# SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI YÖNTEMLER

MERVE YÜCEL

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

2018

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

# SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI YÖNTEMLER

MERVE YÜCEL

TOKAT
2018

**MERVE YÜCEL** tarafından hazırlanan **Sınır-Değer Problemlerinin Yaklaşık Çözümleri için Bazı Yöntemler** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 14 Aralık 2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / ~~Oy Çokluğu~~ ile Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANA BİLİM DALI 'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

| Juri Üyeleri | İmza |
|---|---|
| Danışman<br>Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU<br>Gaziosmanpaşa Üniversitesi | .................... |
| Üye<br>Prof. Dr. Etibar PENAHLI<br>Fırat Üniversitesi<br>Bakü Devlet Üniversitesi | .................... |
| Üye<br>Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ<br>Gaziosmanpaşa Üniversitesi | .................... |
| Üye<br>Prof. Dr. Zülfigar AKDOĞAN<br>Gaziosmanpaşa Üniversitesi | .................... |
| Üye<br>Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR<br>Amasya Üniversitesi | .................... |

ONAY

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
26/12/2018

## TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MERVE YÜCEL
14 Aralık 2018

# ÖZET

DOKTORA TEZİ

SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN
BAZI YÖNTEMLER

MERVE YÜCEL

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU)

Bu tez çalışmasında; sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Diferensiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemleri kullanılmıştır. ilk bölümde literatürde bulunan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde Kuramsal Temeller başlığı altında kullanılan yöntemler tanıtılmıştır. Üçüncü bölüm Bulgular kısmında ise, lineer ve lineer olmayan ayrıca geçiş şartları içeren sınır-değer-geçiş problemlerine bazı yöntemler uygulanarak sonuçlar değerlendirilmiştir. Mümkün olduğu durumlarda analitik çözümlerle yaklaşık çözümler karşılaştırılarak, grafik ve tablolar üzerinde değerler incelenmiştir. Belirtilen yöntemler kullanılarak lineer olmayan sınır-değer-geçiş problemlerinin yaklaşık çözümleri bulunarak karşılaştırma yapılmıştır. Lineer olmayan ve geçiş şartları içeren başlangıç-değer problemine de diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanarak yaklaşık çözüm fonksiyonunun nasıl elde edildiği gösterilmiştir. Ayrıca, Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini bulabilmek için Adomian ayrışım yönteminin nasıl uygulandığı gösterilmiştir ve analitik çözüm kullanılarak da özdeğerlerin bulunması eklenmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

**2018, 103 sayfa**



**Anahtar Kelimeler**: Sınır-değer problemleri, özdeğerler, özfonksiyonlar, Adomian ayrışım yöntemi, diferensiyel dönüşüm yöntemi, geçiş şartları.

# ABSTRACT

DOCTORATE THESIS

SOME METHODS FOR APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

MERVE YÜCEL

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

In this thesis study, to obtain the approximate solutions of boundary-value problems, Differential Transform and Adomian Decomposition methods were used. In the first part, the studies in the literature were mentioned. In the second chapter theoretical foundations were introduced. In the third part, the results were evaluated by applying some methods to linear and non-linear boundary-value problems involving transmission conditions. Whenever possible the exact and approximate solutions were compared and values on graphs and tables were examined. Using the specified methods, approximate solutions of non-linear boundary-value-transmission problems were found and compared. In addition for the nonlinear initial-value problem involving transmission conditions, approximate solution function has been demonstrated by applying the differential transformation method. Also, to find the eigenvalues of Sturm-Liouville problems, it has been shown how the Adomian decomposition method should be applied. In the last chapter, the obtained results were evaluated.

**2018, 103 pages**

**Keywords**: Boundary-value problems, eigenvalues, eigenfunctions, Adomian decomposition method, differential transform method, transmission conditions.

# ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında destek veren, bilgilendiren, zamanını ve kıymetli tecrübelerini paylaşan Sayın Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU hocamıza en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesinde yer alarak titizlikle paylaşımlarda bulunan Sayın Prof. Dr. Zülfigar AKDOĞAN ve Sayın Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR hocalarımıza, tez yazımında bilgilendiren Sayın Arş. Gör. Dr. Hayati OLĞAR hocamıza teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her anlamda desteklerini hissettiğim canım anneme ve canım babama, kardeşlerim Yasemen ve Ramazan'a, tez yazma sürecinde destek veren ve her konuda yardımcı olan eşim, hayat arkadaşım Orçun'a, zamanın kıymetini öğreten kızım Nurbanu'ya ve çalışmam boyunca yardımcı olan herkese gönülden teşekkür ederim.

**MERVE YÜCEL**
**Aralık 2018**

İÇİNDEKİLER

# 1. GİRİŞ

Doğa bilimlerinde birçok sürecin matematiksel modeli oluşturulurken adi ve kısmi diferensiyel denklemler elde edilir. Bu durumda problemle ilgili olan bilinen veriler genelde sürecin başlangıç durumu ve sınırları ile ilgili olduğu için diferensiyel denklemin bazı başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan çözümleri araştırılan süreci temsil etmektedir. Birçok süreç genel olarak ikinci mertebeden hiperbolik, parabolik ve eliptik tipten kısmi diferensiyel denklemlerle ifade edilir. Bu tip kısmi diferensiyel denklemler için farklı başlangıç ve sınır-değer problemleri literatürde çok ayrıntılı ve kapsamlı bir biçimde araştırılmıştır. Sınır-değer problemleri ile ilgili binlerce makale ve yüzlerce kitap yazılmasına rağmen fizikte ve diğer doğa bilimlerinde bu tip denklemlere indirgenemeyen çok sayıda yeni yeni problemler ortaya çıkmaktadır. Genelde lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin net çözümlerini bulmak imkânsızdır ve hatta birçok basit lineer diferensiyel denklemin bile net çözümünü bulmak imkânsızdır. Bu nedenle böyle denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için çok farklı yöntemler uygulanmaktadır ve halen de yeni yeni yöntemler geliştirilmektedir. En yaygın ve çok kullanılan yöntem lineerleştirme yöntemidir. Bu yöntemin esas karakteristik özelliği, fiziksel süreçteki birçok etkeni göz ardı ederek ideal basit süreci lineer denklemle modellemektir. Başka bir yol ise, lineer olmayan denklemde lineerliği bozan terimlerin dikkate alınmamasıdır. Fakat böyle durumlarda elde edilen başlangıç veya sınır-değer probleminin çözümü fiziksel süreci tam olarak temsil etmeyebilir. Lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için sayısal yöntemler ve diskretleştirme yöntemleri de yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Böyle sayısal yöntemlerin etkinliğini arttırmak için yeni yeni bilgisayar programları geliştirilmiş ve geliştirilmektedir. Sayısal yöntemlerin en zayıf yönü çok fazla hesaplama gerektirmesidir. Bazı durumlarda yeteri kadar yaklaşık çözümler elde etmek için bilgisayarların kapasitesi bile yetersiz kalmaktadır. Üstelik farklı yaklaşım yöntemlerinin (lineerleştirme, sayısal, ardışık yaklaşım, seri biçiminde çözüm arama vs.) her biri bazı tür diferensiyel denklemlerde etkili sonuç verirken, başka tür diferensiyel denklemlerde yeteri kadar etkili sonuç vermeyebilir. Son yıllarda her tür diferensiyel denkleme başarı ile uygulanabilen yaklaşık çözüm bulma yöntemleri arayışı yoğun bir biçimde sürmektedir. Böyle yöntemlere

Diferensiyel Dönüşüm Yöntemini (Diferential Transform Method), Homotopik Pertürbasyon Yöntemini (Homotopi Perturbation Method), Adomian Ayrışım Yöntemini (Adomian Decomposition Method) gösterebiliriz. Bu yöntemler literatürde sırası ile kısaca DTM, HPM ve ADM olarak adlandırılmaktadır. Bu yöntemlerin birbirine göre zayıf ve güçlü yönleri bulunmaktadır. Lineer olmayan sistemler, küçük değişimlere aşırı derece de hassas olabilir. Bu küçük değişimler, doğal stokastik etkilerinden ya da bilgisayar hatalarından dolayı meydana gelebilir. Çözüm sonuçları zorlu ve kararsız davranış gösterebilir (özellikle lineer olmayan denklemlerde).

Fizikte, kimyada ve mühendisliğin pek çok dalında karşılaşılan bazı diferansiyel denklem sistemlerine diferansiyel dönüşüm yöntemi Hassan (2008) tarafından uygulanmıştır. Ayrıca Hassan (2008) tarafından homojen olmayan başlangıç şartlı kısmi diferansiyel denklemlerin farklı çeşitleri, diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemi ile çözülerek karşılaştırılmıştır.

Odibat (2008) çalışmasında,

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt, \qquad 0 < x < 1$$

lineer Volterra integral denklemini ve

$$u(x) + \int_0^x (u^2(t) + u(t))dt = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alarak diferensiyel dönüşüm yönteminin kullanılmasıyla çözümlerini incelemiştir.

Kanth ve Aruna (2009) çalışmasında,

$$u_{tt} - u_{xx} + b_1 u + g(u) = f(x,t)$$

Klein-Gordon denkleminden ve

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

başlangıç şartlarından oluşan problemin çözüm yöntemi olarak diferensiyel dönüşüm yöntemini seçmişlerdir.

Batiha ve Batiha (2011) çalışmalarında, diferensiyel dönüşüm yöntemine dayanarak Michaelis-Menten lineer olmayan biyokimyasal reaksiyon sisteminin çözümünü göstermişlerdir. Ertürk ve ark. (2012) kesirli türevleri içeren sigara kullanımı nı bırakmanın dinamiklerini nümerik olarak çalışmışlardır. Burada sigara kullanımını bırakma modelinin yaklaşık çözümlerini hesaplamak için, çok basamaklı genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemini kullanmışlardır.

Saravanan ve Magesh (2013) çalışmalarında,

$$u_t(x,t) = ku_{xx} + au(x,t) - bu^q(x,t)$$

Newell-Whitehead-Segel denklemi ve

$$u(x,0) = f(x)$$

başlangıç şartından oluşan problemi ele alarak Adomian ayrışım yöntemini ve diferensiyel dönüşüm yönteminini kullanarak, bulunan yaklaşık çözümler karşılaştırılmıştır.

Adomian ayrışım yönteminin lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için güçlü bir metot olduğu Gbadamosi ve ark. (2012) tarafından belirtilmiştir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denkleminden ve

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = h(t), \qquad t > 0$$

Neumann sınır şartından oluşan Stefan problemini çözmek için Bougoffa ve ark. (2015) ayrışım yöntemini kullanmışlardır.

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \int_x^{\infty} b(x,y)u(t,y)s(y)dy - s(x)u(t,x)$$

ikili parçalanma nüfus dengesi denklemi ve

$$u(0,x) = u_0(x)$$

başlangıç şartı ile verilen problemin çözümünü elde etmek için ayrışım yöntemini Singh ve ark. (2015) kullanmışlardır. González-Gaxiola ve Bernal-jaquez (2015) ayrışım yöntemini kullanarak çözülen, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem ile temsil edilen beyin tümörünün büyümesini modellemişlerdir. Neumann şartlı ikinci mertebeden sınır-değer problemlerini çözmek için Adomian ayrışım yönteminin kullanılması Al-Hayani (2015) tarafından ele alınmıştır. Hibrid fuzzy diferensiyel denklemini çözmek için ayrışım yönteminin uygulanması Paripour ve ark. (2015) tarafından yapılmıştır. Dispini ve Mungkasi (2016) tarafından,

$$h_t + uh_x + hu_x = 0, \qquad h(x,0) = g_1(x)$$

$$u_t + h_x + uu_x = -z'(x), \qquad u(x,0) = g_2(x)$$

başlangıç şartları ile birlikte verilen sığ su denklemlerini çözmek için Adomian ayrı şım yöntemini uygulamışlardır. Bakodah ve ark. (2017) Dirichlet ve Neumann sınır şartları ile verilen Burgers denklemini çözmek için ayrışım yöntemini kullanmışlardır.

$$\frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}q = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}q + \frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial x}h^2 = 0$$

yerçekim dalga denklemlerini çözmek için, Mungkasi ve Dheno (2017) Adomian ayrışım yöntemini kullanmışlardır. Hiperbolik Kepler denklemini

$$esinh(H(t)) - H(t) = M(t), \qquad 1 \leq e < \infty, \qquad 0 \leq M < \infty$$

Ebaid ve ark. (2017) ayrışım yöntemi ile çözmüşlerdir.

Putranto ve Mungkasi (2017)

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 + b_1x + c_1y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(a_2 + b_2y + c_2x)$$

şeklindeki lineer olmayan sistemi çözmek için Adomian ayrışım yöntemini uygulamışlardır. Lv ve Gao (2017)

$$u^{(3)}(x) + h(x)f(u(x)) = g(x), \quad x \in [0,1]$$

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \quad u'(0) = \gamma$$

3. mertebeden lineer olmayan diferensiyel denkleme ayrışım yöntemini uygulayarak davranışını incelemişlerdir.

Aşağıda tez konumuzla ilgili sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulun ması için uygulanan yaklaşık çözüm yöntemleri ve bu konuda literatürde mevcut olan bazı çalışmalardan bahsedeceğiz.

$L$ ikinci mertebeden diferensiyel operatör olmak üzere,

$$L[u] = (p(x)u')' - q(x)u = -\lambda\rho(x)u, \quad \alpha < x < \beta$$

$$B_\alpha[u] = \mu_1 u(\alpha) + \sigma_1 u'(\alpha) = 0$$

$$B_\beta[u] = \mu_2 u(\beta) + \sigma_2 u'(\beta) = 0$$

şeklindeki ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemler için sınır-değer problemi, bilindiği üzere Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılmaktadır.

Her gün fizikte, mekanik ve teorik matematikte ortaya çıkan yeni problemleri çözmek için, yeni metotlara ihtiyaç duyulmaktadır. Her bir yaklaşım yöntemi bazı tipten denklemler için tam çözüme çok yakın çözümler bulmaya etkili olmayabilir. Bu nedenle bu metotların hangi tip denklemlerde daha etkili olduğunun araştırılması, hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından önem teşkil etmektedir. Biz bu tez çalışmamızda genel olarak, literatürde DTM ve ADM olarak adlandırılan yöntemlerin bazı tip problemler için ne kadar etkili olduğunu araştıracağız. Bulduğumuz yaklaşık çözümleri mümkün olduğu durumlarda tam çözümlerle karşılaştıracağız. Yani tam çözümü belli olan bazı tip denklemler için bu yöntemlerin etkinliği incelenecektir. Amacımız, diferensiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrı şım yöntemi ile bazı lineer ve lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek ve çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırmasını yapmaktır.

Zhou (1986) ve Pukhov (1982) elektrik devre analizindeki lineer ve lineer olmayan başlangıç-değer problemlerini çözmek için diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulamışlardır. Diferensiyel denklemler genel olarak sürekli değişen fiziksel süreçleri tanımlamak için kullanılmaktadır. Çoğu durumda analitik olarak bu problemleri çözmek neredeyse imkansız olduğu için nümerik ve yaklaşım yöntemleri problemlerin analitik çözümlerinden ziyade yaklaşık çözümlerini elde etmek için geliştirilmiştir. Adi diferensiyel denklemler için analitik çözüme yaklaşık olan ve polinom şeklinde ifade edilen çözüm bulma yöntemlerinden biri de DTM olarak adlandırılan yöntemdir. DTM, diferensiyel dönüşüm operatörünü uygulayarak, orijinal denklemden elde edilen dönüştürülmüş denklemler sistemi ile ve Taylor polinomları şeklinde yaklaşık çözümleri elde etmek için kullanılmaktadır. DTM, küçük hesap hataları ve hızlı yakınsama oranı ile adi diferensiyel denklemleri çözmek için faydalı yöntemlerden biridir ve aynı zamanda üzerinde çalışılan problemin dönüşüm yardımı ile, cebirsel denklemlere çevrilmesi problemin çözümüne ulaşılmasını kolaylaştırır. Dış uyarılara maruz kalan bir sistemin eksik sönümlü veya aşırı sönümlü hareketlerini tanımlayan lineer olmayan bir diferensiyel denklemi çözmek için de, diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanabilir. Chen ve Ho (1996) çalışmalarında,

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy(x)}{dx}] + [\lambda w(x) - q(x)]y(x) = 0$$

denkleminden ve

$$y(0) + \alpha y'(0) = 0$$

$$y(1) + \beta y'(1) = 0$$

sınır şartlarından oluşan özdeğer problemini çözmek için diferensiyel dönüşüm yöntemini kullanmışlardır. Sonraki çalışmalarında ise, kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için iki boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemini tanıtmışlardır.

Bilindiği gibi literatürde özdeğer problemleri ya analitik metotlar ya da yaklaşık metotlar uygulanarak incelenmiştir. Diferensiyel dönüşüm yöntemi ile özdeğer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonları yaklaşık olarak bulunabilir ve verilen özdeğer problemi genel olarak DTM uygulanarak cebirsel denklem sistemine indirgenebilir. Chen ve Liu (1998) çalışmalarında lineer olmayan ısı iletme problemlerini çözmek için diferensiyel dönüşümü kullanmışlardır.

Jang ve ark. (2000) tarafından yapılan çalışmada ise başlangıç-değer problemlerini DTM ile çözmüşlerdir ve daha sonra Jang ve ark. (2001) diferansiyel dönüşüm yönteminin lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için uygulanabilir bir araç olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca diferansiyel dönüşümün, diferansiyel denklemlerin Taylor serisi biçiminde çözümlerini elde etmek için tekrarlı bir prosedür olduğunu belirtmişlerdir. Hassan (2002) çalışmasında, diferensiyel dönüşüm yöntemini kullanarak, bir Sturm-Liouville özdeğer probleminin yaklaşık özdeğerlerini ve yaklaşık özfonksiyonlarını hesaplamıştır.

Hassan (2002) çalışmasında ise

$$\frac{d}{dx}[(e^{2x}\frac{dy(x)}{dx})] + [e^{2x}(1+\lambda^2)]y(x) = 0$$

diferensiyel denkleminden ve

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$

sınır şartlarından oluşan özdeğer probleminin, özdeğerlerini hesaplamak için diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulamıştır. Ayaz (2003) çalışmasında, kısmi diferensiyel denklemler için başlangıç değer probleminin çözümünü iki boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi kullanarak incelemiştir.

Hassan ve Ertürk (2007) çalışmalarında

$$u'' + \lambda e^{u} = 0, \qquad \lambda > 0$$

denkleminden ve

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0$$

sınır şartlarından oluşan Bratu probleminin çözümü için diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulamışlardır. Ertürk ve Momani (2008) çalışmalarında,

$$y^{(5)}(x) = f(x, y), \qquad a < x < b$$

denkleminden ve

$$y(a) = A_1, \quad y'(a) = A_2, \quad y''(a) = A_3, \quad y(b) = B_1, \quad y'(b) = B_2$$

sınır şartlarından oluşan 5. mertebeden sınır-değer problemini çözmek için diferensiyel dönüşüm yöntemini kullanmışlardır.

Adomain Ayrışım Yönteminin en üstün yönü onun lineer veya lineer olmayan adi türevli ve kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulanabilmesidir. Üstelik bu yöntem sadece diferensiyel denklemlere değil, cebirsel denklemlere, integral denklemlere, fonksiyonel denklemlere vs. uygulanabilir. 1980'li yıllarda George Adomian (1922 - 1996) tarafından bilime kazandırılan bu yöntem farklı türden fonksiyonel denklemlerin çözümü için uygulanmıştır. George Adomian tarafından yazılan "Solving Frontier Problems of Physics" isimli kitapta anlatıldığı şekilde metodun amacı, alışılmış modellemelerin yanısıra, kompleks sistemlerin de gerçeğe yakın çözümlerini elde etmektir.

Adomian ayrışım yöntemi klasik Sturm-Liouville tipinde lineer ve lineer olmayan sınır-değer problemlerine de uygulanabilir. Bu konuda literatürde çok az sayıda olsa da bazı çalışmalar bulunmaktadır. Geçiş şartları ile verilen Sturm-Liouville problemlerinin farklı spektral özellikleri Mukhtarov ve Aydemir (2015), Mukhtarov ve ark. (2014) çalışmalarında incelenmiştir. Bu konuda çok az sayıda çalışma yapılmasının esas nedeni klasik Sturm-Liouville teorisinin 150 yıldan fazla bir süre içinde çok ayrıntılı ve kapsamlı bir biçimde incelenmiş olması ve böyle problemlerin en esas özelliklerinin bulunmuş olmasıdır.

Dinamik sistemlerin geniş bir sınıfının yaklaşık çözümü için, Adomian ayrışım yönteminin etkili bir prosedür olduğu Adomian (1988) tarafından belirtilmiştir. Ayrıca,Wazwaz (1998) lineer ve lineer olmayan bazı adi diferansiyel denklemlerin çözümlerine Taylor seri yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemini uygulayarak etkilerini karşılaştırmıştır. Karşılaştırma, ayrışım yönteminin böyle denklemler için daha etkili olduğunu göstermiştir. Adi ve kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilen Adomian yönteminin yakınsaklığı pekçok yazar tarafından incelenmiştir. Örneğin, Abbaoui ve Cherrualt (1994) diferensiyel ve operator denklemler için Adomian yönteminin yakınsaklığını ispatlamışlardır. Wazwaz (2001) çalışmasında

$$y'' + \frac{n}{x}y' + f(y) = 0, \qquad n \geq 0$$

Lane-Emden tipi denklemi ve

$$y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = 0$$

şartları ile verilen problemin çözümü için Adomian yöntemini kullanmıştır.

Inc ve Evans (2003), Adomian ayrışım yöntemini kullanarak

$$(x^\alpha y')' = f(x, y), \qquad 0 < x < 1,$$

denkleminden ve

$$y(0) = A, \qquad y(1) = B,$$

$$y(0) = A', \qquad y'(1) = B',$$

$$y'(0) = A'', \qquad y(1) = B'',$$

sınır şartlarından oluşan, iki noktalı tekil sınır-değer probleminin yaklaşık çözümlerini incelemişlerdir.

El-Tawil ve ark. (2004) analitik formdaki lineer olmayan Riccati diferensiyel denklemi çözmek için Adomian ayrışım yönteminden yararlanmışlardır. Adomian tarafından geliştirilen ADM' ye dayalı nümerik bir metot uygulanarak, delay diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü Evans ve Raslan (2005) tarafından tanıtılmıştır. Arslanturk (2005) sıcaklığa bağlı ısı iletimi ile ızgara verimliliği ve ızgaradaki sıcaklık dağılımının belirlenmesi amacıyla yine aynı yöntemden yararlanmıştır. Sabit ve konsol kiriş bazlı mikro aktüatörlerde, eğme ve çekme voltajı Adomian yöntemi ile Kuang ve Chen (2005) tarafından modellenmiştir ve nümerik sonuçlar göstermiştir ki MEMS (mikro elektromekanik sistemler) sistemlerde kullanılan mikro aktüatörlerden lineer olmayan çıktılarının analizinin yüksek doğruluk ve verimlilikle yapabildiğini göstermiştir. Wazwaz (2005) Bratu denklemli başlangıç değer ve sınır değer problemleri ile ilgilenmiştir. 4. mertebeden integro-diferensiyel denklemleri içeren lineer ve lineer olmayan sınır-değer problemlerini çözmek için Adomian ayrışım yöntemini Hashim (2006) uygulamıştır. Attili (2005) Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini hesaplamak için, Adomian ayrışım yöntemini kullanmıştır.
Attili ve Lesnic (2006) 4. mertebeden Sturm-Liouville sınır-değer probleminin özdeğerlerini hesaplamak için, yine ayrışım yöntemine dayanan metot geliştirmiştir. Somali ve Gökmen (2007) çalışmalarında

$$-y''(t) + y(t) = \lambda y(t)$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

biçiminde bir lineer Sturm-Liouville problemine Adomian ayrışım yöntemi uygulamışlardır. Homojen olmayan başlangıç şartı içeren kısmi diferansiyel denklemlerin farklı çeşitleri, diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemi ile çözülerek Hassan (2008) tarafından karşılaştırılmıştır. Jang (2008) yılındaki çalışmasında,

$$u'' = f(x, u, u'), \qquad a < x < b$$

denkleminden ve

$$u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta$$

sınır şartlarından oluşan iki noktalı sınır-değer problemine genelleştirilmiş Adomian ayrışım yöntemini uygulamıştır.

Al-Mdallal (2009) çalışmasında

$$D^{\alpha}[p(x)y'(x)] + \lambda q(x)y(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

denkleminden ve

$$ay(0) + by'(0) = 0, \qquad cy(1) + dy'(1) = 0$$

sınır şartlarından oluşan kesirli Sturm-Liouville problemleminin özdeğerlerin ve özfonksiyonlarının nümerik yaklaşımını Adomian ayrışım yöntemini uygulayarak incelemiştir.

Her yaklaşım yöntemi bazı tipten denklemler için tam çözüme çok yakın çözümler bulmak için etkili olmayabilir. Bu nedenle bu metotların hangi tip denklemlerde daha etkili olduğunun araştırılması, hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından önem teşkil etmektedir. 'Adomian ayrışım yöntemi' olarak bilinen yöntemin bazı Sturm-Liouville problemleri için ne kadar etkili olduğunu araştıracağız. Bulduğumuz yaklaşık çözümleri mümkün olduğu durumlarda tam çözümlerle karşılaştıracağız. Yani tam çözümü belli olan bazı tip denklemler için bu yöntemlerin etkinliği incelenecektir. Bilindiği gibi Adomian ayrışım yöntemi çok farklı türden denklemlerin çözümü için uygulanmaktadır. Ayrıca biz bu çalışmamızda bu yöntemi tamamıyla yeni bir alana, spektral alana uygulayacağız. Özel olarak da bu yöntemin uygulama alanını daha da genişleterek özdeğerlerin bulunması için uygun olabileceğini göstereceğiz.

# 2. KURAMSAL TEMELLER

## 2.1. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

**Tanım 2.1.** $a(x)$, bir $(a,b)$ aralığında analitik fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Bu durumda

$$A(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}a(x)\right]_{x=x_0}, \qquad k = 0,1,2,... \tag{2.1.1}$$

eşitlikleri ile tanımlı $A(k)$ fonksiyonu, $a(x)$ tek değişkenli fonksiyonunun tek boyutlu diferensiyel dönüşümü olarak tanımlanır. $A(k)$'nın ters dönüşüm fonksiyonu ise

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x-x_0)^k A(k) \tag{2.1.2}$$

biçiminde tanımlanır. (2.1.1)-(2.1.2) den

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left[\frac{d^k a(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \tag{2.1.3}$$

elde edilir. $x_0 = 0$ için,

$$A(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}a(x)\right]_{x=0} \tag{2.1.4}$$

yazılır. Ters dönüşüm foksiyonu ise

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^k a(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \tag{2.1.5}$$

biçiminde ifade edilir (Chen ve Ho, 1996).

**Teorem 2.2.** Tek değişkenli $y(x)$, $a(x)$, $b(x)$ fonksiyonlarını ve $x = x_0$ noktasında sırasıyla bu fonksiyonlara karşılık gelen diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarını $Y(k)$, $A(k)$, $B(k)$ olarak gösterelim. Eğer, $y(x) = a(x) \pm b(x)$ ise bu taktirde $Y(k) = A(k) \pm B(k)$ eşitliği sağlanır (Chen ve Ho, 1996).

**İspat.** $A(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k a(x)}{dx^k}|_{x=x_0}$ ve $B(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k b(x)}{dx^k}|_{x=x_0}$ olmak üzere $y(x) = a(x) \pm b(x)$ ise

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(a(x) \pm b(x))\right]_{x=x_0} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}a(x)\right]_{x=x_0} \pm \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}b(x)\right]_{x=x_0} \tag{2.1.6}$$

yazılır ve böylece $Y(k) = A(k) \pm B(k)$ olduğu görülür.

**Teorem 2.3.** Tek değişkenli $y(x)$ ve $a(x)$ fonksiyonlarını ve sırasıyla bu fonksiyonlara karşılık gelen diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarını $Y(k)$ ve $A(k)$ olarak gösterelim. $c \in R$ olmak üzere eğer $y(x) = ca(x)$ ise $Y(k) = cA(k)$ eşitliği sağlanır (Chen ve Ho, 1996).

**İspat.** $c$ sabit olduğunda, diferensiyel dönüşümün tanımını kullanarak,
$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(ca(x))\right]_{x=0} = c\left[\frac{1}{k!}\frac{d^k a(x)}{dx^k}\right]_{x=0} = cA(k)$ elde edilir. Böylece
$Y(k) = cA(k)$ dır.

**Teorem 2.4.** Tek değişkenli $y(x)$ ve $a(x)$ fonksiyonlarını ve sırasıyla bu fonksiyonlara karşılık gelen diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarını $Y(k)$ ve $A(k)$ olarak alalım. Eğer $y(x) = \frac{d}{dx}a(x)$ ise $Y(k) = (k+1)A(k+1)$ eşitliği sağlanır (Chen ve Ho, 1996).

**İspat.** $A(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}a(x)\right]_{x=0}$ olduğunu bilinmektedir. $y(x) = \frac{d}{dx}a(x)$ ise
$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(\frac{d}{dx}a(x))\right]_{x=0}$ diferensiyel operatörün 2. özelliğinden,

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}a(x)\right]_{x=0} = (k+1)\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}a(x)\right]_{x=0} = (k+1)A(k+1)$$

elde edilir.

2. Yol;

$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A(k)$ dönüşüm tanımından yararlanarak,

$$a(x) = A(0) + xA(1) + x^2A(2) + x^3A(3) + ... \qquad (2.1.7)$$

yazılır. (2.1.7) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak

$$\frac{d}{dx}a(x) = A(1) + 2xA(2) + 3x^2A(3) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}A(k)$$

elde edilir. $k = 1$ in yerine $k = 0$ dan başlatarak,

$$y(x) = \frac{da(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k(k+1)A(k+1)$$

eşitliğini elde ederiz. Sonuç olarak, diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarının tekliğini dikkate alırsak,

$$Y(k) = (k+1)A(k+1)$$

elde edilir.

**Teorem 2.5.** Tek değişkenli $y(x)$ ve $a(x)$ fonksiyonlarını ve sırasıyla bu fonksiyonlara karşılık gelen diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarını $Y(k)$ ve $A(k)$ olarak alalım. Eğer $y(x) = \frac{d^n a(x)}{dx^n}$ ise $Y(k) = \frac{(k+n)!}{k!}A(k+n)$ dir (Chen ve Ho, 1996).

**İspat.** $a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A(k)$ dönüşüm tanımından yararlanarak,

$$a(x) = A(0) + xA(1) + x^2A(2) + x^3A(3) + ... \qquad (2.1.8)$$

yazılır. (2.1.8) eşitliğinin her iki tarafının art arda türevlerini alırsak, ardı sıra olarak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}a(x) = A(1) + 2xA(2) + 3x^2A(3) + ... &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k(k+1)A(k+1) \\
\frac{d^2}{dx^2}a(x) = 2A(2) + 6xA(3) + ... &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k(k+1)(k+2)A(k+2) \\
&. \\
&. \\
&. \\
y(x) = \frac{d^n}{dx^n}a(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k(k+1)(k+2)...(k+n)A(k+n)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak, tümevarım yöntemini uygulayarak

$$Y(k) = \frac{(k+n)!}{k!}A(k+n)$$

eşitliğine ulaşılır.

**Teorem 2.6.** Tek değişkenli $y(x)$, $a(x)$, $b(x)$ fonksiyonlarını ve sırasıyla bu fonksiyonlara karşılık gelen diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarını $Y(k)$, $A(k)$, $B(k)$ olarak alalım. Eğer, $y(x) = a(x)b(x)$ ise $Y(k) = \sum_{r=0}^{k} A(r)B(k-r)$ eşitliği sağlanır (Chen ve Ho, 1996).

**İspat.** $A(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}a(x)\right]_{x=0}$ ve $B(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}b(x)\right]_{x=0}$ olmak üzere $y(x)=a(x)b(x)$ ise $Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(a(x)b(x))\right]_{x=0}$ olur. Diferensiyel operatörün özelliğinden,

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(a(x)b(x))\right]_{x=0}=\frac{1}{k!}\left[b(x)\frac{d^k}{dx^k}a(x)+\begin{pmatrix}k\\1\end{pmatrix}\frac{d}{dx}b(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}a(x)\right]_{x=0}$$
$$+\left[\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}\frac{d^2}{dx^2}b(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}a(x)+...+\begin{pmatrix}k\\k-1\end{pmatrix}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}b(x)\frac{d}{dx}a(x)+a(x)\frac{d^k}{dx^k}b(x)\right]_{x=0}$$

$$\begin{aligned}Y(k) &= \frac{1}{k!}\left[b(x)\frac{d^k}{dx^k}a(x)\right]_{x=0}\\ &+ \frac{1}{k!}\left[\begin{pmatrix}k\\1\end{pmatrix}\frac{d}{dx}b(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}a(x)\right]_{x=0}\\ &+ \frac{1}{k!}\left[\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}\frac{d^2}{dx^2}b(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}a(x)\right]_{x=0}\\ &+ ...+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}b(x)\frac{d}{dx}a(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[a(x)\frac{d^k}{dx^k}b(x)\right]_{x=0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y(k) &= \frac{1}{k!}\left[\left(\frac{d^k}{dx^k}a(x)\right)b(x)\right]_{x=0}\\ &+ \frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{d}{dx}b(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}a(x)\right]_{x=0}\\ &+ ...+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}b(x)\frac{d}{dx}a(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[a(x)\frac{d^k}{dx^k}b(x)\right]_{x=0}\end{aligned}$$

$$Y(k)=A(k)B(0)+A(k-1)B(1)+...+A(1)B(k-1)+A(0)B(k)$$

Sonuç olarak,

$$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}A(r)B(k-r)$$

elde edilir.

**Teorem 2.7.** Eğer $y(x) = c$ ise bu taktirde

$$\delta(k) := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

olmak üzere $Y(k) = c\delta(k)$ olur (Chen ve Ho, 1996).

**İspat.** $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$ diferensiyel dönüşümün tanımını kullanarak, $y(x) = c$ olduğundan dolayı

$$c = Y(0) + xY(1) + x^2Y(2) + ...$$

elde ederiz. Polinomların tanımından,

$$c = Y(0)$$

$$Y(1) = Y(2) = ... = 0$$

yazılır. Böylece

$$Y(k) = \begin{cases} c, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Dolayısıyla $Y(k) = c\delta(k)$ olduğu görülür.

**Teorem 2.8.** Eğer $y(x) = x^m$, $m \in N$ ise bu taktirde $Y(k) = \delta(k - m)$ (Chen ve Ho, 1996).

**İspat.** $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$ diferensiyel dönüşümün tanımını kullanarak, $y(x) = x^m$ olduğundan dolayı

$$x^m = Y(0) + xY(1) + x^2Y(2) + ... + x^mY(m) + ...$$

yazılır. Buradan,

$$Y(0) = Y(1) = ... = Y(m-1) = ... = 0$$

$$Y(m) = 1$$

bulunur. Böylece,

$$Y(k) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

$Y(k) = \delta(k - m)$ sonucuna ulaşılır.

**Teorem 2.9.** Tek değişkenli $y(x)$, $a(x)$, $b(x)$ fonksiyonlarını ve sırasıyla bu fonksiyonlara karşılık gelen diferensiyel dönüşüm fonksiyonlarını $Y(k)$, $A(k)$, $B(k)$ olarak alalım. Eğer, $y(x) = a(x)\frac{d^2}{dx^2}b(x)$ ise bu taktirde $Y(k) = \sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)A(r)B(k-r+2)$ eşitliği sağlanır.

**İspat.** İlk olarak, $g(x) = \frac{d^2}{dx^2}b(x)$'e karşılık gelen diferensiyel dönüşümü bulalım. Teorem 2.5'den $n = 2$ için $G(k) = (k+1)(k+2)B(k+2)$ olur. Teorem 2.6'dan iki fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$Y(k) = \sum_{r=0}^{k} A(r)G(k-r)$$

şeklinde olur. Burada,

$$G(k-r) = (k-r+1)(k-r+2)B(k-r+2)$$

olur. Bu iki ifadeden

$$Y(k) = \sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)A(r)B(k-r+2)$$

elde edilir.

**Teorem 2.10.** Tek değişkenli $y(x)$ fonksiyonu ve $\lambda \in R$ olmak üzere eğer $y(x) = a^{\lambda x}$ ise $Y(k)$ verilen fonksiyonun diferensiyel dönüşümü için

$$Y(k) = \frac{\lambda^k (lna)^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** Tanımdan dolayı, $Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}a^{\lambda x}\right]_{x=0}$ olur. $k$'nın aldığı değer açısından $Y(k)$ değerlerini hesaplayalım.

$k = 0$ için $Y(0) = \frac{1}{0!}[a^{\lambda x}]_{x=0} = 1$

$k = 1$ için $Y(1) = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}a^{\lambda x}\right]_{x=0} = \frac{1}{1!}[\lambda lna a^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{1!}\lambda lna$

$k = 2$ için $Y(2) = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dx^2}a^{\lambda x}\right]_{x=0} = \frac{1}{2!}[\lambda^2(lna)^2 a^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{2!}\lambda^2(lna)^2$

$k = 3$ için $Y(3) = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^2}{dx^2}a^{\lambda x}\right]_{x=0} = \frac{1}{3!}[\lambda^3(lna)^3 a^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{3!}\lambda^3(lna)^3$

Dolayısıyla,

$$Y(k) = \frac{\lambda^k(lna)^k}{k!}$$

eşitliğinin sağlandığı görülmektedir.

**Sonuç 2.11.** Tek değişkenli fonksiyon $y(x)$ ve $\lambda \in R$ olmak üzere eğer $y(x) = e^{\lambda x}$ ise $Y(k)$ verilen fonksiyonun diferensiyel dönüşümü için

$$Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

## 2.2. Adomian Ayrışım Yöntemi

Adomian ayrışım yönteminin en üstün yönü, onun lineer veya lineer olmayan adi türevli ve kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulanabilmesidir. Üstelik bu yöntem sadece diferensiyel denklemlere değil, cebirsel denklemlere, integral denklemlere, fonksiyonel denklemlere vs. uygulanabilir. 1980'li yıllarda George Adomian tarafından bilime kazandırılan bu yöntem farklı türden fonksiyonel denklemlerin çözümü için de uygulanabilir. $F$ ile lineer veya lineer olmayan bir diferensiyel operatörü gösterelim ve

$$Fu(t) = g(t) \tag{2.2.9}$$

homojen olmayan diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Yukarıdaki denklemde bulunan $F$ diferensiyel operatörünün lineer kısmını $H$ ile lineer olmayan kısmını $N$ ile gösterirsek (2.2.9) nolu denklemin sağ tarafı $Fu(t) = Hu(t) + Nu(t)$ şeklinde temsil edilir. $H$ diferensiyel operatörü lineer olsa da bu operatörün tersini bulmak her zaman kolay olan bir problem değildir. $H^{-1}$ ters operatörünü bulabilmemiz için uygun Green fonksiyonunun bulunabilmesi gerekir. Fakat Green fonksiyonunun kurulması çok zor bir problemdir. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için G. Adomian aşağıdaki gibi bir yol izlemiştir. $H$ lineer diferensiyel operatörünü $Hu = Lu + Ru$ biçiminde ifade etmiştir. Burada $Lu = \frac{d^n}{dx^n}u$ biçiminde ki denklemde en yüksek mertebeden türevi içeren basit lineer diferensiyel operatördür. $L^{-1}$ ters operatörünü bulmak çok basit bir problemdir ve art-arda $n$ kere integralleme ile elde edilir.

$$L^{-1}(.) = \int_a^x \int_a^x ... \int_a^x (.)dx \tag{2.2.10}$$

$Ru$ ile $n$ den daha küçük olan türevleri içeren lineer diferensiyel operatör gösterilmiştir.

$$Ru = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \tag{2.2.11}$$

Böylece $F$ diferensiyel operatörü

$$Fu = Lu + Ru + Nu \tag{2.2.12}$$

biçiminde yazılmış oldu. Bu durumda (2.2.9) diferensiyel denklemi

$$Lu = -Ru - Nu + g(t) \tag{2.2.13}$$

biçiminde yazılır. Her iki tarafa $L^{-1}$ ters operatörünü uygularsak,

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(g) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \tag{2.2.14}$$

eşitliği elde edilir. Sol tarafı kolayca hesaplayabiliriz. Örneğin $L = \frac{d^2}{dt^2}$ olduğu durumda ($n = 2$ olduğu durumda)

$$L^{-1}(Lu) = u - u(0) - tu'(0) \tag{2.2.15}$$

olduğu açıktır. Bu durumda (2.2.9) nolu denklemin çözümü için

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}(g) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \tag{2.2.16}$$

eşitliği elde edilir. Eğer (2.2.9) nolu denklem

$$u(0) = A \qquad u'(0) = B \tag{2.2.17}$$

başlangıç şartları ile verilmişse o halde (2.2.9) ile eşdeğer olan

$$u = A + Bt + L^{-1}(g) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \tag{2.2.18}$$

denklemi elde edilir. Sonuncu denklemin $u = u(t)$ çözümünü

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \tag{2.2.19}$$

biçiminde arayacağız. İlk terimi

$$u_0(t) = A + Bt \tag{2.2.20}$$

biçiminde seçelim. $N = N(u)$ ifadesinin $u$ değişkenine göre analitik olduğunu kabul ederek, bu ifadeyi

$$N(u) = A_0(u_0) + A_1(u_0, u_1) + A_2(u_0, u_1, u_2) + ... + A_n(u_0, ..., u_n) + ... \tag{2.2.21}$$

biçiminde araştıracağız. Burada her $k = 0, 1, 2, ...$ için $A_k(u_0, u_1, u_2, ..., u_k)$ ifadesi $u_0, u_1, u_2, ..., u_k$ değişkenlerine göre polinom biçiminde ifade edilir ve bu polinomlara Adomian polinomları denir. Bu polinomlar aşağıdaki eşitliklerle tanımlanıyor.

$$A_0(u_0) = f(u_0)$$

$$A_1(u_0, u_1) = u_1 f'(u_0)$$
$$A_2(u_0, u_1, u_2) = u_2 f'(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} f''(u_0)$$
$$A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} f'''(u_0)$$
$$\dots\dots\dots\dots \tag{2.2.22}$$

Böylece $A_n$ polinomları

$$A_n = \sum_{v=1}^{n} c(v,n) f^{(v)}(u_0)$$

formülünden bulunabilir. $f(u) = u$ lineer olduğu durumlarda, $A_n$, $u_n$ ye indirgenebilir. Diğer durumlarda ise $A_n$ polinomu tüm $u_0, u_1, ..., u_n$ değişkenlerinden bağımlı oluyor. Örneğin, $f(u) = u^2$ için

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = 2u_0 u_1$$

$$A_2 = u_1^2 + 2u_0 u_2$$

$$A_3 = 2u_1 u_2 + 2u_0 u_3 \quad ...$$

Şimdi, $f(u) = e^u$ fonksiyonunu ele alalım.

$$f(u) = e^u = e^{(u_0+u_1+u_2+u_3+...)} = e^{u_0} e^{(u_1+u_2+u_3+...)} \tag{2.2.23}$$

(2.2.23) eşitliğinde Taylor açılımı uygulanarak,

$$f(u) = e^{u_0}\left(1 + (u_1 + u_2 + u_3 + ...) + \frac{1}{2!}(u_1 + u_2 + u_3 + ...)^2 + ...\right)$$

yazılır. Benzer terimleri gruplandırarak ve düzenleme yaparak,

$$\begin{aligned} f(u) &= e^{u_0} + u_1 e^{u_0} + \left(u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2\right) e^{u_0} + \left(u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{3!}u_1^3\right) e^{u_0} \\ &+ \left(u_4 + u_1 u_3 + \frac{1}{2!}u_2^2 + \frac{1}{2!}u_1^2 u_2 + \frac{1}{4!}u_1^4\right) e^{u_0} + ... \end{aligned}$$

bulunur.

$$A_0 = e^{u_0},$$

$$A_1 = u_1 e^{u_0},$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{2!}u_1^2 + u_2\right) e^{u_0},$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{3!}u_1^3 + u_1 u_2 + u_3\right) e^{u_0},$$

$$A_4 = \left( u_4 + \frac{1}{2!}u_2^2 + u_1u_3 + \frac{1}{2!}u_1^2u_2 + \frac{1}{4!}u_1^4 \right) e^{u_0}$$

şeklinde Adomian polinomları yazılır.

Bu şekilde, $A_n$ nin her terimindeki alt indislerinin toplamının $n$ ye eşit olduğuna dikkat edilmektedir. $c(v,n)$ $u$-nun $v$ bileşenlerinin toplamıdır (alt indislerinin toplamı n-dir ve tekrarlanan alt indislerinin sayısının faktöriyeli ile bölünür). Böylece $c(1,3) = u_3$ olabilir. $c(2,3) = u_1u_2$, ve $c(3,3) = \frac{1}{3!}u_1^3$ tür. Lineer olmayan denklem için, verilen $f(u)$ fonksiyonunu

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

ile gösterelim. Özel olarak belirtmemiz gerekir ki, $A_n$ polinomları tek değildir.

Örneğin $f(u) = u^2$ fonksiyonu için, $A_0 = u_0^2$, $A_1 = 2u_0u_1$, $A_2 = u_1^2 + 2u_0u_2$,... olabileceği gibi $A_0 = u_0^2$, $A_1 = 2u_0u_1 + u_1^2$, $A_2 = 2u_0u_2$,... de olabilir, yani $A_1$ polinomu $A_2$ polinomunun ilk terimini içerebilir. Burada önemli olan husus ondan ibarettir ki, $u_0$ ve $u_1$ bilindiği durumda $u_2$ yi hesaplamak mümkün olsun.

Ulaştığımız sonuç şudur ki, $Nu$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

serisinin toplamı, Taylor serisinin toplamına eşittir. Eğer $m$ en yüksek lineer diferansiyel operatörün mertebesi ise, serilerin terimleri $\frac{1}{mn!}$ hızı ile sıfıra yaklaşıyor. Bu nedenle, (2.2.9) denkleminin yaklaşık çözümleri olarak aşağıdaki $\varphi_n$ fonksiyonlarını alabiliriz:

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$$

buradan

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = u$$

olduğu açıkça görülür. Şimdi çözümü aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Bu durumda

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0$$

$$u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1$$

$$u_3 = -L^{-1}Ru_2 - L^{-1}A_2...$$

olacak şekilde, tüm $u_n$ terimleri bulunmuş olur. $A_0$ terimi sadece $u_0$ a göre tanımlanabilir. $A_1$; ise $u_0$ ve $u_1$ e göre tanımlanır vs.

Bilindiği gibi Adomian Ayrışım Yöntemi denklemlerin çözümü için uygulanmaktadır. Fakat biz çalışmamızda bu yöntemi tamamıyla yeni bir alana, spektral alana uygulayacağız. Özel olarak özdeğerlerin bulunması için bu yöntemden yararlanıla bileceğini göstereceğiz. Örnek olarak, aşağıdaki basit Sturm-Liouville problemini ele alalım.

$$-y''(t, \lambda) + y(t, \lambda) = \lambda y(t, \lambda), \quad t \in (0, 1)$$

$$y(0, \lambda) = y(1, \lambda) = 0$$

$L = \frac{d^2}{dt^2}$ diferensiyel operatör olduğu durumda, bu problem

$$Ly(t, \lambda) = y(t, \lambda) - \lambda y(t, \lambda)$$

$$y(0, \lambda) = y(1, \lambda) = 0$$

biçiminde yazılır. Burada Adomian ayrışım yönteminin uygulanması durumunda $m = y'(0) \neq 0$ olacak şekilde ve $k \geq 1$ için

$$y_0(t) = mt$$

$$y_{k+1} = L^{-1}(A_k - \lambda y_k)$$

olduğu kullanılarak $y_1, y_2, y_3, ...$ değerleri

$$y_0 = mt$$

$$A_0 = N(y_0) = y_0 = mt$$

$$A_1 = y_1$$

$$y_1 = m(1-\lambda)\frac{t^3}{3!}$$

$$y_2 = m(1-\lambda)^2\frac{t^5}{5!}...$$

biçiminde bulunur. Bu durumda

$$y(t,\lambda) = y_0(t,\lambda) + y_1(t,\lambda) + y_2(t,\lambda) + ...$$

eşitliği kullanılarak,

$$y(t,\lambda) = \frac{m}{\sqrt{\lambda-1}} sin(\sqrt{\lambda-1})t$$

elde edilir. $y(1,\lambda) = 0$ sınır şartından, özdeğerler için

$$\lambda_n = 1 + n^2\pi^2, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

eşitliği bulunur.

## 2.3. Klasik Sturm-Liouville Problemi

İkinci mertebeden,

$$L[u] = (p(x)u')' - q(x)u = -\lambda\rho(x)u, \qquad \alpha < x < \beta$$

diferensiyel denkleminden ve

$$B_\alpha[u] = \mu_1 u(\alpha) + \sigma_1 u'(\alpha) = 0$$

$$B_\beta[u] = \mu_2 u(\beta) + \sigma_2 u'(\beta) = 0$$

sınır şartlarından oluşan probleme regüler Sturm-Liouville problemi denir. Burada, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $\rho(x)$, $[\alpha,\beta]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar ve $p(x)$ ve $\rho(x)$ pozitif değerli fonksiyonlardır. $\mu_1$, $\mu_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ reel sabitler ve $\mu_i^2 + \sigma_i^2 \neq 0$

$(i = 1, 2)$ dır. Eğer herhangi bir $\lambda$ değeri için, yukarıdaki problemin aşikar olmayan bir $u(x)$ çözümü varsa, $\lambda$ sayısına özdeğer, $u(x)$ çözümüne ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon denir (Lo, 2000).

Örnek olarak,

$$(xu')' = -\lambda x^{-1}u, \quad 1 < x < e; \quad u(1) = u'(e) = 0$$

problemi için özdeğerlerini ve özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları bulalım. Burada ilk olarak, $(xu')' = -\lambda x^{-1}u$ denklemini Euler denklemi olarak, $x^2u'' + xu' + \lambda u = 0$ şeklinde yazabiliriz. $x = e^t$ ve $u(x) = u(e^t) = y(t)$ olsun. Dönüşüm uygulanırsa, $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(1) = 0$ elde edilir. Bütün özdeğerler reel olduğu için aşağıdaki üç durumu düşünelim.

1. $\lambda = -\mu^2$, $(\mu > 0)$ için $y(t) = c_1 cosh\mu t + c_2 sinh\mu t$ yazılabilir. Sınır şartları değerlendirilerek, $0 = y(0) = c_1$; $0 = y'(1) = c_2\mu cosh\mu \implies c_2 = 0$ elde edilir. $y(t) \equiv 0$. Bu nedenle negatif özdeğer yoktur.

2. $\lambda = 0$ için $y(t) = c_1 t + c_2$ elde edilir. $0 = y(0) = c_2$; $0 = y'(1) = c_1$ bulunur. $y(t) \equiv 0$ ve $\mu = 0$ bir özdeğer değildir.

3. $\lambda = \mu^2$, $(\mu > 0)$ için $y(t) = c_1 cos\mu t + c_2 sin\mu t$ yazılır. $0 = y(0) = c_1$; $0 = y'(1) = c_2\mu cos\mu$ bulunur.

Aşikar olmayan çözümler sadece $\mu = (n-1/2)\pi$, $n = 1, 2, ...$ değerleri için mevcuttur. Böylece $\lambda = \lambda_n = (n-1/2)^2\pi^2$ özdeğerlerdir ve özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$y_n(t) = sin[(n - 1/2)\pi t]$$

şeklinde bulunur (Lo, 2000).

**Teorem 2.1.** $q : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olsun. O halde,

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \qquad x \in [a, b]$$

Sturm-Liouville diferensiyel denkleminin,

$$u(a) = sin\alpha, \qquad u'(a) = -cos\alpha, \qquad \alpha \in [0, \pi)$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir tek $u(x, \lambda)$ çözümü vardır ve bu çözüm her $x \in [a, b]$ için $\lambda \in C$ parametresinin tam fonksiyonudur. (Titchmarsh, 1962)

## 3. BULGULAR

### 3.1. Geçiş Şartları İçeren Başlangıç-Değer Problemine Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin Uygulanması

Bu kesimde,

$$y''(t) + y(t) = 0, \qquad t \in [0,1) \cup (1,2]$$

diferensiyel denklemden

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

başlangıç şartlarından ve

$$y(1-0) = y(1+0)$$

$$y'(1-0) = 2y'(1+0)$$

geçiş şartlarından oluşan problemin çözümünü diferensiyel dönüşüm yöntemi ile araştıracağız. İlk olarak $t \in [0,1)$ aralığında problem için çözüm elde edelim. $y''(t) + y(t) = 0$ diferensiyel denklemine $t_0 = 0$ noktasında diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa;

$$Y^-(k+2) = \frac{-Y^-(k)}{(k+2)(k+1)} \tag{3.1.24}$$

elde edilir.

Yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y^-(t) &= \sum_{k=0}^{n} t^k Y^-(k)|_{t=0} \\ &= Y^-(0) + tY^-(1) + (t)^2 Y^-(2) + ... + (t)^n Y^-(n) \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

biçiminde arayacağız. Burada, $y(0) = 1$ olduğundan dolayı $Y^-(0) = 1$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} y'^-(t) &= \sum_{k=0}^{n} k t^{k-1} Y^-(k)|_{t=0} \\ &= Y^-(1) + 2tY^-(2) + ... + n(t)^{n-1} Y^-(n) \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

denklemi üzerinde $y'(0) = 0$ başlangıç şartı kullanılarak, $Y^-(1) = 0$ elde edilir. (3.1.24) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} Y^-(2) &= \frac{-Y^-(0)}{2} = \frac{-1}{2} \\ Y^-(3) &= \frac{-Y^-(1)}{3!} = 0 \\ Y^-(4) &= \frac{-Y^-(2)}{4.3} = \frac{1}{4!} \\ Y^-(5) &= \frac{-Y^-(3)}{5.4} = 0 \\ Y^-(6) &= \frac{-Y^-(4)}{6.5} = \frac{-1}{6!} \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

elde edilir. (3.1.25) denkleminde özel olarak $n = 6$ seçimini yapalım. O halde,

$$y^-(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \tag{3.1.28}$$

$$y'^-(t) = -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} \tag{3.1.29}$$

elde edilir.

İkinci aşama olarak $t \in (1, 2]$ aralığında problem için çözüm elde edelim. $y^+(t) = \sum_{k=0}^{n}(t - t_0)^k Y^+(k)|_{t=t_0}$ olduğu kullanılarak, $t_0 = 2$ için

$$\begin{aligned} y^+(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t-2)^k Y^+(k) \\ &= Y^+(0) + (t-2)Y^+(1) \\ &+ (t-2)^2 Y^+(2) + ... + (t-2)^n Y^+(n) \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

elde edilir. Burada, $Y^+(0) = M$ ve $Y^+(1) = N$ olsun. (3.1.24) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} Y^+(2) &= \frac{-Y^+(0)}{2} = \frac{-M}{2!} \\ Y^+(3) &= \frac{-Y^+(1)}{3!} = \frac{-N}{3!} \\ Y^+(4) &= \frac{-Y^+(2)}{4.3} = \frac{M}{4!} \\ Y^+(5) &= \frac{-Y^+(3)}{5.4} = \frac{N}{5!} \\ Y^+(6) &= \frac{-Y^+(4)}{6.5} = \frac{-M}{6!} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.1.31}$$

elde edilir. (3.1.30) denkleminde özel olarak $n = 6$ seçimini yapalım. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} y^+(t) &= M + (t-2)N + \frac{-M}{2!}(t-2)^2 + \frac{-N}{3!}(t-2)^3 \\ &+ \frac{M}{4!}(t-2)^4 + \frac{N}{5!}(t-2)^5 + \frac{-M}{6!}(t-2)^6 \end{aligned} \tag{3.1.32}$$

ve

$$\begin{aligned} y'^+(t) &= N - M(t-2) + \frac{-N}{2!}(t-2)^2 \\ &+ \frac{M}{3!}(t-2)^3 + \frac{N}{4!}(t-2)^4 + \frac{-M}{5!}(t-2)^5 \end{aligned} \tag{3.1.33}$$

eşitlikleri elde edilir.

Üçüncü aşama olarak da $[0, 1)$ ve $(1, 2]$ aralıklarında bulduğumuz çözümleri geçiş şartlarında uygulayalım. (3.1.28) ve (3.1.32) çözümlerini $t = 1$ süreksizlik noktasında değerlendirirsek;

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} = M - N - \frac{M}{2!} + \frac{N}{3!} + \frac{M}{4!} - \frac{N}{5!} - \frac{M}{6!} \tag{3.1.34}$$

elde ederiz. Aynı şekilde (3.1.29) ve (3.1.33) eşitliklerini $t = 1$ süreksizlik noktasında değerlendirirsek;

$$-1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} = 2(N + M + \frac{-N}{2!} - \frac{M}{3!} + \frac{N}{4!} + \frac{M}{5!}) \tag{3.1.35}$$

elde ederiz. İki değişkenli (3.1.34) ve (3.1.35) cebirsel eşitliklerinden oluşan denklem sistemi Mathematica ile çözülürse $M = -0.0614862, \quad N = -0.681383$ reel değerlere ulaşılır. Bu durumda çözüm,

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ..., \; t \in [0,1) \\ \\ (-0.0614862) + (-0.681383)(t-2) + ... + \frac{(-0.0614862)}{6!}(t-2)^6 + ..., \quad t \in (1,2] \end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

### 3.2. Lineer Olmayan ve Geçiş Şartlarını İçeren Başlangıç-Değer Problemine Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin Uygulanması

Bu kesimde,

$$y''(t) + y^2(t) = 0, \qquad t \in [0,1) \cup (1,2]$$

diferensiyel denklemden

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

başlangıç şartlarından ve

$$y(1-0) = y(1+0)$$

$$y'(1-0) = 3y'(1+0)$$

geçiş şartlarından oluşan lineer olmayan başlangıç-değer probleminin çözümünü bulmak için diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulayalım. İlk olarak $t \in [0,1)$ aralığında problem için çözüm elde edelim. $y''(t) + y^2(t) = 0$ diferensiyel denkleme diferensiyel dönüşüm yöntemi $t_0 = 0$ noktasında uygulanırsa;

$$Y^-(k+2) = \frac{-\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)}{(k+2)(k+1)} \tag{3.2.36}$$

elde edilir. Bu nedenle $[0,1)$ aralığındaki yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y^-(t) &= \sum_{k=0}^{n} t^k Y^-(k)|_{t=0} \\ &= Y^-(0) + tY^-(1) + t^2Y^-(2) + ... + t^nY^-(n) \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

biçiminde bulacağız. Burada, $y(0) = 1$ olduğundan dolayı $Y^-(0) = 1$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} y'^-(t) &= \sum_{k=0}^{n} kt^{k-1} Y^-(k)|_{t=0} \\ &= Y^-(1) + 2tY^-(2) + ... + nt^{n-1}Y^-(n) \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

eşitliği üzerinde $y'(0) = 0$ başlangıç şartı kullanılarak, $Y^-(1) = 0$ elde edilir. (3.2.36) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} Y^-(2) &= \frac{-Y^-(0)Y^-(0)}{2} = \frac{-1}{2} \\ Y^-(3) &= \frac{-(Y^-(0)Y^-(1) + Y^-(1)Y^-(0))}{3!} = 0 \\ Y^-(4) &= \frac{-(Y^-(0)Y^-(2) + Y^-(1)Y^-(1) + Y^-(0)Y^-(2))}{4.3} = \frac{1}{12} \\ Y^-(5) &= \frac{-(Y^-(0)Y^-(3) + Y^-(1)Y^-(2) + Y^-(2)Y^-(1) + Y^-(3)Y^-(0))}{5.4} = 0 \\ Y^-(6) &= \frac{-(2Y^-(0)Y^-(4) + 2Y^-(1)Y^-(3) + Y^-(2)Y^-(2))}{6.5} = \frac{-1}{72} \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

elde edilir. (3.2.37) denkleminde özel olarak $n = 6$ seçimini yapalım. O halde,

$$y^-(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{12} - \frac{t^6}{72} \tag{3.2.40}$$

$$y'^{-}(t) = -t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{12} \tag{3.2.41}$$

elde edilir.

İkinci aşama olarak $t \in (1,2]$ aralığında problem için çözüm elde edelim. $y^+(t) = \sum_{k=0}^{n}(t-t_0)^k Y^+(k)|_{t=t_0}$ olduğu kullanılarak, $t_0 = 2$ için

$$\begin{aligned} y^+(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t-2)^k Y^+(k) \\ &= Y^+(0) + (t-2)Y^+(1) \\ &+ (t-2)^2 Y^+(2) + ... + (t-2)^n Y^+(n) \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

yazılır. Burada, $Y^+(0) = A$ ve $Y^+(1) = B$ olsun. (3.2.36) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} Y^+(2) &= \frac{-Y^+(0)Y^+(0)}{2} = \frac{-A^2}{2!} \\ Y^+(3) &= \frac{-2Y^+(0)Y^+(1)}{3!} = \frac{-A.B}{3} \\ Y^+(4) &= \frac{-(2Y^+(0)Y^+(2) + Y^+(1)Y^+(1))}{4.3} = \frac{A^3 - B^2}{4.3} \\ Y^+(5) &= \frac{-(2Y^+(0)Y^+(3) + 2Y^+(1)Y^+(2))}{5.4} = \frac{A^2B}{12} \\ Y^+(6) &= \frac{-(2Y^+(0)Y^+(4) + 2Y^+(1)Y^+(3) + Y^+(2)Y^+(2))}{6.5} \\ &= \frac{-1}{30}(2A\frac{A^3 - B^2}{12} + 2B(\frac{-A.B}{3}) + \frac{A^4}{4}) \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

elde edilir. (3.2.42) denkleminde özel olarak $n = 6$ seçimini yapalım. O halde,

$$\begin{aligned} y^+(t) &= A + (t-2)B + \frac{-A^2}{2!}(t-2)^2 + \frac{-AB}{3}(t-2)^3 + \frac{A^3 - B^2}{12}(t-2)^4 \\ &+ \frac{A^2B}{12}(t-2)^5 + \frac{-1}{30}(2A\frac{A^3 - B^2}{12} + 2B(\frac{-A.B}{3}) + \frac{A^4}{4})(t-2)^6 \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

$$
\begin{aligned}
y'^{+}(t) &= B - A^2(t-2) - A.B(t-2)^2 + \frac{A^3-B^2}{3}(t-2)^3 + \frac{5A^2B}{12}(t-2)^4 \\
&+ \frac{-1}{5}(2A\frac{A^3-B^2}{12} + 2B(\frac{-A.B}{3}) + \frac{A^4}{4})(t-2)^5 \qquad (3.2.45)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir.

Üçüncü aşama olarak da $[0,1)$ ve $(1,2]$ aralıklarında bulduğumuz çözümleri geçiş şartlarında uygulayalım. (3.2.40) ve (3.2.44) çözümlerini $t=1$ süreksizlik noktasında değerlendirirsek;

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{12} - \frac{1}{72} &= A - B + \frac{-A^2}{2!} + \frac{A.B}{3} + \frac{A^3-B^2}{12} \\
&- \frac{A^2B}{12} + \frac{-1}{30}(2A\frac{A^3-B^2}{12} + 2B(\frac{-A.B}{3}) + \frac{A^4}{4}) \qquad (3.2.46)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Benzer biçimde (3.2.41) ve (3.2.45) eşitliklerini $t=1$ süreksizlik noktasında değerlendirirsek;

$$
\begin{aligned}
-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} &= 3(B + A^2 - A.B - \frac{A^3-B^2}{3} + \frac{5A^2B}{12} \\
&+ \frac{1}{5}(2A\frac{A^3-B^2}{12} + 2B(\frac{-A.B}{3}) + \frac{A^4}{4})) \qquad (3.2.47)
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

(3.2.46) ve (3.2.47) eşitliklerinin ortak çözümünü elde etmek için Mathematica programı kullanılarak,

$$A = 18.2023 + 14.0011i, B = 73.1682 + 85.5077i$$

$$A = 18.2023 - 14.0011i, B = 73.1682 - 85.5077i$$

$$A = 2.29525 - 0.685792i, B = -0.217452 + 0.690384i$$

$$A = 2.29525 + 0.685792i, B = -0.217452 - 0.690384i$$

$$A = -1.23309, B = -10.9387$$

$$A = 5.64893, B = -4.70936$$

$$A = -2.92419, B = -7.37496$$

$$A = -1.67256, B = -2.93683$$

$$A = 0.185747, B = -0.44177$$

değerlere ulaşılır. Burada, $A = 0.185747$, $B = -0.44177$ değerlerine karşılık,

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{12} - \frac{t^6}{72} + ..., \ t \in [0,1) \\ \\ 0.185747 + (-0.44177)(t-2) + \frac{-(0.185747)^2}{2!}(t-2)^2 + ..., \quad t \in (1,2] \end{cases}$$

elde edilir.

## 3.3. Lineer Olmayan ve Geçiş Şartları İçeren Bir Sınır-Değer Problemi için Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin Geliştirilmesi(Modifikasyonu)

Bu kesimde

$$y''(t) + y^2(t) = 5y(t), \quad t \in [-1,0) \cup (0,1]$$

diferensiyel denkleminden

$$y(-1) = 0$$

$$y(1) = 0$$

sınır şartlarından ve

$$y(-0) = k_1 y(+0)$$

$$y'(-0) = k_2 y'(+0)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş probleminin çözümünü elde etmek için diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulayacağız.

İlk olarak, $y''(t)+y^2(t)=5y(t)$ diferensiyel denklemine diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$Y(k+2)=\frac{5Y(k)-\sum_{r=0}^{k}Y(r)Y(k-r)}{(k+2)(k+1)} \qquad (3.3.48)$$

elde edilir. $y(t)=\sum_{k=0}^{n}Y(k)(t-t_0)^k|_{t=t_0}$ olduğu kullanılarak $t_0=-1$ için

$$\begin{aligned} y^-(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t+1)^kY^-(k)|_{t=-1} \\ &= Y^-(0)+(t+1)Y^-(1) \\ &+ (t+1)^2Y^-(2)+...+(t+1)^nY^-(n) \end{aligned} \qquad (3.3.49)$$

elde edilir. Buradan $y(-1)=0$ olduğu kullanılarak $Y^-(0)=0$ elde edilir. $Y^-(1)=A$ olsun. (3.3.48) kullanılarak;

$$k=0 \ \text{için} \ Y^-(2)=\frac{5Y^-(0)-Y^-(0)Y^-(0)}{2}=0$$

$$k=1 \ \text{için} \ Y^-(3)=\frac{5Y^-(1)-\sum_{r=0}^{1}Y(r)Y(1-r)}{3.2}=\frac{5A}{3!}$$

$$k=2 \ \text{için} \ Y^-(4)=\frac{-A^2}{12}$$

$$k=3 \ \text{için} \ Y^-(5)=\frac{25A}{5!}$$

$$k=4 \ \text{için} \ Y^-(6)=\frac{-5A^2}{72}$$

değerleri bulunur. (3.3.49) denkleminde $n=6$ seçimi yapalım. O halde, yaklaşık çözüm ve türevi için

$$\begin{aligned} y^-(t) &= (t+1)A+(t+1)^3\frac{5A}{3!}+(t+1)^4\frac{-A^2}{12}+(t+1)^5\frac{25A}{5!} \\ &+ (t+1)^6\frac{-5A^2}{72} \end{aligned} \qquad (3.3.50)$$

$$y'^-(t)=A+(t+1)^2\frac{5A}{2!}+(t+1)^3\frac{-A^2}{3}+(t+1)^4\frac{25A}{4!}+(t+1)^5\frac{-5A^2}{12} \qquad (3.3.51)$$

eşitlikleri elde edilir.

İkinci durum olarak, $t \in (0,1]$ aralığında problem için çözüm elde edelim. $y(t) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)(t-t_0)^k|_{t=t_0}$ olduğu kullanılarak ve $t_0 = 1$ seçilerek

$$\begin{aligned} y^+(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t-1)^k Y^+(k)|_{t=1} \\ &= Y^+(0) + (t-1)Y^+(1) \\ &+ (t-1)^2 Y^+(2) + ... + (t-1)^n Y^+(n) \end{aligned} \tag{3.3.52}$$

yazılır. Buradan $y(1) = 0$ olduğu kullanılarak $Y^+(0) = 0$ elde edilir. $Y^+(1) = B$ olsun. (3.3.48) kullanılarak;

$$k = 0 \ \text{için} \ \ Y^+(2) = 0$$

$$k = 1 \ \text{için} \ \ Y^+(3) = \frac{5B}{3!}$$

$$k = 2 \ \text{için} \ \ Y^+(4) = \frac{-B^2}{4.3}$$

$$k = 3 \ \text{için} \ \ Y^+(5) = \frac{25B}{5!}$$

$$k = 4 \ \text{için} \ \ Y^+(6) = \frac{-5B^2}{72}$$

bulunur.

(3.3.49) denkleminde $n = 6$ seçimi yapalım. O halde,

$$\begin{aligned} y^+(t) &= (t-1)B + (t-1)^3\frac{5B}{3!} - (t-1)^4\frac{B^2}{4.3} + (t-1)^5\frac{25B}{5!} \\ &- (t-1)^6\frac{5B^2}{72} \end{aligned} \tag{3.3.53}$$

ve

$$y'^+(t) = B + (t-1)^2\frac{5B}{2!} - (t-1)^3\frac{B^2}{3} + (t-1)^4\frac{25B}{4!} - (t-1)^5\frac{5B^2}{12} \tag{3.3.54}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.3.50)-(3.3.51) ve (3.3.53)-(3.3.54) denklemlerini $t = 0$ süreksizlik noktasına göre değerlendirerek ve geçiş şartlarını göz önüne alarak, Mathematica programının kullanılması sonucu ($A = 12.9508$, $B = -0.412886$), ($A = 6.80966$, $B = -6.55397$), ($A = 6.56187$, $B = -6.56187$) elde edilir. Burada, $k_1 = 1$ ve $k_2 = 5$ seçimleri yapılmıştır. Dolayısıyla, $A = 12.9508$, $B = -0.412886$ değerlerine karşılık gelen çözüm fonksiyonu;

$$y(t) = \begin{cases} (t+1)(12.9508) + (t+1)^3 \frac{5.(12.9508)}{3!} + (t+1)^4 \frac{-(12.9508)^2}{12} + ..., & t \in [-1, 0) \\ (t-1)(-0.412886) + (t-1)^3 \frac{5(-0.412886)}{3!} - (t-1)^4 \frac{(-0.412886)^2}{4.3} + ..., & t \in (0, 1] \end{cases}$$

biçiminde bulunur. Ayrıca, $A = 6.80966$, $B = -6.55397$ değerlerine karşılık gelen çözüm fonksiyonu için

$$y(t) = \begin{cases} (t+1)(6.80966) + (t+1)^3 \frac{5.(6.80966)}{3!} + (t+1)^4 \frac{-(6.80966)^2}{12} + ..., & t \in [-1, 0) \\ (t-1)(-6.55397) + (t-1)^3 \frac{5(-6.55397)}{3!} - (t-1)^4 \frac{(-6.55397)^2}{4.3} + ..., & t \in (0, 1] \end{cases}$$

eşitliği, $A = 6.56187$, $B = -6.56187$ değerlerine karşılık gelen çözüm fonksiyonu için

$$y(t) = \begin{cases} (t+1)(6.56187) + (t+1)^3 \frac{5.(6.56187)}{3!} + (t+1)^4 \frac{-(6.56187)^2}{12} + ..., & t \in [-1, 0) \\ (t-1)(-6.56187) + (t-1)^3 \frac{5(-6.56187)}{3!} - (t-1)^4 \frac{(-6.56187)^2}{4.3} + ..., & t \in (0, 1] \end{cases}$$

eşitliği elde edilir.

## 3.4. Homojen Olmayan ve Geçiş Şartları İçeren Bir Sınır-Değer Problemi için Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin Uygulanabilirliğinin İncelenmesi

Bu kesimde

$$y''(t) - \lambda y(t) = 0, \qquad t \in [-1,0) \cup (0,1]$$

diferensiyel denkleminden

$$y(-1) = 1$$

$$y(1) = 0$$

sınır şartlarından ve

$$y(-0) = k_1 y(+0)$$

$$y'(-0) = k_2 y'(+0)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş problemini inceleyeceğiz. Bu probleme diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulayarak, çözümünü araştıracağız.

İlk olarak, $y''(t) - \lambda y(t) = 0$ diferensiyel denklemine diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$Y(k+2) = \frac{\lambda Y(k)}{(k+2)(k+1)} \tag{3.4.55}$$

bulunur. $y(t) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)(t-t_0)^k|_{t=t_0}$ olduğu kullanılarak, $t_0 = -1$ için yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned} y^-(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t+1)^k Y^-(k)|_{t=-1} \\ &= Y^-(0) + (t+1)Y^-(1) \\ &+ (t+1)^2 Y^-(2) + ... + (t+1)^n Y^-(n) \end{aligned} \tag{3.4.56}$$

biçiminde yazılır. Buradan $y(-1) = 1$ olduğu kullanılarak $Y^-(0) = 1$ elde edilir. $Y^-(1) = A$ olsun. (3.4.55) kullanılarak;

$$k = 0 \ \ için \ \ Y^-(2) = \frac{\lambda Y^-(0)}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

$$k=1 \;\; i\c{c}in \;\; Y^-(3)=\frac{\lambda Y^-(1)}{3.2}=\frac{\lambda}{3!}A$$

$$k=2 \;\; i\c{c}in \;\; Y^-(4)=\frac{\lambda Y(2)}{4.3}=\frac{\lambda^2}{4!}$$

$$k=3 \;\; i\c{c}in \;\; Y^-(5)=\frac{\lambda Y(3)}{5.4}=\frac{\lambda^2 A}{5!}$$

$$k=4 \;\; i\c{c}in \;\; Y^-(6)=\frac{\lambda Y(4)}{6.5}=\frac{\lambda^3}{6!}$$

$$k=5 \;\; i\c{c}in \;\; Y^-(7)=\frac{\lambda Y(5)}{7.6}=\frac{\lambda^3 A}{7!}$$

$$k=6 \;\; i\c{c}in \;\; Y^-(8)=\frac{\lambda Y(6)}{8.7}=\frac{\lambda^4}{8!}$$

elde edilir. (3.4.56) denkleminde $n=8$ seçimi yapalım. O halde, yaklaşık çözüm için

$$y^-(t)=1+(t+1)A+(t+1)^2\frac{\lambda}{2}+(t+1)^3\frac{\lambda}{3!}A+...+(t+1)^8\frac{\lambda^4}{8!} \qquad (3.4.57)$$

$$y'^-(t)=A+(t+1)\lambda+(t+1)^2\frac{\lambda}{2}A+(t+1)^3\frac{\lambda^2}{3!}+...+(t+1)^7\frac{\lambda^4}{7!} \qquad (3.4.58)$$

eşitlikleri elde edilir.

İkinci durum olarak, $t\in(0,1]$ aralığında problem için çözüm elde edelim. $y(t)=\sum_{k=0}^{n}Y(k)(t-t_0)^k|_{t=t_0}$ olduğu kullanılarak ve $t_0=1$ için

$$\begin{aligned} y^+(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t-1)^k Y^+(k)|_{t=1} \\ &= Y^+(0)+(t-1)Y^+(1) \\ &+ (t-1)^2 Y^+(2)+...+(t-1)^n Y^+(n) \end{aligned} \qquad (3.4.59)$$

yazılır. Buradan $y(1)=0$ olduğu kullanılarak $Y^+(0)=0$ elde edilir. $Y^+(1)=B$ olsun. (3.4.55) kullanılarak;

$$k=0 \;\; i\c{c}in \quad Y^+(2)=\frac{\lambda Y^+(0)}{2}=0$$

$$k=1 \ için \ Y^+(3)=\frac{\lambda Y^+(1)}{3.2}=\frac{\lambda}{3!}B$$
$$k=2 \ için \ Y^+(4)=\frac{\lambda Y^+(2)}{4.3}=0$$
$$k=3 \ için \ Y^+(5)=\frac{\lambda Y^+(3)}{5.4}=\frac{\lambda^2}{5!}B$$
$$k=4 \ için \ Y^+(6)=\frac{\lambda Y^+(4)}{6.5}=0$$
$$k=5 \ için \ Y^+(7)=\frac{\lambda Y^+(5)}{7.6}=\frac{\lambda^3}{7!}B$$
$$k=6 \ için \ Y^+(8)=\frac{\lambda Y^+(6)}{8.7}=0$$

elde edilir.

(3.4.56) denkleminde $n=8$ seçimi yapalım. O halde,

$$y^+(t)=(t-1)B+(t-1)^3\frac{\lambda}{3!}B+(t-1)^5\frac{\lambda^2}{5!}B+(t-1)^7\frac{\lambda^3}{7!}B \qquad (3.4.60)$$

$$y'^+(t)=B+(t-1)^2\frac{\lambda}{2!}B+(t-1)^4\frac{\lambda^2}{4!}B+(t-1)^6\frac{\lambda^3}{6!}B \qquad (3.4.61)$$

elde edilir. Burada, $k_1=1$, $k_2=2$ ve $\lambda=2$ seçimleri yapılmıştır. (3.4.57)-(3.4.58) ve (3.4.60)-(3.4.61) denklemlerini $t=0$ süreksizlik noktasına göre değerlendirerek ve geçiş şartlarını göz önüne alarak, Mathematica programı kullanılarak $A=-1.48016$, $B=-0.111778$ elde edilir. Dolayısıyla, çözüm fonksiyonu;

$$y(t)=\begin{cases} 1+(t+1)(-1.48016)+(t+1)^2\frac{\lambda}{2}+...+(t+1)^8\frac{\lambda^4}{8!}+..., & t\in[-1,0) \\ \\ (t-1)(-0.111778)+(t-1)^3\frac{\lambda}{3!}(-0.111778)+... \\ +(t-1)^7\frac{\lambda^3}{7!}(-0.111778)+..., & t\in(0,1] \end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

### 3.5. Bir Lineer Olmayan Sturm-Liouville Sınır-Değer-Geçiş Probleminin DTM ile Elde Edilen Yaklaşık Çözümünün Analitik(net) Çözümü ile Karşılaştırılması

$$y''(t) = \frac{1}{2}y^3(t), \qquad t \in [1,2) \cup (2,3]$$

lineer olmayan diferensiyel denklemden

$$y(1) = \frac{2}{3}, \qquad y(3) = \frac{2}{5}$$

sınır şartlarından ve

$$y(2-0) = y(2+0)$$

$$y'(2-0) = y'(2+0)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş probleminin çözümünü bulmak için diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulayalım. İlk olarak $t \in [1,2)$ aralığında problem için çözüm elde edelim. $y''(t) = \frac{1}{2}y^3(t)$ diferensiyel denkleme diferensiyel dönüşüm yöntemi $t = 0$ noktasında uygulanırsa;

$$Y^-(k+2) = \frac{\sum_{l=0}^{k}\sum_{i=0}^{l} Y^-(i)Y^-(l-i)Y^-(k-l)}{2(k+2)(k+1)} \tag{3.5.62}$$

elde edilir. O halde yaklaşık çözüm için

$$\begin{aligned} y^-(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t-1)^k Y^-(k)|_{t=1} \\ &= Y^-(0) + (t-1)Y^-(1) \\ &+ (t-1)^2 Y^-(2) + ... + (t-1)^n Y^-(n) \end{aligned} \tag{3.5.63}$$

eşitliği bulunur. Burada, $y(1) = \frac{2}{3}$ olduğundan dolayı $Y^-(0) = \frac{2}{3}$ elde edilir. $Y^-(1) = A$ olsun. (3.5.62) denklemi kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
Y^-(2) &= \frac{Y^-(0)Y^-(0)Y^-(0)}{4} = \frac{2}{27} \\
Y^-(3) &= \frac{1}{12}(Y^-(0)Y^-(0)Y^-(1) + Y^-(0)Y^-(1)Y^-(0) + Y^-(1)Y^-(0)Y^-(0)) \\
&= \frac{A}{9} \qquad (3.5.64) \\
Y^-(4) &= \frac{1}{24}\left(Y^-(0)Y^-(0)Y^-(2) + Y^-(0)Y^-(1)Y^-(1) + Y^-(1)Y^-(0)Y^-(1)\right) \\
&+ \frac{1}{24}\left(Y^-(0)Y^-(2)Y^-(0) + Y^-(1)Y^-(1)Y^-(0) + Y^-(2)Y^-(0)Y^-(0)\right) \\
&= \frac{1}{24}(\frac{4}{9}\frac{2}{27}3 + 2A^2) \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.5.63) denkleminde özel olarak $n = 4$ seçimini yapalım. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
y^-(t) &= \frac{2}{3} + A(t-1) + \frac{2}{27}(t-1)^2 + \frac{A}{9}(t-1)^3 \\
&+ \frac{1}{24}(\frac{8}{81} + 2A^2)(t-1)^4 \qquad (3.5.65)
\end{aligned}
$$

$$
y'^-(t) = A + 2\frac{2}{27}(t-1) + 3\frac{A}{9}(t-1)^2 + 4\frac{1}{24}(\frac{8}{81} + 2A^2)(t-1)^3 \qquad (3.5.66)
$$

elde edilir.

İkinci aşama olarak $t \in (2,3]$ aralığında problem için çözüm elde edelim. $y^+(t) = \sum_{k=0}^{n}(t-t_0)^k Y^+(k)|_{t=t_0}$ olduğu kullanılarak, $t_0 = 3$ için

$$
\begin{aligned}
y^+(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t-3)^k Y^+(k) \\
&= Y^+(0) + (t-3)Y^+(1) \\
&+ (t-3)^2 Y^+(2) + ... + (t-3)^n Y^+(n) \qquad (3.5.67)
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada, $y(3) = \frac{2}{5}$ olduğu kullanılarak, $Y^+(0) = \frac{2}{5}$ elde edilir. $Y^+(1) = B$ olsun. (3.5.63) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
Y^+(2) &= \frac{Y^+(0)Y^+(0)Y^+(0)}{4} = \frac{2}{125} \\
Y^+(3) &= \frac{1}{12}(Y^+(0)Y^+(0)Y^+(1) + Y^+(0)Y^+(1)Y^+(0) + Y^+(1)Y^+(0)Y^+(0)) \\
&= \frac{B}{25} \qquad (3.5.68) \\
Y^+(4) &= \frac{1}{24}\left(Y^+(0)Y^+(0)Y^+(2) + Y^+(0)Y^+(1)Y^+(1) + Y^+(1)Y^+(0)Y^+(1)\right) \\
&+ \frac{1}{24}\left(Y^+(0)Y^+(2)Y^+(0) + Y^+(1)Y^+(1)Y^+(0) + Y^+(2)Y^+(0)Y^+(0)\right) \\
&= \frac{1}{8}(\frac{4}{25}\frac{2}{125} + \frac{2}{5}B^2) \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad .
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.5.67) denkleminde özel olarak $n = 4$ seçimini yapalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
y^+(t) &= \frac{2}{5} + (t-3)B + \frac{2}{125}(t-3)^2 + \frac{B}{25}(t-3)^3 \\
&+ \frac{1}{8}(\frac{4}{25}\frac{2}{125} + \frac{2}{5}B^2)(t-3)^4 \qquad (3.5.69)
\end{aligned}$$

$$y'^+(t) = B + 2\frac{2}{125}(t-3) + 3\frac{B}{25}(t-3)^2 + \frac{1}{2}(\frac{4}{25}\frac{2}{125} + \frac{2}{5}B^2)(t-3)^3 \quad (3.5.70)$$

elde edilir.

Üçüncü aşama olarak da $[1,2)$ ve $(2,3]$ aralıklarında bulduğumuz çözümleri geçiş şartlarında uygulayalım. O halde

$$\frac{2}{3} + A + \frac{2}{27} + \frac{A}{9} + \frac{1}{24}(\frac{8}{81} + 2A^2) = \frac{2}{5} - B + \frac{2}{125} - \frac{B}{25} + (\frac{1}{5^5} + \frac{1}{20}B^2) \; (3.5.71)$$

eşitliğini elde ederiz. Aynı şekilde (3.5.66) ve (3.5.70) eşitliklerini 2 noktasında değerlendirirsek;

$$A+\frac{4}{27}+\frac{A}{3}+\frac{1}{6}(\frac{8}{81}+2A^2)=B-\frac{4}{125}+\frac{3B}{25}-(\frac{4}{5^5}+\frac{B^2}{5}) \tag{3.5.72}$$

elde ederiz.

(3.5.71) ve (3.5.72) eşitliklerinde Mathematica kullanılarak, ortak çözüm yapıldığı takdirde $\{A=-4.78369, \quad B=3.57608\}$ ve $\{A=-0.227033, \quad B=-0.0771867\}$ reel değerlere ulaşılır. Burada $\{A=-0.227033, \quad B=-0.0771867\}$ değerlerini kullanarak, aşağıdaki çözüm fonksiyonunun sonuçları tabloda verilmiştir. Yaklaşık çözüm fonksiyonu,

$$y(t)=\begin{cases} \frac{2}{3}+(t-1)(-0.227033)+(t-1)^2\frac{2}{27}+..., & t\in[1,2) \\ \\ \frac{2}{5}+(t-3)(-0.0771867)+(t-3)^2\frac{2}{125}+..., & t\in(2,3] \end{cases}$$

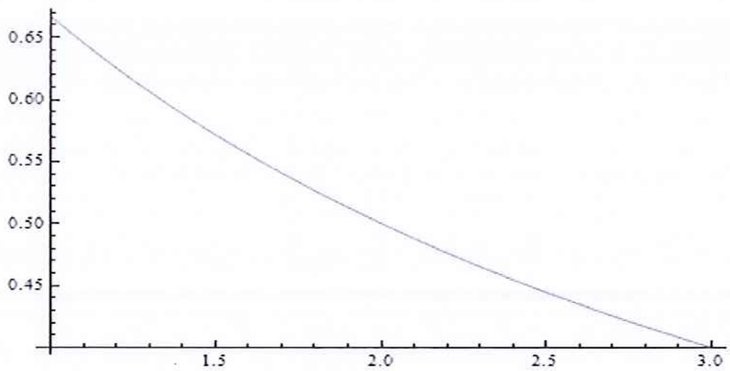
biçiminde elde edilir.

$y''(t)=\frac{1}{2}y^3(t), \quad t\in[1,3]$ diferensiyel denkleminden ve $y(1)=\frac{2}{3}$, $y(3)=\frac{2}{5}$ sınır şartlarından ve $y(2-0)=y(2+0), \quad y'(2-0)=y'(2+0)$ geçiş şartlarından oluşan sınır-değer probleminin analitik çözümü $y(t)=\frac{2}{t+2}$ şeklindedir.

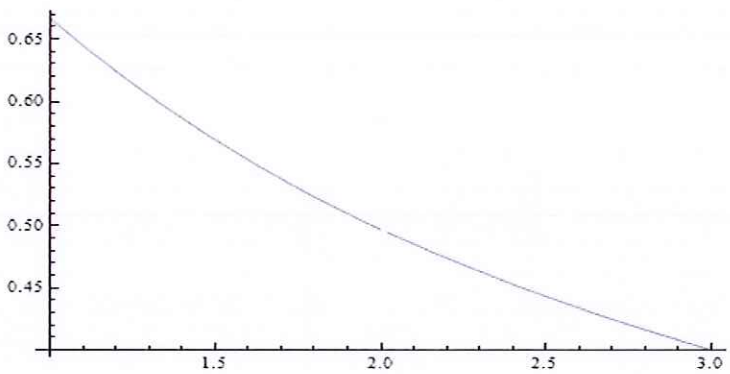
Çizelge 3.1 Çözümlerin Karşılaştırılması

| t | $Dy(t)$ | Analitik Çözüm |
|---|---|---|
| 1.1 | 0.6446796902 | 0.6451612903 |
| 1.2 | 0.6240346144 | 0.6250000000 |
| 1.3 | 0.6046103619 | 0.6060606060 |
| 1.4 | 0.5863060406 | 0.5882352941 |
| 1.5 | 0.5690409435 | 0.5714285714 |
| 1.6 | 0.5527545495 | 0.5555555555 |
| 1.7 | 0.5374065223 | 0.5405405405 |
| 1.8 | 0.5229767115 | 0.5263157894 |
| 1.9 | 0.5094651517 | 0.5128205128 |
| 2.1 | 0.4850841964 | 0.4878048780 |
| 2.2 | 0.4738232356 | 0.4761904761 |
| 2.3 | 0.4630780506 | 0.4651162790 |
| 2.4 | 0.4528189948 | 0.4545454545 |
| 2.5 | 0.4430179043 | 0.4444444444 |
| 2.6 | 0.4336480981 | 0.4347826086 |
| 2.7 | 0.4246843781 | 0.4255319148 |
| 2.8 | 0.4161030294 | 0.4166666666 |
| 2.9 | 0.4078818198 | 0.4081632653 |

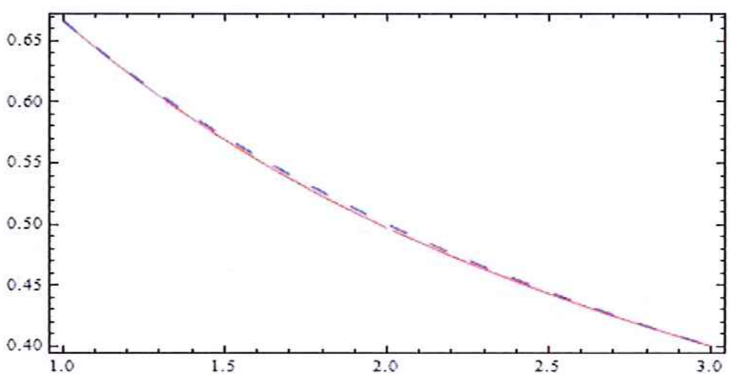
Dy(t), DTM kullanılarak elde edilen sonuçları temsil etmektedir. Tabloda elde edilen sonuçlar Mathematica kullanılarak bulunmuştur.




`Grafik` 3.1 $y(t) = \frac{2}{t+2}$ çözüm grafiği




`Grafik` 3.2 $Dy(t)$ çözüm grafiği




`Grafik` 3.3 Çözümlerin karşılaştırma grafiği

### 3.6. Lineer Olmayan Bir Sturm-Liouville Probleminin Adomian Ayrışım Yöntemi ile Özdeğerlerinin Bulunması

Bu kesimde

$$-y''(t,\lambda)+e^{y(t,\lambda)}=\lambda y(t,\lambda) \tag{3.6.73}$$

$$y(0,\lambda)=0 \tag{3.6.74}$$

$$y(1,\lambda)=0 \tag{3.6.75}$$

$t\in I=(0,1)$, $y(t,\lambda)>0$ olacak şekilde, lineer olmayan Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini ADM ile hesaplayacağız. Burada $\lambda$ bir özdeğer parametresidir. Başlangıç olarak, $L=\frac{d^2}{dt^2}$ diferansiyel operatörünün yardımı ile verilmiş sınır değer problemi

$$Ly(t,\lambda)=e^{y(t,\lambda)}-\lambda y(t,\lambda) \tag{3.6.76}$$

$$y(0,\lambda)=y(1,\lambda)=0 \tag{3.6.77}$$

şeklinde yazılabilir. $L$ nin ters operatörü (3.6.76) nın her iki tarafına uygulayalım, o halde; $L^{-1}[.]=\int_0^t\int_0^x .dsdx$ ve $y(0,\lambda)=0$ ilk sınır şartı kullanılarak, ($y'(0,\lambda)=a\neq 0$ değeri diğer sınır şartı kullanılarak bulunacaktır.) aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$f=e^{y(t,\lambda)}-\lambda y(t,\lambda) \tag{3.6.78}$$

gösteriminden yararlanırsak, denklemi

$$Ly(t,\lambda)=y''(t,\lambda)=f$$

biçiminde ifade edebiliriz. Her iki tarafı integrallersek,

$$\int_{t_0}^t y''(t,\lambda)=\int_{t_0}^t f$$

elde edilir. Burada,

$$y'(t,\lambda)-y'(t_0,\lambda)=\int_{t_0}^t f$$

elde edilir. Yeniden integrallersek,

$$\int_{t_0}^{t} y'(t,\lambda) = \int_{t_0}^{t} y'(t_0,\lambda) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} f$$

elde edilir. Buradan

$$y(t,\lambda) - y(t_0,\lambda) = ty'(t_0,\lambda) - t_0 y'(t_0,\lambda) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} f$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte (3.6.78) i dikkate alırsak

$$y(t,\lambda) = y(t_0,\lambda) + ty'(t_0,\lambda) - t_0 y'(t_0,\lambda) + L^{-1}(e^{y(t,\lambda)} - \lambda y(t,\lambda))$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $t_0 = 0$ koyarsak

$$y(t,\lambda) = ty'(0,\lambda) + L^{-1}(e^{y(t,\lambda)} - \lambda y(t,\lambda))$$

eşitliğini buluruz. Sonuncu eşitlikte $y'(0,\lambda) = a$ seçimi yapılarak

$$y(t,\lambda) = at + L^{-1}(e^{y(t,\lambda)} - \lambda y(t,\lambda))$$

denklemi elde edilir. Şimdi çözümü

$$y(t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t,\lambda) \tag{3.6.79}$$

şeklinde arayacağız. İlk önce $e^{y(t,\lambda)}$ ifadesini Adomian polinomlarının serisine açalım.

$$e^{y(t,\lambda)} = N(y(t,\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.6.80}$$

$A_n$ nin Adomian polinom olduğu için (3.6.78) denkleminde (3.6.79) ve (3.6.80) ifadelerini kullanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t,\lambda) = at + L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n) - L^{-1}(\lambda \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t,\lambda)) \tag{3.6.81}$$

yazılır. $at = y_0(t,\lambda)$ tanımlanarak, diğer bileşenler

$$y_0(t,\lambda) = at \tag{3.6.82}$$

$$y_{k+1}(t,\lambda) = L^{-1}(A_k - \lambda y_k), \qquad k \geq 0 \tag{3.6.83}$$

reküranс ilişkisi kullanılarak tanımlanır. (3.6.83) denkleminin elde ediliş biçimi aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t,\lambda) = at + L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n) - L^{-1}(\lambda \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t,\lambda))$$

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t,\lambda) = at + L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n) - L^{-1}(\lambda \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t,\lambda))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t,\lambda) = L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty}(A_n - \lambda y_n(t,\lambda)))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}(t,\lambda) = L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty}(A_n - \lambda y_n(t,\lambda)))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}(t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(L^{-1}(A_n - \lambda y_n(t,\lambda)))$$

(Serinin terimleri terim terim diferensiyellenebilir olduğundan dolayı yazılabilir.) Burada $A_k$, $N(y) = e^y$ lineer olmayan terimi içeren Adomian polinomlarıdır. Adomian polinomları

$$A_0 = N(y_0) = e^{y_0}$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0) = y_1 e^{y_0}$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{1}{2} y_1^2 N''(y_0) = y_2 e^{y_0} + \frac{1}{2} y_1^2 e^{y_0}$$

$$A_3 = y_3 N'(y_0) + y_1 y_2 N''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 N'''(y_0) = y_3 e^{y_0} + y_1 y_2 e^{y_0} + \frac{1}{3!} y_1^3 e^{y_0}$$

......................

şeklinde bulunur. Burada

$$y_0 = at$$

$$y_1 = L^{-1}(A_0 - \lambda y_0)$$

$$y_2 = L^{-1}(A_1 - \lambda y_1)$$

$$y_3 = L^{-1}(A_2 - \lambda y_2)$$

.............

eşitlikleri kullanılarak,

$$y_1 = -\left(\frac{6 - 6e^{at} + \lambda a^3 t^3 + 6at}{6a^2}\right)$$

elde edilir.

$$A_1 = y_1 e^{y_0} = y_1 e^{at} = -\left(\frac{6 - 6e^{at} + \lambda a^3 t^3 + 6at}{6a^2}\right) e^{at}$$

olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} y_2 &= L^{-1}(A_1 - \lambda y_1) \\ &= (1/120a^4)(480\lambda(-1 + e^{at}) + (-120a\lambda(1 + 3e^{at})t + (120(-2 + e^{at}(2 + a^2\lambda t^2)) \\ &+ (30e^{2at} + 30(3 + 4\lambda - 4at) - 20e^{at}(6 + 6at + \lambda(6 + a^3t^3) + at(60(1 + 2\lambda) \\ &+ a\lambda t(60 + 20at + a^3\lambda t^3)))))) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} y(t,\lambda) &= y_0 + y_1 + y_2 + \ldots \\ &= at + \frac{1}{a^2}e^{at} - \lambda a\frac{t^3}{3!} + \ldots \end{aligned}$$

Şimdi $y(1) = 0$ sınır şartı göz önüne alınırsa,

$$y(t,\lambda) = \sum_{n=0}^{1} y_n = y_0 + y_1 = at + \frac{1}{a^2}e^{at} - \lambda a\frac{t^3}{3!},$$

$$y(1,\lambda) = a + \frac{1}{a^2}e^{a} - \lambda a\frac{1}{3!} = 0$$

elde edilir. İncelenen problem için $y(t) = y(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$ sağlandığı görülmektedir. Bunları dikkate alarak ve

$$M(\lambda, a) = y'(0, \lambda) + y'(1, \lambda) = 0$$

$$N(\lambda, a) = y(1, \lambda) = 0$$

seçimi yapılarak, $M(\lambda, a) = 0$ ve $N(\lambda, a) = 0$ lineer olmayan bir denklem sistemi yazılır. Nümerik olarak, verilen denklem sistemini çözerek $\lambda$ ve $a$ nın değerlerini elde ederiz. Şimdi

$$y(t, \lambda) = at + \frac{1}{a^2}e^{at} - \lambda a\frac{t^3}{3!}$$

$$N(\lambda, a) = y(1, \lambda) = a + \frac{1}{a^2}e^{a} - \frac{\lambda a}{3!} = 0$$

$$y'(t, \lambda) = a + \frac{1}{a}e^{at} - \lambda a\frac{t^2}{2}$$

$$y'(0, \lambda) = a + \frac{1}{a}$$

ve

$$y'(1, \lambda) = a + \frac{1}{a}e^{a} - \frac{\lambda a}{2}$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$M(\lambda, a) = y'(0, \lambda) + y'(1, \lambda) = 2a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{a} - \frac{\lambda a}{2} = 0 \qquad (3.6.84)$$

$$N(\lambda, a) = a + \frac{1}{a^2}e^{a} - \frac{\lambda a}{3!} = 0 \qquad (3.6.85)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemler ortak çözülerek, $\lambda$ ve $a$ değerlerini bulalım. Ama öncelikli olarak $e^a \cong 1 + a$ seçimini yapalım. $2a + \frac{2}{a} + 1 = \frac{\lambda a}{2}$ ve $a + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{\lambda a}{6}$ denklemlerinin ortak çözümlerini elde edebilmek adına $a$ cinsinden denklem

$$a^3 - a^2 + a + 3 = 0$$

biçiminde oluşturulur. Buradan

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = 1 - \sqrt{2}i$$

$$a_3 = 1 + \sqrt{2}i$$

bulunur. $a = -1$ için $\lambda = 6$ elde edilir.

### 3.7. Homojen Olmayan Sınır-Değer-Geçiş Probleminin Çözümünü Elde Etmek için ADM Uygulanması

Bu kesimde

$$-y''(t) + y(t) = \lambda y(t), \qquad t \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] \tag{3.7.86}$$

diferensiyel denkleminden,

$$y(0) = 1 \tag{3.7.87}$$

$$y(1) = 0 \tag{3.7.88}$$

sınır şartlarından ve de $t = \frac{1}{2}$ noktasında verilmiş

$$y(\frac{1}{2} - 0) = y(\frac{1}{2} + 0) \tag{3.7.89}$$

$$y'(\frac{1}{2} - 0) = -2y'(\frac{1}{2} + 0) \tag{3.7.90}$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş probleminin çözümünü elde etmek için Adomian ayrışım yöntemini uygulayacağız.

1.ADIM

$$-y''(t) + y(t) = \lambda y(t), \qquad t \in [0, \frac{1}{2}) \tag{3.7.91}$$

$$y(0) = 1 \tag{3.7.92}$$

$$y'(0) = a \tag{3.7.93}$$

başlangıç değer probleminin bir tek $\widetilde{y}(t)$ çözümü vardır.

$L = \frac{d^2}{dt^2}$ diferensiyel operatör olduğu durumda, (3.7.91) diferensiyel denklemi

$$Ly(t) = y(t) - \lambda y(t) \tag{3.7.94}$$

operatör denklemi şeklinde yazılabilir. $f = y(t) - \lambda y(t)$ gösterelim. $L$ nin ters operatörü olan $L^{-1}[.] = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} .dtdt$ yi (3.7.94) ün her iki tarafına uygulanarak

$$y(t) = y(t_0) + ty'(t_0) - t_0 y'(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} f dtdt$$

elde edilir. Burada $t_0 = 0$ için

$$\widetilde{y}(t) = 1 + at + L^{-1}((1-\lambda)y(t))$$

bulunur.

$\widetilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{y}_n(t)$ şeklinde çözüm arayacağız. Genel şekilde

$$\widetilde{y}_0(t) = 1 + at,$$

$$\widetilde{y}_{k+1}(t) = L^{-1}(\widetilde{A}_k - \lambda \widetilde{y}_k), \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

yazılabilir. Adomian polinomlarını elde edebilmek için aşağıdaki eşitlikler uygulanır.

$$\widetilde{A_0} = N(\widetilde{y}_0(t)) = \widetilde{y}_0$$

$$\widetilde{A}_1 = \widetilde{y}_1 N'(\widetilde{y}_0) = \widetilde{y}_1$$

$$\widetilde{A}_2 = \widetilde{y}_2 N'(\widetilde{y}_0) + \frac{1}{2}\widetilde{y}_1^2 N''(\widetilde{y}_0) = \widetilde{y}_2$$

$$\widetilde{A}_3 = \widetilde{y}_3 N'(\widetilde{y}_0) + \widetilde{y}_1 \widetilde{y}_2 N''(\widetilde{y}_0) + \frac{1}{3!}\widetilde{y}_1^3 N'''(\widetilde{y}_0) = \widetilde{y}_3$$

..........................

O halde,

$$\widetilde{y}_0(t) = 1 + at,$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{y}_1(t) &= L^{-1}(\widetilde{A}_0 - \widetilde{y}_0(t)) \\
&= \int_0^t \int_0^t (1-\lambda)(1+at)dtdt \\
&= (1-\lambda)(\frac{t^2}{2!} + \frac{at^3}{3!}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{y}_2(t) &= L^{-1}(A_1 - \widetilde{y}_1(t)) \\
&= (1-\lambda)\int_0^t \int_0^t (1-\lambda)(\frac{t^2}{2!} + \frac{at^3}{3!})dtdt \\
&= (1-\lambda)^2(\frac{t^4}{4!} + \frac{at^5}{5!}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{y}_3(t) &= L^{-1}(A_2 - \widetilde{y}_2(t)) \\
&= (1-\lambda)\int_0^t \int_0^t (1-\lambda)^2(\frac{t^4}{4!} + \frac{at^5}{5!})dtdt \\
&= (1-\lambda)^3(\frac{t^6}{6!} + \frac{at^7}{7!})
\end{aligned}
$$

............................

bulunur. Buradan

$$
\widetilde{y}(t) = 1 + at + (1-\lambda)(\frac{t^2}{2!} + \frac{at^3}{3!}) + (1-\lambda)^2(\frac{t^4}{4!} + \frac{at^5}{5!}) + (1-\lambda)^3(\frac{t^6}{6!} + \frac{at^7}{7!}) + ...
$$

elde edilir.

2. ADIM

$$
-y''(t) + y(t) = \lambda y(t), \qquad t \in (\frac{1}{2}, 1]
$$

$$
y(1) = 0
$$

$$
y'(1) = -b
$$

başlangıç değer probleminin bir tek $\widetilde{\widetilde{y}}(t,\lambda)$ çözümü vardır. $f = \lambda y(t) - y(t)$ gösteriminden yararlanarak verilmiş denklemi

$$y''(t) = f$$

biçiminde yazdım. İntegrallersek

$$\int_t^1 y''(t) = \int_t^1 f$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$y'(1) - y'(t) = \int_t^1 f$$

bulunur. Yeniden integrallersek,

$$y(1) - y(t) = y'(1) - ty'(1) - \int_t^1 \int_t^1 f$$

elde edilir. Buradan

$$y(t) = y(1) - y'(1) + ty'(1) + \int_t^1 \int_t^1 f$$

bulunur. Başlangıç şartlarını dikkate alırsak, çözüm

$$y(t) = b - bt + L^{-1}((1-\lambda)y(t))$$

şeklinde elde edilir.

Buradan benzer olarak,

$$\tilde{\tilde{y}}_0(t) = b - bt$$

$$\tilde{\tilde{y}}_{k+1}(t) = L^{-1}(A_k - \lambda\tilde{\tilde{y}}_k(t)), \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

elde edilir. Burada, $A_0 = \tilde{\tilde{y}}_0(t)$, $A_1 = \tilde{\tilde{y}}_1(t)$, $A_2 = \tilde{\tilde{y}}_2(t)$, $A_3 = \tilde{\tilde{y}}_3(t), ...$ olduğu kullanılarak;

$$\tilde{\tilde{y}}_0(t) = b - bt$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{y}}_1(t) &= L^{-1}(A_0 - \lambda y_0) \\ &= (1-\lambda)\int_t^1\int_t^1 (b-bt)dtdt \\ &= -\frac{1}{3!}b(1-\lambda)(-1+t)^3\end{aligned}$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}_2(t) = -\frac{1}{5!}b(1-\lambda)^2(-1+t)^5$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}_3(t) = -\frac{1}{7!}b(1-\lambda)^3(-1+t)^7$$

..............................

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{y}}(t) &= \widetilde{\widetilde{y}}_0(t) + \widetilde{\widetilde{y}}_1(t) + \widetilde{\widetilde{y}}_2(t) + ... \\ &= b - bt - \frac{1}{3!}b(1-\lambda)(-1+t)^3 - \frac{1}{5!}b(1-\lambda)^2(-1+t)^5 - \frac{1}{7!}b(1-\lambda)^3(-1+t)^7 + ...\end{aligned}$$

şeklinde çözüm bulunur.

3. ADIM

$$-y''(t) + y(t) = \lambda y(t), \qquad t \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] \tag{3.7.95}$$

diferensiyel denkleminden,

$$y(0) = 1 \tag{3.7.96}$$

$$y(1) = 0 \tag{3.7.97}$$

sınır şartlarından ve de $t = \frac{1}{2}$ noktasında verilmiş

$$y(\frac{1}{2} - 0) = y(\frac{1}{2} + 0) \tag{3.7.98}$$

$$y'(\frac{1}{2} - 0) = -2y'(\frac{1}{2} + 0) \tag{3.7.99}$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş problemi göz önüne alarak,

$$\widetilde{y}(\frac{1}{2}) = \widetilde{\widetilde{y}}(\frac{1}{2})$$

ve

$$\widetilde{y}'(\frac{1}{2}) = -2\widetilde{\widetilde{y}}'(\frac{1}{2})$$

yazılabilir. Özel olarak,

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}(t) &= \widetilde{y_0}(t) + \widetilde{y_1}(t) + \widetilde{y_2}(t) + \widetilde{y_3}(t) \\
&= 1 + at + (1-\lambda)(\frac{t^2}{2!} + \frac{at^3}{3!}) + (1-\lambda)^2(\frac{t^4}{4!} + \frac{at^5}{5!}) + (1-\lambda)^3(\frac{t^6}{6!} + \frac{at^7}{7!})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{y}}(t) &= \widetilde{\widetilde{y_0}}(t) + \widetilde{\widetilde{y_1}}(t) + \widetilde{\widetilde{y_2}}(t) + \widetilde{\widetilde{y_3}}(t) \\
&= b - bt - \frac{1}{3!}b(1-\lambda)(-1+t)^3 - \frac{1}{5!}b(1-\lambda)^2(-1+t)^5 - \frac{1}{7!}b(1-\lambda)^3(-1+t)^7
\end{aligned}$$

alalım. Buradan,

$$\widetilde{y}(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{a}{2} + (\frac{1}{8} + \frac{a}{48})(1-\lambda) + (\frac{1}{348} + \frac{a}{3840})(1-\lambda)^2 + (\frac{1}{46080} + \frac{a}{645120})(1-\lambda)^3$$

$$\widetilde{y}'(\frac{1}{2}) = a + (\frac{1}{2} + \frac{a}{8})(1-\lambda) + (\frac{1}{48} + \frac{a}{384})(1-\lambda)^2 + (\frac{1}{3840} + \frac{a}{46080})(1-\lambda)^3$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}(\frac{1}{2}) = \frac{b}{2} + \frac{1}{48}b(1-\lambda) + \frac{1}{3840}b(1-\lambda)^2 + \frac{1}{645120}b(1-\lambda)^3$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}'(\frac{1}{2}) = -b - \frac{1}{8}b(1-\lambda) - \frac{1}{384}b(1-\lambda)^2 - \frac{1}{46080}b(1-\lambda)^3$$

elde edilir. $\lambda \in R$ olduğundan özel olarak, $\lambda = -1$ için

$$\begin{aligned}
1 + 8(\frac{1}{46080} + \frac{a}{645120}) + 4(\frac{1}{384} + \frac{a}{3840}) + 2(\frac{1}{8} + \frac{a}{48}) + \frac{a}{2} &= \frac{8753b}{16128} \\
8(\frac{1}{3840} + \frac{a}{46080}) + 4(\frac{1}{48} + \frac{a}{384}) + 2(\frac{1}{2} + \frac{a}{8}) + a &= (-2).\frac{7261b}{5760}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Ortak çözüm yapıldığı taktirde, $a = -1.8355$ ve $b = 0.487228$ bulunur.

$$y(t) = \begin{cases} 1 + at + (1-\lambda)(\frac{t^2}{2!} + \frac{at^3}{3!}) + (1-\lambda)^2(\frac{t^4}{4!} + \frac{at^5}{5!}) + (1-\lambda)^3(\frac{t^6}{6!} + \frac{at^7}{7!}), \ t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ b - bt - \frac{1}{3!}b(1-\lambda)(-1+t)^3 - \frac{1}{5!}b(1-\lambda)^2(-1+t)^5, \quad t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

yaklaşık çözüm fonksiyonu elde edilir.

## 3.8. Geçiş Şartları İçeren Bratu Problemine Adomian Ayrışım Yöntemi Uygulayarak Çözümünün Bulunması ve Analitik Çözüm ile Karşılaştırılması

Bu kesimde

$$y''(t) + \lambda e^{y(t)} = 0, \qquad t \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] \tag{3.8.100}$$

Bratu diferensiyel denkleminden,

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{3.8.101}$$

sınır şartlarından ve de $t = \frac{1}{2}$ noktasında verilmiş

$$y(\frac{1}{2} - 0) = k_1 y(\frac{1}{2} + 0) \tag{3.8.102}$$

$$y'(\frac{1}{2} - 0) = k_2 y'(\frac{1}{2} + 0) \tag{3.8.103}$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş probleminin çözümünü elde etmek için Adomian ayrışım yöntemini uygulayacağız.

1.ADIM

Aşağıdaki yardımcı başlangıç-değer problemini göz önüne alalım.

$$y''(t) + \lambda e^{y(t)} = 0, \qquad t \in [0, \frac{1}{2}) \tag{3.8.104}$$

$$y(0) = 0 \tag{3.8.105}$$

$$y'(0) = a \tag{3.8.106}$$

Bu başlangıç değer probleminin bir tek $\widetilde{y}(t)$ çözümü vardır.

$L = \frac{d^2}{dt^2}$ diferensiyel operatör olduğu durumda, verilmiş diferensiyel denklem

$$Ly(t) = -\lambda e^{y(t)} \tag{3.8.107}$$

operatör şeklinde yazılabilir. $f = -\lambda e^{y(t)}$ gösterelim.$L$ nin ters operatörü olan $L^{-1}[.] = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} .dtdt$ yi (3.8.107) ün her iki tarafına uygulanarak

$$y(t) = y(t_0) + ty'(t_0) - t_0 y'(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} f dtdt$$

elde edilir. Burada $t_0 = 0$ için

$$y(t) = at + L^{-1}(-\lambda e^{y(t)})$$

bulunur. O halde

$$\widetilde{y}(t) = at + L^{-1}(-\lambda e^{\widetilde{y}(t)})$$

denklemi elde edilir. Şimdi $e^{\widetilde{y}(t)}$ fonksiyonunu Adomian polinomları serisine açalım: $e^{\widetilde{y}(t)} = N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n$.

$\widetilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{y}_n(t)$ şeklinde çözüm arayacağız. O halde

$$\widetilde{y}_0(t) = at,$$

$$\widetilde{y}_{k+1}(t) = L^{-1}(-\lambda \widetilde{A}_k), \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

yazılabilir. Adomian polinomlarını elde edebilmek için aşağıdaki eşitlikler uygulanır.

$$\widetilde{A_0} = N(\widetilde{y}_0(t)) = e^{\widetilde{y}_0}$$

$$\widetilde{A}_1 = \widetilde{y}_1 N'(\widetilde{y}_0) = \widetilde{y}_1 e^{\widetilde{y}_0}$$

$$\widetilde{A}_2 = \widetilde{y}_2 N'(\widetilde{y}_0) + \frac{1}{2}\widetilde{y}_1^2 N''(\widetilde{y}_0) = \widetilde{y}_2 e^{\widetilde{y}_0} + \frac{1}{2}\widetilde{y}_1^2 e^{\widetilde{y}_0}$$

$$\widetilde{A}_3 = \widetilde{y}_3 N'(\widetilde{y}_0) + \widetilde{y}_1\widetilde{y}_2 N''(\widetilde{y}_0) + \frac{1}{3!}\widetilde{y}_1^3 N'''(\widetilde{y}_0) = \widetilde{y}_3 e^{\widetilde{y}_0} + \widetilde{y}_1\widetilde{y}_2 e^{\widetilde{y}_0} + \frac{1}{3!}e^{\widetilde{y}_0}\widetilde{y}_1^3$$

O halde,

$$\widetilde{y}_0(t) = at,$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}_1(t) &= L^{-1}(-\lambda\widetilde{A}_0) = L^{-1}(-\lambda e^{y_0}) \\
&= -\lambda \int_0^t \int_0^t e^{at}dtdt \\
&= -\lambda \int_0^t (\frac{1}{a}e^{at} - \frac{1}{a}e^0)dt \\
&= -\lambda(\frac{1}{a^2}e^{at} - \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}_2(t) &= L^{-1}(-\lambda\widetilde{A}_1) \\
&= L^{-1}[\lambda^2 e^{at}(\frac{1}{a^2}e^{at} - \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2})] \\
&= \lambda^2\frac{8(-1+e^{at}) + (3 + e^{2at} - 4at - 4e^{at}(1+at)) + 2at}{4a^4}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}(t) &= at - \lambda(\frac{1}{a^2}e^{at} - \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}) \\
&+ \lambda^2\frac{8(-1+e^{at}) + (3 + e^{2at} - 4at - 4e^{at}(1+at)) + 2at}{4a^4} + .. \quad (3.8.108)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. ADIM

Şimdi aşağıdaki başlangıç-değer problemini oluşturalım.

$$y''(t) + \lambda e^{y(t)} = 0, \qquad t \in (\frac{1}{2}, 1]$$

$$y(1) = 0$$

$$y'(1) = -b$$

Bu başlangıç değer probleminin bir tek $\widetilde{\widetilde{y}}(t)$ çözümü vardır. $N(y) = e^{y(t)}$ lineer olmayan terim olsun. $y(1) = 0$ ve $y'(1) = -b$ olduğu kullanılarak,

$$y(t) = b - bt + L^{-1}(-\lambda e^{y(t)})$$

elde edilir. Buradan

$$\widetilde{\widetilde{y}}_0 = b - bt$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{y}}_1(t) &= L^{-1}(-\lambda \widetilde{\widetilde{A}}_0) \\
&= -\lambda \int_1^t \int_1^t e^{(b-bt)} dt dt \\
&= -\lambda(\frac{-1 + e^{b-bt} + b(-1+t)}{b^2})
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}_2(t) = L^{-1}(\lambda^2 e^{b-bt}(\frac{-1 + e^{b-bt} - b + bt}{b^2}))$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^2 \frac{e^{-2bt}(-8e^{2bt} + 8e^{b+bt} + (e^{2b} + 4e^{b(1+t)}(-1 + b(-1+t)) + e^{2bt}(3 + 4b(-1+t)))}{4b^4} \\
&- \lambda^2 \frac{-2be^{2bt}(-1+t)}{4b^4}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\widetilde{\widetilde{y}}(t) = \widetilde{\widetilde{y}}_0(t) + \widetilde{\widetilde{y}}_1(t) + \widetilde{\widetilde{y}}_2(t) + \ldots = b - bt - \lambda(\frac{-1 + e^{b-bt} + b(-1+t)}{b^2}) +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \lambda^2 \frac{e^{-2bt}(-8e^{2bt} + 8e^{b+bt} + e^{2b} + 4e^{b(1+t)}(-1 + b(-1+t)) + e^{2bt}(3 + 4b(-1+t))}{4b^4} \\
&- \quad \lambda^2 \frac{-2be^{2bt}(-1+t)}{4b^4} + \ldots \qquad (3.8.109)
\end{aligned}
$$

şeklinde çözüm bulunur.

3. ADIM

Şimdi

$$y''(t) + \lambda e^{y(t)} = 0, \qquad t \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$$

diferensiyel denkleminden

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır şartlarından

$$y(\frac{1}{2} - 0) = k_1 y(\frac{1}{2} + 0)$$

$$y'(\frac{1}{2} - 0) = k_2 y'(\frac{1}{2} + 0)$$

geçiş şartlarından oluşan genel problemi göz önüne alarak,

$$\widetilde{y}(\frac{1}{2}) = k_1 \widetilde{\widetilde{y}}(\frac{1}{2})$$

ve

$$\widetilde{y}'(\frac{1}{2}) = k_2 \widetilde{\widetilde{y}}'(\frac{1}{2})$$

eşitliklerini yazalım. Özel olarak,

$$\widetilde{y}(t) = \widetilde{y}_0(t) + \widetilde{y}_1(t) + \widetilde{y}_2(t)$$

ve

$$\widetilde{\widetilde{y}}(t) = \widetilde{\widetilde{y}}_0(t) + \widetilde{\widetilde{y}}_1(t) + \widetilde{\widetilde{y}}_2(t)$$

alalım. Ayrıca $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots$ olduğu kullanılarak $e^t \approx 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}$ seçimi yapalım. O halde

$$\widetilde{y}(t) = at - \lambda(\frac{1}{a^2}e^{at} - \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}) + \lambda^2 \frac{8(-1 + e^{at}) + (3 + e^{2at} - 4at - 4e^{at}(1 + at)) + 2at}{4a^4}$$

eşitliği gereği

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}(\frac{1}{2}) &= \frac{a}{2} - \lambda(\frac{1}{a^2}e^{\frac{a}{2}} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{a^2}) + \lambda^2\frac{1}{4a^4}(4e^{\frac{a}{2}} - 5 + e^a - a - 2ae^{\frac{a}{2}}) \\
&\cong \frac{a}{2} - \lambda(\frac{1}{8} + \frac{a}{48} + \frac{a^2}{16.4!} + \frac{a^3}{32.5!}) + \frac{\lambda^2}{4}(\frac{1}{4.4!} + \frac{4a}{8.5!} - \frac{a^2}{16.5!}) \quad (3.8.110)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\widetilde{\widetilde{y}}(t) = b - bt - \lambda(\frac{-1 + e^{b-bt} + b(-1+t)}{b^2})$$

$$+\lambda^2\frac{e^{-2bt}(-8e^{2bt} + 8e^{b+bt} + e^{2b} + 4e^{b(1+t)}(-1 + b(-1+t)) + e^{2bt}(3 + 4b(-1+t)) - 2be^{2bt}(-1+t)}{4b^4}$$

eşitliğinde $t = \frac{1}{2}$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{y}}(\frac{1}{2}) &= \frac{b}{2} - \lambda(\frac{-1 + e^{\frac{b}{2}} - b + \frac{b}{2}}{b^2}) + \lambda^2\frac{1}{4b^4}(e^b + 4e^{\frac{b}{2}}(1 - \frac{b}{2}) + (-5 - b)) \\
&\cong \frac{b}{2} - \lambda(\frac{1}{8} + \frac{b}{48} + \frac{b^2}{16.4!} + \frac{b^3}{32.5!}) + \frac{\lambda^2}{4}(\frac{1}{4.4!} + \frac{4b}{8.5!} - \frac{b^2}{16.5!}) \quad (3.8.111)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\widetilde{y'}(t) = a - \lambda(\frac{1}{a}e^{at} - \frac{1}{a}) + \frac{\lambda^2}{4a^4}(-2a + 4ae^{at} + 2ae^{2at} - 4ae^{at}(1 + at)),$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{y'}(\frac{1}{2}) &= a - \lambda(\frac{1}{a}e^{\frac{a}{2}} - \frac{1}{a}) + \frac{\lambda^2}{4a^4}(-2a + 2ae^a - 2a^2e^{\frac{a}{2}}) \quad (3.8.112) \\
&\cong a - \lambda(\frac{1}{2} + \frac{a}{8} + \frac{a^2}{48} + \frac{a^3}{16.4!} + \frac{a^4}{32.5!}) + \frac{\lambda^2}{4}(\frac{1}{12} + \frac{a}{24} + \frac{11a^2}{8.5!} - \frac{a^3}{16.5!})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{y'}}(t) &= -b + \lambda\frac{1}{b^2}(be^{b-bt} - b) - \frac{\lambda^2 e^{-2bt}}{2b^3}(e^{2b} + 4e^{b(1+t)}(1 + b(-1+t)) + e^{2bt}(-5 + 2b(-1+t))) \\
&+ \frac{\lambda^2 e^{-2bt}}{4b^4}(2be^{2bt} + 4be^{b(1+t)} + 4be^{b(1+t)}(1 + b(-1+t)) + 2be^{2bt}(-5 + 2b(-1+t)))
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{y}}'(\frac{1}{2}) &= -b+\lambda\frac{1}{b^2}(be^{\frac{b}{2}}-b)-\frac{\lambda^2e^{-b}}{2b^3}(e^{2b}+4e^{\frac{3b}{2}}(1-\frac{b}{2})+e^b(-5-b)) \\
&+ \frac{\lambda^2e^{-b}}{4b^4}(2be^b+4be^{\frac{3b}{2}}+4be^{\frac{3b}{2}}(1-\frac{b}{2})+2be^b(-5-b)) \\
&\cong -b+\lambda(\frac{1}{2}+\frac{b}{8}+\frac{b^2}{48}+\frac{b^3}{16.4!}+\frac{b^4}{32.5!})-\frac{\lambda^2}{4}(\frac{1}{12}+\frac{b}{24}+\frac{11b^2}{8.5!}-\frac{b^3}{16.5!})
\end{aligned} \tag{3.8.113}
$$

bulunur.

$\tilde{y}(\frac{1}{2}) = k_1\tilde{\tilde{y}}(\frac{1}{2})$ olduğundan dolayı (3.8.110) ve (3.8.111) kullanılarak;

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{2}-\lambda(\frac{1}{8}+\frac{a}{48}+\frac{a^2}{16.4!}+\frac{a^3}{32.5!})+\frac{\lambda^2}{4}(\frac{1}{4.4!}+\frac{4a}{8.5!}-\frac{a^2}{16.5!}) \\
&= k_1(\frac{b}{2}-\lambda(\frac{1}{8}+\frac{b}{48}+\frac{b^2}{16.4!}+\frac{b^3}{32.5!})+\frac{\lambda^2}{4}(\frac{1}{4.4!}+\frac{4b}{8.5!}-\frac{b^2}{16.5!}))
\end{aligned} \tag{3.8.114}
$$

eşitliği yazılır. Ayrıca $\tilde{y}'(\frac{1}{2}) = k_2\tilde{\tilde{y}}'(\frac{1}{2})$ olduğundan dolayı (3.8.112) ve (3.8.113) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&a-\lambda(\frac{1}{2}+\frac{a}{8}+\frac{a^2}{48}+\frac{a^3}{16.4!}+\frac{a^4}{32.5!})+\frac{\lambda^2}{4}(\frac{1}{12}+\frac{a}{24}+\frac{11a^2}{8.5!}-\frac{a^3}{16.5!}) \\
&= k_2(-b+\lambda(\frac{1}{2}+\frac{b}{8}+\frac{b^2}{48}+\frac{b^3}{16.4!}+\frac{b^4}{32.5!})-\frac{\lambda^2}{4}(\frac{1}{12}+\frac{b}{24}+\frac{11b^2}{8.5!}-\frac{b^3}{16.5!}))
\end{aligned} \tag{3.8.115}
$$

eşitliği yazılabilir. $k_1 = k_2 = 1$ ve $\lambda = 1$ olması durumunda, (3.8.114) ve (3.8.115) denklemlerinin ortak çözümü sonucu

$$a = -10.8305 - 14.0938i, \; b = -10.8305 - 14.0938i$$

$$a = -10.8305 + 14.0938i, \; b = -10.8305 + 14.0938i$$

$$a = -63.9517 - 28.5556i, \; b = 61.0243 - 23.4696i$$

$$a = -63.9517 + 28.5556i, \; b = 61.0243 + 23.4696i$$

$$a = -29.4779 - 12.5411i, \; b = -29.6461 + 12.5141i$$

$$a = -29.4779 + 12.5411i,\ b = -29.6461 - 12.5141i$$

$$a = 22.0437 - 9.38598i,\ b = 22.1901 + 9.36811i$$

$$a = 22.0437 + 9.38598i,\ b = 22.1901 - 9.36811i$$

$$a = 60.8859 - 23.6162i,\ b = -64.0682 - 28.3823i$$

$$a = 60.8859 + 23.6162i,\ b = -64.0682 + 28.3823i$$

$$a = 0.5488,\ b = 0.5488$$

$$a = 10.6122,\ b = 10.6122$$

değerlerine ulaşılır. Burada $a = 0.5488,\ \ b = 0.5488$ seçimi yaparak, aşağıdaki tablo elde edilir. Tablolardaki analitik çözüm değerleri Hassan ve Ertürk (2007) tarafından yapılan çalışmadan alınmıştır. Amacımız geçiş şartlı Bratu problemini Adomian ayrışım yöntemi ile çözerek, Bratu probleminin analitik çözümü ile karşılaştırmaktır. Burada geçiş şartlarındaki $k_1$ ve $k_2$ katsayıları 1 alınarak karşılaştırma yapılmıştır.

Çizelge 3.2 $\lambda = 1$ değerine karşılık geçiş şartlı Bratu probleminin ADM ile bulunan yaklaşık çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması

| t | Analitik Çözüm | Nümerik Çözüm | Hata |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.0498467912 | 0.0497911376 | 0.0000556536 |
| 0.2 | 0.0891899346 | 0.0890795685 | 0.0001103661 |
| 0.3 | 0.1176090958 | 0.1174492625 | 0.0001598332 |
| 0.4 | 0.1347902539 | 0.1346024134 | 0.0001878404 |
| 0.6 | 0.1347902539 | 0.1346023247 | 0.0001879291 |
| 0.7 | 0.1176090958 | 0.1174491951 | 0.0001599006 |
| 0.8 | 0.0891899346 | 0.0890795232 | 0.0001104114 |
| 0.9 | 0.0498467912 | 0.0497911148 | 0.0000556763 |
| 1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

$k_1 = 1, k_2 = 1$ ve $\lambda = 2$ olması durumunda, (3.8.114) ve (3.8.115) denklemlerinin ortak çözümü sonucu

$$a=-45.4722+21.224i,\ b=42.604+15.6203i$$

$$a=-45.4722-21.224i,\ b=42.604-15.6203i$$

$$a=42.1982+16.0201i,\ b=-45.7851+20.7124i$$

$$a=42.1982-16.0201i,\ b=-45.7851-20.7124i$$

$$a=-21.8323+9.44377i,\ b=-22.3192-9.36087i$$

$$a=-21.8323-9.44377i,\ b=-22.3192+9.36087i$$

$$a=14.1063+6.3844i,\ b=14.5003-6.33791i$$

$$a=14.1063-6.3844i,\ b=14.5003+6.33791i$$

$$a=-9.36201+11.3511i,\ b=-9.36201+11.3511i$$

$$a=-9.36201-11.3511i,\ b=-9.36201-11.3511i$$

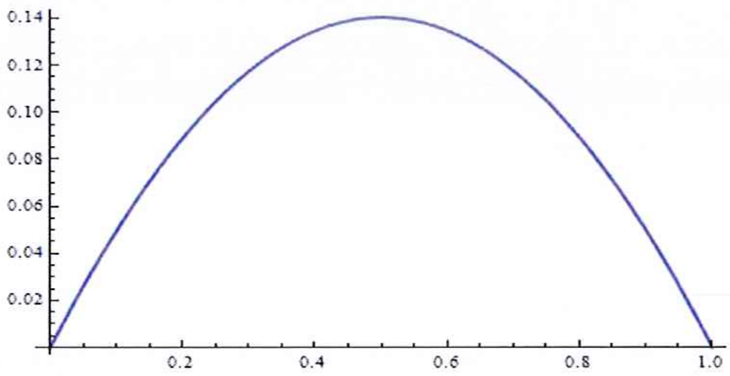
$$a=6.46694,\ b=6.46694$$

$$a=1.25709,\ b=1.25709$$

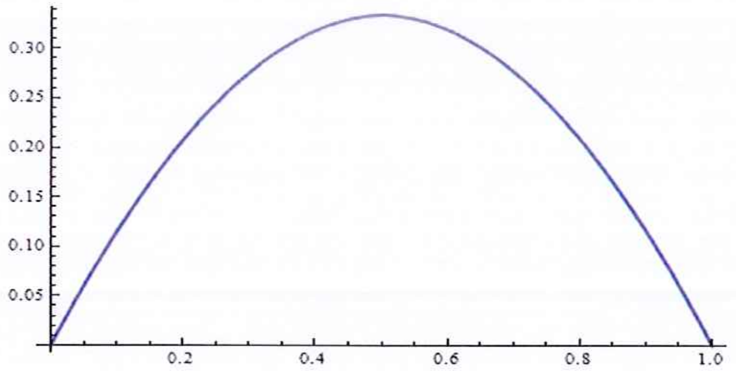
değerlerine ulaşılır. Burada $a=1.25709,\quad b=1.25709$ seçimi yaparak, aşağıdaki tablo elde edilir.

Çizelge 3.3 $\lambda = 2$ değerine karşılık geçiş şartlı Bratu probleminin ADM ile bulunan yaklaşık çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması

| t | Analitik Çözüm | Nümerik Çözüm | Hata |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.1144107433 | 0.1152943728 | 0.0008836294 |
| 0.2 | 0.2064191165 | 0.2081699806 | 0.0017508640 |
| 0.3 | 0.2738793118 | 0.2764967917 | 0.0026174798 |
| 0.4 | 0.3150893642 | 0.3187312930 | 0.0036419288 |
| 0.6 | 0.3150893642 | 0.3187312930 | 0.0036419288 |
| 0.7 | 0.2738793118 | 0.2764967917 | 0.0026174798 |
| 0.8 | 0.2064191165 | 0.2081699806 | 0.0017508640 |
| 0.9 | 0.1144107433 | 0.1152943728 | 0.0008836294 |
| 1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |




`Grafik` 3.4 $\lambda = 1$ değerine karşılık geçiş şartlı Bratu probleminin ADM ile bulunan yaklaşık çözümünün grafiği




Grafik 3.5 $\lambda = 2$ değerine karşılık geçiş şartlı Bratu problemi̇nin ADM ile bulunan yaklaşık çözümünün grafiği

## 3.9. Lineer Olmayan Bir Sınır-Değer-Geçiş Problemi için DTM ve ADM Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Bu kesimde

$$y''(t) + y^2(t) = \lambda y(t), \qquad t \in [1,2) \cup (2,3]$$

lineer olmayan Sturm-Liouville denkleminden

$$y(1) = y(3) = 0$$

sınır şartlarından ve

$$y(2-0) = \gamma_1 y(2+0)$$

$$y'(2-0) = \gamma_2 y'(2+0)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş probleminin çözümünü bulmak için ilk önce diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulayacağız. İlk olarak $t \in [1,2)$ aralığında problem için çözüm elde edelim. Diferensiyel denkleme, diferensiyel dönüşüm kuralları uygulanırsa;

$$Y^-(k+2) = \frac{\lambda Y^-(k) - \sum_{r=0}^{k} Y^-(r) Y^-(k-r)}{(k+2)(k+1)} \tag{3.9.116}$$

elde edilir. $y^-(t) = \sum_{k=0}^{n}(t-t_0)^k Y^-(k)|_{t=t_0}$ olduğu kullanılarak, $t_0 = 1$ için

$$\begin{aligned} y^-(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t-1)^k Y^-(k) \\ &= Y^-(0) + (t-1)Y^-(1) \\ &+ (t-1)^2 Y^-(2) + ... + (t-1)^n Y^-(n) \end{aligned} \quad (3.9.117)$$

yazılır. Burada, $y(1) = 0$ olduğu gözönüne alınarak $Y^-(0) = 0$ elde edilir. $Y^-(1) = \alpha$ olsun. (3.9.116) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} Y^-(2) &= 0 \\ Y^-(3) &= \frac{\lambda\alpha}{6} \\ Y^-(4) &= \frac{-\alpha^2}{12} \\ Y^-(5) &= \frac{\lambda^2\alpha}{120} \\ Y^-(6) &= \frac{-\lambda\alpha^2}{72} \\ Y^-(7) &= \frac{1}{42}\left(\frac{\lambda^3\alpha}{120} + \frac{\alpha^3}{6}\right) \\ &\;\;\vdots \end{aligned} \quad (3.9.118)$$

elde edilir. (3.9.117) denkleminde özel olarak $n = 7$ seçimini yapalım. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} y^-(t) &= \alpha(t-1) + \frac{\lambda\alpha}{6}(t-1)^3 - \frac{\alpha^2}{12}(t-1)^4 \\ &+ \frac{\lambda^2\alpha}{120}(t-1)^5 - \frac{\lambda\alpha^2}{72}(t-1)^6 + \frac{1}{42}\left(\frac{\lambda^3\alpha}{120} + \frac{\alpha^3}{6}\right)(t-1)^7 \end{aligned} \quad (3.9.119)$$

$$\begin{aligned} y'^-(t) &= \alpha + \frac{\lambda\alpha}{2}(t-1)^2 - \frac{\alpha^2}{3}(t-1)^3 \\ &+ \frac{\lambda^2\alpha}{24}(t-1)^4 - \frac{\lambda\alpha^2}{12}(t-1)^5 + \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda^3\alpha}{120} + \frac{\alpha^3}{6}\right)(t-1)^6 \end{aligned} \quad (3.9.120)$$

elde edilir.

İkinci aşama olarak $t \in (2,3]$ aralığında problem için çözüm elde edelim. $y^+(t) = \sum_{k=0}^{n}(t-t_0)^k Y^+(k)|_{t=t_0}$ olduğu kullanılarak, $t_0 = 3$ için

$$\begin{aligned} y^+(t) &= \sum_{k=0}^{n}(t-3)^k Y^+(k) \\ &= Y^+(0) + (t-3)Y^+(1) \\ &+ (t-3)^2 Y^+(2) + ... + (t-3)^n Y^+(n) \end{aligned} \tag{3.9.121}$$

yazılır. Burada, $y(3) = 0$ olduğu gözönüne alınarak $Y^+(0) = 0$ elde edilir. $Y^+(1) = \beta$ olsun. (3.9.116) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} Y^+(2) &= 0 \\ Y^+(3) &= \frac{\lambda\beta}{6} \\ Y^+(4) &= \frac{-\beta^2}{12} \\ Y^+(5) &= \frac{\lambda^2\beta}{120} \\ Y^+(6) &= \frac{-\lambda\beta^2}{72} \\ Y^+(7) &= \frac{1}{42}\left(\frac{\lambda^3\beta}{120} + \frac{\beta^3}{6}\right) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \tag{3.9.122}$$

elde edilir. (3.9.121) denkleminde özel olarak $n = 7$ seçimini yapalım. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} y^+(t) &= \beta(t-3) + \frac{\lambda\beta}{6}(t-3)^3 - \frac{\beta^2}{12}(t-3)^4 \\ &+ \frac{\lambda^2\beta}{120}(t-3)^5 - \frac{\lambda\beta^2}{72}(t-3)^6 + \frac{1}{42}\left(\frac{\lambda^3\beta}{120} + \frac{\beta^3}{6}\right)(t-3)^7 \end{aligned} \tag{3.9.123}$$

$$
\begin{aligned}
y'^{+}(t) &= \beta + \frac{\lambda\beta}{2}(t-3)^2 - \frac{\beta^2}{3}(t-3)^3 \\
&+ \frac{\lambda^2\beta}{24}(t-3)^4 - \frac{\lambda\beta^2}{12}(t-3)^5 + \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda^3\beta}{120} + \frac{\beta^3}{6}\right)(t-3)^6 \quad (3.9.124)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Üçüncü aşama olarak da $[1,2)$ ve $(2,3]$ aralıklarında bulduğumuz çözümleri geçiş şartlarında uygulayalım. (3.9.119) ve (3.9.123) çözümlerini 2 noktasında değerlendirirsek;

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \frac{\lambda\alpha}{6} - \frac{\alpha^2}{12} + \frac{\lambda^2\alpha}{120} - \frac{\lambda\alpha^2}{72} + \frac{1}{42}\left(\frac{\lambda^3\alpha}{120} + \frac{\alpha^3}{6}\right) \\
&= \gamma_1\left(-\beta - \frac{\lambda\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} - \frac{\lambda^2\beta}{120} - \frac{\lambda\beta^2}{72} - \frac{1}{42}\left(\frac{\lambda^3\beta}{120} + \frac{\beta^3}{6}\right)\right) \qquad (3.9.125)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Aynı şekilde (3.9.120) ve (3.9.124) eşitliklerini 2 noktasında değerlendirirsek;

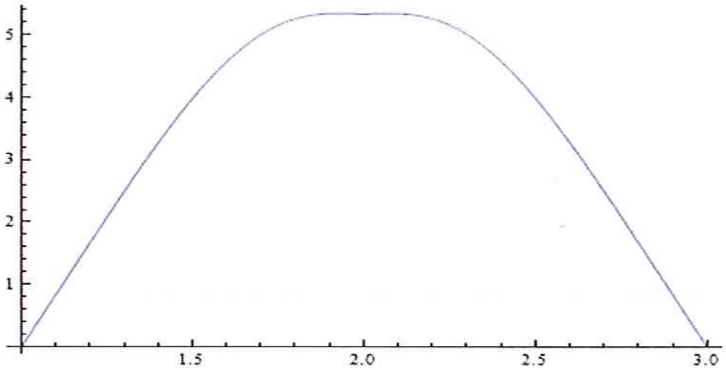
$$
\begin{aligned}
&\alpha + \frac{\lambda\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\lambda^2\alpha}{24} - \frac{\lambda\alpha^2}{12} + \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda^3\alpha}{120} + \frac{\alpha^3}{6}\right) \\
&= \gamma_2\left(\beta + \frac{\lambda\beta}{2} + \frac{\beta^2}{3} + \frac{\lambda^2\beta}{24} + \frac{\lambda\beta^2}{12} + \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda^3\beta}{120} + \frac{\beta^3}{6}\right)\right) \qquad (3.9.126)
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

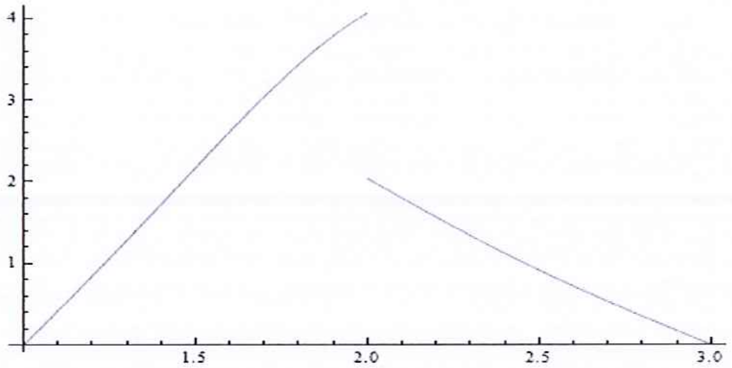
(3.9.125) ve (3.9.126) eşitliklerinde $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$ seçimi yapılarak ortak çözüm yapıldığı takdirde $\{\alpha = 8.33666,\ \beta = -8.33666\}$ ve $\{\alpha = 6.66334,\ \beta = -6.66334\}$ reel değerlere ulaşılır. Burada $\{\alpha = 8.33666,\ \beta = -8.33666\}$ değerlerini kullanarak aşağıdaki çözüm fonksiyonu sonuçları tabloda verilmiştir. Ayrıca $\lambda = \gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1$ seçimi yapılarak ortak çözüm yapıldığı takdirde $\{\alpha = 12.225,\ \beta = -3.62058\}$ ve $\{\alpha = 4.17397,\ \beta = -1.70732\}$ reel değerlere ulaşılır.

Çizelge 3.4 Elde edilen Dy(t) Çözüm

| t | Dy(t) ($\lambda = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$) | Dy(t) ($\lambda = 2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1$) |
|---|---|---|
| 1.1 | 0.8344762396 | 0.4186440631 |
| 1.2 | 1.6691708028 | 0.8436189511 |
| 1.3 | 2.4915688717 | 1.2780466761 |
| 1.4 | 3.2758492634 | 1.7213917708 |
| 1.5 | 3.9850957246 | 2.1692530698 |
| 1.6 | 4.5762921112 | 2.6132533817 |
| 1.7 | 5.0092610789 | 3.0411758308 |
| 1.8 | 5.2607059147 | 3.4374956428 |
| 1.9 | 5.3445151349 | 3.7844561536 |
| 2.1 | 5.3445151349 | 1.7934130679 |
| 2.2 | 5.2607059147 | 1.5598785894 |
| 2.3 | 5.0092610789 | 1.3338965425 |
| 2.4 | 4.5762921112 | 1.1171170753 |
| 2.5 | 3.9850957246 | 0.9103076485 |
| 2.6 | 3.2758492634 | 0.7134222063 |
| 2.7 | 2.4915688717 | 0.5256799643 |
| 2.8 | 1.6691708028 | 0.3456424954 |
| 2.9 | 0.8344762396 | 0.1712777940 |




Grafik 3.6 $Dy(t)$ çözüm grafiği ($\lambda = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$)




Grafik 3.7 $Dy(t)$ çözüm grafiği $(\lambda = 2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1)$

Şimdi aynı sınır-değer-geçiş probleminin çözümünü bulmak için Adomian ayrışım yöntemini uygulayalım.

1.ADIM

Diferensiyel denklemler teorisinden iyi bilinmektedir ki,

$$y''(t) + y^2(t) = \lambda y(t), \qquad t \in [1,2) \tag{3.9.127}$$

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = a \tag{3.9.128}$$

başlangıç değer probleminin bir tek $\widetilde{y}(t)$ çözümü vardır.

$L = \frac{d^2}{dt^2}$ diferensiyel operatörü yardımı ile verilen diferensiyel denklem,

$$Ly(t) = \lambda y(t) - y^2(t) \tag{3.9.129}$$

operatör şeklinde yazılabilir. $Ly(t) = y''(t) = f = \lambda y(t).- y^2(t)$ gösterelim. $L$ nin ters operatörü olan $L^{-1}[.] = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} .dtdt$ yi (3.9.129) ün her iki tarafına uygulanarak

$$y(t) = y(t_0) + ty'(t_0) - t_0 y'(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} f dtdt$$

elde edilir. Burada $t_0 = 1$ için

$$y(t) = at - a + L^{-1}((\lambda y(t) - y^2(t)))$$

bulunur. Burada $y^2(t) = N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n$ Adomian ayrışımından yararlanacağız ve $\widetilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{y}_n(t)$ şeklinde çözüm arayacağız. Genel şekilde

$$\widetilde{y}_0(t) = at - a$$

$$\widetilde{y}_{k+1}(t) = L^{-1}(\lambda \widetilde{y}_k - \widetilde{A}_k), \qquad k \geq 0$$

yazılabilir. Adomian polinomlarını elde edebilmek için aşağıdaki eşitlikler uygulanır.

$$\widetilde{A}_0 = N(\widetilde{y}_0(t))$$

$$\widetilde{A}_1 = \widetilde{y}_1 N'(\widetilde{y}_0)$$

$$\widetilde{A}_2 = \widetilde{y}_2 N'(\widetilde{y}_0) + \frac{1}{2}\widetilde{y}_1^2 N''(\widetilde{y}_0)$$

$$\widetilde{A}_3 = \widetilde{y}_3 N'(\widetilde{y}_0) + \widetilde{y}_1 \widetilde{y}_2 N''(\widetilde{y}_0) + \frac{1}{3!}\widetilde{y}_1^3 N'''(\widetilde{y}_0)$$

..........................

O halde,

$$\widetilde{y}_0(x) = at - a$$

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_1(t) &= L^{-1}(\lambda \widetilde{y}_0(t) - \widetilde{A}_0) \\ &= \int_1^t \int_1^t \lambda(at - a) - (at - a)^2 dt dt \\ &= -\frac{1}{12} a(-2\lambda + a(-1+t))(-1+t)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_2(t) &= L^{-1}(\lambda \widetilde{y}_1(t) - \widetilde{A}_1) \\ &= \frac{a}{2520}(-1+t)^5(10a^2(-1+t)^2 - 35a(-1+t)\lambda + 21\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_3(t) &= L^{-1}(\lambda \widetilde{y}_2(t) - \widetilde{A}_2) \\ &= -\frac{a}{60480}(-1+t)^7(10a^3(-1+t)^3 - 50a^2(-1+t)^2\lambda + 63a(-1+t)\lambda^2 - 12\lambda^3) \end{aligned}$$

............................

elde edilir. $t \in [1,2)$ aralığı için aşağıdaki şekilde $\widetilde{y}(t)$ çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}(t) &= at - a - \frac{1}{12}a(-2\lambda + a(-1+t))(-1+t)^3 \\
&+ \frac{a}{2520}(-1+t)^5(10a^2(-1+t)^2 - 35a(-1+t)\lambda + 21\lambda^2) \\
&- \frac{a}{60480}(-1+t)^7(10a^3(-1+t)^3 - 50a^2(-1+t)^2\lambda + 63a(-1+t)\lambda^2 - 12\lambda^3) + \ldots
\end{aligned}$$

2. ADIM

Bilinmektedir ki,

$$y''(t) + y^2(t) = \lambda y(t), \qquad t \in (2,3]$$

$$y(3) = 0, \quad y'(3) = b$$

başlangıç değer probleminin bir tek $\widetilde{\widetilde{y}}(t)$ çözümü vardır.

Birinci durumda belirtildiği gibi,

$$y(t) = y(t_0) + ty'(t_0) - t_0 y'(t_0) + L^{-1}(\lambda \widetilde{\widetilde{y}}_k - \widetilde{\widetilde{A}}_k)$$

yazılır. Burada $t_0 = 3$ için düzenleme yapılırsa çözüm

$$y(t) = bt - 3b + L^{-1}(\lambda \widetilde{\widetilde{y}}_k - \widetilde{\widetilde{A}}_k)$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla,

$$\widetilde{\widetilde{y}}_0(t) = bt - 3b$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}_1(t) = -\frac{1}{12}b(-3+t)^3(b(-3+t) - 2\lambda)$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}_2(t) = \frac{b}{2520}(-3+t)^5(10b^2(-3+t)^2 - 35b(-3+t)\lambda + 21\lambda^2)$$

..............................

bulunur. Sonuç olarak $t \in (2,3]$ aralığı için

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{y}}(t) &= bt-3b-\frac{1}{12}b(-3+t)^3(b(-3+t)-2\lambda)\\ &+ \frac{b}{2520}(-3+t)^5(10b^2(-3+t)^2-35b(-3+t)\lambda+21\lambda^2)+...\end{aligned}$$

şeklinde çözüm bulunur.

3. ADIM

Şimdi esas problemi, yani

$$y''(t)+y^2(t)=\lambda y(t), \qquad t\in[1,2)\cup(2,3]$$

diferensiyel denkleminden,

$$y(1)=0, \qquad y(3)=0$$

sınır şartlarından ve de $t=2$ noktasında

$$y(2-0)=\gamma_1 y(2+0)$$

$$y'(2-0)=\gamma_2 y'(2+0)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş problemini göz önüne alarak, $\widetilde{y}(2)=\gamma_1\widetilde{\widetilde{y}}(2)$ ve $\widetilde{y}'(2)=\gamma_2\widetilde{\widetilde{y}}'(2)$ yazılabilir. Özel olarak,

$$\begin{aligned}\widetilde{y}(t) &= \widetilde{y_0}(t)+\widetilde{y_1}(t)+\widetilde{y_2}(t)\\ &= at-a-\frac{1}{12}a(-2\lambda+a(-1+t))(-1+t)^3\\ &+ \frac{a}{2520}(-1+t)^5(10a^2(-1+t)^2-35a(-1+t)\lambda+21\lambda^2)\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{y}}(t) &= \tilde{\tilde{y}}_0(t) + \tilde{\tilde{y}}_1(t) + \tilde{\tilde{y}}_2(t) \\
&= bt - 3b - \frac{1}{12}b(-3+t)^3(b(-3+t) - 2\lambda) \\
&+ \frac{b}{2520}(-3+t)^5(10b^2(-3+t)^2 - 35b(-3+t)\lambda + 21\lambda^2)
\end{aligned}
$$

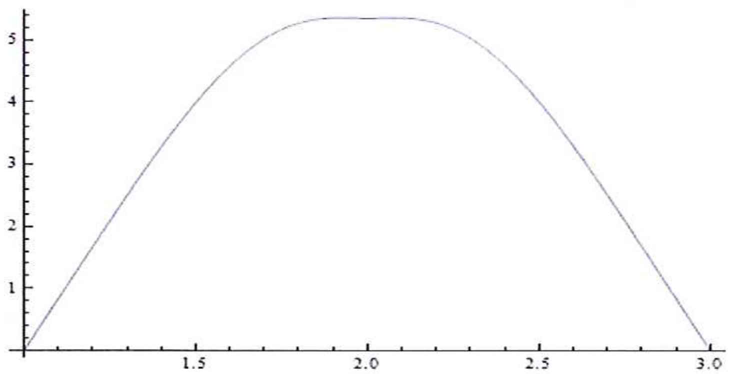
alalım. Burada $\lambda, \gamma_1, \gamma_2 = 1$ seçimi yapılarak ve $\tilde{y}(2) = \tilde{\tilde{y}}(2)$, $\tilde{y}'(2) = \tilde{\tilde{y}}'(2)$ eşitliklerinin ortak çözümü sonucu; $\{a = 8.36603, \quad b = -8.36603\}$ ve $\{a = 6.63397, \quad b = -6.63397\}$ reel değerlerine ulaşılır. Ayrıca $\lambda = 2, \gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = -1$ seçimi yapılarak ve $\tilde{y}(2) = 2\tilde{\tilde{y}}(2)$, $\tilde{y}'(2) = -\tilde{\tilde{y}}'(2)$ eşitliklerinin ortak çözümü sonucu; $\{a = 12.2636, \quad b = -3.62666\}$ ve $\{a = 4.1391, \quad b = -1.69568\}$ reel değerlerine ulaşılır.

$$
y(t) = \begin{cases} \tilde{y}(t), & t \in [1,2) \\ \\ \tilde{\tilde{y}}(t), & t \in (2,3] \end{cases}
$$

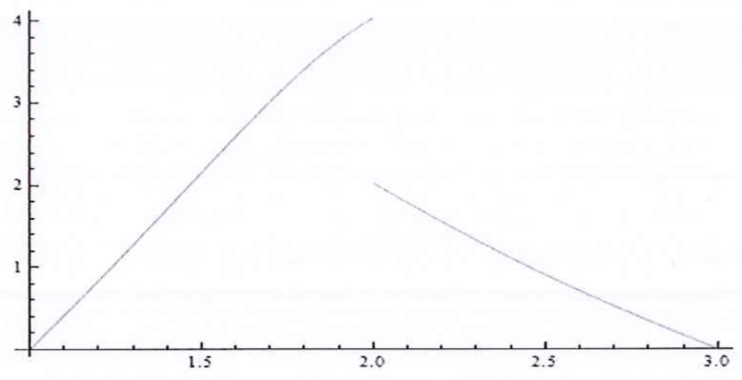
çözüm fonksiyonu göz önünde bulundurularak aşağıdaki tablo elde edilir.

Çizelge 3.5 Elde edilen Ay(t) Çözüm

| t | Ay(t) $(\lambda = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1)$ | Ay(t) $(\lambda = 2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1)$ |
|---|---|---|
| 1.1 | 0.8374135822 | 0.4151480442 |
| 1.2 | 1.6750175679 | 0.8365909708 |
| 1.3 | 2.5001801538 | 1.2674681270 |
| 1.4 | 3.2868741266 | 1.7073175342 |
| 1.5 | 3.9979143730 | 2.1518575892 |
| 1.6 | 4.5900087331 | 2.5928515921 |
| 1.7 | 5.0227932802 | 3.0181969260 |
| 1.8 | 5.2730231103 | 3.4123807106 |
| 1.9 | 5.3550897237 | 3.7574437536 |
| 2.1 | 5.3550897237 | 1.7811385128 |
| 2.2 | 5.2730231103 | 1.5494379309 |
| 2.3 | 5.0227932802 | 1.3250156536 |
| 2.4 | 4.5900087331 | 1.1096546336 |
| 2.5 | 3.9979143730 | 0.9041878745 |
| 2.6 | 3.2868741266 | 0.7085963698 |
| 2.7 | 2.5001801538 | 0.5221080419 |
| 2.8 | 1.6750175679 | 0.3432879321 |
| 2.9 | 0.8374135822 | 0.1701098883 |




Grafik 3.8 $Ay(t)$ çözüm grafiği $(\lambda = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1)$



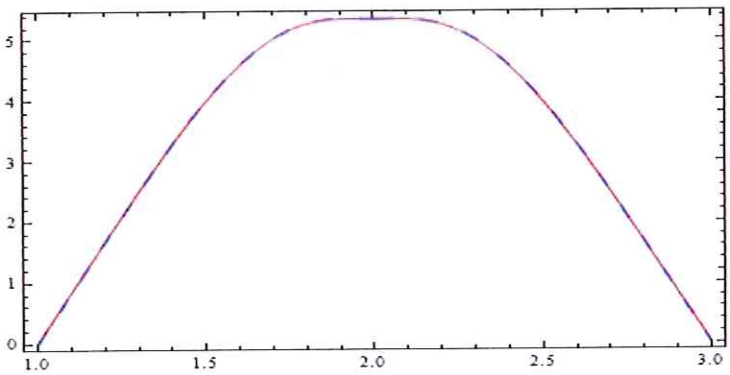
Grafik 3.9 $Ay(t)$ çözüm grafiği ($\lambda = 2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1$)

## 3.10. 3.9. Bölümünde İncelenen Problemin DTM ve ADM ile Elde Edilen Çözümlerinin Karşılaştırılması

Bu kesimde lineer olmayan bir sınır-değer-geçiş probleminin çözümü ilk olarak diferensiyel dönüşüm yöntemi ile, ikinci olarak da Adomian ayrışım yöntemi ile bulunarak karşılaştırma yapılmıştır. Burada Adomian ayrışım yöntemi ile yaklaşık çözümde ilk 3 terim seçimi yapılmıştır, diferensiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık çözümde ise ilk 8 terim seçilerek, iki yöntemle bulunan sonuçların benzer oldukları görülmüştür. Ancak ADM uygulandığında, daha az terimle daha etkin sonuç verdiği gözlenmiş. Grafik üzerinde sonuçlar görülmektedir. $Dy(t)$, DTM ile elde edilen sonucu; $Ay(t)$ ise ADM ile elde edilen sonucu temsil etmektedir.

Çizelge 3.6 Elde edilen çözümler ($\lambda = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$)

| t | Dy(t) ($\lambda = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$) | Ay(t) ($\lambda = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$) |
|---|---|---|
| 1.1 | 0.8344762396 | 0.8374135822 |
| 1.2 | 1.6691708028 | 1.6750175679 |
| 1.3 | 2.4915688717 | 2.5001801538 |
| 1.4 | 3.2758492634 | 3.2868741266 |
| 1.5 | 3.9850957246 | 3.9979143730 |
| 1.6 | 4.5762921112 | 4.5900087331 |
| 1.7 | 5.0092610789 | 5.0227932802 |
| 1.8 | 5.2607059147 | 5.2730231103 |
| 1.9 | 5.3445151349 | 5.3550897237 |
| 2.1 | 5.3445151349 | 5.3550897237 |
| 2.2 | 5.2607059147 | 5.2730231103 |
| 2.3 | 5.0092610789 | 5.0227932802 |
| 2.4 | 4.5762921112 | 4.5900087331 |
| 2.5 | 3.9850957246 | 3.9979143730 |
| 2.6 | 3.2758492634 | 3.2868741266 |
| 2.7 | 2.4915688717 | 2.5001801538 |
| 2.8 | 1.6691708028 | 1.6750175679 |
| 2.9 | 0.8344762396 | 0.8374135822 |




Grafik 3.10 Çözümlerin Karşılaştırılması

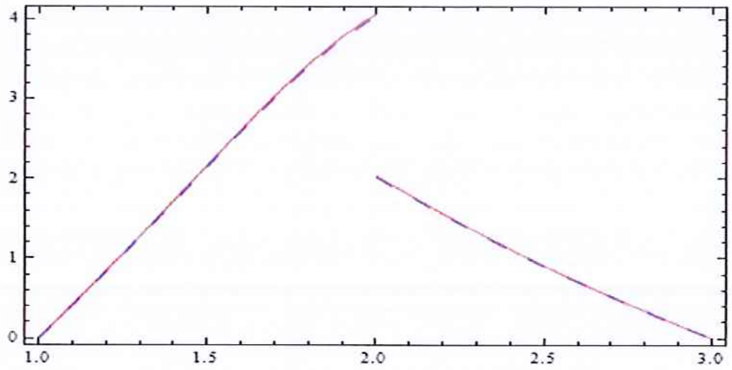
($\lambda = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$)

Kırmızı çizgi Dtm kullanılarak elde edilen çözüm

Mavi kesikli çizgi Adım kullanılarak elde edilen çözüm

Çizelge 3.7 Elde edilen çözümler ($\lambda = 2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1$)

| t | Dy(t) ($\lambda = 2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1$) | Ay(t) ($\lambda = 2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1$) |
|---|---|---|
| 1.1 | 0.4186440631 | 0.4151480442 |
| 1.2 | 0.8436189511 | 0.8365909708 |
| 1.3 | 1.2780466761 | 1.2674681270 |
| 1.4 | 1.7213917708 | 1.7073175342 |
| 1.5 | 2.1692530698 | 2.1518575892 |
| 1.6 | 2.6132533817 | 2.5928515921 |
| 1.7 | 3.0411758308 | 3.0181969260 |
| 1.8 | 3.4374956428 | 3.4123807106 |
| 1.9 | 3.7844561536 | 3.7574437536 |
| 2.1 | 1.7934130679 | 1.7811385128 |
| 2.2 | 1.5598785894 | 1.5494379309 |
| 2.3 | 1.3338965425 | 1.3250156536 |
| 2.4 | 1.1171170753 | 1.1096546336 |
| 2.5 | 0.9103076485 | 0.9041878745 |
| 2.6 | 0.7134222063 | 0.7085963698 |
| 2.7 | 0.5256799643 | 0.5221080419 |
| 2.8 | 0.3456424954 | 0.3432879321 |
| 2.9 | 0.1712777940 | 0.1701098883 |




Grafik 3.11 Çözümlerin Karşılaştırılması

$(\lambda = 2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 1)$
Kırmızı çizgi Dtm kullanılarak elde edilen çözüm

Mavi kesikli çizgi Adm kullanılarak elde edilen çözüm

## 3.11. Sturm-Liouville Sınır-Değer-Geçiş Problemine Adomian Ayrışım Yönteminin Uygulanarak Özdeğerlerin İncelenmesi

Bu kesimde

$$y''(t,\lambda) + \mu^2 y(t,\lambda) = 0, \qquad t \in [0,1) \cup (1,2] \tag{3.11.130}$$

biçiminde verilmiş Sturm-Liouville diferensiyel denkleminden,

$$y(0,\lambda) = y(2,\lambda) = 0 \tag{3.11.131}$$

sınır şartlarından ve

$$y(1-0,\lambda) = y(1+0,\lambda) \tag{3.11.132}$$

$$y'(1-0,\lambda) = y'(1+0,\lambda) \tag{3.11.133}$$

geçiş şartlarından oluşan problemi ele alalım. Burada, ilk olarak $[0,1)$ aralığında ve $(1,2]$ aralığında başlangıç değer problemlerini kurarak bu problemlerin, $\widetilde{y}(t,\lambda)$ ve $\widetilde{\widetilde{y}}(t,\lambda)$ çözümlerini tanımlayacağız.

1.ADIM

Diferensiyel denklemler teorisinden çok iyi bilinmektedir ki,

$$y''(t,\lambda)+\mu^2 y(t,\lambda)=0, \qquad t\in[0,1) \tag{3.11.134}$$

diferensiyel denkleminden ve

$$y(0,\lambda)=0 \tag{3.11.135}$$

$$y'(0,\lambda)=k \tag{3.11.136}$$

başlangıç şartlarından oluşan probleminin bir tek $\widetilde{y}(t,\lambda)$ çözümü vardır.

Çözümü elde etmek için Adomian ayrışım yöntemi uygularsak,

$y(t,\lambda)=kt+L^{-1}(-\mu^2 y(t,\lambda))$ elde edilir. Burada ilk terim $\widetilde{y_0}(t,\lambda)=kt$ olarak alınmalıdır. Serinin terimleri

$$\widetilde{A_0}=N(\widetilde{y_0})=kt$$

$$\begin{aligned}\widetilde{y_1}(t,\lambda) &= L^{-1}(-\mu^2 y_0(t,\lambda))\\ &= -\mu^2 L^{-1}(kt)\\ &= -\mu^2\int_0^t\int_0^t kt\,dt\,dt\\ &= -\mu^2 k\frac{t^3}{3!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{y_2}(t,\lambda) &= L^{-1}(-\mu^2 y_1(t,\lambda))\\ &= -\mu^2 L^{-1}(-\mu^2 k\frac{t^3}{3!})\\ &= -\mu^2\int_0^t\int_0^t -\mu^2 k\frac{t^3}{3!}dt\,dt\\ &= \mu^4 k\frac{t^5}{5!}\end{aligned}$$

$$\widetilde{y_3}(t,\lambda)=-\mu^6 k\frac{t^7}{7!}$$

$$\widetilde{y}_4(t,\lambda) = \mu^8 k\frac{t^9}{9!}$$

..................................................

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla çözüm fonksiyonu;

$$\widetilde{y}(t,\lambda) = kt - \mu^2 k\frac{t^3}{3!} + \mu^4 k\frac{t^5}{5!} - \mu^6 k\frac{t^7}{7!} + \mu^8 k\frac{t^9}{9!} + ... \quad (3.11.137)$$

olarak bulunur.

2.ADIM

Benzer olarak

$$y''(t,\lambda) + \mu^2 y(t,\lambda) = 0, \qquad t \in (1,2] \quad (3.11.138)$$

$$y(2,\lambda) = 0 \quad (3.11.139)$$

$$y'(2,\lambda) = -m \quad (3.11.140)$$

başlangıç değer probleminin bir tek $\widetilde{\widetilde{y}}(t,\lambda)$ çözümü vardır.

Çözümü elde etmek için Adomian ayrışım yöntemi uygularsak,

$$y(t,\lambda) = -mt + 2m + L^{-1}(-\mu^2 y(t,\lambda))$$

elde edilir. Burada ilk terim $\widetilde{\widetilde{y}}_0(t,\lambda) = -mt + 2m$ olarak alınmalıdır.

$$\widetilde{\widetilde{A}}_0 = N(\widetilde{\widetilde{y}}_0) = -mt + 2m$$

olduğu için serinin terimleri

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{y}}_1(t,\lambda) &= L^{-1}(-\mu^2 \widetilde{\widetilde{y}}_0(t,\lambda)) \\
&= -\mu^2 \int_t^2 \int_t^2 (-mt + 2m)dtdt \\
&= -\mu^2 (\frac{8m}{6} - 2mt - \frac{mt^3}{3!} + mt^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{y}}_2(t,\lambda) &= L^{-1}(-\mu^2\widetilde{\widetilde{y}}_1(t,\lambda)) \\
&= -\mu^4\frac{m}{120}(-2+t)^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{y}}_3(t,\lambda) &= L^{-1}(-\mu^2\widetilde{\widetilde{y}}_2(t,\lambda)) \\
&= \mu^6\frac{m}{5040}(-2+t)^7
\end{aligned}
$$

.................................................

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ikinci aralık için çözüm fonksiyonu;

$$\widetilde{\widetilde{y}}(t,\lambda) = -mt+2m-\mu^2(\frac{8m}{6}-2mt-\frac{mt^3}{3!}+mt^2)-\mu^4\frac{m}{120}(-2+t)^5+\mu^6\frac{m}{5040}(-2+t)^7+... \tag{3.11.141}$$

biçiminde elde edilir.

3. ADIM

Şimdi

$$y''(t,\lambda)+\mu^2 y(t,\lambda)=0, \qquad t\in[0,1)\cup(1,2] \tag{3.11.142}$$

diferensiyel denklemden

$$y(0,\lambda)=y(2,\lambda)=0 \tag{3.11.143}$$

sınır şartlarından ve

$$y(1-0,\lambda)=y(1+0,\lambda) \tag{3.11.144}$$

$$y'(1-0,\lambda)=y'(1+0,\lambda) \tag{3.11.145}$$

geçiş şartlarından oluşan problemi ele alarak; $t=1$ süreksizlik noktasında,

$$\widetilde{y}(1,\lambda)=\widetilde{\widetilde{y}}(1,\lambda)$$

ve

$$\widetilde{y}'(1,\lambda)=\widetilde{\widetilde{y}}'(1,\lambda)$$

yazılabilir. Özdeğer ve özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları bulmak için, yukarıdaki sistemi çözmeliyiz. Bilinen nümerik yöntemler uygulanarak; $k$, $m$, $\mu$ parametrelerine karşılık gelen reel değerler elde edilebilir.

### 3.12. Bölüm 3.11. de İncelenen Problemin Analitik Çözümünün Bulunması

Şimdi önceki bölümde tanımladığımız (3.11.130)-(3.11.133) probleminin özdeğerlerini ve özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlarını bulalım. Diferensiyel denklemin genel çözümü,

$$y(t) = \begin{cases} c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t, & t \in [0,1) \\ d_1 \cos \mu t + d_2 \sin \mu t, & t \in (1,2] \end{cases}$$

dir. $y(0) = 0$ olduğu kullanılarak, $c_1 = 0$ elde edilir. $y(2) = 0$ olduğunu kullanalım.

$$y(2) = d_1 cos2\mu + d_2 sin2\mu = 0 \tag{3.12.146}$$

elde edilir. Birinci geçiş şartı kullanılarak

$$c_2 sin\mu - d_1 cos\mu - d_2 sin\mu = 0 \tag{3.12.147}$$

ve ikinci geçiş şartı kullanılarakta

$$c_2 \mu cos\mu + d_1 \mu sin\mu - d_2 \mu cos\mu = 0 \tag{3.12.148}$$

elde edilir. (3.12.146), (3.12.147), (3.12.148) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} 0 & cos2\mu & sin2\mu \\ sin\mu & -cos\mu & -sin\mu \\ \mu cos\mu & \mu sin\mu & -\mu cos\mu \end{bmatrix} = 0$$

yazılabilir. Buradan,

$$\mu sin2\mu = 0 \tag{3.12.149}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\mu = \frac{\pi}{2}n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ elde edilir. (3.12.146) denkleminde bulunanlar yerine yazılırsa, $d_1 = 0$ elde edilir. (3.12.147), (3.12.148) denklemlerini düzenleyelim. $c_2 sin\mu - d_2 sin\mu = 0$ ve $c_2 \mu cos\mu - d_2 \mu cos\mu = 0$ yazılabilir. $c_2 = d_2 = k$ olsun. Bu taktirde, $\lambda_n = \frac{\pi^2}{4}n^2$ özdeğerlerine karşılık,

$$y_n(t) = ksin\frac{\pi}{2}nt, \qquad t \in [0,1) \cup (1,2]$$

özfonksiyonu elde edilir.

# 4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Diferensiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemi genelde diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Özdeğer problemlerinin çözümleri için bu yöntemleri kullanmak daha da ilginç hale gelmiştir. Özellikle de sınır-değer-geçiş problemlerinin çözümlerini elde etmek için bu yöntemlerin kullanılabilir olduğunu göstermek önemlidir. Dolayısıyla bu çalışmamızda lineer ve lineer olmayan sınır-değer-geçiş probleminin çözümünü elde etmek için hem Adomian ayrışım yöntemi hem de diferensiyel dönüşüm yöntemini kullanarak elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır. Mümkün olduğu durumlarda analitik çözüm ile karşılaştırma yapılmıştır. Mesala, geçiş şartlı Bratu problemine Adomian ayrışım yöntemi uygulanarak, analitik çözüm ile karşılaştırılması yapılmıştır. Ayrıca, Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini bulabilmek için Adomian ayrışım yönteminin nasıl uygulandığı gösterilmiştir.

# KAYNAKLAR


Abbaoui, K. ve Cherrualt, Y., 1994. Convergence of Adomian's method applied to differential equations, Computers Math. Applic. Vol 28 No.5, 103-109.

Adomian, G., 1983. Stochastic Systems, Academic Press, New York.

Adomian, G., 1986. Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, New York.

Adomian, G., 1988. A review of the decomposition method in applied mathematics, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 135, 501-544.

Adomian, G., 1990. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations, Mathl. Comput. Modelling, Vol. 13, No.7, 17-43.

Adomian G. ve Rach R., 1991. Transformation of series, Appl. Math. Lett. Vol. 4, 69-71.

Adomian, G., 1994. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Adomian, G., 1994. Solution of Physical Problems by decomposition, Computers Math. Applic. Vol. 27, No.9/10, 145-154.

Adomian G., Cherruault Y. ve Abbaoui, K., 1996. A nonperturbative analytical solution of immune response with time-delays and possible generalization, Math. Comput. Modelling, 24, 89-96.

Al-Hayani, W. ve Casasús, L., 2005. The Adomian decomposition method in turning point problems , Journal of Computational and Applied Mathematics, 177, 187-203.

Al-Hayani, W., 2015. An efficient advanced Adomian decomposition method to solve second-order boundary value problems with Neumann conditions, International Mathematical Forum, Vol.10, no.1, 13-23.

Al-Mdallal, Q. M., 2009. An efficient method for solving fractional Sturm-Liouville problems, Chaos, Solitions and Fractals, 40, 183-189.

Arslanturk, C., 2005. A decomposition method for fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity, International Communications in Heat and Mass Transfer 32, 831-841.

Attili, B. S., 2005. The Adomian decomposition method for computing eigenelements of Sturm-Liouville two point boundary value problems, Appl. Math. Comput. 168, 1306-1316.

Attili, B.S. ve Lesnic, D., 2006. An efficient method for computing eigenelements of Sturm-Liouville fourth-order boundary value problems, Appl. Math. Comput., 182, 1247-1254.

Ayaz, F., 2003. On the two-dimensional differential transform method, Appl. Math. Comput., 143, 361-374.

Bakodah, H. O., Al-Zaid, N. A., Mirzazadeh, M. ve Zhou, Q., 2017. Decomposition method for solving Burgers' equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions, Optik, 130, 1339-1346.

Batiha, A. ve Batiha, B., 2011. Differential transformation method for a reliable treatment of the nonlinear biochemical reaction model, Advanced Studies in Biology, Vol.3, No.8, 355-360.

Bougoffa, L., Rach, R., Wazwaz, A. ve Duan, J., 2015. On the Adomian decomposition method for solving the Stefan problem, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, Vol.25, Issue.4, 912-928.

Chanane, B., 2007. Eigenvalues of Sturm-Liouville problems with discontinuity conditions inside a finite interval, Appl. Math. Comput. 188, 1725 - 1732.

Chen, C-K. ve Ho, S-H., 1996. Application of differential transformation to eigenvalue problems, Appl. Math. Comput., 79, 173-188.

Chen C. L. ve Liu Y. C., 1998. Solution of two-point boundary-value problems using the differential transformation method, Journal of Optimization theory and applications, Vol.99, No.1,pp.23-35.

Cherruault, Y., Saccomandi, G., Some, B., 1992. New results for convergence of Adomian's method applied to integral equations, Math. Comput. Model., 16(2), 85-93.

Dispini, M. ve Mungkasi, S., 2016. Adomian decomposition method used to solve the shallow water equations, AIP Conference Proceedings, 1746, 020055.

Dunford, N. ve Schwartz, J. T., 1963. Linear operators II, Spectral Theory, Interscience, New York.

Ebaid, A., Rach, R. and El-Zahar, E., 2017. A new analytical solution of the hyperbolic Kepler equation using the Adomian decomposition method, Acta Astronautica, 138, 1-9.

El-Tawil, M. A., Bahnasawi, A. A. ve Abdel-Naby, A., 2004. Solving Riccati differential equation using Adomian's decomposition method, Appl. Math. and Comput., 157, 503-514.

Ertürk, V. S., Zaman, G. ve Momani, S., 2012. A numeric-analytic method for approximating a giving up smoking model containing fractional derivatives, Computers and Mathematics with Applications, 64, 3065-3074.

Ertürk, V. S. ve Momani, S., 2008. Differential Transform technique for solving fifth-order boundary value problems, Mathematical and Computational Applications, Vol.13, Issue.2, 113-121.

Evans, D. J. ve Raslan, K. R., 2005. The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, International Journal of Computer Mathematics, 82(1), 49-54.

Gbadamosi, B., Adebimpe, O., Akinola, E. I. ve Olopade, I. A., 2012. Solving Riccati equation using Adomian Decomposition method, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.78, No.3, 409-417.

González-Gaxiola, O. ve Bernal-jaquez, R., 2015. Applying Adomian decomposition method to solve Burgess equation with a non-linear source, Int. J. Appl.Comput. Math DOI 10.1007/s40819-015-0100-4.

Hashim, I., 2006. Adomian decomposition method for solving BVPs for fourth-order integro-differential equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.193, Issue 2, 658-664.

Hassan, I. H., 2002. On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation, Appl. Math. Comput., 127, 1-22.

Hassan, I. H., 2002. Different applications for the differential transformation in the differential equations, Appl. Math. Comput., 129, 183-201.

Hassan, I. H. ve Ertürk, V. S., 2007. Applying differential transformation method to the one-dimensional Planar Bratu problem, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol.2, No.30, 1493-1504.

Hassan, I. H., 2008. Comparison differential transformation technique with Adomian decomposition method for linear and nonlinear initial value problems, Chaos Solutions and Fractals, 36, 53-65.

Hassan, I. H., 2008. Application to differential transformation method for solving systems of differential equations, Applied Mathematical Modelling, 32, 2552-2559.

Hosseini, M. M., 2006. Adomian decomposition method with Chebyshev polynomials, Appl. Math. Comput., 175, 1685-1693.

Inc, M. ve Evans, D. J., 2003. The Decomposition method for solving of a class of singular two-point boundary value problems, International Journal of Computer Mathematics, 80:7, 869-882.

Jang, B., 2008. Two point boundary value problems by the extended Adomian decomposition method, Journal of Computational and Applied Mathematics, 219, 253-262.

Jang, M., Chen, C. ve Liy, Y., 2000. On Solving the initial-value problems using the differential transformation method, Applied Mathematics and Computation, 115, 145-160.

Jang, M., Chen, C. ve Liy, Y., 2001. Two-dimensional differential transform for partial differential equations, Applied Mathematics and Computation, 121, 261-270.

Kanth Ravi, A. S. V. ve Aruna, K., 2009. Differential transform method for solving the linear and nonlinear Klein-Gordon equation, 180, 708-711.

Kuang J. ve Chen, C., 2005. Adomian decomposition method used for solving nonlinear pull-in behavior in electrostatic micro-actuators, Math. and Comp. Modelling, 41, Pages 1479-1491.

Ladyzhenskaia, O. A., 1985. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Springer - Verlag, New York.

Lo, Y. Chi, 2000. Boundary Value Problems, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., USA.

Lv, X. ve Gao, J., 2017. Treatment for third-order nonlinear differential equations based on the Adomian decomposition method, LMS J. Comput. Math. 20(1), 1-10.

Mukhtarov, O. Sh. ve Yakubov, S., 2002. Problems for ordinary differential equations with transmission conditions, Appl. Anal., Vol 81, 1033 - 1064.

Mukhtarov, O. Sh. ve Kadakal, M., 2005. Some spectral properties of one Sturm-Liouville type problem with discontinuous weight, Sib. Math. J., Vol. 46, 681 - 694.

Mukhtarov, O. Sh., Aydemir, K. ve Olğar, H., 2014. Spectral theory of one perturbed boundary value problem with interior singularities., AIP Conference Proceedings, 1611(1), 283 - 289.

Mukhtarov, O. Sh. ve , Aydemir, K. 2015. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point, Acta Mathematica Scientia, 35(3),639-649..

Mungkasi, S. ve Dheno, M. F. S., 2017. Adomian Decomposition method used to solve the Gravity wave equations, AIP Conference Proceeding 1788,030103, doi:10.1063/1.4968356.

Odibat, Z. M., 2008. Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels, Mathematical and Computer Modelling, 48, 1144-1149.

Paripour, M., Hajilou, E., Hajilou, A. and Heidari, H., 2015. Application of Adomian decomposition method to solve hybrid fuzzy differential equations, Journal of Taibah University for science, 9, 95-103.

Pukhov, G.E., 1982. Differential transforms and circuit theory. Int. J. Circ. Theor. Appl. 10, 265-276.

Pukhov, G.E., 1986. Differential transformations and Mathematical Modeling of physical processes, Kiev.

Putranto, Y. W. ve Mungkasi, S., 2017. Adomian decomposition method for solving the population dynamics model of two species, Journal of Physics: Conf. Series, 795, 012045.

Saravanan, A. ve Magesh, N., 2013. A Comparison between the reduced differential transform method and the Adomian decomposition method for the Newell-whitehead-Segel equation, Journal of the Egyption Mathematical Society, 21, 259-265.

Singh, N. ve Kumar, M., 2013. Adomian decomposition method for computing eigen-values of singular Sturm-Liouville problems, Natl. Acad. Sci. Lett., 36(3):311-318.

Singh, R., Saha, J. ve Kumar, M., 2015. Adomian decomposition method for solving fragmentation and aggregation population balance equations, J. Appl. Math. Comput., 48, 265-292.

Somali, S. ve Gokmen, G., 2007. Adomian Decomposition Method for Nonlinear Sturm-Liouville Problems, Surveys in Mathematics and its Applications, ISSN 1842-6298, Volume 2, 11-20.

Stakgold, I., 1971. Boundary Value Problems of Mathematical Physics, II, Macmillan Co., New York.

Titchmarsh, E. C., 1962. Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I, second edn. Oxford Univ. Press, London, 1962.

Wazwaz, A. M., 1998. A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solution, Appl. Math. and Comput., 97, 37-44.

Wazwaz, A., 2000. A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, Appl. Math. Comput., 111, 53-69.

Wazwaz, A., 2001. The numerical solution of fifth-order boundary value problems by the decomposition method, Journal of computational and Appl. Math., 136, 259-270.

Wazwaz, A., 2001. A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type, Applied Mathematics and Computation, 118, 287-310.

Wazwaz, A.-M., 2005. Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Emden-Fowler equation, Appl. Math. Comput. 161, 543-560.

Wazwaz, A., 2005. Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations,Appl. Math. Comput., 166, 652-663.

Zhu, Y., Q. Chang, Q. ve Wu, S., 2005. A new algorithm for calculating Adomian polynomials, Appl. Math. Comput., 169, 402-416.

Zhou, J.K., 1986. Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits (in Chinese). Huazhong University Press, Wuhan.

## ÖZGEÇMİŞ

**Kişisel Bilgiler:**

| | |
|---|---|
| **Adı Soyadı** | : Merve YÜCEL |
| **Doğum Tarihi** | : 23.05.1987 |
| **Doğum Yeri** | : Erbaa |
| **Medeni Hali** | : Evli |
| **Yabancı Dili** | : İngilizce |
| **E-posta** | : merve.yucel@outlook.com.tr |

**Eğitim:**

| Derece | Eğitim Birimi | Mezuniyet Tarihi |
|---|---|---|
| Doktora | Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enst. | 2018 |
| Yüksek Lisans | Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enst. | 2011 |
| Lisans | Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak. | 2008 |

**İş Deneyimi:**

| Yıl | Şirket/Kurum | Görev |
|---|---|---|
| 2011- | Hitit Üniversitesi | Öğretim görevlisi |