksliği, Hölder eşitsizliği ve mutlak değer özelliğinden,

$$\left|(a+b)^{\alpha-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, d_\alpha t\right|$$

$$= \left|(a+b)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s) d_\alpha s + \frac{1}{b-a}\int_a^b \rho\left(\frac{a+b}{2},s\right) D_\alpha f(s) d_\alpha s + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{a^{\alpha}f(a)-b^{\alpha}f(b)}{\alpha(b-a)}\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s) d_\alpha s\right|$$

$$= \left|(a+b)^{\alpha-1}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s) d_\alpha s + \frac{(a+b)^{\alpha-1}}{b-a}\int_a^b \rho\left(\frac{a+b}{2},s\right) D_\alpha f(s) d_\alpha s + (a+b)^{\alpha-1}\frac{f(a)+f(b)}{2} + (a+b)^{\alpha-1}\frac{a^{\alpha}f(a)-b^{\alpha}f(b)}{\alpha(b-a)}] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s) d_\alpha s\right|$$

$$\leq \left|\frac{(a+b)^{\alpha-1}-1}{b-a}\int_a^b f(s) d_\alpha s + \frac{(a+b)^{\alpha-1}}{b-a}\int_a^b \rho\left(\frac{a+b}{2},s\right) D_\alpha f(s) d_\alpha s\right| + \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{a^{\alpha}f(a)-b^{\alpha}f(b)}{\alpha(b-a)}\right|$$

$$\leq \frac{|(a+b)^{\alpha-1}-1|}{b-a}\int_a^b |f(s)| d_\alpha s + \frac{(a+b)^{\alpha-1}}{b-a}\int_a^b \left|\rho\left(\frac{a+b}{2},s\right)\right| |D_\alpha f(s)|\, d_\alpha s$$
$$+\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{a^\alpha f(a)-b^\alpha f(b)}{\alpha(b-a)}\right|$$

$$\leq \frac{|(a+b)^{\alpha-1}-1|}{b-a}\left(\int_a^b s^{p(\alpha-1)}ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b f^q(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} + |K|$$
$$+M\frac{(a+b)^{\alpha-1}}{(b-a)}[\int_a^t \left|\frac{s^\alpha}{\alpha}+\frac{b-a}{2}\right| d_\alpha s + \int_t^b \left|\frac{s^\alpha}{\alpha}-\frac{b-a}{2}\right| d_\alpha s$$

$$\leq \frac{|(a+b)^{\alpha-1}-1|}{b-a}\left(\int_a^b s^{p(\alpha-1)}ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 [tf^q(b)+(1-t)f^q(a)](b-a)dt\right)^{\frac{1}{q}} + |K|$$
$$+M\frac{(a+b)^{\alpha-1}}{(b-a)}[\int_a^t \left(\frac{s^\alpha}{\alpha}+\frac{b-a}{2}\right) d_\alpha s + \int_t^b \left(\frac{s^\alpha}{\alpha}-\frac{b-a}{2}\right) d_\alpha s$$

$$= C(f;\alpha,a,b,p,q) + |K|$$
$$+ M\xi\big[2\alpha(b-a)t^\alpha + (a^\alpha+b^\alpha)\big(b^\alpha-a^\alpha-\alpha(b-a)\big)\big] \tag{3.58}$$

elde edilir.

Teorem 3.15: $f:[a,b]\to[0,+\infty)$ α −kesirli türevlenebilir fonksiyon olsun. $0< a< b$ ve $\alpha\in (0,1]$ için f^q bir konveks fonksiyon olarak kabul edelim. $q\geq 1$ için,

$$\left|(a+b)^{\alpha-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, d_\alpha t\right|$$
$$\leq D(f;a,b,q)+|K|$$
$$+ M\xi\big[2\alpha(b-a)t^\alpha + (a^\alpha+b^\alpha)\big(b^\alpha-a^\alpha-\alpha(b-a)\big)\big] \tag{3.59}$$

yazılır. Burada,

$$D(f;a,b,q) := \frac{|(a+b)^{\alpha-1}-1|}{b-a}\left(\frac{b^\alpha-a^\alpha}{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{f^q(a)B_1(\alpha)+f^q(b)B_2(\alpha)}{b-a}\right]^{\frac{1}{q}},$$

$$B_1(\alpha) := \int_a^b t^{\alpha-1}(b-t)dt = \frac{b(b^\alpha-a^\alpha)}{\alpha}-\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$B_2(\alpha) := \int_a^b t^{\alpha-1}(t-a)dt = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a(b^\alpha - a^\alpha)}{\alpha}, \tag{3.60}$$

ve M, ξ, K Teorem 3.14'deki gibi tanımlıdır.

İspat: Lemma 3.13 kullanılarak**,** $\rho(t,s)$ (3.54) teki gibi tanımlanmak üzere, f^q konveksliği, iyi bilinen power mean eşitsizliği ve mutlak değer özelliği kullanılarak,

$$\left|(a+b)^{\alpha-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, d_\alpha t\right|$$

$$\leq \frac{|(a+b)^{\alpha-1}-1|}{b-a}\int_a^b |f(s)| d_\alpha s + \frac{(a+b)^{\alpha-1}}{b-a}\int_a^b \left|\rho\left(\frac{a+b}{2}, s\right)\right| |D_\alpha f(s)|\, d_\alpha s$$

$$+ \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{a^\alpha f(a) - b^\alpha f(b)}{\alpha(b-a)}\right|$$

$$\leq \frac{|(a+b)^{\alpha-1}-1|}{b-a}\left(\int_a^b s^{\alpha-1} ds\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b s^{\alpha-1} f^q(s) ds\right)^{\frac{1}{q}} + |K|$$

$$+ M\frac{(a+b)^{\alpha-1}}{(b-a)}\left[\int_a^t \left|\frac{s^\alpha}{\alpha} + \frac{b-a}{2}\right| d_\alpha s + \int_t^b \left|\frac{s^\alpha}{\alpha} - \frac{b-a}{2}\right| d_\alpha s\right]$$

$$\leq \frac{|(a+b)^{\alpha-1}-1|}{b-a}\left(\int_a^b s^{\alpha-1} ds\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (tb+(1-t)a)^{\alpha-1}[tf^q(b)+(1-t)f^q(a)](b\right.$$

$$\left.- a)dt\right)^{\frac{1}{q}} + |K| + M\frac{(a+b)^{\alpha-1}}{(b-a)}\left[\int_a^t \left(\frac{s^\alpha}{\alpha} + \frac{b-a}{2}\right) d_\alpha s + \int_t^b \left(\frac{s^\alpha}{\alpha} - \frac{b-a}{2}\right) d_\alpha s\right]$$

$$= D(f;\alpha,a,b,q) + |K|$$

$$+ M\xi\big[2\alpha(b-a)t^\alpha + (a^\alpha + b^\alpha)\big(b^\alpha - a^\alpha - \alpha(b-a)\big)\big] \tag{3.61}$$

elde edilir.

4. UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde [8] numaralı makale ayrıntılı bir şekilde incelenmiş uyumlu kesirli analiz yardımıyla ortalama değer teoremi ve yeni türden bazı integral eşitsizlikleri elde edilmiştir [12].

Lemma 4.1: [8] $f\colon I^n \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)b)dt \qquad (4.1)$$

İspat: Kısmi integrasyon yardımıyla eşitliğin sağ tarafının sol tarafına eşitliği gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= \frac{b-a}{2}\left[\frac{(1-2t)f(ta+(1-t)b)}{a-b}\bigg|_0^1 + \frac{2}{a-b}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt\right] \\
&= \frac{b-a}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{b-a} + \frac{2}{a-b}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt\right] \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

elde edilir böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2: [8] $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right) \tag{4.2}$$

İspat: Lemma 4.1 ve $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|[t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|]dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 t|1-2t|\,|f'(a)|dt + \int_0^1 (1-t)|1-2t||f'(b)|\,dt\right] \tag{4.3}$$

yazılabilir.

$$I_1 = \int_0^1 t|1-2t|\,|f'(a)|dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t(1-2t)\,|f'(a)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t(-1+2t)\,|f'(a)|dt$$

$$= \frac{1}{4}|f'(a)|$$

$$I_2 = \int_0^1 (1-t)|1-2t|\,|f'(b)|dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)(1-2t)\,|f'(b)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)(-1+2t)\,|f'(b)|dt$$

$$= \frac{1}{4}|f'(b)|$$

Elde edilen I_1 ve I_2 eşitlikleri (4.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{4}|f'(a)|+\frac{1}{4}|f'(b)|\right)$$
$$=\frac{b-a}{8}(|f'(a)|+|f'(b)|)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

[9] numaralı makalede U. S. Kirmaci aşağıdaki sonuçları vermiştir.

Lemma 4.3: [9] $f: I^n \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$= (b-a)\left[\int_0^{1/2} tf'(ta+(1-t)b)dt\right.$$
$$\left.+\int_{1/2}^{1}(t-1)f'(ta+(1-t)b)dt\right] \qquad (4.4)$$

İspat: Kısmi integrasyon yardımıyla eşitliğin sağ tarafının sol tarafına eşitliği gösterilecektir.

$$(b-a)\left[\int_0^{1/2} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{1/2}^{1}(t-1)f'(ta+(1-t)b)dt\right]$$

$$I_1 = \int_0^{1/2} tf'(ta+(1-t)b)dt = t.\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$
$$= \frac{1}{2(a-b)}f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) - \int_0^{1/2}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

$$I_2 = \int_{1/2}^{1} (t-1) f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= (t-1).\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\bigg|_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} d$$

$$= \frac{1}{2(a-b)} f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) - \int_{1/2}^{1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} dt$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{a-b} f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) - \int_{0}^{1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} dt$$

$$= \frac{1}{a-b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{a-b}\int_{b}^{a} f(x)\frac{dx}{a-b}$$

$$= \frac{1}{(a-b)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)^2}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$(b-a)\left[\int_{0}^{1/2} t f'(ta+(1-t)b)dt + \int_{1/2}^{1} (t-1) f'(ta+(1-t)b)dt\right]$$

$$= (b-a)\left[\frac{1}{(a-b)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)^2}\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Teorem 4.4: [9] $f: I^n \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|, [a,b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|)}{8} \qquad (4.5)$$

İspat: Lemma 4.3 ve $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$= \left|(b-a)\left[\int_0^{1/2} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{1/2}^{1}(t-1)f'(ta+(1-t)b)dt\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} |t|[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt\right.$$

$$\left. + \int_{1/2}^{1}|t-1|[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t|t||f'(a)|dt + \int_0^{1/2} (1-t)|t||f'(b)|dt + \int_{1/2}^{1} t|t-1||f'(a)|dt\right.$$

$$\left. + \int_{1/2}^{1}(1-t)|t-1||f'(b)|dt\right]$$

$$I_1 = \int_0^{1/2} t|t||f'(a)|dt = \int_0^{1/2} t^2\,|f'(a)|dt = \frac{1}{24}|f'(a)|$$

$$I_2 = \int_0^{1/2} (1-t)\,|t||f'(b)|dt = \int_0^{1/2} (t-t^2)\,|f'(b)|dt = \frac{1}{12}|f'(b)|$$

$$I_3 = \int_{1/2}^{1} t|t-1||f'(a)|dt = \int_{1/2}^{1}(-t^2+t)|f'(a)|dt = \frac{1}{12}|f'(a)|$$

$$I_4 = \int_{1/2}^{1}(1-t)|t-1||f'(b)|dt = \int_{1/2}^{1}(t^2-2t+1)|f'(b)|dt = \frac{1}{24}|f'(b)|$$

$$I_1+I_2+I_3+I_4 = \frac{1}{24}|f'(a)| + \frac{1}{12}|f'(b)| + \frac{1}{12}|f'(a)| + \frac{1}{24}|f'(b)| = \frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{8}$$

Bulunan ifade eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|)}{8}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.5: (α −Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi) [4] $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $0 < a < b$ için (a, b) üzerinde α −diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu takdirde,

$$D_\alpha(f)(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}} \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.

İspat:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha\right)$$

fonksiyonu göz önüne alınır. g fonksiyonu Rolle teoreminin şartlarını sağlar.

O halde $g^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır. $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$ olduğu kullanılarak istenen elde edilir.

$$g^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}(x) - 0 - \left(\frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} . \frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)_\alpha + 0$$

$$= f^{(\alpha)}(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}} . \frac{\alpha}{\alpha} . 1\right) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}} = D_\alpha f(c)$$

Teorem 4.6: [10] $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $0 < a < b$ için $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|I_\alpha^a(f)(t)| \leq I_\alpha^a(|f|)(t) \tag{4.7}$$

İspat:

$$|I_\alpha^a(f)(t)| = \left|\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx\right| \leq \int_a^t \left|\frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}\right| dx = \int_a^t \frac{|f(x)|}{x^{1-\alpha}} dx = I_\alpha^a |f(t)|$$

Bu bölümde uyumlu kesirli integraller için bir özdeşlik ispatlanacaktır. Bu özdeşlik kullanılarak uyumlu kesirli integraller için yeni Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilecektir.

Lemma 4.7: $a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a < b$ olmak üzere $\alpha \in (0,1]$ için (a,b) üzerinde $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $D_\alpha(f) \in L_\alpha^1([a,b])$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &- \frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha} \int_a^b f(s) d_\alpha s \\
&= \frac{b-a}{b^\alpha - a^\alpha} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} (((1-t)a + tb)^{2\alpha-1} - a^\alpha ((1-t)a + tb)^{\alpha-1}) D_\alpha(f)((1-t)a \right. \\
&\quad + tb) t^{1-\alpha} d_\alpha t \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(((1-t)a + tb)^{2\alpha-1} - b^\alpha ((1-t)a + tb)^{\alpha-1} \right) D_\alpha(f)\big((1-t)a \\
&\quad \left. + tb\big) t^{1-\alpha} d_\alpha t \right]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

İspat: Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned}
I = &\int_0^{\frac{1}{2}} (((1-t)a + tb)^{2\alpha-1} - a^\alpha ((1-t)a + tb)^{\alpha-1}) D_\alpha(f)((1-t)a + tb) d_\alpha t \\
&+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(((1-t)a + tb)^{2\alpha-1} - b^\alpha ((1-t)a + tb)^{\alpha-1} \right) D_\alpha(f)\big((1-t)a + tb\big) d_\alpha t
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (((1-t)a+tb)^\alpha - a^\alpha) f'((1-t)a+tb)dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\left((1-t)a+tb\right)^\alpha - b^\alpha\right) f'\left((1-t)a+tb\right)dt$$

$$= \left(\left((1-t)a+tb\right)^\alpha - a^\alpha\right) \frac{f((1-t)a+tb)}{b-a}\Bigg|_0^{1/2}$$

$$- \int_0^{1/2} \alpha\left((1-t)a+tb\right)^{\alpha-1}(b-a)\frac{f\left((1-t)a+tb\right)}{b-a}dt$$

$$+ \left(\left((1-t)a+tb\right)^\alpha - b^\alpha\right) \frac{f((1-t)a+tb)}{b-a}\Bigg|_{1/2}^{1}$$

$$- \int_{1/2}^{1} \alpha\left((1-t)a+tb\right)^{\alpha-1}(b-a)\frac{f\left((1-t)a+tb\right)}{b-a}dt$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha - a^\alpha\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \alpha\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(s)d_\alpha s\right]$$

$$+ \frac{1}{b-a}\left[\left(b^\alpha - \left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \alpha\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(s)d_\alpha s\right]$$

$$= \frac{b^\alpha - a^\alpha}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\alpha}{b-a}\int_a^b f(s)d_\alpha s$$

bulunur. Burada, $s = (1-t)a+tb$ değişken değiştirmesi kullanıldı. Her iki taraf $\frac{b-a}{b^\alpha - a^\alpha}$ ile çarpılarak (4.8) deki istenen sonuç elde edilmiş olur.

Uyarı 4.8: $\alpha = 1$ alınırsa, (4.8) eşitliği (4.4) e indirgenir.

Teorem 4.9: $a, b \in \mathbb{R}, 0 \le a < b$ olmak üzere $\alpha \in (0,1]$ için (a,b) üzerinde $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $D_\alpha(f) \in L^1_\alpha([a,b])$ ve $|f'|$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki konveksliğinden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b f(s)d_\alpha s\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{b^\alpha-a^\alpha}[\frac{|f'(a)|}{192}[13b^\alpha+37a^\alpha]+\frac{|f'(b)|}{192}[19b^\alpha-5a^\alpha]$$

$$+(ab^{\alpha-1}+a^{\alpha-1}b)\left[\frac{11|f'(a)|+5|f'(b)|}{192}\right]-\frac{8a^{2\alpha-1}}{192}[7|f'(a)|$$

$$+2|f'(b)|]-\frac{8a^\alpha b^{\alpha-1}}{192}[2|f'(a)|+|f'(b)| \tag{4.9}$$

İspat: İlk olarak, Lemma 4.7 göz önüne alınır ve $\alpha\in(0,1]$ için $x^{\alpha-1}$ ve $-x^\alpha$ $(x>0)$ konveksliği kullanılır. Ayrıca, $|f'|$ fonksiyonunun konveksliğinden,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b f(s)d_\alpha s\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{b^\alpha-a^\alpha}\left[\int_0^{1/2}\left(\left((1-t)a+tb\right)^\alpha-a^\alpha\right)\left|f'\left((1-t)a+tb\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1\left(b^\alpha-\left((1-t)a+tb\right)^\alpha\right)\left|f'\left((1-t)a+tb\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{b^\alpha-a^\alpha}\left[\int_0^{1/2}\left(\left((1-t)a+tb\right)^{\alpha-1}\left((1-t)a+tb\right)-a^\alpha\right)\left|f'\left((1-t)a+tb\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1\left(b^\alpha-((1-t)a^\alpha+tb^\alpha)\right)\left|f'\left((1-t)a+tb\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{b^\alpha-a^\alpha}\left[\int_0^{1/2}((1-t)a^{\alpha-1}+tb^{\alpha-1})((1-t)a+tb)-a^\alpha)\left|f'\left((1-t)a+tb\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1\left(b^\alpha-((1-t)a^\alpha+tb^\alpha)\right)\left|f'\left((1-t)a+tb\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{b^\alpha - a^\alpha}\left[\int_0^{1/2} \left((1-t)a^{\alpha-1} + tb^{\alpha-1}\right)\left((1-t)a + tb\right) - a^\alpha)[(1-t)|f'(a)| \right.$$

$$+ t|f'(b)|]dt$$

$$\left. + \int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a^\alpha + tb^\alpha))\,[(1-t)|f'(a)| + t|f'(b)|]dt\right]$$

$$= \frac{b-a}{b^\alpha - a^\alpha}\left[\int_0^{1/2} [(1-t)^2 a^\alpha + t(1-t)a^{\alpha-1}b - (1-t)a^{2\alpha-1} + t(1-t)ab^{\alpha-1} + t^2 b^\alpha \right.$$

$$- ta^\alpha b^{\alpha-1}]\left((1-t)|f'(a)| + t|f'(b)|\right)dt$$

$$\left. + \int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a^\alpha + tb^\alpha))\,[(1-t)|f'(a)| + t|f'(b)|]dt\right]$$

$$= \frac{b-a}{b^\alpha - a^\alpha}\left[\int_0^{1/2} ((1-t)^3 a^\alpha |f'(a)| + t(1-t)^2 a^\alpha |f'(b)| + t(1-t)^2 a^{\alpha-1} b|f'(a)| \right.$$

$$+ t^2(1-t)a^{\alpha-1}b|f'(b)| - (1-t)^2 a^{2\alpha-1}|f'(a)| - t(1-t)a^{2\alpha-1}|f'(b)|$$

$$+ t(1-t)^2 ab^{\alpha-1}|f'(a)| + t^2(1-t)ab^{\alpha-1}|f'(b)| + t^2(1-t)b^\alpha|f'(a)|$$

$$+ t^3 b^\alpha |f'(b)| - t(1-t)a^\alpha b^{\alpha-1}|f'(a)| - t^2 a^\alpha b^{\alpha-1}|f'(b)|)\,d$$

$$+ \int_{1/2}^{1} \left((1-t)b^\alpha|f'(a)| + tb^\alpha|f'(b)| - (1-t)^2 a^\alpha |f'(a)|\right.$$

$$\left.\left. - t(1-t)a^\alpha|f'(b)| - t(1-t)b^\alpha|f'(a)| - t^2 b^\alpha |f'(b)|\right)dt\right]$$

$$I_1 = \int_0^{1/2} (1-t)^3 a^\alpha |f'(a)|dt = \frac{15}{64} a^\alpha |f'(a)|$$

$$I_2 = \int_0^{1/2} t(1-t)^2 a^\alpha |f'(b)|dt = \frac{11}{192} a^\alpha |f'(b)|$$

$$I_3 = \int_0^{1/2} t(1-t)^2 a^{\alpha-1} b|f'(a)|dt = \frac{11}{192} a^{\alpha-1} b|f'(a)|$$

$$I_4 = \int_0^{1/2} t^2(1-t) a^{\alpha-1} b|f'(b)|dt = \frac{5}{192} a^{\alpha-1} b|f'(b)|$$

$$I_5 = -\int_0^{1/2} (1-t)^2 a^{2\alpha-1}|f'(a)|dt = -\frac{7}{24} a^{2\alpha-1}|f'(a)|$$

$$I_6 = -\int_0^{1/2} t(1-t) a^{2\alpha-1}|f'(b)|dt = -\frac{1}{12} a^{2\alpha-1}|f'(b)|$$

$$I_7 = \int_0^{1/2} t(1-t)^2 ab^{\alpha-1}|f'(a)|dt = \frac{11}{192} ab^{\alpha-1}|f'(a)|$$

$$I_8 = \int_0^{1/2} t^2(1-t) ab^{\alpha-1}|f'(b)|dt = \frac{5}{192} ab^{\alpha-1}|f'(b)|$$

$$I_9 = \int_0^{1/2} t^2(1-t) b^{\alpha}|f'(a)|dt = \frac{5}{192} b^{\alpha}|f'(a)|$$

$$I_{10} = \int_0^{1/2} t^3 b^{\alpha}|f'(b)|dt = \frac{1}{64} b^{\alpha}|f'(b)|$$

$$I_{11} = -\int_0^{1/2} t(1-t) a^{\alpha} b^{\alpha-1}|f'(a)|dt = -\frac{1}{12} a^{\alpha} b^{\alpha-1}|f'(a)|$$

$$I_{12} = -\int_0^{1/2} t^2 a^{\alpha} b^{\alpha-1}|f'(b)|dt = -\frac{1}{24} a^{\alpha} b^{\alpha-1}|f'(b)|$$

$$I_{13} = \int_{1/2}^{1} (1-t) b^{\alpha}|f'(a)|\, dt = \frac{1}{8} b^{\alpha}|f'(a)|$$

$$I_{14} = \int_{1/2}^{1} tb^{\alpha}|f'(b)|\,dt = \frac{3}{8}b^{\alpha}|f'(b)|$$

$$I_{15} = -\int_{1/2}^{1} (1-t)^2 a^{\alpha}|f'(a)|dt = -\frac{1}{24}a^{\alpha}|f'(a)|$$

$$I_{16} = -\int_{1/2}^{1} t(1-t)a^{\alpha}|f'(b)|dt = -\frac{1}{12}a^{\alpha}|f'(b)|$$

$$I_{17} = -\int_{1/2}^{1} t(1-t)b^{\alpha}|f'(a)|dt = -\frac{1}{12}b^{\alpha}|f'(a)|$$

$$I_{18} = -\int_{1/2}^{1} t^2 b^{\alpha}|f'(b)|dt = -\frac{7}{24}b^{\alpha}|f'(b)|$$

$$\begin{aligned} I = |f'(a)|\Big(&\frac{15}{64}a^{\alpha} - \frac{1}{24}a^{\alpha} - \frac{1}{12}b^{\alpha} + \frac{1}{8}b^{\alpha} + \frac{5}{192}b^{\alpha} + \frac{11}{192}ab^{\alpha-1} - \frac{1}{12}a^{\alpha}b^{\alpha-1} \\ &+ \frac{11}{192}a^{\alpha-1}b - \frac{7}{24}a^{2\alpha-1}\Big) \\ &+ |f'(b)|\Big(\frac{11}{192}a^{\alpha} - \frac{1}{12}a^{\alpha} + \frac{3}{8}b^{\alpha} - \frac{7}{24}b^{\alpha} + \frac{1}{64}b^{\alpha} + \frac{5}{192}ab^{\alpha-1} \\ &- \frac{1}{24}a^{\alpha}b^{\alpha-1} + \frac{5}{192}a^{\alpha-1}b - \frac{1}{12}a^{2\alpha-1}\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{|f'(a)|}{192}&(37a^{\alpha} + 13b^{\alpha} - 56a^{2\alpha-1} + 11ab^{\alpha-1} - 16a^{\alpha}b^{\alpha-1} + 11a^{\alpha-1}b) \\ &+ \frac{|f'(b)|}{192}(-5a^{\alpha} + 19b^{\alpha} - 16a^{2\alpha-1} + 5ab^{\alpha-1} - 8a^{\alpha}b^{\alpha-1} + 5a^{\alpha-1}b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{b^{\alpha}-a^{\alpha}}\Bigg[&\frac{|f'(a)|}{192}[13b^{\alpha} + 37a^{\alpha}] + \frac{|f'(b)|}{192}[19b^{\alpha} - 5a^{\alpha}] \\ &+ (ab^{\alpha-1} + a^{\alpha-1}b)\left[\frac{11|f'(a)| + 5|f'(b)|}{192}\right] \\ &- \frac{8a^{2\alpha-1}}{192}[7|f'(a)| + 2|f'(b)|] - \frac{8a^{\alpha}b^{\alpha-1}}{192}[2|f'(a)| + |f'(b)|]\Bigg] \end{aligned}$$

Uyarı 4.10: (4.9) da $\alpha = 1$ alınırsa, (4.5) eşitsizliği elde edilir.

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{b-a}\left[\frac{|f'(a)|}{192}[13b+37a] + \frac{|f'(b)|}{192}[19b-5a]\right.$$

$$+ (a+b)\left[\frac{11|f'(a)| + 5|f'(b)|}{192}\right] - \frac{8a}{192}[7|f'(a)| + 2|f'(b)|]$$

$$\left. - \frac{8a}{192}[2|f'(a)| + |f'(b)|]\right]$$

$$= \frac{1}{192}[-24a|f'(a)| + 24b|f'(a)| - 24a|f'(b)| + 24b|f'(b)|]$$

$$= \frac{1}{8}[|f'(a)|(b-a) + |f'(b)|(b-a)] = \frac{b-a}{8}[|f'(a)| + |f'(b)|]$$

Teorem 4.11: $a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a < b$ olmak üzere $\alpha \in (0,1]$ için (a,b) üzerinde $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $D_\alpha(f) \in L_\alpha^1([a,b])$ ve $|f'|^q$ fonksiyonunun $q > 1$ için $[a,b]$ üzerindeki konveksliğinden aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha}\int_a^b f(s)d_\alpha s \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{b^\alpha - a^\alpha}\left[\left(A_1(\alpha)\right)^{1-\frac{1}{q}}\{A_2(\alpha)|f'(a)|^q + A_3(\alpha)|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(B_1(\alpha)\right)^{1-\frac{1}{q}}\{B_2(\alpha)|f'(a)|^q + B_3(\alpha)|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.10}$$

burada,

$$A_1(\alpha) = \left[\frac{(a+b)^{\alpha+1} - (2a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)}\right] - \frac{a^\alpha}{2},$$

$$B_1(\alpha) = \frac{b^\alpha}{2} - \left[\frac{(2b)^{\alpha+1} - (a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)}\right],$$

$$A_2(\alpha) = \frac{b[(a+b)^{\alpha+1} - (2a)^{\alpha+1}]}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)^2} + \frac{(2a)^{\alpha+2} - (a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} - \frac{3a^\alpha}{8},$$

$$B_2(\alpha) = \frac{(a-2b)[(2b)^{\alpha+1}-(a+b)^{\alpha+1}]}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(b-a)^2} + \frac{(2b)^{\alpha+2}-(a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} + \frac{b^\alpha}{8},$$

$$A_3(\alpha) = a\frac{(a+b)^{\alpha+1}-(2a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)^2} - \frac{(a+b)^{\alpha+2}-(2a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} + \frac{a^\alpha}{8},$$

$$B_3(\alpha) = \frac{(2b)^{\alpha+2}-(a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} - a\frac{(2b)^{\alpha+1}-(a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)^2} - \frac{3b^\alpha}{8}.$$

İspat: Lemma 4.7 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha}\int_a^b f(s)d_\alpha s\right| \\
&= \left|\frac{(b-a)}{b^\alpha - a^\alpha}[\int_0^{1/2} (((1-t)a+tb)^{2\alpha-1} \right. \\
&- a^\alpha((1-t)a+tb)^{\alpha-1})D_\alpha(f)\big((1-t)a+tb\big)dt \\
&+ \int_{1/2}^{1} (((1-t)a+tb)^{2\alpha-1} \\
&\left. - b^\alpha((1-t)a+tb)^{\alpha-1})D_\alpha(f)\big((1-t)a+tb\big)dt]\right| \\
&\leq \left|\frac{(b-a)}{b^\alpha - a^\alpha}\left[\int_0^{1/2} (((1-t)a+tb)^\alpha - a^\alpha)\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|dt \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|dt\right]\right|
\end{aligned}$$

yazılır. Şimdi power-mean eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} (((1-t)a+tb)^\alpha - a^\alpha)\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|dt \\
&\leq \left(\int_0^{1/2}\left(\big((1-t)a+tb\big)^\alpha - a^\alpha\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{1/2}\left(\big((1-t)a+tb\big)^\alpha - a^\alpha\right)\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\int_{1/2}^{1}(b^{\alpha}-((1-t)a+tb)^{\alpha})\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|dt$$

$$\leq\left(\int_{1/2}^{1}\left(b^{\alpha}-\big((1-t)a+tb\big)^{\alpha}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{1/2}^{1}\left(b^{\alpha}-\big((1-t)a+tb\big)^{\alpha}\right)\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Yukarıda $|f'|^q$ konveksliğinden,

$$\int_{0}^{1/2}(((1-t)a+tb)^{\alpha}-a^{\alpha})\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|^{q}dt$$

$$\leq\int_{0}^{1/2}(((1-t)a+tb)^{\alpha}-a^{\alpha})\,[(1-t)|f'(a)|^{q}+t|f'(b)|^{q}]dt$$

elde edilir.

$$=|f'(a)|^{q}\int_{0}^{1/2}(((1-t)a+tb)^{\alpha}-a^{\alpha})\,(1-t)dt+|f'(b)|^{q}\int_{0}^{1/2}(((1-t)a+tb)^{\alpha}-a^{\alpha})\,tdt$$

$$=|f'(a)|^{q}\left[\int_{0}^{1/2}(((1-t)a+tb)^{\alpha}-a^{\alpha})\,dt-\int_{0}^{1/2}(((1-t)a+tb)^{\alpha}-a^{\alpha})\,tdt\right]$$

$$+|f'(b)|^{q}\int_{0}^{1/2}(((1-t)a+tb)^{\alpha}-a^{\alpha})\,tdt$$

$$I_1=\int_{0}^{1/2}(((1-t)a+tb)^{\alpha}-a^{\alpha})\,dt=\int_{0}^{1/2}\big((1-t)a+tb\big)^{\alpha}dt-\int_{0}^{1/2}a^{\alpha}\,dt$$

$$=\frac{\big((1-t)a+tb\big)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}\Bigg|_{0}^{1/2}-\frac{a^{\alpha}}{2}=\frac{(\frac{a+b}{2})^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}-\frac{a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}-\frac{a^{\alpha}}{2}$$

$$=\frac{(a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)}-\frac{a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}-\frac{a^{\alpha}}{2}$$

$$=\frac{(a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)}-\frac{(2a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)}-\frac{a^{\alpha}}{2}$$

$$I_2 = -\int_0^{1/2} (((1-t)a+tb)^\alpha - a^\alpha)\, tdt = -\int_0^{1/2} \left((1-t)a+tb\right)^\alpha tdt + \int_0^{1/2} a^\alpha\, tdt$$

$$= -\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{\left((1-t)a+tb\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} - a\frac{\left((1-t)a+tb\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]\Bigg|_0^{1/2} + a^\alpha \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{a^{\alpha+2}}{\alpha+2} - a\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^{\alpha+2}}{\alpha+1}\right] + \frac{a^\alpha}{8}$$

$$= -\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} - \frac{a^{\alpha+2}}{\alpha+2} - a\frac{(a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} + \frac{a^{\alpha+2}}{\alpha+1}\right] + \frac{a^\alpha}{8}$$

$$= -\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(a+b)^{\alpha+2}-(2a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} - a\frac{(a+b)^{\alpha+1}-(2a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\alpha+1}\right] + \frac{a^\alpha}{8}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{(a+b)^{\alpha+1}-(2a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)} - \frac{a^\alpha}{2}$$

$$-\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(a+b)^{\alpha+2}-(2a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}\alpha+2} - a\frac{(a+b)^{\alpha+1}-(2a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\alpha+1}\right] + \frac{a^\alpha}{8}$$

$$= \frac{b[(a+b)^{\alpha+1}-(2a)^{\alpha+1}]}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)^2} + \frac{(2a)^{\alpha+2}-(a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} - \frac{3a^\alpha}{8}$$

$$\Rightarrow |f'(a)|\left(\frac{b[(a+b)^{\alpha+1}-(2a)^{\alpha+1}]}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)^2} + \frac{(2a)^{\alpha+2}-(a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} - \frac{3a^\alpha}{8}\right)$$

$$+ |f'(b)|(a\frac{(a+b)^{\alpha+1}-(2a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)^2} - \frac{(a+b)^{\alpha+2}-(2a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} + \frac{a^\alpha}{8})$$

elde edilir.Benzer şekilde,

$$\int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\left|f'\left((1-t)a+tb\right)\right|^q dt$$

$$\leq \int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\,[(1-t)|f'(a)|^q + t|f'(b)|^q]dt$$

$$= |f'(a)|^q \int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\,(1-t)dt + |f'(b)|^q \int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\, tdt$$

$$= |f'(a)|^q \left[\int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\, dt - \int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\, tdt \right]$$

$$+ |f'(b)|^q \int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\, tdt$$

$$I_3 = \int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\, dt = \int_{1/2}^{1} b^\alpha\, dt - \int_{1/2}^{1} \left(\left((1-t)a+tb\right)^\alpha\right) dt$$

$$= b^\alpha t|_{1/2}^{1} - \left.\frac{\left((1-t)a+tb\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}\right|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{b^\alpha}{2} + \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)} - \frac{b^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}$$

$$= \frac{b^\alpha}{2} + \frac{(a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)} - \frac{b^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}$$

$$= \frac{b^\alpha}{2} - [\frac{(2b)^{\alpha+1} - (a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)}]$$

$$I_4 = -\int_{1/2}^{1} (b^\alpha - ((1-t)a+tb)^\alpha)\, tdt = -\int_{1/2}^{1} b^\alpha\, tdt + \int_{1/2}^{1} \left((1-t)a+tb\right)^\alpha tdt$$

$$= -b^\alpha \left.\frac{t^2}{2}\right|_{1/2}^{1} + \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{\left((1-t)a+tb\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} - a\frac{\left((1-t)a+tb\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]\Bigg|_{1/2}^{1}$$

$$= -\frac{3b^\alpha}{8} + \frac{1}{(b-a)^2}\left[-\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{b^{\alpha+2}}{\alpha+2} + a\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - a\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]$$

$$= -\frac{3b^\alpha}{8} + \frac{1}{(b-a)^2}\left[-\frac{(a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} + \frac{b^{\alpha+2}}{\alpha+2} + a\frac{(a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} - a\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]$$

$$= -\frac{3b^\alpha}{8} + \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(2b)^{\alpha+2} - (a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} - a\frac{(2b)^{\alpha+1} - (a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right]$$

$$I_3 + I_4 = \frac{b^\alpha}{2} - \left[\frac{(2b)^{\alpha+1} - (a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)}\right] - \frac{3b^\alpha}{8}$$

$$+ \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(2b)^{\alpha+2} - (a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} - a\frac{(2b)^{\alpha+1} - (a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right]$$

$$= \frac{(a-2b)[(2b)^{\alpha+1}-(a+b)^{\alpha+1}]}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(b-a)^2} + \frac{(2b)^{\alpha+2}-(a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} + \frac{b^\alpha}{8}$$

$$\Rightarrow |f'(a)|\left(\frac{(a-2b)[(2b)^{\alpha+1}-(a+b)^{\alpha+1}]}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(b-a)^2} + \frac{(2b)^{\alpha+2}-(a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} + \frac{b^\alpha}{8}\right)$$
$$+ |f'(b)|(\frac{(2b)^{\alpha+2}-(a+b)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(b-a)^2} - a\frac{(2b)^{\alpha+1}-(a+b)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(b-a)^2} - \frac{3b^\alpha}{8})$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Uyarı 4.12: (4.10) da $\alpha = 1$ seçilirse, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds \right|$$
$$\leq \left(\frac{b-a}{8}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\{A_2(1)|f'(a)|^q + A_3(1)|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} + \{B_2(1)|f'(a)|^q + B_3(1)|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \right] \tag{4.11}$$

burada,

$$A_2(1) = \frac{(a+b)^2(2b-a) - a^2(12b+8a) - 9a(b-a)^2}{24(b-a)^2},$$

$$B_2(1) = \frac{(a+b)^2(4b-5a) - 4b^2(2b-3a) + 6b^2(b-a)^2}{48(b-a)^2},$$

$$A_3(1) = \frac{(a+b)^2(2a-b) - 4a^3 + 3a(b-a)^2}{24(b-a)^2},$$

$$B_3(1) = \frac{(a+b)^2(4a-2b) - 8b^2(3a-2b) - 18b(b-a)^2}{48(b-a)^2},$$

şeklindedir.

5.TAYLOR FORMÜLÜ VE YENİ PARAMETRELİ BİR TÜREV İÇİN İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde iyi bilinen Taylor formülü yeni parametreli bir türev yardımı ile gösterilmiştir. Ayrıca Taylor teoremi ile ilgili yeni bazı teoremler bulunmuştur. Bazı klasik integral eşitsizlikleri bu yeni ve ilginç kesirli analiz yardımıyla genişletilmiştir.

Teorem 5.1 (Taylor Formülü): $\beta \in (0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $s, t \in [0,\infty)$ ve $[0,\infty)$ da f fonksiyonunun $(n+1)$. mertebeden β −kısmi türevi;

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta^{-k}}{k!} [(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - \left(s + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}]^{k} D_s^{k\beta} f(s)$$

$$+ \frac{\beta^{-n}}{n!} \int_s^t \left[\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} - \left(\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{n} D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau \qquad (5.1)$$

şeklindedir.

İspat: Kısmi integrasyon kullanılırsa,

$$[(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n} = u$$

$$n.\left[\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} - \left(\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{n-1} (-\beta)\left(\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} d\tau = du$$

$$D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau = dv \qquad\qquad D_\tau^{n\beta} f(\tau) = v$$

$$\Rightarrow \int_s^t [(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n} D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau$$

$$= [(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n} D_\tau^{n\beta} f(\tau)|_s^t$$

$$+ n\beta \int_s^t [(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-1} D_\tau^{n\beta} f(\tau) d_\beta \tau$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^{-n}}{n!}\int_s^t [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^n D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau$$

$$= \frac{-\beta^{-n}}{n!}[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(s+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}]^n D_s^{n\beta} f(s)$$

$$+\frac{\beta^{1-n}}{(n-1)!}\int_s^t [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-1} D_\tau^{n\beta} f(\tau) d_\beta \tau$$

elde edilir. Benzer yolla,

$$I_2 = \frac{\beta^{1-n}}{(n-1)!}\int_s^t [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-1} D_\tau^{n\beta} f(\tau) d_\beta \tau$$

$$[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-1} = u$$

$$(n-1).\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{n-2}(-\beta)(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1} d\tau = du$$

$$D_\tau^{n\beta} f(\tau) d_\beta \tau = dv \qquad D_\tau^{(n-1)\beta} f(\tau) = v$$

$$I_2 = \frac{\beta^{1-n}}{(n-1)!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-1} D_\tau^{(n-1)\beta} f(\tau)|_s^t$$

$$+\frac{\beta^{2-n}}{(n-2)!}\int_s^t [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-2} D_\tau^{(n-1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau$$

$$= -\frac{\beta^{1-n}}{(n-1)!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(s+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-1} D_s^{(n-1)\beta} f(s)$$

$$+\frac{\beta^{2-n}}{(n-2)!}\int_s^t [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-2} D_\tau^{(n-1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{\beta^{-n}}{n!}\int_s^t [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^n D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau$$

$$= \frac{-\beta^{-n}}{n!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(s+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n}D_s^{n\beta}f(s)$$

$$-\frac{\beta^{1-n}}{(n-1)!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(s+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-1}D_s^{(n-1)\beta}f(s)+\cdots$$

$$+\beta^{-1}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(s+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n}D_s^{\beta}f(s)+\int_s^t D_\tau^{\beta}f(\tau)d_\beta\tau$$

$$= \frac{-\beta^{-n}}{n!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(s+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n}D_s^{n\beta}f(s)$$

$$-\frac{\beta^{1-n}}{(n-1)!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(s+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n-1}D_s^{(n-1)\beta}f(s)+\cdots$$

$$+\beta^{-1}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(s+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n}D_s^{\beta}f(s)+f(t)-f(s)$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur. Son eşitlikte integrali aldığımızda f fonksiyonunun Taylor Kalan Terimi elde edilir.

Teorem 5.2: f ve g fonksiyonları $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, ayrıca $g \geq 0$ olsun. Sonra, $c \in [a,b]$ gibi bir nokta vardır.

$$\int_a^b f(t)g(t)d_\beta t = f(c)\int_a^b g(t)d_\beta t \tag{5.2}$$

İspat:
$$m \coloneqq min_{a\leq t\leq b}f(t)$$

$$M \coloneqq max_{a\leq t\leq b}f(t)$$

şeklinde tanımlansın.

$$m \leq f(t) \leq M$$

şeklinde yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} g(t)$ fonksiyonu ile çarpılır ve (a,b) açık aralığında t'e göre β −integrali alınırsa,

$$m.g(t) \leq f(t)g(t) \leq M.g(t)$$

$$m\int_a^b g(t)d_\beta t \leq \int_a^b f(t)g(t)d_\beta t \leq M\int_a^b g(t)d_\beta t$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)d_\beta t}{\int_a^b g(t)d_\beta t} \leq M$$

Burada, $\int_a^b g(t)d_\beta t \neq 0$. Eğer $\int_a^b g(t)d_\beta t = 0$ ise herhangi bir c noktası seçilebilir. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan, f de her bir değer için $[m,M]$ aralığında en az bir değer alır. Bazı $c \in [a,b]$ için

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)d_\beta t}{\int_a^b g(t)d_\beta t}$$

yazılabilir.

5.1. Lagrange Kalan Terimi

Taylor Kalan Terimine

$$\int_a^b f(t)g(t)d_\beta t = f(c)\int_a^b g(t)d_\beta t$$

uygulanırsa,

$$(R_{n,f}(s,t) = \frac{\beta^{-n}}{n!}\int_s^t [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta - (\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^n D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau)d_\beta\tau\ )$$

$$R_{n,f}(s,t) = \frac{\beta^{-n}}{n!}\ D_t^{(n+1)\beta} f(c)\int_s^t [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta - (\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^n d_\beta\tau$$

$$(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta - (\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta = u$$

$$-\beta(\tau+\tfrac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}d\tau = du \qquad\qquad -\beta d_\beta\tau = du$$

$$= \int \frac{-u^n du}{\beta} = \frac{-1}{\beta}[\frac{u^{n+1}}{n+1}] = \frac{-1}{\beta(n+1)}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta - (\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^{n+1}\Big|_s^t$$

$$= \frac{1}{\beta(n+1)}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta - (s+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^{n+1}$$

$$= \frac{\beta^{-n-1}}{(n+1)!} D_t^{(n+1)\beta} f(c) \left[\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{\beta} - \left(s + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{\beta} \right]^{n+1}$$

elde edilir.

5.2. Steffensen Eşitsizliği

Bu bölümde Steffensen ve Hayashi Eşitsizliklerinin β −kesirli türev versiyonu gösterilecektir. Bunun için aşağıdaki Lemmaya ihtiyaç duyulmaktadır.

Lemma 5.3: $\beta \in [0,1]$ ve $0 \leq a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. $M > 0$ ve $f: [a,b] \to [0, M]$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında β −kesirli integrallenebilir fonksiyon olsun.

$$\ell := \frac{\beta(b-a)}{M\left[\left(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{\beta} - \left(a + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{\beta} \right]} \int_a^t f(t) d_\beta t, \qquad t \in [0, b-a] \qquad (5.3)$$

olmak üzere,

$$\int_{b-\ell}^{b} M d_\beta t \leq \int_a^b f(t) d_\beta t \leq \int_a^{a+\ell} M d_\beta t \qquad (5.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\forall t \in [a,b]$ için $f(t) \in [0, M]$ olduğundan (5.3) eşitliği kullanılarak,

$$0 \leq \ell = \frac{\beta(b-a)}{M[(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (a + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]} \int_a^t f(t) d_\beta t \leq \frac{\beta(b-a)}{[(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (a + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]} \int_a^t d_\beta t$$

$$\int_a^t d_\beta t = \int_a^b (t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1} dt = \left. \frac{(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}}{\beta} \right|_a^b = \frac{(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (a + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}}{\beta} = b - a$$

$$0 \leq \ell \leq b - a$$

elde edilir.

$g(t) = (t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında azalandır.

$$g'(t) = (t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-2} \Rightarrow g'(t) < 0$$

Buradan $d_\beta t = (t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1} dt$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{\ell} \int_{b-\ell}^{b} d_\beta t \leq \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} d_\beta t \leq \frac{1}{\ell} \int_{a}^{a+\ell} d_\beta t$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$\ell \leq b - a \Rightarrow a + \ell \leq b$$

$$\frac{1}{\ell} \geq \frac{1}{b-a}$$

Buradan yine (5.3) eşitliği kullanılırsa,

$$\int_{b-\ell}^{b} M d_\beta t \leq \frac{\ell}{b-a} \int_{a}^{b} M d_\beta t \leq \int_{a}^{a+\ell} M d_\beta t$$

elde edilir. İspat biter.

5.3. Taylor Kalan Terimi

$\beta, (0,1]$ ve f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında $n+1$ defa β −kesirli türevlenebilir olsun. Taylor Teoreminden kalan terim $n > -1$ için;

$$R_{n,f}(s,t) := f(s) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta^{-k}}{k!} \left[\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} - \left(s + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} \right]^{k} D_s^{k\beta} f(s)$$

ve

$$R_{n,f}(s,t) = \frac{\beta^{-n}}{n!} \int_{s}^{t} \left[\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} - \left(\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} \right]^{n} D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau \qquad (5.5)$$

şeklinde tanımlanır.

5.4. Lagrange Kalan Terim

Ortalama Değer Teoremi Taylor kalan terime uygulanırsa,

$$R_{n,f}(s,t) = \frac{\beta^{-n}}{n!}\int_s^t \left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} - \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^n D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau$$

$$R_{n,f}(s,t) = D^{(n+1)\beta} f(c) \int_s^t \frac{\beta^{-n}}{n!} \left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} - \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^n d_\beta \tau$$

$$\Rightarrow (t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} = u$$

$$-\beta\left(\tau+\tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} d\tau = du \qquad -\beta d_\beta\tau = du \qquad d_\beta\tau = \tfrac{-du}{\beta}$$

$$= D^{(n+1)\beta} f(c) \int \frac{-\beta^{-n}}{n!} u^n \frac{du}{\beta} = D^{(n+1)\beta} f(c) \left[\frac{-\beta^{-n-1}}{n!} \int u^n \, du\right]$$

$$= D^{(n+1)\beta} f(c) \left[\frac{-\beta^{-n-1}}{n!}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)\right]$$

$$= D^{(n+1)\beta} f(c) \left\{\frac{-\beta^{-n-1}}{(n+1)!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n+1}\Big|_s^t\right\}$$

$$= D^{(n+1)\beta} f(c) \left(\frac{-\beta^{-n-1}}{(n+1)!}\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} - \left(s+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{n+1}\right)$$

bulunur. Buna da Lagrange Kalan Terimi denir.

Lemma 5.4: $\beta \in (0,1]$ ve f fonksiyonu $[0,\infty)$ da $n+1$ defa $\beta-$kesirli türevlenebilir olsun.

Taylor Kalan Terimi (5.5)'deki gibi tanımlanırsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\int_a^b \frac{\beta^{-n-1}}{(n+1)!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta} - (\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{n+1} D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta\tau$$

$$= \int_a^t R_{n,f}(a,\tau) d_\beta\tau + \int_t^b R_{n,f}(b,\tau) d_\beta\tau \tag{5.6}$$

İspat: (5.6)' yı ispatlamak için tümevarım yöntemi kullanılsın.

$n=-1$ için;

$$\int_a^b \frac{\beta^0}{0!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^0 D_\tau^{(0)\beta} f(\tau)d_\beta\tau=\int_a^b f(\tau)d_\beta\tau$$

$$=\int_a^t f(\tau)d_\beta\tau+\int_t^b f(\tau)d_\beta\tau=\int_a^t R_{-1,f}(a,\tau)d_\beta\tau+\int_t^b R_{-1,f}(b,\tau)d_\beta\tau$$

olduğu görülür.

$n=k-1$ için doğru olsun.

$$\int_a^b \frac{\beta^{-k}}{k!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^k D_\tau^{k\beta} f(\tau)d_\beta\tau=\int_a^t R_{k-1,f}(a,\tau)d_\beta\tau+\int_t^b R_{k-1,f}(b,\tau)d_\beta\tau$$

$n=k$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\int_a^b \frac{\beta^{-k-1}}{(k+1)!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^{k+1} D_\tau^{(k+1)\beta} f(\tau)d_\beta\tau$$

$$\Rightarrow\ [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^{k+1}=u$$

$$(k+1)\ [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta-(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^k(-\beta)(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}d\tau=du$$

$$D_\tau^{(k+1)\beta} f(\tau)d_\beta\tau=dv \qquad\qquad D_\tau^{k\beta} f(\tau)=v$$

$$=\frac{\beta^{-k-1}}{(k+1)!}\left\{\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta-\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta\right]^{k+1} D_\tau^{k\beta} f(\tau)\Big|_a^b\right.$$

$$\left.+(k-1)\beta\int_a^b\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta-\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta\right]^k D_\tau^{k\beta} f(\tau)\,d_\beta\tau\right\}$$

$$= \frac{\beta^{-k-1}}{(k+1)!}\left\{\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{k+1} D_{\tau}^{k\beta} f(b)\right.$$

$$\left.-\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{k+1} D_{\tau}^{k\beta} f(a)\right\}$$

$$+\int_a^b \frac{\beta^{-k}}{k!}\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{k} D_{\tau}^{k\beta} f(\tau)\, d_{\beta}$$

$$= \cdots + \int_a^t R_{k-1,f}(a,\tau) d_{\beta}\tau + \int_t^b R_{k-1,f}(b,\tau) d_{\beta}\tau$$

$$= \int_a^t R_{k-1,f}(a,\tau) d_{\beta}\tau + \int_t^b R_{k-1,f}(b,\tau) d_{\beta}\tau$$

$$+\frac{\beta^{-k-1}}{(k+1)!}[(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{k+1} D_{\tau}^{k\beta} f(b)$$

$$-\frac{\beta^{-k-1}}{(k+1)!}\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{k+1} D_{\tau}^{k\beta} f(a) \qquad (5.7)$$

$$\frac{\beta^{-k}}{k!} D_{\tau}^{k\beta} f(b) \int_b^t [(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}-(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}]^{k}\, d_{\beta}\tau = \frac{\beta^{-k-1}}{(k+1)!}[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}]^{k+1} D_{\tau}^{k\beta} f(b)$$

Benzer şekilde a için de aynısı bulunur.

$$\int_a^t R_{k-1,f}(a,\tau) d_{\beta}\tau + \int_t^b R_{k-1,f}(b,\tau) d_{\beta}\tau + \frac{\beta^{-k}}{k!} D_{\tau}^{k\beta} f(b) \int_b^t \left[\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{k} d_{\beta}\tau$$

$$-\frac{\beta^{-k}}{k!} D_{\tau}^{k\beta} f(a) \int_a^t \left[\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{k} d_{\beta}\tau$$

$$= \int_a^t \{R_{k-1,f}(a,\tau) - \frac{\beta^{-k}}{k!} D_{\tau}^{k\beta} f(a)\left[\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{k}\} d_{\beta}\tau + \int_t^b \{R_{k-1,f}(b,\tau)$$

$$-\frac{\beta^{-k}}{k!} D_{\tau}^{k\beta} f(b)\left[\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\right]^{k}\} d_{\beta}\tau$$

$$= \int_a^t R_{k,f}(a,\tau) d_\beta \tau + \int_t^b R_{k,f}(b,\tau) d_\beta \tau$$

İspat biter.

Sonuç: $\beta \in (0,1]$ olsun. Buradan

$$\int_a^b \frac{\beta^{-n-1}}{(n+1)!} [(a + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta - (\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^{n+1} D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau = \int_a^b R_{n,f}(b,\tau) d_\beta \tau$$

$$\int_a^b \frac{\beta^{-n-1}}{(n+1)!} [(b + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta - (\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^\beta]^{n+1} D_\tau^{(n+1)\beta} f(\tau) d_\beta \tau = \int_a^b R_{n,f}(a,\tau) d_\beta \tau$$

yazılır.

6. BAZI YENİ BETA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Teorem 6.1: [14] f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. $\forall t>0,\ \beta>0$ için,

$$ {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\left[{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big)\,{}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big)\right] \tag{6.1} $$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g fonksiyonları senkronize olduğundan $\forall \tau>0, \rho>0$ için,

$$ (f(\tau)-f(\rho))(g(\tau)-g(\rho)) \geq 0 $$

$$ f(\tau)g(\tau)-f(\tau)g(\rho)-f(\rho)g(\tau)+f(\rho)g(\rho) \geq 0 $$

$$ f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho) \geq f(\tau)g(\rho)+f(\rho)g(\tau) $$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$, $(\tau\in(0,t))$ ile çarpılır,

$$ \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\tau)g(\tau)+\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\rho) $$
$$ \geq \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\tau)g(\rho)+\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\tau) $$

ve 0'dan t'ye τ'ya göre integrallenirse,

$$ \int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\tau)g(\tau)d\tau+\int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\rho)d\tau $$
$$ \geq \int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\tau)g(\rho)d\tau+\int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\tau)d\tau $$

$$ \left\{\int_0^t f(\tau)d_\beta\tau=\int_0^t f(\tau)\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} d\tau\right\} $$

$$\Rightarrow {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) + f(\rho)g(\rho)\int_0^t \left(\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} d\tau \geq g(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta f(t) + f(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta g(t)$$

elde edilir.

$$\left\{\int_0^t \left(\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} d\tau = \frac{1}{\beta}\left(\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\Bigg|_0^t = \frac{1}{\beta}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} - \frac{1}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta}}\right.$$

$$\left. = \frac{1}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta}}\big((t\Gamma(\beta)+1)^{\beta} - 1\big)\right\}$$

$$\Rightarrow {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) + \frac{f(\rho)g(\rho)}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta}}\big((t\Gamma(\beta)+1)^{\beta} - 1\big) \geq g(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta f(t) + f(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta g(t)$$

veya

$${}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) + f(\rho)g(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta(1) \geq g(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta f(t) + f(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta g(t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada eşitsizliğin her iki tarafı $(\rho + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}$ ile çarpılıp 0 dan t ye ρ ya göre integrallenirse,

$$(\rho + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) + \left(\rho + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta(1)$$

$$\geq \left(\rho + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} g(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta f(t) + \left(\rho + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta g(t)$$

$$\Rightarrow {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big)\int_0^t (\rho + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1} d\rho + {}_0^A I_t^\beta(1)\int_0^t \left(\rho + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\rho)\, d\rho$$

$$\geq {}_0^A I_t^\beta f(t)\int_0^t \left(\rho + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} g(\rho)\, d\rho + {}_0^A I_t^\beta g(t)\int_0^t \left(\rho + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)\, d\rho$$

$${}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big)\,{}_0^A I_t^\beta(1) + {}_0^A I_t^\beta(1)\,{}_0^A I_t^\beta f(t)g(t) \geq {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big)\,{}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) + {}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big)\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big)$$

$$\Rightarrow 2\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big)\,{}_0^A I_t^\beta(1) \geq 2\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big)\,{}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big)$$

$${}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\left[{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big)\,{}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big)\right]$$

bulunur. İspat sona erer.

Teorem 6.2: [14] f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. $\forall t>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$ için,

$$ {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)g(t)\big){}_0^AI_t^\alpha(1)+{}_0^AI_t^\beta(1){}_0^AI_t^\alpha\big(f(t)g(t)\big)\geq {}_0^AI_t^\beta\big(g(t)\big){}_0^AI_t^\alpha\big(f(t)\big)+{}_0^AI_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^AI_t^\alpha\big(g(t)\big) \tag{6.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teorem 6.1 in ispatına benzer şekilde f ve g senkronize iki fonksiyon olduğundan,

$$f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho)\geq f(\rho)g(\tau)+f(\tau)g(\rho)$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$ ile çarpılır ve 0'dan t'ye τ'ya göre integrallenirse,

$$ {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)g(t)\big)+f(\rho)g(\rho){}_0^AI_t^\beta(1)\geq f(\rho){}_0^AI_t^\beta g(t)+g(\rho){}_0^AI_t^\beta f(t) \tag{6.3}$$

elde edilir. (6.3) eşitsizliğinin her iki tarafı $\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve 0'dan t'ye ρ'ya göre integrallenirse,

$$ {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)g(t)\big)\int_0^t\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}d\rho+{}_0^AI_t^\beta(1)\int_0^t\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}f(\rho)g(\rho)d\rho$$
$$\geq {}_0^AI_t^\beta g(t)\int_0^t\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}f(\rho)\,d\rho+{}_0^AI_t^\beta f(t)\int_0^t\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}g(\rho)\,d\rho$$

$$\Rightarrow {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)g(t)\big){}_0^AI_t^\alpha(1)+{}_0^AI_t^\beta(1){}_0^AI_t^\alpha\big(f(t)g(t)\big)\geq {}_0^AI_t^\beta\big(g(t)\big){}_0^AI_t^\alpha\big(f(t)\big)+{}_0^AI_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^AI_t^\alpha\big(g(t)\big)$$

bulunur. İspat sona erer.

Uyarı 6.3: Teorem 6.2 de $\alpha=\beta$ seçilirse (6.2) eşitsizliği (6.1) eşitsizliğine dönüşür.

Uyarı 6.4: [14] Eğer f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında asimetrik fonksiyonlar ise (6.1) ve (6.2) eşitsizlikleri yön değiştirir.

Teorem 6.5: [14] $f_i,\ i=1,2,\dots,n$ fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Herhangi $t>0,\beta>0$ için,

$$ {}_0^A I_t^\beta \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \frac{1}{\left({}_0^A I_t^\beta(1)\right)^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} ({}_0^A I_t^\beta(f_i))(t) \qquad (6.4) $$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teoremin ispatı için tümevarım yöntemi kullanılır.

$n = 1$ seçilirse her $t > 0, \beta > 0$ için,

$$ {}_0^A I_t^\beta f_1(t) \geq {}_0^A I_t^\beta f_1(t) $$

eşitsizlik sağlanır.

$n = 2$ için Teorem 6.1 kullanılırsa,

$$ {}_0^A I_t^\beta (f_1 f_2)(t) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)} {}_0^A I_t^\beta (f_1(t)) {}_0^A I_t^\beta (f_2(t)) $$

yazılabilir.

$n = k - 1$ için (6.4) eşitsizliği yardımıyla,

$$ {}_0^A I_t^\beta \left(\prod_{i=1}^{k-1} f_i\right)(t) \geq \frac{1}{\left({}_0^A I_t^\beta(1)\right)^{k-2}} \prod_{i=1}^{k-1} ({}_0^A I_t^\beta(f_i))(t) \qquad (6.5) $$

doğru olsun. f_i, $i = 1,2,\dots,n$ fonksiyonları pozitif artan olduğundan $\left(\prod_{i=1}^{k-1} f_i\right)(t)$ fonksiyonu da pozitif artandır.

$\left(\prod_{i=1}^{k-1} f_i\right)(t) = g(t)$ ve $f_n(t) = f(t)$ seçilirse Teorem 6.1 yardımıyla,

$$ {}_0^A I_t^\beta \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(t) = {}_0^A I_t^\beta (g.f)(t) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)} {}_0^A I_t^\beta (g(t)) {}_0^A I_t^\beta (f(t)) $$

bulunur.

(6.5) eşitsizliği kullanılarak,

$$ {}_0^A I_t^\beta \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(t) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)} . \frac{1}{\left({}_0^A I_t^\beta(1)\right)^{k-2}} \prod_{i=1}^{k-1} ({}_0^A I_t^\beta(f_i))(t) {}_0^A I_t^\beta (f(t)) $$

elde edilir ve düzenlenirse,

$$ {}_0^A I_t^\beta \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(t) \geq \frac{1}{\left({}_0^A I_t^\beta(1)\right)^{k-1}} \prod_{i=1}^{k} ({}_0^A I_t^\beta (f_i))(t) $$

bulunur. İspat sona erer.

Teorem 6.6: [14] $[0,\infty)$ aralığında tanımlı f ve g fonksiyonları verilsin. f artan, g türevlenebilir olsun ve $m \coloneqq inf_{t\geq 0} g'(t)$ reel sayısı verilsin. Bu durumda $\forall t>0, \beta>0$ için,

$$ {}_0^A I_t^\beta (f.g)(t) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)} {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) - \frac{m}{{}_0^A I_t^\beta(1)} {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta (t) + m\, {}_0^A I_t^\beta \big(t.f(t)\big) \quad (6.6) $$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $h(t) \coloneqq g(t) - mt$ fonksiyonu göz önüne alınır.

$h'(t) = g'(t) - m \geq 0$ olduğundan h fonksiyonu artandır ve $[0,\infty)$ aralığında türevlenebilirdir. Teorem 6.1 kullanılarak,

$$ {}_0^A I_t^\beta [(g(t)-mt).f(t)] \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)} \left[{}_0^A I_t^\beta (g(t)-mt) {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big)\right] $$

$$ \geq \frac{{}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big)}{{}_0^A I_t^\beta(1)} \left[{}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) - m.\, {}_0^A I_t^\beta (t)\right] $$

$$ \geq \frac{{}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big)}{{}_0^A I_t^\beta(1)} {}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) - m \frac{{}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big)}{{}_0^A I_t^\beta(1)} {}_0^A I_t^\beta (t) $$

$$ {}_0^A I_t^\beta (f.g)(t) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)} {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) - \frac{m}{{}_0^A I_t^\beta(1)} {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta (t) + m\, {}_0^A I_t^\beta (t.f(t)) $$

elde edilir.

$$ {}_0^A I_t^\beta (t) = \int_0^t \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} x dx $$

Burada $\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right) = u$ dönüşümü yapılırsa,

$\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)=u \Rightarrow x=u-\frac{1}{\Gamma(\beta)} \qquad \Rightarrow dx=du$

$x=0 \Rightarrow u=\frac{1}{\Gamma(\beta)} \qquad x=t \Rightarrow u=t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}$

$$ {}_0^A I_t^\beta(t)=\int_0^t \left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} x dx=\int_{\frac{1}{\Gamma(\beta)}}^{t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}} u^{\beta-1}(u-\frac{1}{\Gamma(\beta)})\,du=\frac{u^{\beta+1}}{\beta+1}-\frac{u^\beta}{\beta.\Gamma(\beta)}$$

$$ {}_0^A I_t^\beta(t)=\left.\frac{(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta+1}}{\beta+1}-\frac{(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta}}{\beta.\Gamma(\beta)}\right|_0^t$$

$$=\frac{(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta+1}}{\beta+1}-\frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-\frac{1}{(\Gamma(\beta))^{\beta+1}\Gamma(\beta+1)}+\frac{1}{(\Gamma(\beta))^{\beta}\Gamma(\beta+1)}$$

$$=\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\left[\frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)}{\beta+1}-\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right]-\frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^{\beta}}(\frac{1}{\Gamma(\beta)(\beta+1)}-\frac{1}{\Gamma(\beta+1)})$$

$$=\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\left[\frac{t}{\beta+1}+\frac{1}{\Gamma(\beta)(\beta+1)}-\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right]-\frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^{\beta}}\left[\frac{\beta-\beta-1}{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}\right]$$

$$=\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\left[\frac{t\beta\Gamma(\beta)+\beta-\beta-1}{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}\right]-\frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^{\beta}}(\frac{-1}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)})$$

$$=\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\left[\frac{t\beta\Gamma(\beta)-1}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}\right]-\frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^{\beta}}(-\frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)})$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta+2)}[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}(t\Gamma(\beta+1)-1)+\frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^{\beta}}]$$

$$ {}_0^A I_t^\beta(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta+2)}.\frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^{\beta}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^\beta(t\Gamma(\beta+1)-1)+1\right]$$

Teorem 6.7: [14] $[0,\infty)$ aralığında tanımlı f ve g fonksiyonları verilsin. f fonksiyonu azalan, g türevlenebilir olsun ve $M\coloneqq sup_{t\geq 0}g'(t)$ şeklinde bir M reel sayısı göz önüne alınır. $\forall t>0, \beta>0$ için,

$$ {}_0^A I_t^\beta (f.g)(t) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta (1)} {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) - \frac{M.t}{{}_0^A I_t^\beta (1)} {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta (t) + M {}_0^A I_t^\beta \big(t.f(t)\big) \quad (6.7) $$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $G(t) \coloneqq g(t) - Mt$ fonksiyonu ele alınır. G fonksiyonu türevlenebilir ve

$$ G'(t) = g'(t) - M \leq 0 $$

olduğundan $[0, \infty)$ aralığında azalandır. Teorem 6.1 yardımıyla,

$$ {}_0^A I_t^\beta (f.G)(t) = {}_0^A I_t^\beta (f(t)(g(t) - M.t)) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta (1)} [{}_0^A I_t^\beta (f(t)) {}_0^A I_t^\beta (g(t) - M.t)] $$

$$ \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta (1)} {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) - \frac{M}{{}_0^A I_t^\beta (1)} {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta (t) $$

eşitsizliği elde edilir.

$$ {}_0^A I_t^\beta (1) = \frac{1}{\beta}\left[\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta - \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta\right] = \frac{1}{\beta}\left[\frac{(t\Gamma(\beta)+1)^\beta - 1}{\big(\Gamma(\beta)\big)^\beta}\right] $$

$$ = \frac{1}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^\beta}[(t\Gamma(\beta)+1)^\beta - 1] $$

$$ {}_0^A I_t^\beta (t) = \frac{(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta}{\beta\Gamma(\beta)} - \frac{1}{(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}} + \frac{1}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}} $$

$$ = \frac{1}{\beta+1}\left[\frac{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta+1} - 1}{\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\right] + \frac{1}{\beta}\left[\frac{1 - (t\Gamma(\beta)+1)^\beta}{\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\right] $$

$$ = \frac{1}{\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[\frac{1}{\beta+1}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta+1} - 1\right] + \frac{1}{\beta}\left[1 - (t\Gamma(\beta)+1)^\beta\right]\right] $$

$$ = \frac{1}{\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[\frac{1}{\beta+1}(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta+1} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}(t\Gamma(\beta)+1)^\beta\right] $$

$$ = \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[\beta(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta+1} + 1 - (\beta+1)(t\Gamma(\beta)+1)^\beta\right] $$

$$= \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[\beta(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}(t\Gamma(\beta)+1)+1-(\beta+1)(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\big(\beta(t\Gamma(\beta)+1)-(\beta+1)\big)+1\right]$$

$$= \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}(\beta t\Gamma(\beta)+\beta-\beta-1)+1\right]$$

$${}_0^A I_t^{\beta}(t) = \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}(\beta t\Gamma(\beta)-1)+1\right]$$

$$\frac{{}_0^A I_t^{\beta}(t)}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)} = \frac{\frac{1}{\beta(\beta+1)(\Gamma(\beta))^{\beta+1}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}(\beta t\Gamma(\beta)-1)+1\right]}{\frac{1}{\beta(\Gamma(\beta))^{\beta}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1\right]}$$

$$= \frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\beta)}\left[\frac{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\beta t\Gamma(\beta)-(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}+1}{[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1]}\right]$$

$$= \frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\beta)}\left[\frac{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\beta t\Gamma(\beta)}{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1}-1\right]$$

$$\frac{{}_0^A I_t^{\beta}(t)}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)} = \frac{\beta t}{(\beta+1)}.\frac{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}}{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1}-\frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\beta)}.$$

Teorem 6.8: [14] $[0,\infty)$ aralığında tanımlı f ve g fonksiyonları verilsin. f ve g türevlenebilir iki fonksiyon ve $m_1 \coloneqq inf_{t\geq 0}f'(t),\ m_2 \coloneqq inf_{t\geq 0}g'(t)$ olsun. O halde,

$${}_0^A I_t^{\beta}(f.g)(t) - m_1\,{}_0^A I_t^{\beta}(t)\,{}_0^A I_t^{\beta}\big(g(t)\big) - m_2\,{}_0^A I_t^{\beta}(t)\,{}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)\big) + m_1 m_2\,{}_0^A I_t^{\beta}(t^2)$$

$$\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)}\left[{}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)\big){}_0^A I_t^{\beta}\big(g(t)\big) - m_1\,{}_0^A I_t^{\beta}(t)\,{}_0^A I_t^{\beta}\big(g(t)\big) - m_2\,{}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)\big){}_0^A I_t^{\beta}(t) + m_1 m_2\left({}_0^A I_t^{\beta}(t)\right)^2\right] \quad (6.8)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $F(t) \coloneqq f(t) - m_1 t$ ve $G(t) \coloneqq g(t) - m_2 t$ fonksiyonları tanımlansın. $F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonları türevlenebilir olduğundan

$$F'(t) = f'(t) - m_1 \geq 0,$$

$$G'(t) = g'(t) - m_2 \geq 0$$

$F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında artandır.

$${}_0^A I_t^\beta[(f(t)-m_1t)(g(t)-m_2t)] = {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) - m_2\,{}_0^A I_t^\beta(f(t).t) - m_1\,{}_0^A I_t^\beta\big(t.g(t)\big) + m_1m_2({}_0^A I_t^\beta(t))^2$$

$$\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) - \frac{m_2}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta(t) - \frac{m_1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\,{}_0^A I_t^\beta(t){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) + \frac{m_1m_2}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\left({}_0^A I_t^\beta(t)\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\left[{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) - m_2\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta(t) - m_1\,{}_0^A I_t^\beta(t){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) + m_1m_2\left({}_0^A I_t^\beta(t)\right)^2\right]$$

Teorem 6.9: $[0,\infty)$ aralığında tanımlı f ve g fonksiyonları verilsin. f ve g türevlenebilir iki fonksiyon ve $M_1 \coloneqq sup_{t\geq 0}f'(t)$, $M_2 \coloneqq sup_{t\geq 0}g'(t)$ olsun. O halde

$${}_0^A I_t^\beta(f.g)(t) - M_1\,{}_0^A I_t^\beta(t){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) - M_2\,{}_0^A I_t^\beta(t){}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big) + M_1M_2\,{}_0^A I_t^\beta(t^2)$$

$$\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\left[{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) - M_1\,{}_0^A I_t^\beta(t){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) - M_2\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta(t) + M_1M_2\left({}_0^A I_t^\beta(t)\right)^2\right] \quad (6.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $F(t) \coloneqq f(t) - M_1t$ ve $G(t) \coloneqq g(t) - M_2t$ fonksiyonları tanımlansın. $F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonları türevlenebilir olduğundan,

$$F'(t) = f'(t) - M_1 \leq 0,$$

$$G'(t) = g'(t) - M_2 \leq 0$$

$F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında azalandır.

$${}_0^A I_t^\beta[(f(t)-M_1t)(g(t)-M_2t)]$$
$$= {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) - M_2\,{}_0^A I_t^\beta(f(t).t) - M_1\,{}_0^A I_t^\beta\big(t.g(t)\big) + M_1M_2({}_0^A I_t^\beta(t))^2$$
$$\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) - \frac{M_2}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta(t)$$
$$- \frac{M_1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\,{}_0^A I_t^\beta(t){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) + \frac{M_1M_2}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\left({}_0^A I_t^\beta(t)\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\left[{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) - M_2\,{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big){}_0^A I_t^\beta(t)\right.$$
$$\left. - M_1\,{}_0^A I_t^\beta(t){}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big) + M_1M_2\left({}_0^A I_t^\beta(t)\right)^2\right].$$

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında beta kesirli türev ve integral tanımları incelenmiştir. Bu yeni kavramlar yardımıyla literatürde iyi bilinen bazı temel tanımlar ve teoremler yeniden ele alınmıştır. Böylece uygulamalarda sıkça karşılaşılan önemli integral eşitsizlikleri yeniden araştırılmış ve genişletilmiştir. Tezde bulunan bu tanım, teorem ve eşitsizlikler, farklı yeni kesirli türev ve integral tanımları kullanılarak genişletilip yeni araştırma alanları oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994, "Some remarks on s-convex functions", *Aequationes Mathematicae*, 48(1): 100-111.

[2] Dragomir, S.S., 2001, "On the Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane", *Taiwanese Journal of Mathematics*, 5(4): 775-788.

[3] Hadamard, J., 1893, "Etude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann", *Joumal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 58: 171-215.

[4] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014, "A New Definition of Fractional Derivative", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264: 65-70.

[5] Anderson, D.R., 2016, "Taylor's formula and ıntegral ınequalities for conformable fractional derivatives", Contributions in Mathematics and Engineering, *Springer*, Cham, Switzerland, 25-43.

[6] Abdeljawad, T., 2015, "On conformable fractional calculus", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279: 57-66.

[7] Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S., 1999, "The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense", *Demonstratio Mathematica*, 32(4): 687-696.

[8] Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P., 1988, "Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula", *Appl Math. Lett.*, 11(5): 91-95.

[9] Kirmaci, U.S., 2004, "Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula", *Appl. Math. Comput.*, 147: 137-146.

[10] Iyiola, O.S., Nwaeze E.R., 2016, "Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D.Alambert approach", *Progr.Fract.Differ.Appl.*, 2(2): 115-122.

[11] Khan, M.A., Chu, Y.M., Kashuri, A., Liko, R., Ali, G., 2018, "Conformable fractional integrals versions of Hermite-Hadamard inequalities and their generalizations", *Journal of Function Spaces*, 1-8.

[12] Khan, M.A., Ali, T., Dragomir, S.S., Sarikaya, M.Z., 2018, "Hermite-Hadamard type inequalities for conformable fractional integrals", *Revista de la Real Academia de Ciencias Exantas*, 112: 1033-1048.

[13] Korkmaz, F., Uçar, D., 2019, "Farklı türden fonksiyonlar için uyumlu kesirli integral eşitsizlikleri", *Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi*, 3(2): 51-64.

[14] Uçar, D., Hatipoğlu, V.F., 2019, "On Some Beta-Fractional integral inequalities", *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*,10(3): 363-368.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı Adı : KORKMAZ Fatma

Uyruğu : T.C.

Doğum Tarihi ve Yeri : 01.03.1993 Akhisar

Medeni Hali : Bekar

Telefon : 0544 338 64 46

E-mail : fatma.korkmaz.93.fk@gmail.com

Eğitim Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üni. Matematik	2016
Lise	Akhisar Anadolu Lisesi	2011

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Fatma Korkmaz, Deniz Uçar, "Farklı Türden Fonksiyonlar için Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikleri". Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015-2016	Akhisar Özel Hedef Eğitim Kursu	Matematik Öğretmeni
2016-2017	Akhisar 100. Yıl Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2018-2019	Akhisar Yayakırıldık Reşat Öztürk Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

Hobiler

Kitap, seyahat, bilgisayar teknolojileri