# KOMPLEKS BULANIK KÜMELER VE UYGULAMALARI

NEBİ YİĞİT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN
2018

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# KOMPLEKS BULANIK KÜMELER VE UYGULAMALARI

**Nebi YİĞİT**

TOKAT
2018

**Nebi YİĞİT** tarafından hazırlanan "**Kompleks Bulanık Kümeler ve Uygulamaları**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 11 EKİM 2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / ~~Oy Çokluğu ile~~ Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

| Jüri Üyeleri | İmza |
| --- | --- |
| Danışman<br>Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN | ........................................ |
| Üye<br>Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK | ........................................ |
| Üye<br>Dr. Öğr. Üyesi Güzide ŞENEL<br>Amasya Üniversitesi | ........................................ |

ONAY

........................................

Prof. Dr. Ebubekir ALTUNTAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

08/11/2018

## TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

**Nebi YİĞİT**

# ÖZET

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KOMPLEKS BULANIK KÜMELER VE UYGULAMALARI**

**NEBİ YİĞİT**

**TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**TEZ DANIŞMANI:PROF. DR. MEHMET ATÇEKEN**
**İKİNCİ DANIŞMAN: DOÇ. DR. ASLIHAN SEZGİN**

Zadeh (1965) tarafından ortaya atılan bulanık mantık, değer kümesi [0,1] aralığındaki tüm reel sayılar olan bulanık kümeler ile sonsuz değerli bir mantıktır. Bulanık mantık ile birlikte birçok yeni çalışma ve uygulama yapılmıştır. İlk olarak Moses ve ark. (1999a) ve sonrasında Ramot ve ark. (2002) tarafından tanımlanan kompleks bulanık kümeler, bu çalışmalardan bazılarıdır. Bulanık mantık kullanılarak yapılan uygulamalarda elektrik-elektronik, ulaşım, otomotiv, sağlık, ekonomi, temizlik, inşaat gibi birçok sektör yer almaktadır. Bu tez çalışmasında, ilk olarak bulanık mantık hakkında genel bilgiler verildi. Sonra klasik kümeler, klasik kümelerin özellikleri, bulanık kümeler ve bulanık kümelerin özellikleri çalışıldı. Daha sonra aralık sayıları, aralık işlem özellikleri ve bulanık sayılar ile bulanık sayı çeşitleri incelendi. Ardından kompleks sayılar, kompleks sayıların aritmetik işlemleri ve kutupsal gösterimi anlatıldı. Sonrasında Moses ve ark. (1999a) ve Ramot ve ark. (2002)'na göre kompleks bulanık kümeler ve küme işlemleri verildi ve orijinal bir çalışma olarak bölgesel kompleks bulanık kümeler ve küme işlemleri tanıtıldı. Son olarak, bölgesel kompleks bulanık kümelerin bir uygulamasına yer verildi.



**2018, 74 SAYFA**

**Anahtar Kelimeler:** Bulanık Mantık, Bulanık Kümeler, Bulanık Sayılar, Kompleks Sayılar, Kompleks Bulanık Kümeler

## ABSTRACT

### MASTER THESIS

### COMPLEX FUZZY SETS AND THEIR APPLICATIONS



**NEBİ YİĞİT**

**TOKAT GAZİOSMANPAŞA UNIVERSITY**
**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**SUPERVISOR: PROF. DR. MEHMET ATÇEKEN**
**CO-SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ASLIHAN SEZGİN**



Fuzzy logic suggested by Zadeh (1965) is an infinite valued logic with fuzzy sets whose range is all real numbers in closed interval [0,1]. Many new studies and applications have been done with fuzzy logic. Complex fuzzy sets defined firstly by Moses et al. (1999a) and then by Ramot et al. (2002) are some of these studies. In applications using fuzzy logic have appeared a lot of sector such as electric-electronic, transportation, automotive, health, economy, cleaning and building. In this thesis study, firstly, general information about fuzzy logic was given. Thereafter crisp sets, properties of crisp sets, fuzzy sets and properties of fuzzy sets were studied. Then, interval numbers, interval operation features, fuzzy numbers and different types of fuzzy numbers were investigated. Complex numbers, arithmetic operations of complex numbers and their polar notation were expressed. Complex fuzzy sets by Moses et al. (1999a) and Ramot et al. (2002) and their set operations were presented and as an original study regional complex fuzzy sets and their set operations were defined. Finally, an application of regional complex fuzzy sets was obtained.



**2018, 74 PAGE**

**Key Words:** Fuzzy Logic, Fuzzy Sets, Fuzzy Numbers, Complex Numbers, Complex Fuzzy Sets

## ÖNSÖZ

Tez çalışmalarımda yardımcı olan ve beni motive eden danışmanlarım Sn. Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN, Sn. Doç. Dr. Aslıhan SEZGİN hocalarıma ve matematik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman manevi desteğini üzerimden esirgemeyen kıymetli anneme ve sabırla çalışmalarımda hep yanımda olan canım eşime ve kızıma çok teşekkür ederim.

Nebi YİĞİT

**İÇİNDEKİLER**

**Sayfa**

## SİMGELER

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\in$ | Eleman |
| $\notin$ | Elemanı değil |
| $\mathrm{A, B, C}$ | Klasik kümeler |
| $\mathrm{A^c}$ | A klasik kümesinin tümleyeni |
| $\subset$ | Klasik (kümelerde) alt küme |
| $\not\subset$ | Klasik (kümelerde) alt küme değil |
| $\cap$ | Klasik (kümelerde) kesişim |
| $\cup$ | Klasik (kümelerde) birleşim |
| $\emptyset$ | Boş küme |
| U | Evrensel küme |
| $\chi$ | Karakteristik fonksiyon |
| $\mu$ | Üyelik fonksiyonu |
| $A, B, C$ | Bulanık kümeler |
| $\bar{A}$ | *A* bulanık kümesinin tümleyeni |
| $\tilde{\cap}$ | Bulanık (kümelerde) kesişim |
| $\tilde{\cup}$ | Bulanık (kümelerde) birleşim |
| $\tilde{\subset}$ | Bulanık (kümelerde) alt küme |
| $\tilde{\not\subset}$ | Bulanık (kümelerde) alt küme değil |
| $S_A$ | *A* bulanık kümesinin desteği |
| $A_\alpha$ | *A* bulanık kümesinin zayıf $\alpha$-seviye kümesi ya da $\alpha$-kesimi |
| $A'_\alpha$ | *A* bulanık kümesinin güçlü $\alpha$-seviye kümesi ya da $\alpha$-kesimi |
| min | Minimum |
| max | Maksimum |
| $\lambda$ | Lambda |
| $\forall$ | Her |
| $=$ | Eşit |
| $\neq$ | Eşit değil |
| $<$ | Küçük |
| $\leq$ | Küçük veya eşit |

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $>$ | Büyük |
| $\geq$ | Büyük veya eşit |
| $f$ | Fonksiyon |
| $\infty$ | Sonsuz |
| $\sum$ | Sigma |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}^{+}$ | Pozitif reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{Z}$ | Tamsayılar kümesi |
| w(A) | A aralığının genişliği |
| $A^{-}$ | A aralığının görüntüsü |
| $A^{-1}$ | A aralığının tersi |
| d(A,B) | A ve B arasındaki uzaklık |
| sup | Supremum |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks sayılar kümesi |
| $z$ | kompleks sayı |
| Re | Kompleks sayının reel kısmı |
| Im | Kompleks sayının sanal kısmı |
| $\bar{z}$ | z kompleks sayısının eşleniği |
| $\theta$ | Teta |
| cos | Kosinüs |
| sin | Sinüs |
| tan | Tanjant |
| Arg | Argüment |
| $Z_g$ | g gösterimindeki kompleks bulanık küme |
| $Z_c$ | Kartezyen gösterimdeki kompleks bulanık küme |
| $Z_p$ | Kutupsal gösterimdeki kompleks bulanık küme |
| $r_S$ | S kompleks bulanık kümesinin genlik terimi |
| $w_S$ | S kompleks bulanık kümesinin faz terimi |
| $c$ | Kompleks bulanık kümede tümleyen fonksiyonu |
| $Rot$ | Rotasyon (döndürme) |
| $Ref$ | Yansıma |

## ŞEKİL LİSTESİ

# ÇİZELGE LİSTESİ

**Çizelge** **Sayfa**

# 1. GİRİŞ

Geleneksel mantıklar, klasik ve sembolik (modern) mantık olmak üzere ikiye ayrılır. Klasik mantık, iki değerli mantık olan Aristoteles mantığı olarak da bilinir ve üç ilkeye dayanır. Bu ilkeler; "Özdeşlik" yani bir şeyin ne ise o olması, "Çelişmezlik" yani bir şeyin hem kendi, hem başka bir şey olamaması ve "Üçüncünün Olmazlığı" bir şeyin ya A, ya da A-olmayan olması yani üçüncü bir durumun düşünülemeyeceğidir. Sembolik mantığın temeli ise önermeler mantığıdır. Önerme eklemleri; Değilleme ($\sim$, $\neg$, $\bar{\ }$), Tümel Evetleme (ve, $\wedge$), Tikel Evetleme (veya, $\vee$), İçerim (koşul, ise, $\Rightarrow$), Karşılıklı Koşul (ancak ve ancak, $\Leftrightarrow$) biçimindedir (Baykal ve Beyan, 2004).

Geleneksel olmayan mantıklar, çok değerli mantıklardır. Bunlardan üç değerli mantık, klasik mantığın genelleştirilmesi ile elde edilir ve çok değerli mantığın özel bir halidir. Araştırma evreninde [0,1] aralığındaki rasyonel sayılar yerine tüm reel sayılar tanımlanırsa o zaman çok değerli mantık, sonsuz değerli mantık adını alır (Baykal ve Beyan, 2004).

Bulanık mantık, California Berkeley Üniversitesi'nden Lotfi A. Zadeh tarafından Information and Control dergisinde 1965'te yayımlanan "Fuzzy Sets" başlıklı makalesi ile ortaya çıkmıştır (Zadeh, 1965).

Klasik mantık, "Ali'nin boyu 1.30 m dir.", "Kar, beyazdır." gibi kesin ifadelerden oluşan klasik kümeleri kullanırken bulanık mantık, bulanıklık ve belirsizlik içeren biraz doğru, çok yanlış, az sıcak, biraz soğuk gibi insan dilbilimi ve düşüncesi ile ilgili yani insan sağduyusuna dayanan (Karakaşoğlu, 2008) bulanık kümeleri kullanır. Bulanık mantık, klasik ikili mantığın bir genişlemesidir ve sonsuz değerli mantıktır.

Bulanık mantıkta ele alınan belirsizlik, olasılık teorisinde ele alınan belirsizlikten farklıdır. Olasılık belirsizliği objektif olarak tekrar denemelerle değerlendirilebilir. Oysa bulanık mantıktaki belirsizlik ifadelerinde kriter, değerlendiren kişiye bağlıdır ve bu hususta sonsuz tecrübe ve deneylerle bile tam bir sonuç elde edilemez. Bulanık mantıktaki ifadeler oldukça özneldir ve duruma bağlıdır. Bu açıdan bulanık mantık, belirsizlik matematiği olarak ele alınabilir (Tanaka, 1997).

Bulanık mantığın ortaya çıkmasıyla birlikte birçok uygulama yapılmış ve zaman içinde bu uygulamalar daha da çeşitlenerek aktif bir şekilde çoğu sektörde kullanılmıştır. Bulanık mantık uygulamalarının tarihsel gelişimine bakılırsa; 1972 yılında Tokyo Teknoloji Enstitüsü'nde Michio Sugeno, bulanık ölçüm ve bulanık integral kavramlarını geliştirmiştir. Bulanık mantığı 1974'te Londra Üniversitesi'nden Ebraham Mamdani buhar makinesi kontrolünde, 1980'de Danimarkada F. D. Smidth çimento fırınının denetiminde yine 1980'lerde Japonya'da Fuji Elektrik bir su arıtma işleminde kullanmıştır. Daha sonra Hitachi bulanık mantıkla otomatik tren kontrol sistemi geliştirmiştir. 1984'te (Uluslararası Bulanık Sistem Birliği) The International Fuzzy System Association (IFSA), 1989'da (Bulanık Teori ve Sistemler Topluluğu) The Society of Fuzzy Theory and Systems (SOFT) kurulmuştur ve (Uluslararası Bulanık Mühendislik Laboratuarı) The Laboratory of International Fuzzy Engineering (LIFE) Japonya'da göreve başlamıştır (Tanaka, 1997).

Bulanık mantığın uygulama alanlarından bazıları ise,

i. Hidroelektrik güç üniteleri için kullanılan baraj kapılarının otomatik kontrolü (Tokio Electric Pow.)
ii. Stok kontrol değerlendirmesi için bir uzman sistem (Yamaichi, Hitachi)
iii. Klima sistemlerinde istenmeyen ısı iniş çıkışlarının önlenmesi (Mitsubishi)
iv. Araba motorlarının etkili ve kararlı kontrolü (Nissan)
v. Otomobiller için "Cruise-control" (Nissan, Subaru)
vi. Dökümanları arşivleme sistemi (Mitsubishi Elec.)
vii. Depremlerin önceden bilinmesi için tahmin sistemi (Inst. of Seismology Bureau of Metrology, Japan)
viii. İlaç teknolojisinde kanser teşhisi (Kawasaki Medical School)
ix. Cep bilgisayarlarında el yazısı algılama teknolojisi (Sony)
x. Video kameralarda hareketin algılanması (Canon, Minolta)
xi. El yazısı ve ses tanımlaması (CSK, Hitachi, Hosai Univ., Ricoh)
xii. Helikopterler için uçuş desteği (Sugeno)
xiii. Çelik sanayinde makine hızı ve ısısının kontrolü (Kawasaki Steel, New-Nippon Steel, NKK)
xiv. Raylı metro sistemlerinde sürüş rahatlığı, duruş mesafesinin kesinliğinin ve ekonomikliğin geliştirilmesi (Hitachi)

xv. Otomobiller için gelişmiş yakıt tüketimi (NOK, Nippon Denki Tools)
xvi. Çimento değirmeninde ısı ve oksijen oranı denetimi (Mitsubishi-Chen)
xvii. Asansörde yolcu trafiğini değerlendirme ve böylece bekleme zamanının azaltılması (Fujitech, Toshiba, Mitsubishi)
xviii. Video aygıtının elle tutulması nedeniyle oluşan sarsıntıların ortadan kaldırılması (Panasonic)
xix. Tansiyonun ölçülmesi (Omron)
xx. Su ısıtıcısında suyun miktarı ve sıcaklığına göre ayarlama (Matsushita)
xxi. Fotoğraf makinesinin ekranında birkaç obje olması durumunda en iyi görüntüyü ve aydınlatmayı belirlemesi (Sanyo-Fisher, Canon, Minolta)
xxii. Çamaşır kirliliğini, ağırlığını, kumaş cinsini sezme ve ona göre yıkama programını seçme (Matsushita)
xxiii. Halının durumunu ve kirliliğini sezme ve elektrik süpürgesinin motor gücünü uygun bir şekilde ayarlama (Matsushita)
xxiv. Otomobil ABS fren sisteminde tekerleklerin kilitlenmeden frenlenmesini sağlama (Nissan)
xxv. Hisse senedi portföyü idare etme (Yamaichi-Securities)
xxvi. Araba kullanış stilini ve yükünü sezerek en iyi dişli oranını seçme (Subaru, Nissan)

şeklindedir (Daş, 2003).

Kompleks sayılar, ilk olarak Cardano (1545) tarafından modern anlamda ele alınmıştır (Garrido, 2012).

Üyelik dereceleri $[0,1]\times[0,1]$ aralığında olan kompleks bulanık kümeler, Moses ve ark. (1999a) tarafından tanımlanmış ve kompleks üyelik dereceleri tanıtılarak uyarlanabilir filtre dizaynına uygulanmıştır.

Bulanık küme teorisini kompleks alana uygulama araştırması, başlangıçta Kaufmann ve Gupta (1985) tarafından keşfedilmiştir. Bu durum iki modelin gelişimi için temel oluşturmuştur. Birincisi Buckley (1989) tarafından tanımlanan bulanık kompleks sayılardır. İkincisi Buckley (1989)' nin modelinden uzaklaşarak Moses ve ark. (1999a) tarafından tanımlanan kompleks üyelik dereceleri ile kompleks bulanık kümelerdir (Moses ve ark., 1999b).

Moses ve ark. (1999b), kompleks bulanık kümelerin dilbilimsel koordinat dönüşümlerini tanıtarak, ikinci derece uyarlanabilir mikroelektomekanik sistemler için bir uygulamayı göstermiştir.

Nguyen ve ark. (2000) kompleks bulanık kümeler hakkında bazı bilgiler vermiştir. Ramot ve ark. (2002) ise üyelik dereceleri birim çembere genişletilen kompleks bulanık kümeleri tanımlayarak, bu kümelere ait çeşitli küme işlemlerini tanıtmışlardır.

Ramot ve ark. (2002), kompleks bulanık kümeleri güneş aktivitesinin kompleks bulanık gösterimi (güneş lekesi sayısı ölçümü) ve sinyal işleme uygulamasına uyarlamışlardır. Ramot ve ark. (2003), borsada devredilebilir hisse alan bir şirkete yatırım yapma niyetinde olan bir yatırımcı için ve demokrasi ile liderler hakkındaki düşüncelere göre kompleks bulanık kümeler tasarlayarak uygulama yapmışlar ve kompleks bulanık mantık sistemini oluşturmuşlardır. Tamir ve ark. (2011), borsadan gelen sezgisel bir başvuruya göre kompleks bulanık küme tanımlayarak stoklarda geçerli tahmini değerlere dayalı bulanık küme ile birlikte borsanın periyodikliğini, bir kompleks üyelik derecesi ile göstermişlerdir. Thirunavukarasu ve ark. (2013), Gaussian tipi kompleks bulanık küme tanımlayarak kompleks bulanık sinir sistemi öncüllerini dizayn etmek için Gaussian kompleks bulanık kümesi tasarlamışlardır.

Bu tezde, önce klasik ve bulanık kümeler, aralık aritmetiği ve bulanık sayılar daha sonra kompleks sayılar, Moses ve ark. (1999a) ve Ramot ve ark. (2002)'na göre kompleks bulanık kümelere yer verilmiş olup, yeni bir çalışma olarak bölgesel kompleks bulanık kümeler tanımlanarak, bölgesel kompleks bulanık kümelerin bir uygulaması verilmiştir.

# 2. BULANIK KÜMELER

Bu bölümde bulanık kümelerle ilgili bilgiler verilmeden önce klasik kümeler ve bir takım özellikleri tanıtılacaktır.

## 2.1. Klasik Kümeler

Klasik kümeler, krisp (kesin veya keskin) kümeler olarak da bilinir. A ve B, U evreninin klasik alt kümelerini göstermek üzere, klasik küme teorisinde birleşim, kesişim, tümleyen ve alt küme aşağıdaki gibi tanımlanır:

**Tanım 2.1.1.** A ve B klasik kümelerinin birleşimi

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

ve kesişimi

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.1.2.** A klasik kümesinin tümleyeni

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

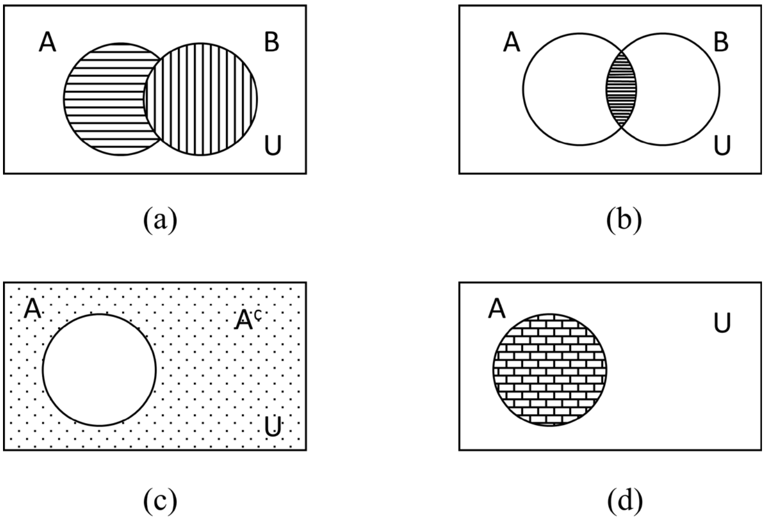
şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.1.3.** A ve B klasik kümelerinin U evreninin alt kümesi olması

$$A \subset U \text{ ve } B \subset U$$

ile gösterilir ve "A, U nun alt kümesidir." demek, A kümesinin her elemanının U ya ait olması demektir.

Tanım 2.1.1., 2.1.2. ve 2.1.3. e ait gösterimler, Venn diyagramı ya da Euler diyagramı olarak adlandırılan şekillerle, Şekil 2.1. de gösterilmiştir.




Şekil 2.1. Birleşim (a), kesişim (b), tümleyen (c) ve alt küme (d)

**Örnek 2.1.1.** A, B kümeleri ile U evrensel kümesi, A={1,3,5}, B={0,1,4} ve U={1,2,3,4,5,6} olarak verilsin. Burada A∪B={0,1,3,4,5}, A∩B={1}, $A^c$ ={2,4,6} dır. Ayrıca A⊂U fakat B⊄U dur. Çünkü 0∉U dur.

**Tanım 2.1.4.** A, U evrensel kümesinde bir klasik küme olsun. A nın karakteristik fonksiyonu $\chi_{\mathrm{A}}$: U → {0,1} olmak üzere,

$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1, \mathrm{x} \in \mathrm{A} \\ 0, \mathrm{x} \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu ifade x, A ya aitse $\chi_{\mathrm{A}}$ nın 1 ve A ya ait değilse $\chi_{\mathrm{A}}$ nın 0 olduğunu gösterir (Tanaka, 1997).

### 2.1.1. Klasik kümelerin özellikleri

A ve B klasik kümeler olmak üzere, klasik kümeler aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. $\mathrm{A} \subset (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}), \mathrm{B} \subset (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$
ii. $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset \mathrm{A}, (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$
iii. A∪ $A^c$ =U (Üçüncünün Olmazlığı İlkesi)
A∩ $A^c$ = ∅ (Çelişmezlik İlkesi)
iv. Eşgüçlülük İlkesi: $\mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A}, \mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A}$
v. Değişme İlkesi: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$
vi. Birleşme İlkesi: $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}, \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$

vii. Dağılma İlkesi: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

viii. Çift Değil İlkesi: $A=(A^c)^c$

ix. De Morgan İlkesi: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

### 2.2. Bulanık Kümeler

Bu alt bölümde, bulanık kümelerle ilgili temel tanımlar verilecek ve ardından küme işlemleri ile bulanık kümelerin özellikleri tanıtılacaktır.

Klasik kümeler karakteristik fonksiyonları ile tanımlanırken bulanık kümeler üyelik fonksiyonları ile tanımlanır.

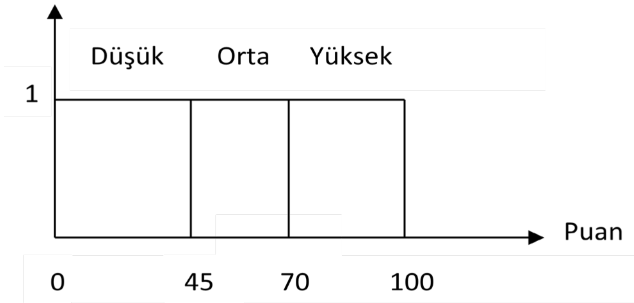
**Tanım 2.2.1.** $x \in U$ olmak üzere U, $x$ noktalarının (nesnelerinin) bir uzayı olsun. Bir *A* bulanık kümesi, U daki her noktayı $[0,1]$ aralığındaki reel bir sayıya birleştiren $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir ve $\mu_A(x)$, $x$ in *A* daki "üyelik derecesini" gösterir (Zadeh, 1965).

**Tanım 2.2.2.** U evrensel kümesinin bir *A* bulanık alt kümesi, $\mu_A$ üyelik fonksiyonu ile $\mu_A\colon U \to [0,1]$ şeklinde tanımlı bir kümedir. Burada üyelik değeri veya üyelik derecesi olarak adlandırılan $\mu_A(x)$ değeri, $x \in U$ nun *A* bulanık kümesine ait olma derecesini gösterir (Tanaka, 1997).

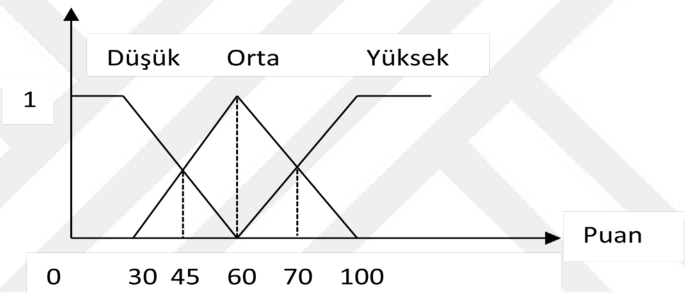
Bir klasik kümenin karakteristik fonksiyonunun değeri 0 ya da 1 den birini alırken, bir bulanık kümenin üyelik değeri 0 ve 1 arasında keyfi bir reel değer olabilir. $\mu_A(x)$ in 1 e daha yakın olması, *A* bulanık kümesindeki *x* elemanının daha yüksek üyelik derecesine sahip olması demektir. "0" değeri üye olmamayı ifade ederken, "1" değeri tam üye olmayı, 0 ve 1 arasındaki değerler ise kısmi üyeliği ifade eder.

Karakteristik fonksiyonlar ile üyelik fonksiyonları arasındaki farkın daha iyi anlaşılabilmesi için karşılaştırma yapalım. Şekil 2.2. ve Şekil 2.3. sırasıyla "düşük", "orta" ve "yüksek" puan için karakteristik fonksiyonları ve üyelik fonksiyonlarını gösterir.

**Örnek 2.2.1.** Ali, Ahmet ve Ayşe isimli üç öğrencinin notları Ali: 48, Ahmet: 68 ve Ayşe: 88 şeklinde olsun. Öğrencilerin puanları, sırasıyla aşağıdaki Tablo 2.1. ve Tablo 2.2. de klasik ve bulanık kümelere göre değerlendirilsin.




Şekil 2.2. Klasik kümelerde puanlar




Şekil 2.3. Bulanık kümelerde puanlar

Şekil 2.3. e göre sırasıyla düşük, orta ve yüksek kısımlar için denklemler yazılırsa

i) Düşük: $x+30y = 60$

ii) Orta (sırasıyla): $x-30y = 30$ ve $x+40y = 100$

iii) Yüksek: $x-40y = 60$ bulunur.

Tablo 2.1. Klasik kümelerde karakteristik fonksiyonların değeri

| Öğrenci Adı | Puanı | Düşük | Orta | Yüksek |
|---|---|---|---|---|
| Ali | 48 | 0 | 1 | 0 |
| Ahmet | 68 | 0 | 1 | 0 |
| Ayşe | 88 | 0 | 0 | 1 |

Tablo 2.2. Bulanık kümelerde üyelik fonksiyonlarının değeri

| Öğrenci Adı | Puanı | Düşük | Orta | Yüksek |
|---|---|---|---|---|
| Ali | 48 | 0.4 | 0.6 | 0 |
| Ahmet | 68 | 0 | 0.8 | 0.2 |
| Ayşe | 88 | 0 | 0.3 | 0.7 |

Klasik kümeler için Şekil 2.2. ve Tablo 2.1. e göre öğrenciler değerlendirilirse, Ali ve Ahmet "orta" puan grubunda, Ayşe ise "yüksek" puan grubundadır. Oysa bulanık kümeler için Şekil 2.3. ve Tablo 2.2. ye göre değerlendirme bu kadar kesin değildir. Öğrencilerin başarı durumları görecelidir. Buna göre Ali için daha düşük orta, Ahmet için daha yüksek orta ve Ayşe için nispeten yüksek şeklinde, başarı durumları dilbilimsel olarak ifade edilebilir. Buradan da görülebileceği gibi bulanık kümelerde değerlendirme özneldir.

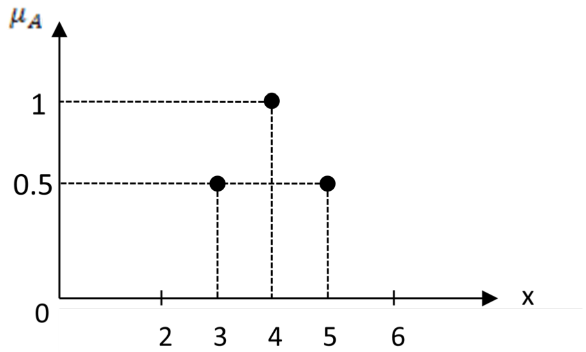
**Tanım 2.2.3.** U evrensel kümesindeki bir *A* bulanık kümesi,

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \,|\, x \in \mathrm{U},\ \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

sıralı ikililerin kümesi ile gösterilir (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

Tanım 2.2.3. te *A* bulanık kümesi, küme gösterimi ile yazılmıştır.

**Örnek 2.2.2.**




Şekil 2.4. Ayrık ifade

$A$ bulanık kümesi $A$={(3,0.5), (4,1), (5,0.5)} şeklinde yazılır.

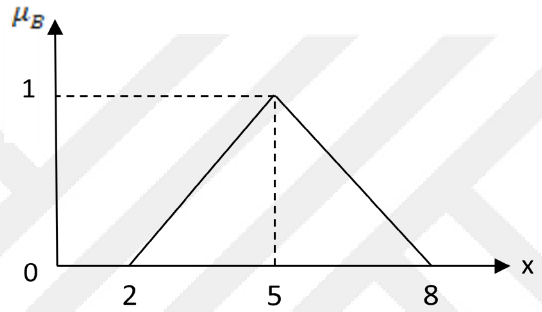
**Tanım 2.2.4.** $A \subset$ U olmak üzere $A$ bulanık kümesinin destek kümesi $S_A$,

$$S_A = \{x|x \in A, \mu_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır (Bellman ve Zadeh, 1970).

**Örnek 2.2.3.** Şekil 2.4. te $A$ bulanık kümesinin destek kümesi $S_A$={3,4,5} dir.

**Örnek 2.2.4.**




Şekil 2.5. Sürekli ifade

Şekil 2.5. teki $B$ bulanık kümesinin destek kümesi $S_B$=(2,8) dir.

**Tanım 2.2.5.** $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $A$ bulanık kümesinin zayıf α-seviye kümesi ya da α-kesimi $A_\alpha$,

$$A_\alpha = \{x|x \in \mathrm{U}, \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

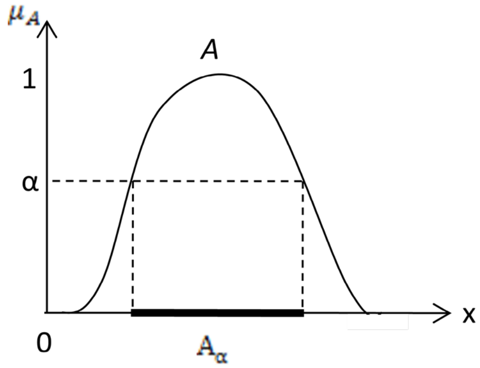
şeklinde tanımlanır (Dubois ve Prade, 1980).

**Tanım 2.2.6.** $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $A$ bulanık kümesinin güçlü α-seviye kümesi ya da α-kesimi $A'_\alpha$,

$$A'_\alpha = \{x|x \in \mathrm{U}, \mu_A(x) > \alpha\}$$

olarak tanımlanır (Dubois ve Prade, 1980).

Bulanık kümenin α-kesimi aşağıdaki şekilde verilmiştir.




Şekil 2.6. Bulanık kümenin α-kesimi

**Örnek 2.2.5.** *A*={(1,0.2),(2,0.6),(3,1),(4,0.4)} bulanık kümesi dikkate alınırsa *A* nın zayıf α-seviye kümeleri ya da α-kesimleri

$A_{0.2}$={1,2,3,4}

$A_{0.4}$={2,3,4}

$A_{0.6}$={2,3}

$A_1$={3}

α=0.4 için güçlü α-seviye kümesi

$A'_{0.4}$={2,3} olur.

*A*, U evreninde bir bulanık küme olmak üzere normal bulanık küme, konveks bulanık küme ile bulanık kümenin kardinalitesi kavramları aşağıda verilmiştir.

**Tanım 2.2.7.** Eğer $\max_{x\in \mathrm{U}} \mu_A(x) = 1$ ise *A* bulanık kümesine normaldir denir (Bellman ve Zadeh, 1970).

**Tanım 2.2.8.** $\forall x_1,\ x_2 \in \mathrm{U},\ \forall \lambda \in [0,1]$ için

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

ise *A* bulanık kümesine konvekstir denir (Zadeh, 1965).

Bulanık kümenin konveksliğini bulmak için, bulanık kümede maksimum üyelik değerine kadar soldan sağa ve sağdan sola sıralı elemanların değeri ile üyelik dereceleri karşılaştırılırsa, solda eleman değeri büyürken üyelik derecesi de büyüyorsa ve sağda eleman değeri küçülürken üyelik değeri büyüyorsa küme konveks, aksi durumda küme konveks değildir. Yani *A* bir bulanık küme ve maksimum üyelik değerini veren eleman değeri $x_m$ olmak üzere, soldaki elemanlar $x_1,\ x_2, \dots, x_m \in A$ için $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ iken $\mu_A(x_1) < \mu_A(x_2) \dots < \ \mu_A(x_m)$ ve sağdaki elemanlar $x_m,\ x_{m+1}, \dots, x_n \in A$ için $x_m < x_{m+1} < \cdots < x_n$ iken $\mu_A(x_m) > \mu_A(x_{m+1}) > \cdots > \ \mu_A(x_n)$ ise küme konveks, aksi durumda konveks değildir.

**Tanım 2.2.9.** U sonlu bir küme iken *A* bulanık kümesinin U daki kardinalitesi

$$|A| = \sum_{x \in \mathrm{U}} \mu_A\,(x)$$

ile tanımlıdır (Dubois ve Prade, 1980).

**Tanım 2.2.10.** $|A|$, *A* nın kardinalitesi ve $|\mathrm{U}|$, U evrenselinin kardinalitesi olmak üzere *A* bulanık kümesinin U daki göreli kardinalitesi

$$\|A\| = \frac{|A|}{|\mathrm{U}|}$$

ile tanımlıdır (Dubois ve Prade, 1980).

**Örnek 2.2.6.** *A* ve *B* iki bulanık küme ve U={0,1,2,3,4,5} olmak üzere

*A*={(1,0.3),(2,0.5),(3,1),(4,0.2)}

*B*={(1,0.5),(2,0.2),(3,0.6),(4,0.1)}

şeklinde verilsin. *A* kümesinde $\mu_A(3) = 1$ olduğundan *A* kümesi normaldir. *B* bulanık kümesinde hiçbir elemanın üyelik değeri 1 olmadığından *B* kümesi normal değildir. *A* bulanık kümesinin konveksliğine bakılırsa,

$$1 < 2 < 3 \text{ iken } \mu_A(1) < \mu_A(2) < \mu_A(3) \text{ ve } 4 > 3 \text{ iken } \mu_A(4) < \mu_A(3)$$

olduğundan *A* kümesi konvekstir. *B* bulanık kümesinin konveksliğine bakılırsa,

$$1<2 \text{ iken } \mu_B(1) > \mu_B(2) \text{ ve } 2<3 \text{ iken } \mu_B(2) < \mu_B(3)$$

olduğundan $B$ kümesi konveks değildir. $A$ kümesinin kardinalitesi

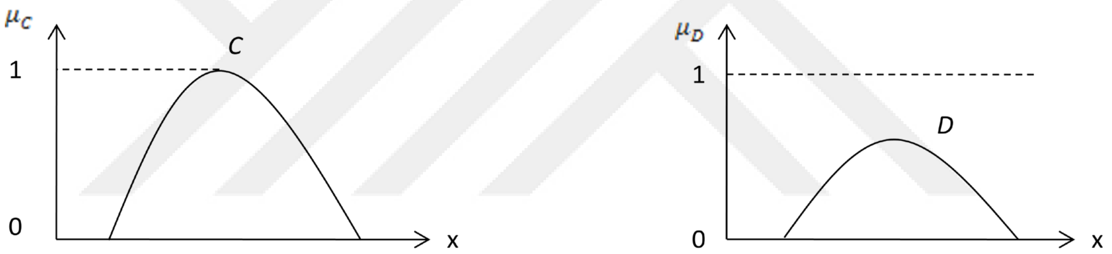
$$|A|=0.3+0.5+1+0.2=2$$

ve $B$ kümesinin kardinalitesi

$$|B|=0.5+0.2+0.6+0.1=1.4$$

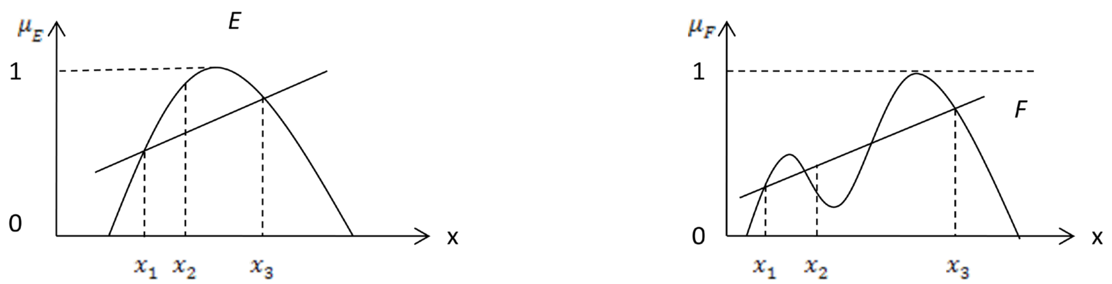
dir. $|U|=6$ olduğundan $A$ kümesinin göreli kardinalitesi $\|A\|=2/6=0,\overline{3}$ olur.

Normal olan ve olmayan bulanık kümeler ile konveks olan ve olmayan bulanık kümelerin gösterimi aşağıdaki gibidir.




(a) (b)

Şekil 2.7. (a) Normal bulanık küme, (b) normal olmayan bulanık küme




(a) (b)

Şekil 2.8. (a) Konveks bulanık küme, (b) konveks olmayan bulanık küme

$A$ ve $B$ iki bulanık küme olmak üzere birleşim, kesişim ve tümleyen aşağıdaki gibidir.

**Tanım 2.2.11.** $\mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \begin{cases} \mu_A(x), & \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \\ \mu_B(x), & \mu_A(x) < \mu_B(x) \end{cases}$ olmak üzere

$A$ ve $B$ bulanık kümelerinin birleşimi $A \tilde{\cup} B$, $\mu_{A\tilde{\cup}B}$ üyelik fonksiyonu ile

$$\mu_{A\tilde{\cup}B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

olarak tanımlanır (Tanaka, 1997).

**Tanım 2.2.12.** $\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \begin{cases} \mu_A(x), & \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \\ \mu_B(x), & \mu_A(x) > \mu_B(x) \end{cases}$ olmak üzere

$A$ ve $B$ bulanık kümelerinin kesişimi $A \tilde{\cap} B$, $\mu_{A\tilde{\cap}B}$ üyelik fonksiyonu ile

$$\mu_{A\tilde{\cap}B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

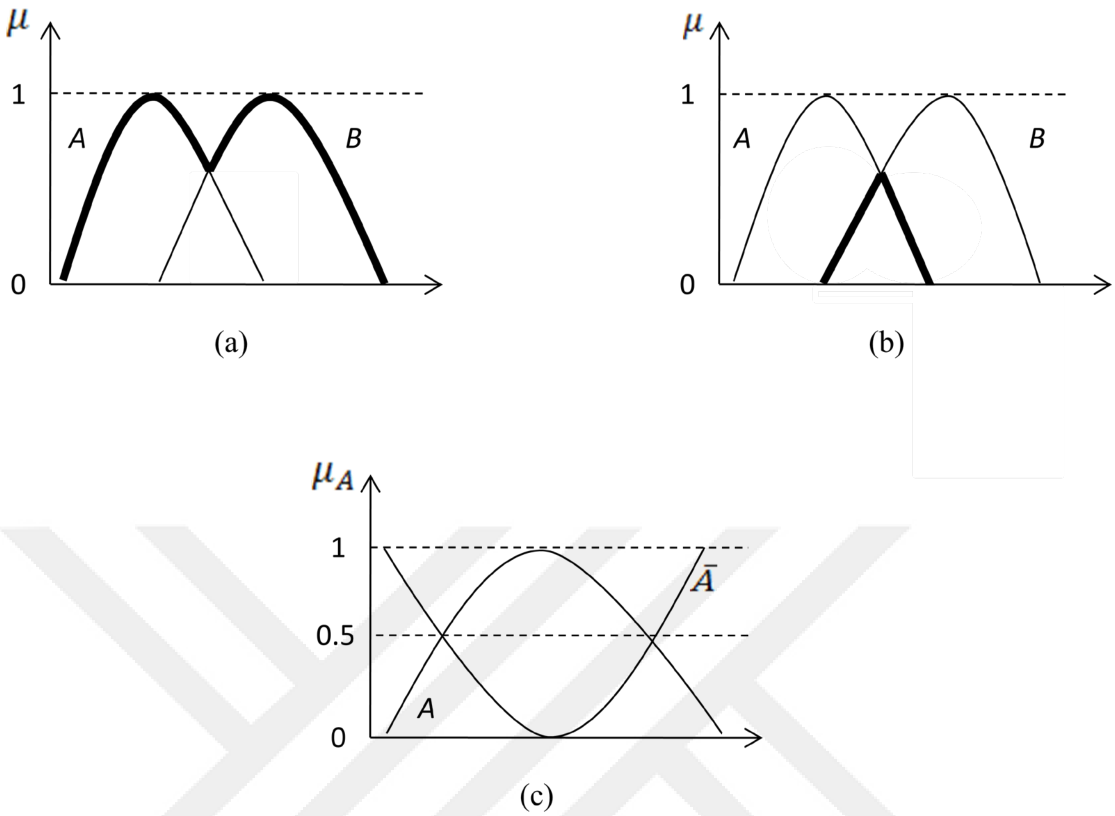
olarak tanımlanır (Tanaka, 1997).

**Tanım 2.2.13.** $A$ bulanık kümesinin tümleyeni $\bar{A}$, $\mu_{\bar{A}}$ üyelik fonksiyonu ile

$$\mu_{\bar{A}}(x)=1-\mu_A(x)$$

şeklinde tanımlanır (Tanaka, 1997).

Bulanık kümelerin birleşim, kesişim ve tümleyeninin gösterimi aşağıdaki şekillerde verilmiştir.




Şekil 2.9. (a) Birleşim, (b) kesişim, (c) tümleyen

**Örnek 2.2.7.** *A* ve *B* bulanık kümeleri,

$$A=\{(3,0.4),(4,0.5),(5,1),(6,0.8),(7,0.3)\}$$

$$B=\{(3,0.2),(4,0.9),(5,1),(6,0.7),(7,0.4)\}$$

şeklinde verilsin. Sırasıyla bu iki kümenin birleşimi, kesişimi ve *B* kümesinin tümleyeni aşağıdaki şekildedir.

İki kümenin aynı değerlerine karşılık gelen üyelik derecelerine bakıldığında, birleşimde büyük olan ve kesişimde küçük olan üyelik dereceleri alınarak birleşim ve kesişim kümeleri oluşturulur.

$$\mu_{A\tilde{\cup}B}(3) = \max\big(\mu_A(3), \mu_B(3)\big) = \max(0.4,0.2) = 0.4$$

$$\mu_{A\tilde{\cup}B}(4) = \max\big(\mu_A(4), \mu_B(4)\big) = \max(0.5,0.9) = 0.9$$

$$\mu_{A\tilde{\cup}B}(5) = \max(\mu_A(5), \mu_B(5)) = \max(1,1) = 1$$

$$\mu_{A\tilde{\cup}B}(6) = \max(\mu_A(6), \mu_B(6)) = \max(0.8,0.7) = 0.8$$

$$\mu_{A\tilde{\cup}B}(7) = \max(\mu_A(7), \mu_B(7)) = \max(0.3,0.4) = 0.4$$

$A \tilde{\cup} B$={(3,0.4),(4,0.9),(5,1),(6,0.8),(7,0.4)}

$$\mu_{A\tilde{\cap}B}(3) = \min(\mu_A(3), \mu_B(3)) = \min(0.4,0.2) = 0.2$$

$$\mu_{A\tilde{\cap}B}(4) = \min(\mu_A(4), \mu_B(4)) = \min(0.5,0.9) = 0.5$$

$$\mu_{A\tilde{\cap}B}(5) = \min(\mu_A(5), \mu_B(5)) = \min(1,1) = 1$$

$$\mu_{A\tilde{\cap}B}(6) = \min(\mu_A(6), \mu_B(6)) = \min(0.8,0.7) = 0.7$$

$$\mu_{A\tilde{\cap}B}(7) = \min(\mu_A(7), \mu_B(7)) = \min(0.3,0.4) = 0.3$$

$A \tilde{\cap} B$={(3,0.2),(4,0.5),(5,1),(6,0.7),(7,0.3)}

$$\mu_{\bar{B}}(3) = 1 - \mu_B(3) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\mu_{\bar{B}}(4) = 1 - \mu_B(4) = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$\mu_{\bar{B}}(5) = 1 - \mu_B(5) = 1 - 1 = 0$$

$$\mu_{\bar{B}}(6) = 1 - \mu_B(6) = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$\mu_{\bar{B}}(7) = 1 - \mu_B(7) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$\bar{B}$={(3,0.8),(4,0.1),(5,0),(6,0.3),(7,0.6)}

**Tanım 2.2.14.** $A$ ve $B$ iki bulanık küme olsun. $\forall x \in$ U için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise $A$ ve $B$ bulanık kümelerine eşit kümeler denir ve $A = B$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).

**Tanım 2.2.15.** $A$ ve $B$ iki bulanık küme olsun. $\forall x \in$ U için $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ ise $A$ bulanık kümesi $B$ bulanık kümesinin alt kümesidir denir ve $A \,\tilde{\subseteq}\, B$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).

**Tanım 2.2.16.** $A$ ve $B$ bulanık kümelerinin cebirsel çarpımı $A \cdot B$, $x \in$ U olmak üzere

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

ile tanımlanır (Bellman ve Zadeh, 1970).

**Tanım 2.2.17.** $A$ ve $B$ nin cebirsel (olasılıksal) toplamı $A \hat{+} B$, $x \in$ U olmak üzere

$$\mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Örnek 2.2.8.** $A$ ve $B$ bulanık kümeleri

$$A=\{(x_1, 0.2),(x_2, 0.5),(x_3, 1),(x_4, 0.1)\}$$

$$B=\{(x_1, 0.3),(x_2, 1),(x_3, 0.6),(x_4, 0.4)\}$$

olarak verilsin. Sırasıyla $A$ ve $B$ nin cebirsel çarpım ve toplamı

$$A \cdot B=\{(x_1, (0.2)(0.3)),(x_2, (0.5)(1)),(x_3, (1)(0.6)),(x_4, (0.1)(0.4))\}$$

$$=\{(x_1, 0.06),(x_2, 0.5),(x_3, 0.6),(x_4, 0.04)\}$$

$$A \hat{+} B =\{(x_1, 0.2 + 0.3 - 0.06),(x_2, 0.5 + 1 - 0.5),(x_3, 1 + 0.6 - 0.6),(x_4, 0.1 + 0.4 - 0.04)\}$$

$$=\{(x_1, 0.44),(x_2, 1),(x_3, 1),(x_4, 0.46)\}$$

olarak bulunur.

**Tanım 2.2.18.** $x \in X$, $y \in Y$ ve $f$, $X$ ten $Y$ ye bir eşleme olsun. $y$, $x$ in $f$ altındaki görüntüsü olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonu ve $A = \{x, \mu_A(x)\}$, $\mu_A(x) \in [0,1]$ bulanık kümesi dikkate alınsın.

Genişletme prensibi

$$f(A) = f\left(\left\{\left(x, \mu_A(x)\right)\right\}\right) = \left\{\left(f(x), \mu_A(x)\right)\right\}$$

işlemi ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Örnek 2.2.9.** y=f(x)=$x^2$ olsun ve *A* bulanık kümesi

$$A=\{(1,0.5),(2,1),(3,0.7),(4,0.3)\}$$

şeklinde verilsin. Bu takdirde Tanım 2.2.18. den genişletme prensibi gereği

$$f(A) = \left\{\left(f(x), \mu_A(x)\right)\right\}$$

$$= \{(1^2, 0.5), (2^2, 1), (3^2, 0.7), (4^2, 0.3)\}$$

$$=\{(1,0.5),(4,1),(9,0.7),(16,0.3)\}$$

bulunur.

**2.2.1. Bulanık kümelerin özellikleri**

*A*, *B* ve *C*, U evreninde bulanık kümeler olsun.

i. Eşgüçlülük İlkesi: $A \,\tilde{\cup}\, A = A,\ A \,\tilde{\cap}\, A = A$
ii. Değişme İlkesi: $A \,\tilde{\cup}\, B = B \,\tilde{\cup}\, A,\ A \,\tilde{\cap}\, B = B \,\tilde{\cap}\, A$
iii. Birleşme İlkesi: $A \,\tilde{\cup}\, (B \,\tilde{\cup}\, C) = (A \,\tilde{\cup}\, B) \,\tilde{\cup}\, C,\ A \,\tilde{\cap}\, (B \,\tilde{\cap}\, C) = (A \,\tilde{\cap}\, B) \,\tilde{\cap}\, C$
iv. Dağılma İlkesi: $A \,\tilde{\cup}\, (B \,\tilde{\cap}\, C) = (A \,\tilde{\cup}\, B) \,\tilde{\cap}\, (A \,\tilde{\cup}\, C)$
$$A \,\tilde{\cap}\, (B \,\tilde{\cup}\, C) = (A \,\tilde{\cap}\, B) \,\tilde{\cup}\, (A \,\tilde{\cap}\, C)$$
v. Çift Değil İlkesi: $A = \bar{\bar{A}}$
vi. De Morgan İlkesi: $\overline{A \,\tilde{\cup}\, B} = \bar{A} \,\tilde{\cap}\, \bar{B}, \overline{A \,\tilde{\cap}\, B} = \bar{A} \,\tilde{\cup}\, \bar{B}$
vii. Üçüncünün Olmazlığı İlkesi: $A \,\tilde{\cup}\, \bar{A} \neq$ U olduğundan bu ilke genelde bulanık kümeler için geçerli değildir.
viii. Çelişmezlik İlkesi: $A \,\tilde{\cap}\, \bar{A} \neq \emptyset$ olduğundan bu ilke de genel olarak bulanık kümeler için geçerli değildir. Burada $\emptyset$ boş küme demektir (Tanaka, 1997).

## 3. BULANIK SAYILAR

Bu bölümde, ilk olarak aralık sayıları tanıtılacak ve daha sonra bulanık sayılar ile ilgili detaylı bilgi verilecektir.

### 3.1. Aralık Sayıları

Bu alt bölümde, aralık sayılarına ve işlemlerine ilişkin tanımlar verilerek aralık işlem özellikleri tanıtılacaktır.

**Tanım 3.1.1.** Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için $a_1 < a_2$ olacak şekilde $x$ değeri $a_1$ ve $a_2$ reel sayıları arasında bulunuyorsa yani $a_1 < x < a_2$ ise $(a_1, a_2)$ ye aralık denir (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Tanım 3.1.2.** Herhangi bir $x$ değeri $a_1 \leq x \leq a_2$ veya $x \in [a_1, a_2]$ şeklinde $[a_1, a_2]$ kapalı sınırlı aralığına ait ise $a_1$ ve $a_2$ ye sınırlar veya aralığın uç noktaları denir (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

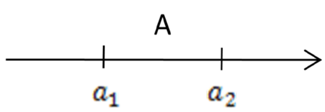
x, açık sınırlı bir $(a_1, a_2)$ aralığına yani $a_1 < x < a_2$ ya da kapalı-açık sınırlı bir $[a_1, a_2)$ aralığına yani $a_1 \leq x < a_2$ ya da açık-kapalı sınırlı bir $(a_1, a_2]$ aralığına yani $a_1 < x \leq a_2$ ait olabilir. Aynı zamanda bir aralık $(-\infty, a_2], (-\infty, a_2), [a_1, \infty), (a_1, \infty)$ şeklinde açık ya da kapalı ve sınırsız olabilir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi de bir aralıktır ve $(-\infty, \infty)$ ile gösterilebilir.

**Tanım 3.1.3.** Bir A aralık sayısı, $a_1 \leq x \leq a_2$ yani $x \in [a_1, a_2]$, $a_1$,$a_2 \in \mathbb{R}$ ya da

$$A=[a_1, a_2]=\{x \,|\, a_1 \leq x \leq a_2, x \in \mathbb{R}\}$$

olacak şekilde x reel sayılarının kümesi olarak tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

A aralık sayısı aşağıda reel sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir.




Şekil 3.1. A aralık sayısı

**Tanım 3.1.4.** Yukarıda $a_1$=$a_2$=$a$ olması durumunda A aralık sayısı $a$=[ $a, a$] reel sayısına indirgenir ve A ya nokta aralığı ya da tek nokta kümesi denir (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Örnek 3.1.1.** -1=[-1,-1], 2=[2,2], 6=[6,6] nokta aralıklarıdır.

**Tanım 3.1.5.** A aralığının genişliği

$$w(A)=w[a_1,a_2]= a_2-a_1$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Tanım 3.1.6.** A aralığının büyüklüğü

$$|A| = |[a_1, a_2]| = \max(|a_1|, |a_2|) = \begin{cases} |a_1|, & |a_1| \geq |a_2| \; ise \\ |a_2|, & |a_1| \leq |a_2| \; ise \end{cases}$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Tanım 3.1.7.** A aralığının görüntüsü

$$A^{-} = [a_1, a_2]^{-} = [-a_2, -a_1]$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Tanım 3.1.8.** A aralığının tersi

$$A^{-1} = [a_1, a_2]^{-1} = [\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}]$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Örnek 3.1.2.** A=[1,3] olsun. Bu takdirde yukarıdaki tanımlardaki ifadeleri bulacak olursak

$$w(A)=w([1,3])=3-1=2$$

$$|A|=|[1,3]|=\max(|1|, |3|) = 3$$

$$A^{-}=[1,3]^{-}=[-3, -1]$$

$$A^{-1} = [1,3]^{-1}=[\frac{1}{3},\frac{1}{1}]=[\frac{1}{3},1]$$

A=$[a_1, a_2]$ ve B=$[b_1, b_2]$ aralıkları için aşağıdaki işlemler inşa edilebilir.

**Tanım 3.1.9.** A ve B aralıklarının toplamı

$$A+B=[a_1, a_2]+[b_1, b_2]=[a_1+b_1, a_2+b_2]$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Tanım 3.1.10.** A ve B aralıklarının farkı

$$A-B=[a_1, a_2]-[b_1, b_2]=[a_1-b_2, a_2-b_1]$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

Burada $-B = B^{-}$ olduğu görülür.

**Tanım 3.1.11.** A ve B aralıklarının çarpımı

$$\begin{aligned} A \cdot B = AB &= [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] \\ &= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] \end{aligned}$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

Eğer $A, B \in \mathbb{R}^{+}$ ise

$$A \cdot B = AB = [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [a_1b_1, a_2b_2]$$

olur.

**Tanım 3.1.12.** A ve B aralıklarının bölümü

$$A:B=A/B=\frac{A}{B}=[a_1, a_2]:[b_1, b_2]=[a_1, a_2]\cdot[\frac{1}{b_2},\frac{1}{b_1}],\ 0 \notin [b_1, b_2]$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

Burada $A:B=A \cdot B^{-1}$ olduğu görülür.

**Örnek 3.1.3.** A=[1,3] ve B=[2,5] aralıkları verilsin. Bu takdirde

A+B=[1,3]+[2,5]=[1+2,3+5]=[3,8]

A-B=[1,3]-[2,5]=[1-5,3-2]=[-4,1]

A·B=[1,3]·[2,5]=[1·2,3·5]=[2,15]

A:B=[1,3]:[2,5]=[1,3] ·[$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$]=[$\frac{1}{5}$ , $\frac{3}{2}$]

olarak bulunur.

**Tanım 3.1.13.** Reel sayılarda tanımlı A=$[a_1, a_2]$ ve B=$[b_1, b_2]$ aralıkları arasındaki uzaklık

d(A,B)=max($|a_1 - b_1|$,$|a_2 - b_2|$)

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

A ve B, A=$[a, a]$ ve B=$[b, b]$ şeklinde nokta aralıkları ise

d($[a, a]$,$[b, b]$)=max($|a - b|$, $|a - b|$)= $|a - b|$

olur. Yani nokta aralıkları arasındaki uzaklık, reel sayılar arasındaki uzaklığa indirgenir.

**Örnek 3.1.4.** A=[-1,2] ve B=[3,7] aralıkları arasındaki uzaklık

d(A,B)=max($|-1 - 3|$,$|2 - 7|$)=max(4,5)=5

olur.

**Örnek 3.1.5.** $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde tanımlı [-2,3] aralığı [-2,3]={-2,-1,0,1,2,3} şeklinde yazılır.

### 3.1.1. Aralık işlem özellikleri

A=$[a_1, a_2]$, B=$[b_1, b_2]$ ve C=$[c_1, c_2]$ aralıkları için aralıkların toplanması ve çarpımında aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. A+B=B+A (toplamada değişme özelliği)

ii. (A+B)+C=A+(B+C) (toplamada birleşme özelliği)

iii. A=A+0=0+A (toplamada etkisiz eleman 0=[0,0] nokta aralığı)

iv. A·B=B·A (çarpmada değişme özelliği)

v. (A·B) ·C=A·(B·C) (çarpmada birleşme özelliği)

vi. A=A·1=1·A (çarpmada etkisiz eleman 1=[1,1] nokta aralığı)

vii. a=[a,a] ise a· (B+C)=a·B+a·C (çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)

viii. d(A,B)=d(B,A) (uzaklıkta değişme özelliği)

ix. d(A,B)=0⇔A=B (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

### 3.2. Bulanık Sayılar

Bu alt bölümde, bulanık sayılarla ilgili temel tanımlar verildikten sonra bulanık sayılarda aritmetik işlemler ve bulanık sayı çeşitleri ile bunların aritmetik işlemlerine yer verilecektir.

**Tanım 3.2.1.** Bulanık bir kümenin herhangi bir elemanının değeri, kesin olmayan fakat sınırlandırılmış bir şekilde $[a_1,a_2]$ aralığının iki uç noktası ise bu aralığa bulanık aralık denir (Baykal ve Beyan, 2004).

**Tanım 3.2.2.** Yukarıda, $a$ bulanık kümenin elemanı olarak kabul edilirse $a_1 \leq a \leq a_2$ olacağı aşikârdır. Burada $[a_1,a_2] \subset \mathbb{R}$ ye güven aralığı denir (Baykal ve Beyan, 2004).

**Tanım 3.2.3.** Reel sayıların $\mathbb{R}$ evrenindeki bir $A$ bulanık kümesi,

i. $A$, konveks bulanık küme

ii. $\mu_A(x) = 1$ i sağlayan tek bir $x$ var yani $A$ bulanık kümesi normal

iii. $\mu_A$ bir aralıkta sürekli

durumlarını sağlarsa bulanık sayı olarak adlandırılır (Tanaka, 1997).

**Tanım 3.2.4.** $A$ bulanık sayısı, $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}$ ve $m_1 < m_2$ olmak üzere

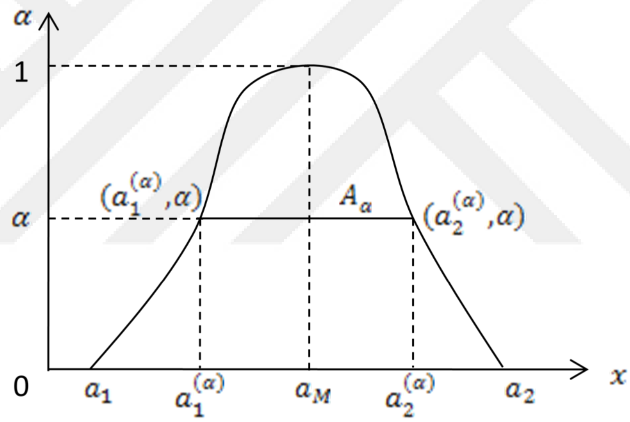
$$\forall x \in [m_1, m_2] \text{ için } \mu_A(x) = 1$$

ise $A$ ya düz bulanık sayı denir (Tanaka, 1997).

**Tanım 3.2.5.** $A$ bulanık sayısı için $\alpha$-seviye aralığı ya da $\alpha$-kesimi olarak adlandırılan aralık kümesi

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}], \alpha \in [0,1]$$

olarak tanımlanır ve uç noktaları $(a_1^{(\alpha)}, \alpha)$, $(a_2^{(\alpha)}, \alpha)$ , tepe noktası $(a_M, 1)$ şeklindedir (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).




Şekil 3.2. Bulanık sayının $\alpha$-kesimi, uç noktaları ve tepe noktası

$A$ bulanık sayısı

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \mu_A^l(x), & a_1 \leq x \leq a_M \\ \mu_A^r(x), & a_M \leq x \leq a_2 \end{cases}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonunun sol kısmı $\mu_A^l(x)$ ve sağ kısmı $\mu_A^r(x)$ şeklindedir (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

$A$ ve $B$ bulanık sayıları için $\alpha$-kesimleri $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ ve $B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$ olmak üzere $\alpha$-kesimi cinsinden bulanık sayı işlemleri aşağıda verilmiştir.

**Tanım 3.2.6.** $\alpha$-seviye aralık kümelerinin toplamı

$$A_\alpha + B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] + [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}]$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Tanım 3.2.7.** $A_\alpha$ ile $B_\alpha$ nın farkı

$$A_\alpha - B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] - [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}]$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Tanım 3.2.8.** $\alpha$-seviye aralıkların çarpımı

$A_\alpha \cdot B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \cdot [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$=[min$(a_1^{(\alpha)} b_1^{(\alpha)}, a_1^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)})$,

max$(a_1^{(\alpha)} b_1^{(\alpha)}, a_1^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)})$]

ile tanımlanır. Eğer $A_\alpha,\ B_\alpha \in \mathbb{R}^+$ ise

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)}]$$

olarak bulunur (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Tanım 3.2.9.** $A_\alpha$ nın $B_\alpha$ ya bölümü

$$A_\alpha : B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] : [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \cdot [\frac{1}{b_2^{(\alpha)}}, \frac{1}{b_1^{(\alpha)}}],\ 0 \notin [b_1, b_2]$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Örnek 3.2.1.** $A_\alpha,\ B_\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $A$ ve $B$ bulanık sayılarının $\alpha$-seviye aralıkları sırasıyla

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [2\alpha + 3, 3\alpha - 1]$$

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [5\alpha - 4, 8 - 9\alpha]$$

olsun. Aralıklar arasında toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yapılırsa

$$A_\alpha + B_\alpha=[2\alpha + 3, 3\alpha - 1]+ [5\alpha - 4,8 - 9\alpha]=[7\alpha - 1,7 - 6\alpha]$$

$$A_\alpha - B_\alpha=[2\alpha + 3, 3\alpha - 1]- [5\alpha - 4,8 - 9\alpha]=[ 2\alpha + 3 -(8 - 9\alpha), 3\alpha - 1 -(5\alpha - 4)]$$

$$=[11\alpha - 5, -2\alpha + 3]$$

$$A_\alpha \cdot B_\alpha=[2\alpha + 3, 3\alpha - 1]\cdot [5\alpha - 4,8 - 9\alpha]=[( 2\alpha + 3)\cdot( 5\alpha - 4),( 3\alpha - 1)\cdot( 8 - 9\alpha)]$$

$$=[10\alpha^2 + 7\alpha - 12, -27\alpha^2 + 33\alpha - 8]$$

$$A_\alpha:B_\alpha=[2\alpha + 3, 3\alpha - 1]: [5\alpha - 4,8 - 9\alpha]=[2\alpha + 3, 3\alpha - 1] \cdot[\frac{1}{8-9\alpha}, \frac{1}{5\alpha-4}]$$

$$=[ \frac{2\alpha+3}{8-9\alpha}, \frac{3\alpha-1}{5\alpha-4} ]$$

**Tanım 3.2.10.** $x, y, z \in$ U olmak üzere reel sayılardaki * ikili işlemi ile, U evrenindeki

$$\mu_{A \circledast B}(z)=\overset{sup}{}_{x \circledast y}[\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$$

ye $A$ ve $B$ bulanık sayılarının genişlemesi denir (Tanaka, 1997).

Yukarıdaki tanıma göre genel bulanık sayı toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri tanımlanabilir.

**Tanım 3.2.11.** Genel bulanık sayı aritmetiği aşağıdaki gibidir:

i. Toplama: $\mu_{A \oplus B}(z)=\overset{sup}{}_{x \oplus y}[\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$

ii. Çıkarma: $\mu_{A \ominus B}(z)=\overset{sup}{}_{x \ominus y}[\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$

iii. Çarpma: $\mu_{A \otimes B}(z)=\overset{sup}{}_{x \otimes y}[\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$

iv. Bölme: $\mu_{A \oslash B}(z)=\overset{sup}{}_{x \oslash y}[\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$, $y \neq 0$ (Tanaka, 1997).

**Örnek 3.2.2.** $A = \{(1,0.5), (2,1)\}$ ve $B = \{(2,0.5), (3,1)\}$ bulanık sayıları için toplama işlemi yapılırsa, toplamda alınabilecek en küçük değer 3 ve en büyük değer 5 olduğundan

$z < 3$ için $\mu_{A \oplus B}(z)$=0

$z = 3$ için $x + y = 1 + 2 = 3$ ten

$\mu_{A \oplus B}(3)$= $\underset{1 \oplus 2}{sup}[\mu_A(1) \wedge \mu_B(2)]$= $\underset{1 \oplus 2}{sup}[0.5 \wedge 0.5]$=0.5

$z = 4$ için $x + y = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$ ten

$\mu_A(1) \wedge \mu_B(3) = 0.5 \wedge 1 = 0.5$

$\mu_A(2) \wedge \mu_B(2) = 1 \wedge 0.5 = 0.5$

$\mu_{A \oplus B}(4)$= $\underset{x \oplus y}{sup}[0.5, 0.5]$==0.5

$z = 5$ için $x + y = 2 + 3 = 5$ ten

$\mu_{A \oplus B}(5)$= $\underset{2 \oplus 3}{sup}[\mu_A(2) \wedge \mu_B(3)]$= $\underset{2 \oplus 3}{sup}[1 \wedge 1]$=1

$z > 5$ için $\mu_{A \oplus B}(z)$=0

Buradan $A + B = \{(3,0.5), (4,0.5), (5,1)\}$ bulunur.

**Örnek 3.2.3.** *A* ve *B*, $\mathbb{Z}$ de iki bulanık sayı olsun.

*A*=

| | | | |
|---|---|---|---|
| -2 | -1 | 0 | 1 |
| 0.3 | 0.8 | 1 | 0.6 |

*B*=

| | | | |
|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 | 2 |
| 0.4 | 1 | 0.7 | 0.2 |

şeklinde tanımlansın.

Çıkarma işlemi yapılırsa *A* ve *B* bulanık sayılarının elemanları arasındaki farklar en küçük -4 ve en büyük 2 dir. Buna göre

$\mu_{A \ominus B}(-4)$=$\underset{-2 \ominus 2}{sup}[\mu_A(-2) \wedge \mu_B(2)]$= $\underset{-2 \ominus 2}{sup}[0.3 \wedge 0.2]$=0.2

$\mu_{A \ominus B}(-3)$=$\underset{x \ominus y}{sup}[(\mu_A(-2) \wedge \mu_B(1)), (\mu_A(-1) \wedge \mu_B(2))]$= $\underset{x \ominus y}{sup}[(0.3 \wedge 0.7), (0.8 \wedge 0.2)]$

=$\underset{x \ominus y}{sup}[0.3,0.2]$=0.3

$\mu_{A \ominus B}(-2)$=$\underset{x \ominus y}{sup}[(\mu_A(-2) \wedge \mu_B(0)), (\mu_A(-1) \wedge \mu_B(1)), (\mu_A(0) \wedge \mu_B(2))]$

$=\underset{x\ominus y}{sup}[(0.3 \wedge 1),(0.8 \wedge 0.7),(1 \wedge 0.2)]=\underset{x\ominus y}{sup}[0.3,0.7,0.2]=0.7$

$\mu_{A\ominus B}(-1)=\underset{x\ominus y}{sup}[(\mu_A(-2) \wedge \mu_B(-1)),(\mu_A(-1) \wedge \mu_B(0)),(\mu_A(0) \wedge \mu_B(1),(\mu_A(1) \wedge$

$\mu_B(2))]=\underset{x\ominus y}{sup}[(0.3 \wedge 0.4),(0.8 \wedge 1),(1 \wedge 0.7),(0.6 \wedge 0.2)]=\underset{x\ominus y}{sup}[0.3,0.8,0.7,0.2]=0.8$

$$\mu_{A\ominus B}(0)=\underset{x\ominus y}{sup}[(\mu_A(-1) \wedge \mu_B(-1)),(\mu_A(0) \wedge \mu_B(0)),(\mu_A(1) \wedge \mu_B(1))]$$

$$=\underset{x\ominus y}{sup}[(0.8 \wedge 0.4),(1 \wedge 1),(0.6 \wedge 0.7)]=\underset{x\ominus y}{sup}[0.4,1,0.6]=1$$

$$\mu_{A\ominus B}(1)=\underset{x\ominus y}{sup}[(\mu_A(0) \wedge \mu_B(-1)),(\mu_A(1) \wedge \mu_B(0))]=\underset{x\ominus y}{sup}[(1 \wedge 0.4),(0.6 \wedge 1)]$$

$$=\underset{x\ominus y}{sup}[0.4,0.6]=0.6$$

$$\mu_{A\ominus B}(2)=\underset{1\ominus -1}{sup}[\mu_A(1) \wedge \mu_B(-1)]=\underset{1\ominus -1}{sup}[0.6 \wedge 0.4]=0.4$$

Buradan

$$A\text{-}B=\{(-4,0.2),(-3,0.3),(-2,0.7),(-1,0.8),(0,1),(1,0.6),(2,0.4)\}$$

bulunur. Çarpma ve bölme işlemleri de benzer şekilde yapılabilir.

Aşağıda bulanık sayı çeşitlerinden, üçgen ve yamuk bulanık sayılara ait tanımlar ve özellikler verilecektir.

**Tanım 3.2.12.** Bir *A* üçgen bulanık sayısı

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_1}{a_M-a_1}, & a_1 \le x \le a_M \\ \dfrac{x-a_2}{a_M-a_2}, & a_M \le x \le a_2 \\ 0, & aksi\ takdirde\end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır ve $A=(a_1, a_M, a_2)$ şeklinde gösterilir. Burada $[a_1, a_2]$ destek aralığı ve $(a_M, 1)$ tepe noktasıdır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

Yukarıdaki tanıma göre $\alpha$-seviye aralığı

$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ ve $a_1 \le x \le a_M$ için $x=a_1^{(\alpha)}$, $a_M \le x \le a_2$ için $x=a_2^{(\alpha)}$ olduğundan buradan

$$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)} - a_1}{a_M - a_1}$$

$$\alpha = \frac{a_2^{(\alpha)} - a_2}{a_M - a_2}$$

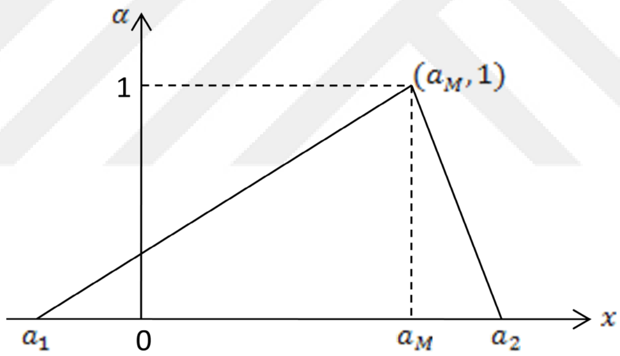
ifadelerinden

$$a_1^{(\alpha)} = a_1 + \alpha(a_M - a_1) \text{ ve } a_2^{(\alpha)} = a_2 + \alpha(a_M - a_2)$$

bulunur. Buradan

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [a_1 + \alpha(a_M - a_1), a_2 + \alpha(a_M - a_2)]$$

şeklindedir.




Şekil 3.3. Üçgen bulanık sayı

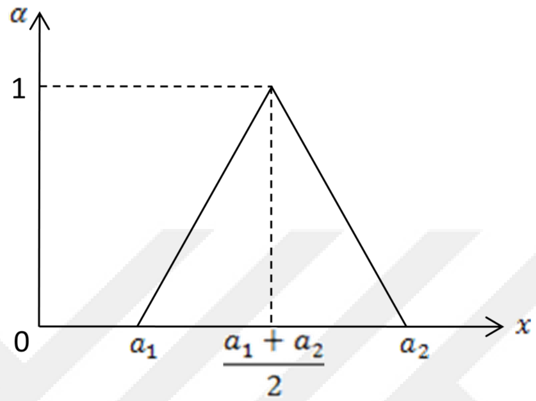
Yukarıdaki şekle ve üçgen bulanık sayının tanımına göre $A$ üçgen bulanık sayısı

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \mu_A^l(x), & a_1 \le x \le a_M \\ \mu_A^r(x), & a_M \le x \le a_2 \\ 0, & aksi\ takdirde \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonunun sol kısmı $\mu_A^l(x)$ ve sağ kısmı $\mu_A^r(x)$ şeklindedir (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Tanım 3.2.13.** Bir üçgen bulanık sayıda $a_M \in (a_1, a_2)$ noktası destek aralığının ortasında bulunuyorsa yani $a_M = \frac{a_1+a_2}{2}$ ise bulanık sayıya merkezi üçgen bulanık sayı denir (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

Merkezi üçgen bulanık sayı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.




Şekil 3.4. Merkezi üçgen bulanık sayı

Eğer bir merkezi üçgen bulanık sayıda $a_M = 0$ ise bu bulanık sayı $\alpha$ ya göre simetriktir.

**Örnek 3.2.4.** $A$ üçgen bulanık sayısı

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}, & 1 \le x \le 3 \\ \dfrac{6-x}{3}, & 3 \le x \le 6 \\ 0, & aksi\ takdirde \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile verilsin. Üçgen bulanık sayının $\alpha$ kesimi bulunursa

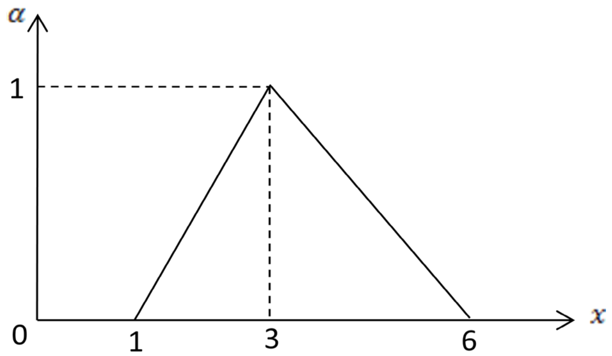
$$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)}-1}{2} \Rightarrow a_1^{(\alpha)} = 2\alpha + 1$$

$$\alpha = \frac{6-a_2^{(\alpha)}}{3} \Rightarrow a_2^{(\alpha)} = 6 - 3\alpha$$

olduğundan

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [2\alpha + 1, 6 - 3\alpha]$$

$\alpha = 0.5$ için $A_{0.5}$=[2, 4.5] bulunur.




Şekil 3.5. $A$ üçgen bulanık sayısı

$A = (a_1, a_M, a_2)$ ve $B = (b_1, b_M, b_2)$ şeklinde gösterilen ve sırasıyla

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \mu_A^l(x), & a_1 \leq x \leq a_M \\ \mu_A^r(x), & a_M \leq x \leq a_2 \\ 0, & aksi\ takdirde \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \mu_B^l(x), & b_1 \leq x \leq b_M \\ \mu_B^r(x), & b_M \leq x \leq b_2 \\ 0, & aksi\ takdirde \end{cases}$$

ile verilen $A$ ve $B$ üçgen bulanık sayıları için aritmetik işlemler aşağıda verilmiştir.

**Tanım 3.2.14.** $A$ ve $B$ üçgen bulanık sayılarının toplamı

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} \mu_{A+B}^l(x), & a_1 + b_1 \leq x \leq a_M + b_M \\ \mu_{A+B}^r(x), & a_M + b_M \leq x \leq a_2 + b_2 \\ 0, & aksi\ takdirde \end{cases}$$

kısaca

$$A + B = (a_1, a_M, a_2) + (b_1, b_M, b_2) = (a_1 + b_1, a_M + b_M, a_2 + \mathrm{b}_2)$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

İki üçgen bulanık sayının toplamı yine bir üçgen bulanık sayıdır.

**Örnek 3.2.5.** $A$ ve $B$ üçgen bulanık sayıları

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{3}, -4 \le x \le -1 \\ \frac{2-x}{3}, -1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{2}, 3 \le x \le 5 \\ \frac{9-x}{4}, 5 \le x \le 9 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde $A$ ve $B$ nin toplamı

$$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)}+4}{3} \Rightarrow a_1^{(\alpha)} = 3\alpha - 4$$

$$\alpha = \frac{2-a_2^{(\alpha)}}{3} \Rightarrow a_2^{(\alpha)} = 2 - 3\alpha$$

olduğundan

$A_\alpha = [3\alpha - 4, 2 - 3\alpha]$ bulunur. Benzer şekilde, $B_\alpha$ da bulunursa

$$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}-3}{2} \Rightarrow b_1^{(\alpha)} = 2\alpha + 3$$

$$\alpha = \frac{9-b_2^{(\alpha)}}{4} \Rightarrow b_2^{(\alpha)} = 9 - 4\alpha$$

olduğundan

$B_\alpha = [2\alpha + 3, 9 - 4\alpha]$ çıkar. Buradan

$$A_\alpha + B_\alpha = [3\alpha - 4, 2 - 3\alpha] + [2\alpha + 3, 9 - 4\alpha] = [5\alpha - 1, 11 - 7\alpha]$$

elde edilir.

$$\mu_{A+B}^l(x) = 5\alpha - 1 \text{ ve } \mu_{A+B}^r(x) = 11 - 7\alpha$$

olduğundan

$\mu_{A+B}(x)$ i bulmak için $x = 5\alpha - 1$ ve $x = 11 - 7\alpha$ olduğundan

$$\alpha = \frac{x+1}{5}, -1 \le x \le 4 \text{ ve } \alpha = \frac{11-x}{7}, 4 \le x \le 11$$

elde edilir ve

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{5}, -1 \le x \le 4 \\ \frac{11-x}{7}, \; 4 \le x \le 11 \end{cases}$$

bulunur.

$A$=$(-4, -1, 2)$ ve $B$=$(3,5,9)$ olduğundan buradan da

$$A + B = (-4 + 3, -1 + 5, 2 + 9) = (-1, 4, 11)$$

elde edilir.

**Tanım 3.2.15.** $A$ ve $B$ üçgen bulanık sayılarının farkı

$$A - B = (a_1, a_M, a_2) - (b_1, b_M, b_2) = (a_1, a_M, a_2) + (-b_2, -b_M, -b_1)$$

$$= A + B^- = (a_1 - b_2, a_M - b_M, a_2 - b_1)$$

ya da

$$\mu_{A-B}(x) = \begin{cases} \mu^l_{A-B}(x), \; a_1 - b_2 \le x \le a_M - b_M \\ \mu^r_{A-B}(x), \; a_M - b_M \le x \le a_2 - b_1 \\ 0, \quad aksi\ takdirde \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

İki üçgen bulanık sayının farkı yine bir üçgen bulanık sayıdır.

**Örnek 3.2.6.** $A$ ve $B$ üçgen bulanık sayıları

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{5}, \; 3 \le x \le 8 \\ \frac{11-x}{3}, \; 8 \le x \le 11 \\ 0, \; aksi\ takdirde \end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}\frac{x+10}{6}, -10 \le x \le -4\\ \frac{7-x}{11},\ -4 \le x \le 7\\ 0,\ aksi\ takdirde\end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde $A$-$B$ bulunursa

$$\alpha=\frac{a_1^{(\alpha)}-3}{5} \Rightarrow a_1^{(\alpha)}=5\alpha+3$$

$$\alpha=\frac{11-a_2^{(\alpha)}}{3} \Rightarrow a_2^{(\alpha)}=11-3\alpha$$

olduğundan buradan $A_\alpha=[5\alpha+3, 11-3\alpha]$ olur.

$$\alpha=\frac{b_1^{(\alpha)}+10}{6} \Rightarrow b_1^{(\alpha)}=6\alpha-10$$

$$\alpha=\frac{7-b_2^{(\alpha)}}{11} \Rightarrow b_2^{(\alpha)}=7-11\alpha$$

olduğundan buradan $B_\alpha=[6\alpha-10, 7-11\alpha]$ bulunur. Bu takdirde

$A_\alpha - B_\alpha=[5\alpha+3, 11-3\alpha]-\ [6\alpha-10, 7-11\alpha]$

$$=[\ 5\alpha+3-(7-11\alpha), 11-3\alpha-(6\alpha-10)]=[16\alpha-4, 21-9\alpha]$$

olarak bulunur. Buradan

$$\mu_{A-B}^{l}(x)=16\alpha-4 \Rightarrow x=16\alpha-4 \Rightarrow \alpha=\frac{x+4}{16}, -4 \le x \le 12$$

$$\mu_{A-B}^{r}(x)=21-9\alpha \Rightarrow x=21-9\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{21-x}{9}, 12 \le x \le 21$$

elde edilir. Buradan $A$-$B$ nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A-B}(x)=\begin{cases}\frac{x+4}{16}, -4 \le x \le 12\\ \frac{21-x}{9},\ 12 \le x \le 21\\ 0,\ aksi\ takdirde\end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

$A$=(3,8,11) ve $B$=(-10,-4,7) olduğundan buradan da

$A$-$B$=(3,8,11)-(-10,-4,7)=(3-7,8-(-4),11-(-10))=(-4,12,21)

bulunur.

**Tanım 3.2.16.** $A = (a_1, a_M, a_2)$ üçgen bulanık sayısının simetrik görüntüsü

$$-A = -(a_1, a_M, a_2) = (-a_2, -a_M, -a_1)$$

ile tanımlanır (Baykal ve Beyan, 2004).

**Örnek 3.2.7.** $A$=(2,5,10) üçgen bulanık sayısının simetrik görüntüsü

-$A$=-(2,5,10)=(-10,-5,-2)

bulunur.

$A = (a_1, a_M, a_2)$ üçgen bulanık sayısının tersi $A^{-1} = (\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_M}, \frac{1}{a_1})$ şeklinde yazılabilir.

$A$ ve $B$ üçgen bulanık sayılarının çarpımı ve bölümü bulunurken sırasıyla Tanım 3.2.8. ve Tanım 3.2.9 da gösterildiği gibi $A \cdot B$ ve $A/B$ nin $\alpha$ kesimleri bulunarak ve $\alpha \in [0,1]$ olduğu dikkate alınarak işlem yapılır.

Üçgen bulanık sayıların çarpımı ve bölümü ile elde edilen bulanık sayılar, birer üçgen bulanık sayı değildir.

**Örnek 3.2.8.** $A$ ve $B$ üçgen bulanık sayıları

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & aksi\ takdirde \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 \le x \le 2 \\ 3 - x, & 2 \le x \le 3 \\ 0, & aksi\ takdirde \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Sırasıyla $A \cdot B$ ve $A/B$ bulunursa

$$\alpha = x \Rightarrow \alpha = a_1^{(\alpha)} \text{ ve } \alpha = 2 - a_2^{(\alpha)} \Rightarrow a_2^{(\alpha)} = 2 - \alpha$$

olduğundan $A_\alpha$=[ $\alpha, 2-\alpha$] bulunur.

$$\alpha = b_1^{(\alpha)} - 1 \Rightarrow b_1^{(\alpha)} = \alpha + 1 \text{ ve } \alpha = 3 - b_2^{(\alpha)} \Rightarrow b_2^{(\alpha)} = 3 - \alpha$$

olduğundan

$B_\alpha$=[ $\alpha + 1, 3 - \alpha$] bulunur. Buradan

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = [\alpha, 2-\alpha] \cdot [\alpha+1, 3-\alpha] = [\alpha^2+\alpha, \alpha^2 - 5\alpha + 6]$$

elde edilir. Buradan

$$x = \alpha^2 + \alpha \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - x = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x}}{2}$$

bulunur. $\alpha \in [0,1]$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\mu_{A \cdot B}^{l}(x) = \frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2}$$

elde edilir.

$$x = \alpha^2 - 5\alpha + 6 \Rightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 6 - x = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{1+4x}}{2}$$

bulunur.

$\alpha \in [0,1]$ olduğundan

$$\mu_{A \cdot B}^{r}(x) = \frac{5 - \sqrt{1+4x}}{2}$$

elde edilir. Buradan da

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \begin{cases} \dfrac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2}, & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{5 - \sqrt{1+4x}}{2}, & 2 \le x \le 6 \end{cases}$$

bulanık sayısı bulunur.

$\mu^{l}_{A\cdot B}(x)$ ve $\mu^{r}_{A\cdot B}(x)$ bulunurken $\alpha$ yerine 0 veya 1 değerlerinden birisi yazılarak uygun sonuç kolayca bulunabilir. Ayrıca çarpılan üçgen bulanık sayılar $\mathbb{R}^+$ da ise çarpımın aralığı bulunurken işlem kolaylığı için üçgen bulanık sayılar çarpılıyormuş gibi düşünülebilir. Yani $A$=(0,1,2) ve $B$=(1,2,3) olduğundan 0·1=0, 1·2=2 ve 2·3=6 bulunur ve 0, 6 çarpımın uç noktaları, 2 tepe noktası eleman değeridir.

$$A_\alpha : B_\alpha = [\,\alpha, 2-\alpha] : [\,\alpha+1, 3-\ \alpha] = [\,\alpha, 2-\alpha] \cdot [\tfrac{1}{3-\alpha}, \tfrac{1}{\alpha+1}] = [\tfrac{\alpha}{3-\alpha}, \tfrac{2-\alpha}{\alpha+1}]$$

bulunur. Buradan

$$x = \frac{\alpha}{3-\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{3x}{x+1} \text{ ve } x = \frac{2-\alpha}{\alpha+1} \Rightarrow \alpha = \frac{2-x}{x+1}$$

elde edilir. Buradan da

$$\mu_{A:B}(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x+1}, & 0 \le x \le 1/2 \\ \frac{2-x}{x+1}, & 1/2 \le x \le 2 \end{cases}$$

bulanık sayısı bulunur.

Bölünen üçgen bulanık sayılar $\mathbb{R}^+$ da ise bölümün aralığı bulunurken işlem kolaylığı için üçgen bulanık sayılar bölünüyormuş gibi düşünülebilir. Yani $A$=(0,1,2) ve $B$=(1,2,3) olduğundan

$$A{:}B = (0,1,2):(1,2,3) = (0,1,2)\cdot(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1})$$

şeklinde düşünülürse buradan 0·1/3=0, 1·1/2=1/2 ve 2·1=2 olduğundan 0, 2 bölümün uç noktaları ve 1/2 tepe noktası eleman değeridir.

**Tanım 3.2.17.** $A=(a_1, a_M, a_2)$ ve $B=(b_1, b_{M,} b_2)$ iki üçgen bulanık sayı olmak üzere $A$ ve $B$ arasındaki uzaklık $d(A,B)$,

$$d(A,B) = \frac{1}{2}\{\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|) + |a_M - b_M|\}$$

ile tanımlanır (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

**Örnek 3.2.9.** $A$ ve $B$ üçgen bulanık sayıları, $A$=(1,3,7) ve $B$=(2,5,9) şeklinde verilsin. Bu iki üçgen bulanık sayı arasındaki uzaklık

$$d(A,B)=\frac{1}{2}\{\max(|1-2|,|7-9|)+|3-5|\}=\frac{1}{2}\{\max(1,2)+2\}=\frac{1}{2}(2+2)=2$$

bulunur.

Aşağıda yamuk bulanık sayılara ait tanım ve özellikler verilecektir.

**Tanım 3.2.18.** Bir $A$ yamuk bulanık sayısı

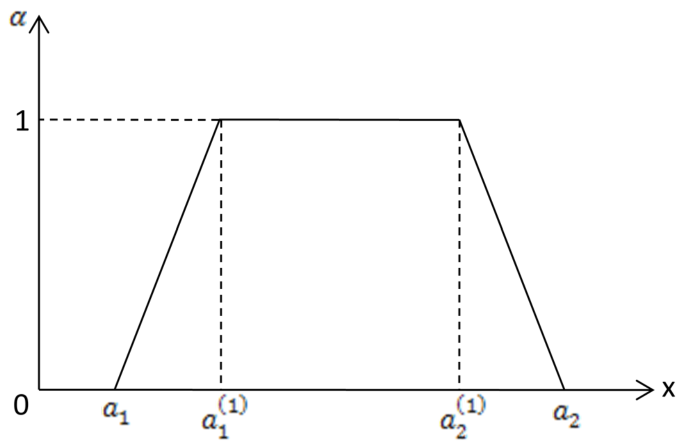
$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_1}{a_1^{(1)}-a_1}, & a_1 \le x \le a_1^{(1)} \\ 1, & a_1^{(1)} \le x \le a_2^{(1)} \\ \dfrac{x-a_2}{a_2^{(1)}-a_2}, & a_2^{(1)} \le x \le a_2 \\ 0, & aksi\ takdirde\end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır ve $A=(a_1,a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_2)$ ile gösterilir. $A$ nın destek aralığı $[a_1,a_2]$ dir (Bozadjiev ve Bozadjiev, 1995).

$A$ yamuk bulanık sayısının $\alpha$-seviye aralığı, üçgen bulanık sayıların $\alpha$-kesiminin bulunması yöntemine benzer bir yaklaşımla

$$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}]=[a_1+\alpha(a_1^{(1)}-a_1),a_2+\alpha(a_2^{(1)}-a_2)]$$

elde edilir. Yamuk bulanık sayı aşağıda gösterilmiştir.



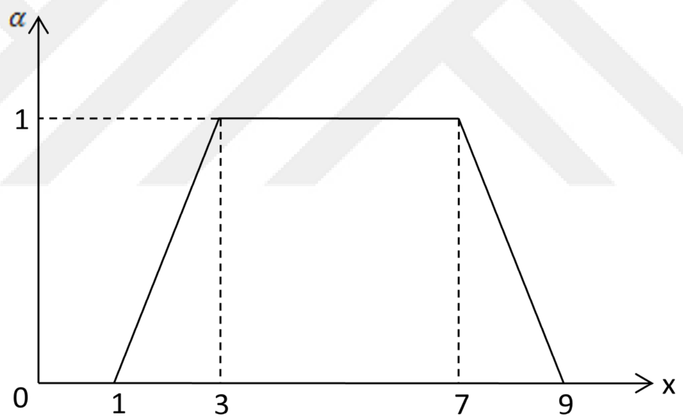

Şekil 3.6. Yamuk bulanık sayı

Yamuk bulanık sayıda $a_1^{(1)}$=$a_2^{(1)}$ olursa, yamuk bulanık sayı üçgen bulanık sayıya indirgenir. w$[a_1, a_1^{(1)}]$=w$[a_2^{(1)}, a_2]$ ise yamuk bulanık sayı $x = \frac{1}{2}(a_1^{(1)} + a_2^{(1)})$ e göre simetriktir ve merkezi formdadır.

**Örnek 3.2.10.** $A$ yamuk bulanık sayısı

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}, 1 \leq x \leq 3 \\ 1, \quad\quad 3 \leq x \leq 7 \\ \dfrac{9-x}{2}, \ 7 \leq x \leq 9 \\ 0, \ aksi\ takdirde \end{cases}$$

olarak verilsin. Buna göre $A = (1,3,7,9)$ şeklinde gösterilebilir ve w[1,3]=w[7,9] olduğundan $A$, merkezi yamuk bulanık sayıdır.




Şekil 3.7. A merkezi yamuk bulanık sayısı

Yamuk bulanık sayılarda aritmetik işlemler aşağıda verilmiştir.

**Tanım 3.2.19.** $A$=$(a_1, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_2)$ ve $B$=$(b_1, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_2)$ yamuk bulanık sayılarının toplamı

$$A + B = (a_1 + b_1, a_1^{(1)} + b_1^{(1)}, a_2^{(1)} + b_2^{(1)}, a_2 + b_2)$$

ile tanımlanır (Baykal ve Beyan, 2004).

**Örnek 3.2.11.** $A$=(1,2,4,6) ve $B$=(-2,0,5,8) yamuk bulanık sayılarının toplamı

$$A+B=(1,2,4,6)+(-2,0,5,8)=(1-2,2+0,4+5,6+8)=(-1,2,9,14)$$

bulunur.

**Tanım 3.2.20.** $A=(a_1, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_2)$ ve $B=(b_1, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_2)$ yamuk bulanık sayılarının farkı

$$A- B =(a_1, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_2)-(b_1, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_2)= (a_1 - b_2, a_1^{(1)} - b_2^{(1)}, a_2^{(1)} - b_1^{(1)}, a_2 - b_1)$$

ile tanımlanır (Baykal ve Beyan, 2004).

**Örnek 3.2.12.** $A$=(1,2,4,6) ve $B$=(-2,0,5,8) yamuk bulanık sayılarının farkı

$$A-B=(1,2,4,6)-(-2,0,5,8)=(1-8,2-5,4-0,6-(-2))=(-7,-3,4,8)$$

bulunur.

Yamuk bulanık sayılarda çarpma ve bölme işlemleri, üçgen bulanık sayılardaki çarpma ve bölme işlemlerine benzer olarak yapılır.

Üçgen ve yamuk bulanık sayıların dışında; Gaussian, çan şekilli, sigmodial, S ve $\pi$ şeklinde de bulanık sayılar mevcuttur (Baykal ve Beyan, 2004).

# 4. KOMPLEKS SAYILAR

Bu bölümde, Balcı (2008) de yer alan kompleks sayılarla ilgili temel tanımlar verilerek daha sonra kompleks sayılarda işlemler, kutupsal gösterim tanıtılacaktır.

## 4.1. Kompleks Sayılar

Bu alt bölümde, kompleks sayılarla ilgili çeşitli tanımlar verilecektir.

$x^2+1=0$ şeklindeki denklemler göz önüne alınırsa, bu denklem için $x^2$=$-1$ yazılabilir. Hiçbir reel sayının karesi negatif olamayacağından $x$ reel sayı olamaz. Denklemin her iki tarafının karekökü alınırsa $x$=$\sqrt{-1}$ olur. Burada $\sqrt{-1}$=$i$ denilirse $i^2$=$-1$ olur.

**Tanım 4.1.1.** $a$ ve $b$ reel sayılar olmak üzere $a+ib$ biçiminde yazılabilen sayılara kompleks sayılar adı verilir. Kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir. Buna göre $\mathbb{C}=\{a+ib\colon a,b\in\mathbb{R}\}$ olacaktır.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ yi de kapsayan daha geniş bir kümedir.

**Örnek 4.1.1.** 1+2i, 3-i, 4, -6i, $\frac{1}{5}$i birer kompleks sayıdır. Her reel sayı y+0i şeklinde yazılabileceği için her reel sayı kompleks sayı olarak düşünülebilir.

**Örnek 4.1.2.** $i^2$=$-1$ olduğundan $i^3$ ve $i^4$ kompleks sayıları

$$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i \text{ ve } i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$$

olarak elde edilir. Daha büyük üsler buna göre bulunabilir.

**Tanım 4.1.2.** z=a+ib kompleks sayısında a sayısına kompleks sayının reel kısmı, b sayısına da sanal (imajiner) kısmı denir ve

$$\mathrm{Re}(a+ib)=a,\ \mathrm{Im}(a+ib)=b$$

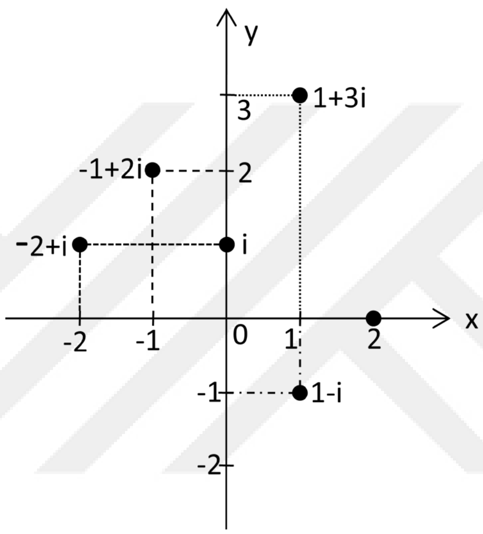
olarak gösterilir.

**Örnek 4.1.3.** Re(4-3i)=4, Im(2+7i)=7, Re(9i)=0, Im(4)=0, Re(10)=10 dur.

z=a+ib kompleks sayısı, sıralı (a,b) ikilisi biçiminde gösterilebilir.

**Örnek 4.1.4.** 0 için (0,0), i için (0,1) ve 1 için (1,0) yazılabilir.

**Tanım 4.1.3.** x eksenini reel eksen, y eksenini sanal eksen alarak oluşturulan düzleme kompleks düzlem denir.




Şekil 4.1. Kompleks düzlem ve kompleks sayılar

**Tanım 4.1.4.** $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ kompleks sayıları için

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

ise $z_1 = z_2$ yani kompleks sayılar eşittir denir.

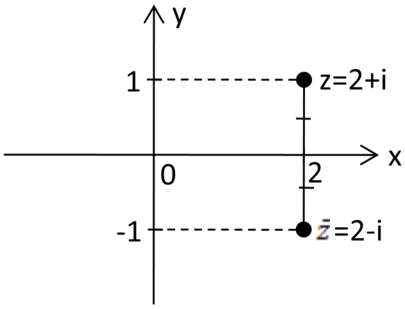
**Örnek 4.1.5.** $z_1 = a + 1 - 2i$ ve $z_2 = 3 - bi$ kompleks sayıları eşit ise $a$ ve $b$

$$a + 1 = 3 \Longrightarrow a = 2 \text{ ve } -2i = -bi \Longrightarrow b = 2$$

olarak bulunur.

**Tanım 4.1.5.** $\bar{z} = a - ib$ kompleks sayısına $z = a + ib$ kompleks sayısının eşleniği denir.

**Örnek 4.1.6.** 3+7i sayısının eşleniği 3-7i, -2-9i nin eşleniği -2+9i, 3i nin eşleniği -3i dir.

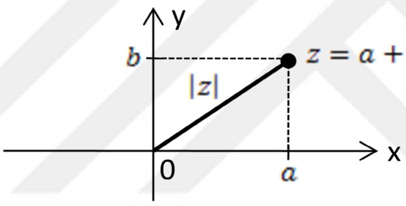



Şekil 4.2. Kompleks sayının eşleniği

**Tanım 4.1.6.** $z = a + ib$ kompleks sayısı verilsin.

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

pozitif reel sayısına $z$ kompleks sayısının modülü veya mutlak değeri denir.




Şekil 4.3. Kompleks sayının modülü

**Örnek 4.1.7.** $z = 3 + 4i$ kompleks sayısının modülü bulunursa

$$|z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

çıkar.

$z = a + ib$ ve $\bar{z} = a - ib$ sayıları için

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

olur. Yani bir kompleks sayı ile eşleniğinin modülleri aynıdır.

## 4.2. Kompleks Sayılarla İşlemler

Bu alt bölümde, kompleks sayılarla ilgili aritmetik işlemler verilecektir.

**Tanım 4.2.1.** $z_1$=$a+ib$ ve $z_2$=$c+id$ kompleks sayılarının toplamı

$$z_1+z_2=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

ile tanımlıdır.

**Tanım 4.2.2.** $z_1$=$a+ib$ ve $z_2$=$c+id$ kompleks sayılarının farkı

$$z_1-z_2=(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$$

ile tanımlıdır.

**Örnek 4.2.1.** $z_1$=8-5i ve $z_2$=-6+i kompleks sayılarının sırasıyla toplam ve farkı bulunursa

$$z_1+z_2=(8-5i)+(-6+i)=(8-6)+i(-5+1)=2-4i$$

$$z_1-z_2=(8-5i)-(-6+i)=(8-(-6))+i(-5-1)=14-6i$$

elde edilir.

**Tanım 4.2.3.** $z_1$=$a+ib$ ve $z_2$=$c+id$ kompleks sayılarının çarpımı

$$z_1\cdot z_2=(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

ile tanımlıdır.

**Örnek 4.2.2.** $z_1$=$2-7i$ ve $z_2$=$5+4i$ olsun. $z_1$ ve $z_2$ nin çarpımı

$$z_1\cdot z_2=(2-7i)\cdot(5+4i)=2\cdot 5+2\cdot 4i-7i\cdot 5-7i\cdot 4i$$

$$=10+8i-35i-28i^2=38-27i$$

bulunur.

**Tanım 4.2.4.** $z_1$=$a+ib$ sayısının $z_2$=$c+id$ sayısına bölümü

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

ile tanımlıdır.

**Örnek 4.2.3.** $\frac{1+2i}{2-i}$ bölme işleminin sonucu bulunurken pay ve payda paydanın eşleniği ile çarpılır. Buradan

$$\frac{1+2i}{2-i}=\frac{(1+2i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)}=\frac{2+i+4i+2i^2}{4+2i-2i-i^2}=\frac{5i}{5}=i$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.1.** $z$ kompleks sayısının eşleniği $\bar{z}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $\overline{(\bar{z})}=z$

ii. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

iii. $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

iv. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

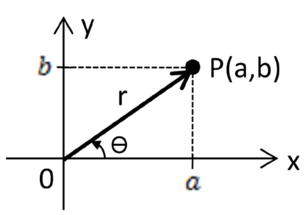
v. $\overline{z_1:z_2}=\overline{z_1}:\overline{z_2}$

vi. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

### 4.3. Kompleks Sayıların Kutupsal Biçimi

Bu alt bölümde, kompleks sayıların kutupsal gösterimine ait tanımlar verilecek ve kutupsal gösterime ilişkin aritmetik işlemler ile kompleks sayıların karekökü tanıtılacaktır.

$z=a+ib$ kompleks sayısı düzlemde $(a,b)$ ikilisi biçiminde gösterilebiliyordu. Aşağıdaki şekle bakılırsa, $P(a,b)$ noktasının $O(0,0)$ orijin noktasına olan uzaklığına $r$ denilirse $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ olarak yazılabilir. Bu takdirde $r$, $z$ nin modülü olur.




Şekil 4.4. Kompleks sayının argümenti ve kutupsal biçimi

**Tanım 4.3.1.** Yukarıdaki şekilde $[OP$ ışınının $Ox$-ekseni ile yapmış olduğu açının ölçüsü $\theta$ olsun. Bu takdirde

$$\cos\theta=\frac{a}{r} \text{ ve } \sin\theta=\frac{b}{r}$$

olduğundan buradan

$$a = r\cos\theta \text{ ve } b = r\sin\theta$$

yazılabilir. Yani $r$ ve $\theta$ verildiğinde $(a, b)$ bulunabilir. Bu yüzden de $(r, \theta)$ ikilisine $(a, b)$ noktasının kutupsal koordinatları denir.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ olduğundan $r^2 = a^2 + b^2$ yazılabilir ve $a = r\cos\theta, b = r\sin\theta$ olduğundan

$$\frac{b}{a} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

elde edilir.

**Örnek 4.3.1.** Kartezyen koordinatları $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ olan noktanın kutupsal koordinatları bulunursa

$$r^2=(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2=18 + 18=36 \Rightarrow r = 6$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

elde edilir. O halde $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ noktasının kutupsal koordinatları $(6, \frac{\pi}{4})$ dür.

**Tanım 4.3.2.** $z = a + ib$ kompleks sayısı için $a = r\cos\theta, b = r\sin\theta$ olduğundan

$$z = a + ib = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

yazılışına $z$ kompleks sayısının kutupsal (trigonometrik) yazılışı denir.

$$e^{i\theta}=\cos\theta+ i\sin\theta$$

olarak yazılırsa $z$ kompleks sayısı kısaca $z = re^{i\theta}$ biçiminde gösterilir.

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ kompleks sayısı ile

$$r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)],\ k \in \mathbb{Z}$$

sayılarının aynı sayı oldukları aşikardır.

**Tanım 4.3.3.** $z$=$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ eşitliğindeki $r$ sayısına $z$ nin modülü, $\theta$ ölçüsüne de $z$ nin argümenti denir ve $\arg(z)$ ile gösterilir.

**Örnek 4.3.2.** $z$=$-2 + 2\sqrt{3}i$ kompleks sayısı kutupsal biçimde yazılırsa

$$r^2=(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow r = 4$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

elde edilir. Buradan $\frac{\pi}{2}$< $\theta$<$\pi$ veya $\frac{3\pi}{2}$< $\theta$<$2\pi$ olur. $z$, $(-2{,}2\sqrt{3})$ noktasında yani ikinci bölgede olduğundan $\frac{\pi}{2}$< $\theta$<$\pi$ dir. Buradan

$$\tan\theta=-\sqrt{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

bulunur. O halde $z$ nin kutupsal yazımı

$$z=r(\cos\theta + i\sin\theta)=4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

olarak bulunur.

Kompleks sayıların kutupsal biçimine ait işlem tanımları aşağıda verilmiştir.

**Tanım 4.3.4.** $z_1$=$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ve $z_2$=$r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ sayılarının toplamı

$$z_1 + z_2=(r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)$$

ile tanımlanır.

**Tanım 4.3.5.** $z_1$=$r_1(\cos\theta_1 + \ i\sin\theta_1)$ ve $z_2$=$r_2(\cos\theta_2 + \ i\sin\theta_2)$ sayılarının farkı

$$z_1 - z_2 = (r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2)$$

ile tanımlanır.

**Örnek 4.3.3.** $z_1$=$2(\cos 75 + i\sin 75)$ ve $z_2$=$2(\cos 15 + i\sin 15)$ sayıları verilsin. $z_1$ ve $z_2$ nin sırasıyla toplamı ve farkı bulunursa

$$z_1 + z_2 = 2[(\cos 75 + \cos 15) + i(\sin 75 + \sin 15)]$$

$$=2(2\cdot\cos\tfrac{75+15}{2}\cdot\cos\tfrac{75-15}{2} + i\cdot 2\cdot\sin\tfrac{75+15}{2}\cdot\cos\tfrac{75-15}{2})$$

$$=4\cdot\cos 45\cdot\cos 30 + 4i\cdot\sin 45\cdot\cos 30$$

$$=4\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 4i.\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{6}i = \sqrt{6}(1+i) \text{ ve}$$

$$z_1 - z_2 = 2[(\cos 75 - \cos 15) + i(\sin 75 - \sin 15)]$$

$$=2(-2\cdot\sin\tfrac{75+15}{2}\cdot\sin\tfrac{75-15}{2} + i\cdot 2\cdot\cos\tfrac{75+15}{2}\cdot\sin\tfrac{75-15}{2})$$

$$=2(-2\cdot\sin 45\cdot\sin 30 + 2i\cdot\cos 45\cdot\sin 30)$$

$$=-4\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + 4i\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i = \sqrt{2}(-1+i)$$

elde edilir.

**Tanım 4.3.6.** $z_1$=$r_1(\cos\theta_1 + \ i\sin\theta_1)$ ve $z_2$=$r_2(\cos\theta_2 + \ i\sin\theta_2)$ sayılarının çarpımı

$$z_1\cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + \ i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + \ i\sin\theta_2)$$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

ile tanımlanır.

Çarpma işlemine göre

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \text{ ve } Arg(z_1\cdot z_2) = Argz_1 + Argz_2$$

eşitlikleri yazılabilir.

**Örnek 4.3.4.** $z_1$=$\sqrt{6}(\cos\frac{\pi}{3}+\ i\sin\frac{\pi}{3})$ ve $z_2$=$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\ i\sin\frac{\pi}{4})$ olsun. $z_1$ ve $z_2$ nin çarpımı

$$z_1\cdot z_2=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})]=2\sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$$

bulunur.

**Tanım 4.3.7.** $z$=$r(\cos\theta+\ i\sin\theta)$ kompleks sayısının 1 den büyük kuvvetleri sırasıyla bulunursa n. kuvveti için

$$(\cos\theta+\ i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

elde edilir. Bu bağıntıya De Moivre Formülü denir ve $(e^{i\theta})^n$=$e^{in\theta}$ biçiminde ifade edilir.

**Örnek 4.3.5.** $z$=$1+i$ olsun. $z^{60}$ bulunursa

$$r^2=1^2+1^2=1+1=2\Rightarrow r=|z|=\sqrt{2}$$

$$z=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

olduğundan

$$z^{60}=\left(\sqrt{2}\right)^{60}(\cos 60\cdot\frac{\pi}{4}+i\sin 60\cdot\frac{\pi}{4})=2^{30}(\cos 15\pi+i\sin 15\pi)=2^{30}(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$=2^{30}(-1+i\cdot 0)$$

$$=-2^{30}$$

olarak bulunur.

**Tanım 4.3.8.** $z_1$=$r_1(\cos\theta_1+\ i\sin\theta_1)$ in $z_2$=$r_2(\cos\theta_2+\ i\sin\theta_2)$ sayısına bölümü

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

ile tanımlanır.

Bölme işleminden

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ ve } Arg(\frac{z_1}{z_2})=Arg(z_1)-Arg(z_2)$$

eşitlikleri yazılabilir.

**Örnek 4.3.6.** $z_1$=9$(\cos\frac{2\pi}{3}+\ i\sin\frac{2\pi}{3})$ ve $z_2$=3$(\cos\frac{5\pi}{12}+\ i\sin\frac{5\pi}{12})$ olsun. $z_1$ in $z_2$ ye bölümü

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{9(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})}{3(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})}=\frac{9}{3}\cdot[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12})]=3(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$=3(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

olarak bulunur.

**Tanım 4.3.9.** $z$=$r(\cos\theta+\ i\sin\theta)$ ve $w$=$\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$, $0\leq\frac{\theta}{2}<\pi$ olsun.

$$w^2=(\sqrt{r})^2(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})^2=r(\cos2\cdot\frac{\theta}{2}+i\sin2\cdot\frac{\theta}{2})=r(\cos\theta+\ i\sin\theta)=z$$

olduğundan $w$ kompleks sayısı $z$ nin kareköküdür.

$$w=\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$$

sayısına $z$ nin esas karekökü denir.

**Örnek 4.3.7.** $z=2-2\sqrt{3}i$ sayısının esas karekökü

$$\sqrt{2-2\sqrt{3}i}=\sqrt{4(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}=\sqrt{4(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})}=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2})$$

$$=-\sqrt{3}+i \text{ dir.}$$

Tanım 4.3.9. da $w^2$= $z$ olduğundan ve $(-w)^2$= $z$ yazılabileceğinden

$-\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$ de $w^2=z$ denkleminin bir köküdür. Bu takdirde $w^2=z$ denkleminin kökleri

$$w_1=\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}) \text{ ve } w_2=-\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$$

kompleks sayılarıdır.

**Tanım 4.3.10.** $z$ sıfırdan farklı bir kompleks sayı, $\theta$ da $z$ nin esas argümenti ($0\leq \theta<2\pi$) ise $w^n = z= r(\cos\theta +\ i\sin\theta)$ denkleminin kökleri

$$w_{k+1}=|z|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}),\ k=0,1,2,\dots,n-1$$

ile tanımlanır.

**Örnek 4.3.8.** $z=27i$ kompleks sayısının küpkökleri bulunursa

$$z=27i=27(0+i\cdot 1)=27(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$$

olduğundan

$$w_1=\sqrt[3]{27}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=3(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

$$w_2=3(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3})=3(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=3(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

$$w_3=3(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3})=3(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=3(0+i\cdot(-1))=-3i$$

elde edilir.

# 5. KOMPLEKS BULANIK KÜMELER

Tezin orijinal kısmı olan bu bölümde, ilk olarak kompleks bulanık kümelerin önceden Moses ve ark. (1999a) ve Ramot ve ark. (2002) tarafından tanımlanmış iki farklı tanımına yer verdikten sonra kompleks bulanık kümelerin bizim yaklaşımımızla yeni bir tanımını verip, temel özelliklerini inceleyeceğiz.

## 5.1. Kompleks Bulanık Kümeler ve Özellikleri

Bu alt bölümde, Moses ve ark. (1999a) tarafından tanımlanan kompleks bulanık küme ve küme işlemleri verilecektir.

Bir kompleks bulanık küme, iki bulanık küme ve bir temsil göstergesinden oluşturulur. Kompleks üyelik derecesi gösterimleri, kartezyen ve kutupsaldır. Kartezyen gösterimde, iki bulanık küme sırasıyla reel ve sanal eksenler üzerinde tanımlanır.

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, z kompleks sayı, $Z_g$ g ile verilen gösterimdeki kompleks bulanık küme, $Z_c$ kartezyen gösterimdeki kompleks bulanık küme ve $Z_p$ kutupsal gösterimdeki kompleks bulanık küme olmak üzere aşağıda kompleks bulanık kümelere ilişkin tanımlar verilmiştir.

**Tanım 5.1.1.** Kompleks bulanık küme $(X, Y)_g$ bulanık küme çiftinden oluşmak üzere $Z_g: \mathbb{C} \to [0,1] \times [0,1]$, g gösterimi ile verilen kompleks bölge üzerinde kompleks bulanık küme olarak tanımlanır. $z = (x, y)_g$, $Z_g$ kompleks bulanık kümesine ait olmak üzere $(X(x), Y(y))_g$, kompleks üyelik derecesi olarak adlandırılır (Moses ve ark., 1999a).

**Tanım 5.1.2.** Her $z \in \mathbb{C}$ için $x = Re(z)$ ve $y = Im(z)$, kartezyen kompleks üyelik derecesi olarak adlandırılan $(A(x), B(y))_c$ kompleks üyelik derecesine sahip olacak şekilde $Z_c$, iki $A(x)$ ve $B(y)$ bulanık kümesinden oluşan kartezyen kompleks bulanık küme olarak tanımlanır (Moses ve ark., 1999a).

Kartezyen kompleks bulanık küme $Z_c = A(x) + jB(y)$ ya da basitçe $Z_c = A + jB$ olarak yazılır.

**Tanım 5.1.3.** Her $z \in \mathbb{C}$ için $r = |z|$ ve $\theta = Arg(z)$, kutupsal kompleks üyelik derecesi olarak adlandırılan $(R(r), Q(\theta))_p$ kompleks üyelik derecesine sahip olacak şekilde $Z_p$, iki $R(r)$ ve $Q(\theta)$ bulanık kümesinden oluşan kutupsal kompleks bulanık küme olarak tanımlanır (Moses ve ark., 1999a).

Kutupsal kompleks bulanık küme $Z_p = R(r) \cdot e^{jQ(\theta)}$ ya da basitçe $Z_p = R \cdot e^{jQ(\theta)}$ olarak yazılır.

Genel durum için kompleks üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$\mu_{Z,g}(z) = (\mu_X(x), \mu_Y(y))_g$$

Kartezyen ve kutupsal üyelik fonksiyonları sırasıyla

$$\mu_{Z,c}(z) = \mu_A(x) + j\,\mu_B(y)$$

ve

$$\mu_{Z,p}(z) = \mu_R(r) \cdot e^{j\mu_Q(\theta)}$$

olarak yazılabilir.

**Tanım 5.1.4.** $Z_g = (X, Y)_g$ nin g gösterimi altında bir kompleks bulanık sayı olması için gerek ve yeter şart $X$ ve $Y$ nin bulanık sayı olmasıdır (Moses ve ark., 1999a).

Tanım 5.1.4. te ifade edildiği üzere, kompleks bulanık kümeler için kompleks bulanık sayı olma koşulları, adi bulanık kümelerin bulanık sayı olma koşulları ile aynıdır.

Aşağıda kompleks bulanık kümelerde küme işlemlerine ait tanım verilecektir.

**Tanım 5.1.5.** $Z_{1,g}$ ve $Z_{2,g}$ sırasıyla $(X_1, Y_1)_g$ ve $(X_2, Y_2)_g$ genel gösterimiyle iki kompleks bulanık küme olsun.

1. $\bar{Z}_{1,g} = (\bar{X}_1, \bar{Y}_1)_g$
2. $Z_{1,g} \cup Z_{2,g} = (X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2)_g$

3. $Z_{1,g} \cap Z_{2,g} = (X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2)_g$ (Moses ve ark., 1999a).

## 5.2. Kompleks Bulanık Kümeler ve Özellikleri

Bu alt bölümde, Ramot ve ark. (2002) tarafından tanımlanan kompleks bulanık küme tanımı ve küme işlemleri verilecektir.

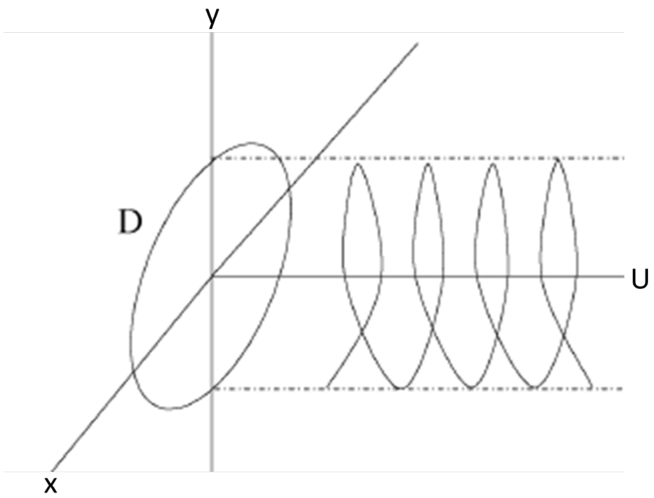
**Tanım 5.2.1.** U evrensel kümesinde tanımlı bir $S$ kompleks bulanık kümesi, $S$ de herhangi bir $x$ ∈U ya kompleks-değerli bir üyelik derecesi atanmasıyla $\mu_S(x)$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. $\mu_S(x)$ değeri, kompleks düzlemde birim çember içinde her durumu alabilir ve $j=\sqrt{-1}$, $r_S(x)$ ve $w_S(x)$ in her ikisi de reel değerli ve

$$r_S(x) \in [0,1] \text{ olmak üzere } \mu_S(x) = r_S(x) \cdot e^{jw_S(x)}$$

şeklindedir. Burada $r_S(x)$ genlik terimi, $w_S(x)$ faz terimi olarak adlandırılır ve $S$ kompleks bulanık kümesi

$$S = \{(x, \mu_S(x)) \mid x \in \text{U}\}$$

sıralı ikililerinin kümesi olarak gösterilebilir (Ramot ve ark., 2002).




Şekil 5.1. Kompleks bulanık küme (Dick, 2005)

Tanım 5.2.1. deki gösterimde kompleks sayılardaki kutupsal gösterim kullanılır. Üyelik derecesinin genlik kısmı olan $r_S(x)$, bulanık bir küme ve üyelik derecesinin faz kısmını temsil eden $w_S(x)$, bir reel sayıdır (Tamir ve ark., 2011).

Kompleks sayılara göre, genlik terimi modüle ve faz terimi argümente karşılık gelir (Anonim, 2016).

$\mu_S(x)$ in aralığı $[0,1]$ e sınırlanmaz fakat kompleks düzlemde birim çembere genişletilir. Bu yüzden de $\mu_S(x)$, kompleks değerli bir fonksiyondur. $r_S(x)$ genlik terimi $|\mu_S(x)|$ e yani $\mu_S(x)$ in genişliğine eşittir.

Kuantum mekaniğinde dalga fonksiyonu, kompleks genlik ve elektrik mühendisliğinde iç direnç vb. şeklinde birçok fiziksel miktar kompleks değerlidir (Nguyen ve ark., 2000).

Kompleks bulanık üyelik derecesinin mutlak değeri, kompleks değerli üyelik derecesi ve eşleniğinin çarpımının karekökünden elde edilir. Yani

$$|\mu_S(x)|=\sqrt{r_S(x)e^{jw_S(x)} \cdot r_S(x)e^{-jw_S(x)}}=|r_S(x)| \text{ (Tamir ve ark., 2011).}$$

Kompleks bulanık kümelerin, adi bulanık kümelerin genelleştirmeleri olması; herhangi bir adi bulanık kümenin kompleks bulanık küme cinsinden gösterilmesi ile mümkündür. $S$ adi bulanık kümesinin $\lambda_S(x)$ reel değerli üyelik fonksiyonu ile tanımlandığı varsayılsın. Bu takdirde tüm $x$ ler için $r_S(x)$ genlik terimi $\lambda_S(x)$ e eşit ve faz terimi sıfıra eşit olarak ayarlanırsa $S$, kompleks bulanık kümeye kolayca dönüştürülebilir. Buradan genlik teriminin adi reel-değerli üyelik derecesine denk olduğu görülür. Yani $w_S(x)$, $S$ nin desteğindeki tüm elemanlar için sıfıra eşitse faz terimi gereksizdir ve $S$, reel-değerli üyelik fonksiyonu ile adi bir bulanık kümedir. Genlik terimi değerinin izahı, kompleks bulanık kümelerin tüm uygulamaları için aynıdır.

$w_S(x)$ in mutlak değeri genellikle, bir uygulamadan diğerine değişebilen birtakım keyfi referansa göre belirlenir. Yani $\pi$ yüksek, 0 düşük üyelik fazı değeri olarak düşünülemez.

Yukarıda ifade edilen $w_S(x)$ in yerine, önemli parametre baskın olarak, S nin desteğindeki $x$ ve diğer elemanlar arasındaki göreli fazdır. Bu, kompleks bulanık kümelerdeki tüm uygulamalar için aynı kalan göreli fazın izahıdır.

Aşağıda kompleks bulanık kümelerde tümleyen, birleşim ve kesişim işlemleri ile döndürme ve yansıma işlemleri verilecektir.

Kompleks bulanık tümleyen küme işlemi, doğrudan kompleks üyelik derecelerine uygulanamaz, üyelik derecelerinin genliğine uygulanabilir.

**Tanım 5.2.2.** U evrensel kümesindeki bir $S$ kompleks bulanık kümesinin tümleyeni $\bar{S}$ olmak üzere kompleks bulanık tümleyen üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\bar{S}}(x) = r_{\bar{S}}(x) \cdot e^{jw_{\bar{S}}(x)}$$

ile gösterilir. Burada $r_{\bar{S}}(x) = 1 - r_S(x)$ dir ve $w_{\bar{S}}(x)$,

i. $w_{\bar{S}}(x) = w_S(x)$
ii. $w_{\bar{S}}(x) = 2\pi - w_S(x) = -w_S(x)$
iii. $w_S(x)$ in $\pi$ radyan döndürülmesiyle $w_{\bar{S}}(x) = w_S(x) + \pi$

yöntemlerinden biriyle hesaplanır (Ramot ve ark., 2002).

Tanım 5.2.2. de, çalışılan örneğe göre hangi yöntemin uygulanacağı belirsiz olduğundan, aşağıda kompleks-değerli üyelik fonksiyonlarının sırf genlik terimlerine uygulanan kompleks bulanık tümleyen tanımı verilmiştir.

**Tanım 5.2.3.** *S*, U evrensel kümesinde bir kompleks bulanık küme ve $\mu_S(x)$, $x$ in *S* deki kompleks üyelik derecesi olsun. $c(S)$, $c$ tipinde *S* nin kompleks bulanık tümleyenini göstersin ve U daki tüm $x$ lere bir $c(\mu_S(x))$ değeri atayan

$$c: \{a | a \in \mathbb{C}, |a| \leq 1\} \rightarrow \{b | b \in \mathbb{C}, |b| \leq 1\}$$

fonksiyonu ile tanımlansın. $c$ kompleks bulanık tümleyen fonksiyonu en azından aşağıdaki aksiyomatik gerektirmeleri sağlamalıdır:

- Aksiyom 1 (Genlik Sınır Durumları):

$$|a|=0 \Longrightarrow |c(a)|=1 \text{ ve } |a|=1 \Longrightarrow |c(a)|=0$$

- Aksiyom 2 (Genlik Monotonluğu):

$\forall a, b \in \mathbb{C}$, $|a|, |b| \in [0,1]$ olmak üzere $|a| \leq |b|$ ise bu takdirde $|c(a)| \geq |c(b)|$

dir.

Ek olarak, bazı durumlarda $c$ nin aynı zamanda aşağıdaki gerektirmeleri sağlaması istenir:

- Aksiyom 3 (Süreklilik): $c$, sürekli bir fonksiyondur.

- Aksiyom 4 (İçe Kıvrılmışlık):

$$\forall a \in \mathbb{C},\ |a| \in [0,1] \text{ olmak üzere } c(c(a))=a$$

dır (Ramot ve ark., 2002).

**Örnek 5.2.1.** U evrensel kümesinde tanımlı *A* kompleks bulanık kümesi

$$A=\{(x,0.5\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{3}}),(y,0.7\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}),(z,1\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}})\}$$

olarak verilsin. $w_{\bar{A}}(x)$ i bulmak için Tanım 5.2.2. de ii kullanılırsa

$$\bar{A}=\{(x,0.5\cdot e^{j\cdot\frac{5\pi}{3}}),(y,0.3\cdot e^{j\cdot\frac{7\pi}{4}}),(z,0\cdot e^{j\cdot\frac{3\pi}{2}})\}$$

$$\bar{A}=\{(x,0.5\cdot e^{j\cdot\frac{5\pi}{3}}),(y,0.3\cdot e^{j\cdot\frac{7\pi}{4}}),(z,0)\}$$

bulunur.

**Tanım 5.2.4.** *A* ve *B* kompleks bulanık kümeleri,

$$\mu_A(x)=r_A(x)\cdot e^{jw_A(x)}$$

$$\mu_B(x)=r_B(x)\cdot e^{jw_B(x)}$$

üyelik fonksiyonlarıyla verilsin. $A$ ve $B$ nin kompleks bulanık birleşimi $A \cup B$,

$$\mu_{A \cup B}(x) = [r_A(x) \oplus r_B(x)] \cdot e^{jw_{A \cup B}(x)}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlıdır. Burada $\oplus$, bulanık birleşim fonksiyonunu ifade eder (Ramot ve ark., 2002).

Kompleks-değerli bir üyelik derecesinin genlik terimi, adi reel değerli üyelik derecesine denk olduğundan adi birleşim fonksiyonları, kompleks üyelik derecelerinin sadece genlik terimlerine doğrudan uygulanabilir. Bu yüzden de aşağıdaki tanım verilmiştir.

**Tanım 5.2.5.** $A$ ve $B$, $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ kompleks-değerli üyelik fonksiyonlarıyla U üzerinde iki kompleks bulanık küme olsun. $A$ ve $B$ nin kompleks bulanık birleşimi $A \cup B$,

$$u: \{a | a \in \mathbb{C}, |a| \leq 1\} \mathrm{x} \{b | b \in \mathbb{C}, |b| \leq 1\} \rightarrow \{d | d \in \mathbb{C}, |d| \leq 1\}$$

fonksiyonu ile tanımlanır. $u$,

$$u(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A \cup B}(x)$$

ile U daki tüm $x$ lere kompleks bir değer atar. Kompleks bulanık birleşim fonksiyonu $u$, herhangi bir $a,b,c,d \in \{x | x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1\}$ için en azından aşağıdaki aksiyomatik gerektirmeleri sağlamalıdır:

- Aksiyom 1 (Sınır Durumları): $u(a, 0) = a$
- Aksiyom 2 (Monotonluk):

$$|b| \leq |d| \Rightarrow |u(a, b)| \leq |u(a, d)|$$

- Aksiyom 3 (Değişmelilik): $u(a, b) = u(b, a)$
- Aksiyom 4 (Birleşmelilik): $u\big(a, u(b, d)\big) = u(u(a, b), d)$

Bazı durumlarda, $u$ nun aşağıdaki gerektirmeleri sağlaması da istenebilir:

- Aksiyom 5 (Süreklilik): $u$, sürekli bir fonksiyondur.
- Aksiyom 6 (Üst-eşgüçlülük): $|u(a,a)| > |a|$
- Aksiyom 7 (Tam Monotonluk):

$$|a| \leq |c| \text{ ve } |b| \leq |d| \Rightarrow |u(a,b)| \leq |u(c,d)|$$

Yukarıdaki aksiyomatik gerektirmeleri sağlayan $r_{A\cup B}$ yi belirlemek için kullanılan uygun bir fonksiyonla birleşik, $w_{A\cup B}$ hesaplaması için birkaç olasılık aşağıda verilmiştir:

1. Toplam: $w_A + w_B$
2. Maksimum: $\max(w_A, w_B)$
3. Minimum: $\min(w_A, w_B)$
4. Kazanan her şeyi alır: $\begin{cases} w_A, \ r_A > r_B \\ w_B, \ r_B > r_A \end{cases}$

Ek olarak, aşağıda verilen fonksiyonlar da sezgisel olarak kabul edilebilir olasılıktadır ama değişmelilik ve/ veya birleşmelilik aksiyomatik gerektirmelerini sağlamazlar.

1. Ağırlıklı Ortalama: $\frac{r_A \cdot w_A + r_B \cdot w_B}{r_A + r_B}$
2. Ortalama: $\frac{w_A + w_B}{2}$
3. Fark: $w_A - w_B$ (Ramot ve ark., 2002).

**Örnek 5.2.2.** U evrensel kümesinde tanımlı *A* ve *B* kompleks bulanık kümeleri,

$$A=\{(x,0.5\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{3}}),(y,0.7\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}),(z,1\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}})\}$$

$$B=\{(x,1\cdot e^{j\cdot\frac{3\pi}{4}}),(y,0.6\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{6}}),(z,0.1\cdot e^{j\cdot 1})\}$$

şeklinde verilsin.

$r_{A\cup B}$ yi hesaplamak için adi bulanık kümelerdeki birleşim fonksiyonu ve $w_{A\cup B}$ yi hesaplamak için ise Tanım 5.2.5. te 4 kullanılırsa

$$A\cup B=\{(x,1\cdot e^{j\cdot\frac{3\pi}{4}}),(y,0.7\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}),(z,1\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}})\}$$

bulunur.

**Tanım 5.2.6.** $A$ ve $B$, $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ kompleks-değerli üyelik fonksiyonlarıyla U üzerinde iki kompleks bulanık küme olsun. $A$ ve $B$ nin kompleks bulanık kesişimi $A\cap B$ ile gösterilir ve

$$i:\{a|a\in\mathbb{C},|a|\leq 1\}\mathrm{x}\{b|b\in\mathbb{C},|b|\leq 1\}\rightarrow\{d|d\in\mathbb{C},|d|\leq 1\}$$

fonksiyonu ile tanımlanır. $i$,

$$i(\mu_A(x),\mu_B(x))=\mu_{A\cap B}(x)$$

ile U daki tüm $x$ lere kompleks bir değer atar. $i$, herhangi bir $a,b,c,d\in\{x|x\in\mathbb{C},|x|\leq 1\}$ için en azından aşağıdaki aksiyomatik gerektirmeleri sağlamalıdır:

- Aksiyom 1 (Sınır Durumları): Eğer $|b|$=1 ise $|i(a,b)|=a$
- Aksiyom 2 (Monotonluk):

$$|b|\leq|d|\Rightarrow|i(a,b)|\leq|i(a,d)|$$

- Aksiyom 3 (Değişmelilik): $i(a,b)=i(b,a)$
- Aksiyom 4 (Birleşmelilik): $i\big(a,i(b,d)\big)=i(i(a,b),d)$

Bazı durumlarda, $i$ nin aşağıdaki gerektirmeleri sağlaması da istenebilir:

- Aksiyom 5 (Süreklilik): $i$, sürekli bir fonksiyondur.
- Aksiyom 6 (Alt-eşgüçlülük): $|i(a,a)|<|a|$

- Aksiyom 7 (Tam Monotonluk):

$$|a| \leq |c| \text{ ve } |b| \leq |d| \Rightarrow |i(a,b)| \leq |i(c,d)|$$

(Ramot ve ark., 2002).

**Tanım 5.2.7.** $A$ ve $B$ kompleks bulanık kümeleri,

$$\mu_A(x)=r_A(x) \cdot e^{jw_A(x)}$$

$$\mu_B(x)=r_B(x) \cdot e^{jw_B(x)}$$

üyelik fonksiyonlarıyla verilsin. $A$ ve $B$ nin kompleks bulanık kesişimi $A \cap B$,

$$\mu_{A\cap B}(x)=[r_A(x) \otimes r_B(x)] \cdot e^{jw_{A\cap B}(x)}$$

üyelik fonksiyonu ile verilir. Burada $\otimes$, bulanık kesişim fonksiyonunu ifade eder (Ramot ve ark., 2002).

Yukarıdaki tanımda yer alan $w_{A\cap B}$, Tanım 5.2.5. teki kompleks bulanık birleşimde yapılan işlemlerden uygun olanı ile bulunabilir.

**Örnek 5.2.3.** Örnek 5.2.1. deki $A$ ve $B$ kompleks bulanık kümeleri dikkate alınırsa, $r_{A\cap B}$ yi hesaplamak için adi bulanık kümelerdeki kesişim fonksiyonu ve $w_{A\cap B}$ yi hesaplamak için ise Tanım 5.2.5. te 3 (minimum) kullanılırsa

$$A\cap B=\{(x, 0.5 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{3}}),(y, 0.6 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{6}}),(z, 0.1 \cdot e^{j\cdot 1})\}$$

elde edilir.

**Tanım 5.2.8.** $A$ ve $B$ kompleks bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ olmak üzere kompleks bulanık kümeler için De Morgan İlkeleri,

$$c(\mu_A(x) \oplus \mu_B(x))=c(\mu_A(x)) \otimes c(\mu_B(x))$$

$$c(\mu_A(x) \otimes \mu_B(x))=c(\mu_A(x)) \oplus c(\mu_B(x))$$

ile tanımlıdır.

Burada $c$ kompleks bulanık tümleyen fonksiyonunu, $\oplus$ ve $\otimes$ ise sırasıyla bulanık birleşim ve kesişim fonksiyonlarını ifade eder (Ramot ve ark., 2002).

Döndürme (rotasyon) ve yansıma küme teorik işlemleri, kompleks-değerli üyelik fonksiyonlarının faz bileşeninin çalıştırılmasına olanak verecek şekilde tasarlanmıştır. Bir kompleks bulanık küme üzerinde bu işlemlerin etkisi, kümenin elemanlarının üyelik fazına kısıtlanmıştır.

**Tanım 5.2.9.** $S$, U üzerinde bir kompleks bulanık küme ve

$$\mu_S(x)=r_S(x) \cdot e^{jw_S(x)}$$

$x$ in $S$ deki üyelik derecesi olsun. $S$ nin $\theta$ radyan (saat yönünün tersinde) döndürülmesi

$$Rot_\theta(\mu_S(x))= r_S(x) \cdot e^{j(w_S(x)+\theta)}$$

olarak tanımlanır (Ramot ve ark., 2002).

Böylece eğer $x$, $S$ de $w_S(x) = a$ üyelik fazına sahipse bu takdirde $x$ in $Rot_\theta(S)$ deki üyelik fazı $w_{Rot_\theta(S)}\,(x) = a + \theta$ ile verilir.

**Tanım 5.2.10.** $S$, U üzerinde bir kompleks bulanık küme ve

$$\mu_S(x)=r_S(x) \cdot e^{jw_S(x)}$$

$x$ in $S$ ye üyeliğinin derecesi olsun. $S$ nin yansıması

$$Ref(\mu_S(x))= r_S(x) \cdot e^{-jw_S(x)}$$

olarak tanımlıdır (Ramot ve ark., 2002).

Buna göre eğer $x$, $S$ de $w_S(x) = a$ üyelik fazına sahipse bu takdirde $x$ in $Ref(S)$ deki üyelik fazı $w_{Ref(S)}\,(x) = -a$ ile verilir. Yansıma işlemi, kompleks düzlemde reel eksen etrafında $\mu_S(x)$ in yansımasıdır.

## 5.3. Bölgesel Kompleks Bulanık Kümeler ve Özellikleri

Bu alt bölümde, kompleks bulanık kümelerin bölgelere göre yeni bir tanımı ve bu tanıma göre kesişim, birleşim ve tümleyen küme işlemleri verilecektir.

**Tanım 5.3.1.** U, birim (trigonometrik) çember içindeki bölgelere yayılmış nesnelerin kümesi olsun. Buna göre U üzerinde bir $A$ bölgesel kompleks bulanık kümesi

$$A = \{\left(x, d_A(x) \cdot e^{ia_A(x)}\right), x \in \mathrm{U}\}$$

şeklinde tanımlıdır. $A$ bölgesel kompleks bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$ olmak üzere

$$\mu_A(x) = d_A(x) \cdot e^{ia_A(x)}$$

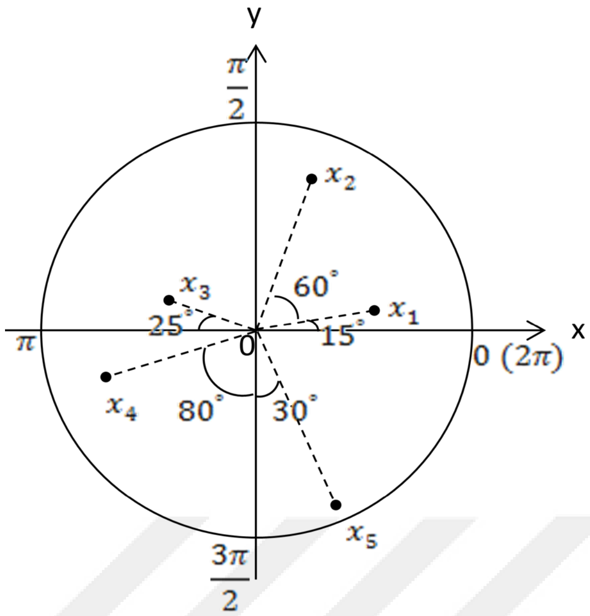
olarak yazılabilir.

Burada $\forall x \in \mathrm{U}$ için $d_A(x) \in [0,1]$ değeri $x$ elemanının U nun merkezine göre uzaklık derecesi, $a_A(x) \in [0,2\pi]$ ise kompleks düzlemde $x$ elemanının bulunduğu noktanın orijinle oluşturduğu ışın dikkate alınırsa, x ekseninin bu ışınla yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsüdür. $a_A(x)$ açısı, $x$ in konumuna göre trigonometrideki birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü bölgeler olan

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

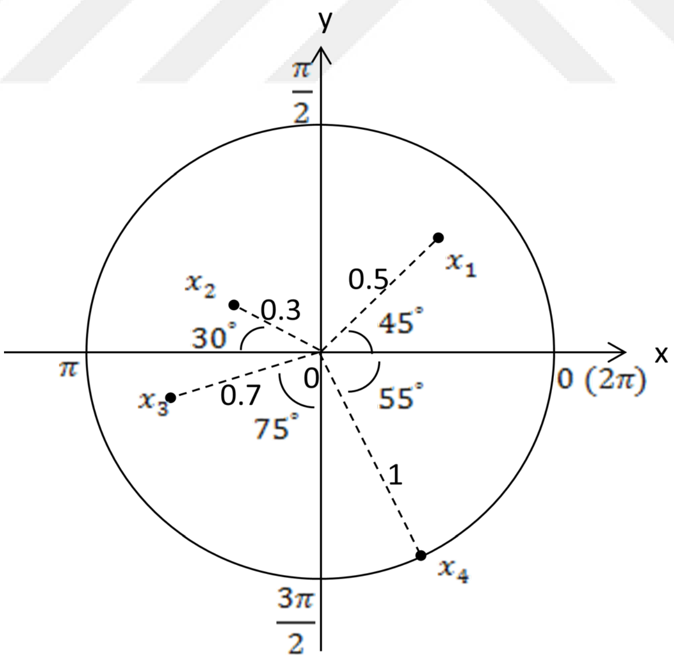
dikkate alınarak yazılır ve böylece $x$ elemanının bölgesi bulunur.

Bölgesel kompleks bulanık küme şekli aşağıda verilmiştir.




Şekil 5.2. Bölgesel kompleks bulanık küme

**Örnek 5.3.1.**




Şekil 5.3. *A* bölgesel kompleks bulanık kümesi

Şekil 5.3. de verilen $A$ bölgesel kompleks bulanık kümesi

$$A=\{(x_1,\, 0.5e^{i.45}),\, (x_2,\, 0.3e^{i.150}),\, (x_3,\, 0.7e^{i.195}),\, (x_4,\, 1e^{i.305})\}$$

$$=\{(x_1,\, 0.5e^{i.\frac{\pi}{4}}),\, (x_2,\, 0.3e^{i.\frac{5\pi}{6}}),\, (x_3,\, 0.7e^{i.\frac{13\pi}{12}}),\, (x_4,\, 1e^{i.\frac{61\pi}{36}})\}$$

şeklinde yazılır.

Aşağıda bölgesel kompleks bulanık kümelere ait kesişim, birleşim ve tümleyen tanımları verilecektir.

**Tanım 5.3.2.** $A$ ve $B$ bölgesel kompleks bulanık kümeleri

$$A = \{(x, d_A(x) \cdot e^{ia_A(x)}),\, x \in \mathrm{U}\}$$

$$B = \{(x, d_B(x) \cdot e^{ia_B(x)}),\, x \in \mathrm{U}\}$$

olarak verilsin. $A$ ve $B$ nin kesişimi

$$A \cap B=\{(x, \mu_{A\cap B}(x)),\, x \in \mathrm{U}\}=\{(x, d_{A\cap B}(x) \cdot e^{ia_{A\cap B}(x)}),\, x \in \mathrm{U}\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$d_{A\cap B}(x)=\min(d_A(x), d_B(x)) \text{ ve } a_{A\cap B}(x)=\min(a_A(x), a_B(x))$$

şeklindedir.

**Tanım 5.3.3.** $A$ ve $B$ bölgesel kompleks bulanık kümeleri

$$A = \{(x, d_A(x) \cdot e^{ia_A(x)}),\, x \in \mathrm{U}\}$$

$$B = \{(x, d_B(x) \cdot e^{ia_B(x)}),\, x \in \mathrm{U}\}$$

olarak verilsin. $A$ ve $B$ nin birleşimi

$$A \cup B=\{(x, \mu_{A\cup B}(x)),\, x \in \mathrm{U}\}=\{(x, d_{A\cup B}(x) \cdot e^{ia_{A\cup B}(x)}),\, x \in \mathrm{U}\}$$

olarak tanımlanır.

Burada

$$d_{A\cup B}(x)\text{=max}(d_A(x), d_B(x)) \text{ ve } a_{A\cup B}(x)\text{=max}(a_A(x), a_B(x))$$

şeklindedir.

**Tanım 5.3.4.** *A* bölgesel kompleks bulanık kümesi

$$A = \{(x, d_A(x)\cdot e^{ia_A(x)}), x \in \text{U}\}$$

olarak verilsin. *A* bölgesel kompleks bulanık kümesinin tümleyeni $\bar{A}$ ile gösterilir ve

$$\bar{A} = \{(x, \mu_{\bar{A}}(x)), x \in \text{U}\} = \{(x, d_{\bar{A}}(x)\cdot e^{ia_{\bar{A}}(x)}), x \in \text{U}\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$d_{\bar{A}}(x) = 1 - d_A(x) \text{ ve } a_{\bar{A}}(x) = 2\pi - a_A(x)$$

şeklindedir.

**Örnek 5.3.2.** *A* ve *B* bölgesel kompleks bulanık kümeleri

$$A = \{(x_1, 0.2e^{i.\frac{\pi}{6}}), (x_2, 0.5e^{i.\frac{2\pi}{3}}), (x_3, 0.8e^{i.\frac{5\pi}{4}}), (x_4, 1e^{i.\frac{16\pi}{9}})\}$$

$$B = \{(x_1, 0.9e^{i.\frac{\pi}{3}}), (x_2, 0.7e^{i.\frac{5\pi}{6}}), (x_3, 0.4e^{i.\frac{11\pi}{9}}), (x_4, 0.1e^{i.\frac{5\pi}{3}})\}$$

şeklinde verilsin. Sırasıyla *A* ve *B* nin kesişimi, birleşimi ile *A* nın tümleyeni

$$A \cap B = \{(x_1, 0.2e^{i.\frac{\pi}{6}}), (x_2, 0.5e^{i.\frac{2\pi}{3}}), (x_3, 0.4e^{i.\frac{11\pi}{9}}), (x_4, 0.1e^{i.\frac{5\pi}{3}})\}$$

$$A \cup B = \{(x_1, 0.9e^{i.\frac{\pi}{3}}), (x_2, 0.7e^{i.\frac{5\pi}{6}}), (x_3, 0.8e^{i.\frac{5\pi}{4}}), (x_4, 1e^{i.\frac{16\pi}{9}})\}$$

$$\bar{A} = \{(x_1, 0.8e^{i.\frac{11\pi}{6}}), (x_2, 0.5e^{i.\frac{4\pi}{3}}), (x_3, 0.2e^{i.\frac{3\pi}{4}}), (x_4, 0.e^{i.\frac{2\pi}{9}})\}$$

$$\bar{A} = \{(x_1, 0.8e^{i.\frac{11\pi}{6}}), (x_2, 0.5e^{i.\frac{4\pi}{3}}), (x_3, 0.2e^{i.\frac{3\pi}{4}}), (x_4, 0)\}$$

olarak bulunur.

# 6. UYGULAMA

Bu bölümde, bölgesel kompleks bulanık kümelerin bir uygulaması verilecektir.

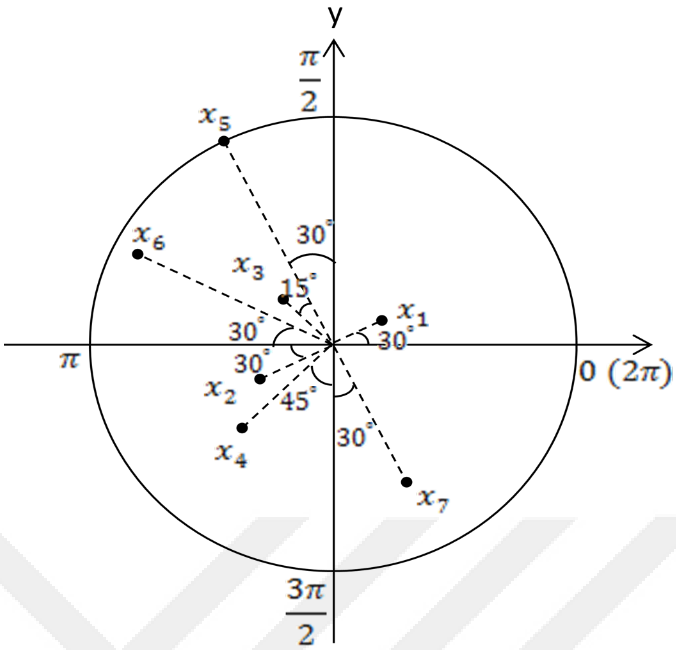
## 6.1. Bölgesel Kompleks Bulanık Kümelerin Bir Uygulaması

**Örnek 6.1.1.** Nadir ve Şadiye düğün hazırlığında olan ve kiralık ev arayan bir çifttir. Nadir bir kamu kurumunda memur olarak görev yaparken, Şadiye özel sektörde bir mağazada satış personeli olarak çalışmaktadır. Nadir ve Şadiye'nin seçtikleri eve göre en uzak mesafe köyleridir. Bulundukları ilde Nadir karşıyaka tarafında bir ev seçerken, Şadiye çarşı tarafında bir ev seçmiştir.

Nadir'in seçtiği evin köyüne uzaklığı 24 km, sanayiye uzaklığı 21,6 km, hastaneye uzaklığı 16,8 km, çarşıya uzaklığı 12 km, işyerine uzaklığı 7,2 km, AVM ye uzaklığı 4,8 km ve anne-babasının evine uzaklığı 2,4 km dir. Nadir'in ev seçimindeki kriterleri öncelik sırasına göre aile, işyeri, AVM, çarşı, köy, sanayi ve hastaneye yakın olma şeklindedir. Nadir, mesafeleri aşağıdaki Tablo 6.1. de gösterildiği gibi değerlendirmektedir.

Tablo 6.1. Nadir'e göre eve olan uzaklıklar, dereceleri ve öncelik sırası

| | Uzaklık | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Değerlendirme | En fazla | Çok Fazla | Fazla | Orta | Az | Çok Az | En Az |
| Kriterler | Köy | Sanayi | Hastane | Çarşı | İşyeri | AVM | Anne-baba ev |
| Uzaklık Derecesi | 1 | 0.9 | 0.7 | 0.5 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |
| Öncelik Sırası | 5 | 6 | 7 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| Konum | Kuzeybatı | Kuzeybatı | Güneydoğu | Güneybatı | Güneybatı | Kuzeybatı | Kuzeydoğu |
| Evin hizasına göre en kısa mesafe (km) | $12\sqrt{3}$ | 10,8 | $\frac{42\sqrt{3}}{5}$ | $6\sqrt{2}$ | 3,6 | $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ | 1,2 |




Şekil 6.1. Nadir'in seçtiği evin konumu

Nadir'in seçtiği eve göre oluşturulan bölgesel kompleks bulanık kümeye *N* kümesi denilirse *N* kümesi

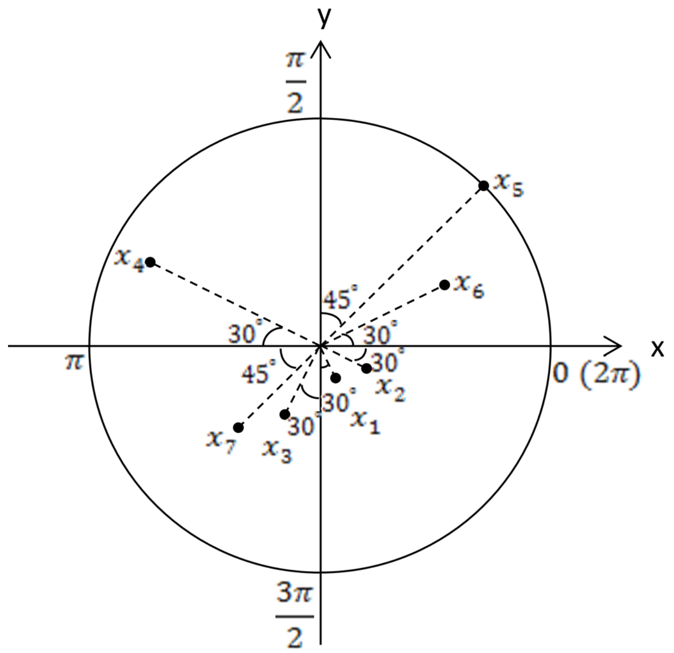
$N$ $=\{(x_1,\ 0.1e^{i.\frac{\pi}{6}}),\ (x_2,\ 0.3e^{i.\frac{7\pi}{6}}),\ (x_3,\ 0.2e^{i.\frac{3\pi}{4}}),\ (x_4,\ 0.5e^{i.\frac{5\pi}{4}}),\ (x_5,\ 1e^{i.\frac{2\pi}{3}}),\ (x_6,\ 0.9e^{i.\frac{5\pi}{6}}),\ (x_7,\ 0.7e^{i.\frac{5\pi}{3}})\}$

olarak yazılır.

Şadiye, mesai dışında KPSS kursuna gitmekte ve üniversitede yüksek lisans yapmaktadır. Şadiye'nin seçtiği evin köyüne uzaklığı 36 km, üniversiteye uzaklığı 28,8 km, hastaneye uzaklığı 21,6 km, AVM ye uzaklığı 18 km, anne-babasının evine uzaklığı 9 km, KPSS kursuna uzaklığı 7,2 km ve işyerine uzaklığı 1,8 km dir. Şadiye'nin ev seçimindeki kriterleri öncelik sırasına göre işyeri, KPSS kursu, aile, üniversite, köy, hastane ve AVM şeklindedir. Şadiye, mesafeleri aşağıdaki Tablo 6.2. de gösterildiği gibi değerlendirmektedir.

Tablo 6.2. Şadiye'ye göre eve olan uzaklıklar, dereceleri ve öncelik sırası

| | Uzaklık | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Değerlendirme | En fazla | Çok Fazla | Fazla | Orta | Az | Çok Az | En Az |
| Kriterler | Köy | Üniversite | Hastane | AVM | Anne-baba ev | KPSS Kursu | İşyeri |
| Uzaklık Derecesi | 1 | 0.8 | 0.6 | 0.5 | 0.25 | 0.2 | 0.05 |
| Öncelik Sırası | 5 | 4 | 6 | 7 | 3 | 2 | 1 |
| Konum | Kuzey doğu | Kuzeybatı | Kuzey doğu | Güney batı | Güney batı | Güney doğu | Güneydoğu |
| Evin hizasına göre en kısa mesafe (km) | $18\sqrt{2}$ | 14,4 | 10,8 | $9\sqrt{2}$ | $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ | 3,6 | $\frac{9\sqrt{3}}{10}$ |




Şekil 6.2. Şadiye'nin seçtiği evin konumu

Şadiye'nin seçtiği eve göre oluşturulan bölgesel kompleks bulanık kümeye *S* kümesi denilirse *S* kümesi

$S$ ={($x_1$, $0.05e^{i.\frac{5\pi}{3}}$), ($x_2$, $0.2e^{i.\frac{11\pi}{6}}$), ($x_3$, $0.25e^{i.\frac{4\pi}{3}}$), ($x_4$, $0.8e^{i.\frac{5\pi}{6}}$), ($x_5$, $1e^{i.\frac{\pi}{4}}$), ($x_6$, $0.6e^{i.\frac{\pi}{6}}$), ($x_7$, $0.5e^{i.\frac{5\pi}{4}}$)}

olarak yazılır.

Nadir ve Şadiye ortak karar alacağından, belirledikleri kriterlere göre seçtikleri evlerin kesişimi alınırsa

$N \cap S$ ={($x_1$, $0.05e^{i.\frac{\pi}{6}}$), ($x_2$, $0.2e^{i.\frac{7\pi}{6}}$), ($x_3$, $0.2e^{i.\frac{3\pi}{4}}$), ($x_4$, $0.5e^{i.\frac{5\pi}{6}}$), ($x_5$, $1e^{i.\frac{\pi}{4}}$), ($x_6$, $0.6e^{i.\frac{\pi}{6}}$), ($x_7$, $0.5e^{i.\frac{5\pi}{4}}$)}

bulunur.

$N \cap S$ nin şekli de *N* ve *S* nin şekline benzer olarak çizilebilir.

## 7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, önce klasik ve bulanık kümeler, aralık aritmetiği ve bulanık sayılar daha sonra kompleks sayılar, Moses ve ark. (1999a) ve Ramot ve ark. (2002)'na göre kompleks bulanık kümeler ve yeni olarak bölgesel kompleks bulanık kümeler ve son olarak bölgesel kompleks bulanık kümelerin bir uygulaması verildi.

Bulanık mantığın güncel çalışma ve uygulamalarını içeren ve daha çok fiziksel uygulamalarda kullanılan kompleks bulanık kümeler, bu tez çalışması ile birlikte matematikte de etkin bir şekilde kullanılmış oldu ve yapılacak yeni çalışma ve böylelikle uygulamalar açısından bir temel oluşturuldu.

## KAYNAKLAR


Anonim, 2016. Argument (Complex Analysis). http://en.wikipedia.org/wiki/Argument_(complex_analysis). 09.06.2016.

Balcı, M., 2008. Meslek Yüksek Okulu ve Teknik Eğitim Fakülteleri İçin Temel Matematik. Balcı Yayınları, 457 s, Ankara.

Baykal, N. ve Beyan T., 2004. Bulanık Mantık İlke ve Temelleri. Bıçakçılar Yayınevi, 413 s, Ankara.

Bellman, R.E. ve Zadeh, L.A., 1970. Decision-making in a fuzzy environment. Management Science, 17 (4), 141-164.

Bojadziev, G. ve Bojadziev, M., 1995. Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Aplications. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 283 p, Singapore.

Buckley, J.J., 1989. Fuzzy complex numbers. Fuzzy Sets and Systems, 33, 333-345.

Cardano, Gerolamo., 1545. Ars Magna or The Rules of Algebra. Dover Publications, 267 p, New York.

Daş, İ., 2003. Matematikte Bulanık Sayılar. (Yüksek Lisans Tezi), Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Dick, S., 2005. Toward complex fuzzy logic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13 (3), 405-414.

Dubois, D. ve Prade, H., 1980. Fuzzy Sets and Systems Theory and Applications. Academic Press, 393 p, USA.

Garrido, A., 2012. Axiomatic of fuzzy complex numbers, Axioms, 1, 21-32.

Karakaşoğlu, N., 2008. Bulanık Çok Kriterli Karar Verme Yöntemleri ve Uygulama. (Yüksek Lisans Tezi), Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Denizli.

Kaufmann, A. ve Gupta, M., 1985. Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Application. Van Nostrand Reinhold Co, 351 p, New York.

Moses, D., Teodorescu, H., Friedman, M. ve Kandel, A., 1999a. Complex membership grades with an application to the design of adaptive filters. Computer Science Journal of Moldova, 7 (21), 253-283.

Moses, D., Degani, O., Friedman, M. ve Kandel, A., 1999b. Linguistic coordinate transformations for complex fuzzy sets. International Fuzzy Systems Conference FUZZ IEEE, 22-25 August, 1999, Seoul, Korea.

Nguyen, H.T., Kandel, A. ve Kreinovich, V., 2000. Complex fuzzy sets: Towards new foundations. The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 7-10 May, 2000, Texas, USA.

Ramot, D., Milo, R., Friedman, M. ve Kandel, A., 2002. Complex fuzzy sets. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10 (2), 171-186.

Ramot, D., Friedman, M., Langholz, G. ve Kandel, A., 2003. Complex fuzzy logic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 11 (4), 450-461.

Tamir, D.E., Jin, L. ve Kandel, A., 2011. A new interpretation of complex membership grade. International Journal of Intelligent Systems, 26, 285-312.

Tanaka, K., 1997. An Introduction To Fuzzy Logic For Practical Applications. Springer Verlag, 138 p, New York.

Thirunavukarasu, P., Suresh, R. ve Thamilmani, P., 2013. Complex neuro fuzzy system using complex fuzzy sets and update the parameters by PSO-GA and RLSE method. International Journal of Engineering and Innovative Technology, 3 (1), 117-122.

Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy sets. Information and Control, 8, 338-353.

# ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı: Nebi YİĞİT

Doğum Yeri ve Tarihi: Turhal 31.01.1984

Medeni Hali: Evli

E-posta: nebiygt@gmail.com

Eğitim:

| Derece | Eğitim Birimi | Mezuniyet Tarihi |
|---|---|---|
| Tezsiz Yüksek Lisans | Ahi Evran Üniversitesi | 2010 |
| Lisans | Gaziosmanpaşa Üniversitesi | 2007 |