



**BOHR HAMILTONYENİN $\gamma = 30^\circ$ İÇİN
KRATZER POTANSİYELİ İLE ÇÖZÜMÜ**

BURCU UÇAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANA BİLİM DALI
Doç. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU
Temmuz - 2018
Her hakkı saklıdır**

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BOHR HAMILTONYENİN $\gamma = 30^\circ$ İÇİN KRATZER POTANSİYELİ İLE
ÇÖZÜMÜ

Burcu UÇAR

TOKAT
Temmuz - 2018

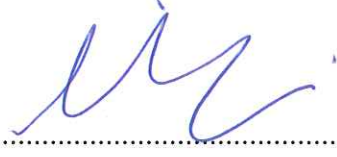
Her hakkı saklıdır

Burcu UÇAR tarafından hazırlanan “Bohr Hamiltonyenin $\gamma = 30^\circ$ için Kratzer Potansiyeli ile Çözümü” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 4 TEMMUZ 2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü FİZİK ANA BİLİM DALI 'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Doç. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi



Üye
Prof. Dr. Bahtiyar MEHMETOĞLU
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi



Üye
Doç. Dr. Erhan ESER
Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi



ONAY

Prof. Dr. Ebubekir ALTUNTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

24/07/2018

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

BURCU UÇAR

4 Temmuz 2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BOHR HAMILTONYENİN $\gamma = 30^\circ$ İÇİN KRATZER POTANSİYELİ İLE ÇÖZÜMÜ

BURCU UÇAR

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANA BİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU

Yapılan bu çalışmada; Bohr Hamiltonyenin γ -katı bir çözümü için β değişkenine bağlı kısmında Kratzer potansiyeli kullanılarak $\gamma = 30^\circ$ için yeni bir model türetilmiştir. Model Z(4)-Kratzer olarak adlandırıldı. Enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonları Nikiforov ve Uvarov tarafından geliştirilen analitik bir yöntem kullanılarak elde edildi. Elde edilen Z(4)-K modelinin enerji spektrumları $^{74,76}\text{Ge}$, $^{110-114}\text{Ru}$, $^{128-132}\text{Xe}$, $^{192-198}\text{Pt}$, ^{192}Os çekirdeklerine ait mevcut deneysel verileri, Z(4), Z(5), Z(4)-D ve Z(4)-S model tahminleri ile karşılaştırıldı. ^{76}Ge , ^{112}Ru , $^{192-198}\text{Pt}$, $^{128,132}\text{Xe}$, ^{192}Os çekirdeklerinin mevcut deneysel verileri ile örtüştüğü; ^{74}Ge , ^{114}Ru çekirdeklerin mevcut deneysel verileri ile uyumlu olduğu ve ^{114}Ru , ^{130}Xe ise alt spin seviyelerinde örtüştüğü gözlenmiştir. Z(4)-K model tahminleri Z(4)-D model ile karşılaştırıldığında; ^{76}Ge , ^{114}Ru , ^{132}Xe çekirdekleri deneysel verileri ile Z(4)-K modelinin daha iyi açıkladığı ^{112}Ru , $^{192-198}\text{Pt}$, ^{192}Os çekirdeklerinin mevcut deneysel verilerinin ise her iki model ile uyumlu olduğu görüldü. Z(4)-K model tahminleri Z(4)-S model ile karşılaştırıldığında; $^{192-196}\text{Pt}$, $^{128-132}\text{Xe}$ çekirdeklerin mevcut deneysel verilerinin, Z(4)-K modeli tahminleri ile daha uyumlu olduğu gözlemlendi.

2018, 57 Sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Z(4) Model, Kritik Nokta Simetrisi, Dinamik Simetrisi, Kratzer Potansiyeli, Nikiforov ve Uvarov, Bohr Hamiltonyen

ABSTRACT

MASTER THESIS

THE SOLUTION OF BOHR HAMILTONIAN FOR $\gamma = 30^\circ$ WITH KRATZER POTENTIAL

BURCU UÇAR

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF PHYSICS

SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU

In this study, for the γ -solid solution of Bohr Hamiltonian, a new model for $\gamma = 30^\circ$ was derived using the Kratzer potential at the part related to the β variable. The Model was named as Z(4)-Kratzer. Energy eigenvalues and wave functions were obtained using an analytical method developed by Nikiforov and Uvarov. The energy spectra of the obtained Z(4)-K model and the present experimental data of $^{74,76}\text{Ge}$, $^{110-114}\text{Ru}$, $^{128-132}\text{Xe}$, $^{192-198}\text{Pt}$, ^{192}Os nucleus were compared with Z(4), Z(5), Z(4)-D ve Z(4)-S model estimates. ^{76}Ge , ^{112}Ru , $^{192-198}\text{Pt}$, $^{128,132}\text{Xe}$, ^{192}Os nucleus overlap with current experimental data results, ^{74}Ge , ^{114}Ru nucleus compatible with the present experimental data and ^{114}Ru , ^{130}Xe overlap at the lower spin levels. When Z(4)-K model estimates are compared with Z(4)-D model, the experimental result of ^{76}Ge , ^{114}Ru , ^{132}Xe nucleus was explained better with Z(4)-K model and the current experimental results of ^{112}Ru , $^{192-198}\text{Pt}$, ^{192}Os nucleus were compatible with both models. When Z(4)-K model estimates are compared with Z(4)-S model, it was observed that the present experimental data of the; $^{192-196}\text{Pt}$, $^{128-132}\text{Xe}$ nucleus are more compatible with the Z(4)-K model estimates.

2018, 57 Page

KEYWORDS: Z(4) Model, Kratzer Potential, Critical Point Symetries, Dynamic Symetries, Nikiforov and Uvarov, Bohr Hamiltonian

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya konmasında, değerli bilgilerini benimle paylaşan, herhangi bir sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim ve sabırla bana yardımcı olan, samimiyetini benden esirgemeyip gelecekteki mesleki hayatımda da beni yönlendirip bana verdiği değerli bilgilerden yararlanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Doç. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU'na teşekkürlerimi bir borç bilirim. Yüksek lisans ve lisans hayatım boyunca bana kazandırdıkları her şey için ve yol gösterdikleri için değerli hocam Prof. Dr. Bahtiyar MEHMETOĞLU ve tüm bölüm hocalarıma teker teker çok teşekkür ederim.

Ayrıca yardımlarını benden esirgemeyen, akademik çalışmalarıyla kendime örnek aldığım arkadaşlarım Dr. Melek GÖKBULUT, Dr. Elif SOMUNCU ve Dr. Ayşe BAT'a çok teşekkür ederim.

Beni bu günlere sevgi-saygı ile yetiştirerek getiren, benden hiçbir zaman desteklerini ve güvenlerini esirgemeyen annem Raziye UÇAR ve babam Davut UÇAR'a sonsuz teşekkür ederim.

BURCU UÇAR

4 Temmuz 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
TABLO LİSTESİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
2.1 Bohr Hamiltonyen	4
2.2 Kritik Nokta Simetrisi.....	7
2.2.1 X(5) Kritik Nokta Simetrisi.....	10
2.2.2 E(5) Kritik Nokta Simetrisi	14
2.2.3 Z(5) Kritik Nokta Simetrisi	15
2.2.4 Z(4) Kritik Nokta Simetrisi	17
2.3 Kratzer Potansiyeli	20
3. MATERYAL VE YÖNTEM	21
3.1 Nikiforov-Uvarov Yöntemi.....	21
3.1.1 Standart Nikiforov-Uvarov Yöntemi.....	21
3.1.2 Parametrik Standart Nikiforov-Uvarov Yöntemi	23
3.2 Z(4) Kritik Nokta Simetrisi için Kratzer Potansiyelinin Uygulanması... 26	
4. BULGULAR	30
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	48
6. KAYNAKLAR.....	53
7. ÖZGEÇMİŞ.....	56

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

B_m

β

γ

θ_i

$D_{M,K}^L(\theta_i)$

L

$u(\beta)$

$u(\gamma)$

ε

$\langle \beta^2 \rangle$

J_ν

L_n^K

μ

n_w

b

D_e

Açıklamalar

Kütle parametresi

Küresel şekilden sapmayı ölçen deformasyon koordinatı

Eksenel simetriden sapmanın bir ölçüsü

Euler açıları ($i=1, 2, 3$)

Euler açılarının Wigner fonksiyonları

Açısal momentum kuantum sayısı

β değişkenine bağlı potansiyel

γ değişkenine bağlı potansiyel

İndirgenmiş enerji

β^2 ' nin $\xi(\beta)$ üzerinden ortalaması

Bessel fonksiyonu

Laguerre polinomu

Açısal momentumun laboratuvar sabit \hat{z} -ekseni üzerine iz düşümü

Wobbling kuantum sayısı

İnternükleer ayrışma dengesi

Ayrışma enerjisi

Kısaltmalar

IBM

gsb

min

RTR

Açıklamalar

Etkileşen Boson Modeli (Interacting Boson Model)

Temel Seviye Bandı (Ground State Band)

Minimum

Katı Üç Eksenli Rotor (Rigid Triaxial Rotor)

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1.	z eksenini üzerindeki laboratuvar sabiti ve z' eksenini üzerindeki cisim-sabitinin toplam açısal momentum vektörünün iz düşümleri.....	6
Şekil 2.2.	Casten üçgeni.....	8
Şekil 2.3.	a. Birinci derece faz geçişi için kritik noktadaki enerji yüzeyleri b. Birinci derece faz geçişi.....	10
Şekil 2.4.	a. İkinci derece faz geçişi için kritik noktadaki enerji yüzeyleri b. İkinci derece faz geçişi.....	14
Şekil 2.5.	Farklı iki atomlu moleküller için Kratzer potansiyeli.....	20
Şekil 4.1.	⁷⁴ Ge çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.25$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	32
Şekil 4.2.	⁷⁴ Ge çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.25$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	32
Şekil 4.3.	⁷⁶ Ge çekirdeğinin mevcut deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.5$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	33
Şekil 4.4.	⁷⁶ Ge çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.5$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	33
Şekil 4.5.	¹¹⁰ Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 100$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	34
Şekil 4.6.	¹¹⁰ Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 100$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	34
Şekil 4.7.	¹¹² Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 28$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	35

Şekil 4.8.	¹¹² Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 28$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	35
Şekil 4.9.	¹¹⁴ Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 25$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	36
Şekil 4.10.	¹¹⁴ Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 25$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	36
Şekil 4.11.	¹²⁸ Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 4.5$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	37
Şekil 4.12.	¹²⁸ Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 4.5$) model ile Z(4)-D modelinin temel durum bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	37
Şekil 4.13.	¹³⁰ Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 2.9$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	38
Şekil 4.14.	¹³⁰ Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 2.9$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	38
Şekil 4.15.	¹³² Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 1.52$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	39
Şekil 4.16.	¹³² Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 1.52$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	39
Şekil 4.17.	¹⁹² Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 7.9$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	40
Şekil 4.18.	¹⁹² Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 7.9$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	40
Şekil 4.19.	¹⁹⁴ Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 8.1$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	41

Şekil 4.20.	^{194}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 8.1$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	41
Şekil 4.21.	^{196}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 7.8$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	42
Şekil 4.22.	^{196}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 7.8$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	42
Şekil 4.23.	^{198}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.3$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	43
Şekil 4.24.	^{198}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.3$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	43
Şekil 4.25.	^{192}Os çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 \rightarrow \infty$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	44
Şekil 4.26.	^{192}Os çekirdeğinin deneysel verileri ile Z(4)-K ($\beta_0 \rightarrow \infty$) modeli ve Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması.....	44

TABLO LİSTESİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1. Bazı kritik nokta simetrisi için $R_{4/2}$ enerji oranları	8
Tablo 4.1. Farklı β_0 değerleri, Z(4)-K modelinin gsb için $R_{n,L}$ enerji oranları Z(4) model, Z(5) model, Z(4)-D model ve katı üç eksenli rotor model (RTR) sonuçları.....	31
Tablo 4.2. Uygun β_0 değerleri için Z(4)-K modelinin teorik tahminleri, $^{74,76}\text{Ge}$, $^{110-114}\text{Ru}$, $^{128-132}\text{Xe}$, $^{192-198}\text{Pt}$, ^{192}Os deneysel verileri ve Z-(4) modelin γ bandı enerji değerleri.....	45
Tablo 4.3. Uygun β_0 değerleri için Z(4)-K modelinin teorik tahminleri ve Z-(4) modelinin β_1 bandı enerji değerleri.....	47

1. GİRİŞ

Atom çekirdekleri denge durumunda şekillerine göre karakterize edilir. Bu şekiller birçok durumda kararlı çekirdeklere karşılık gelirken, sistemin oldukça kararsız bir yapıda olduğu ve iki farklı şekil arasında bir faz geçişine uğradığı durumlar da vardır. Burada ortaya çıkan problem, faz geçiş bölgesinde ve özellikle faz geçiş noktasında bulunan çekirdeklerin yapısının nasıl tanımlanacağıdır. Bu sorun, etkileşen boson modeli (IBM) adı verilen cebirsel model çerçevesinde araştırılmıştır (Iachello ve Arima, 1987; Iachello ve Levine, 1995). Bu yaklaşımda, farklı şekiller (fazlar), bazı G cebirsel yapıların dinamik simetrisine karşılık gelir (Iachello, 2001).

Dinamik simetriler, birçok fiziksel sistemin (çekirdekler, moleküller, atomik yapılar, vb) özelliklerini tanımlamak için yararlı bir araç sağlamıştır. Tanım olarak (Iachello, 1979), dinamik simetri, H Hamilton operatörünün bir $G \supset G' \supset G'' \supset \dots$ cebir zincirinin C_i Casimir operatörleri cinsinden yazılabildiği durumdur. En dikkat çekici örnekler, nükleer fizikteki etkileşen boson modelinin (Iachello ve Arima, 1987) dinamik simetrisi ve moleküler fizikteki vibron modelidir (Iachello ve Levine, 1995). Bu tip dinamik simetriler, sorunun cebirsel yapısını analiz ederek kolayca fark edilebilir. Cebir G 'yi tüm alt-cebir zincirlerine ayırarak, G 'nin olası tüm dinamik simetrisi bulunabilir. Etkileşen boson modelinde, örneğin, $G \equiv U(6)$ zincirde görünen ilk alt cebir $U(5)$, $SU(3)$, $SO(6)$ ile etiketlenen üç olası dinamik simetri vardır. Dinamik simetriler tam olarak çözülebilir problemlerle ilgilidir ve açık analitik formda gözlenebilirliğe ait tüm sonuçları üretirler. Bu nedenle, deneysel verilerin analizinde son derece yararlıdır ve önemli keşiflere yol açmıştır (Cizewski ve ark., 1978; Iachello, 2000).

Etkileşen boson modeli, nükleer kolektif uyarılmaların geometrik modellerin aksine, cebirsel nitelikte alternatif bir açıklama sağlar. Bu gerçekçi teorik model, düşük enerjili kolektif durumları ve çift-çift çekirdeğin çok sayıda elektromanyetik geçişlerini başarılı bir şekilde tanımlayabilmiştir. Etkileşen boson modelinin asıl modelinde (IBM1), çekirdekler, açısal momentum $L=0$ (s-bosonlar) veya açısal momentum $L=2$ (d-bosonlar) taşıyan bosonlardan oluşan sistemler olarak kabul edilir (Iachello ve Arima, 1987). Bosonların sayısı, değerlik fermiyonlarının sayısının yarısına $N=n/2$ eşit olduğu

bosonlar sistemi, tipik olarak iki cisim etkileşimlerine kadar olan bir Hamiltoniyen ile ifade edilir. $N=n/2$ boson sayısını korur ve dönmeye göre değişmezdir. s ve d bosonlarının simetrisi U(6) grup yapısındadır. Geometrik olarak dinamik simetrisi etkileşen boson modelinde U(5); küresel titreşime, SU(3); aksel simetrik rotasyona ve O(6); γ -kararsız (γ -soft, γ -bağımsız) rotasyona karşılık gelir (Kotb, 2016).

Atom çekirdeği, kendi bileşenlerinin proton ve nötron sayısının bir fonksiyonu olarak faz geçişleri sergilerler. Bu faz geçişleri her zaman termodinamik tipte değildirler, ancak bunun yerine denge şeklinde ve temel seviye ile düşük enerjili yapılar arasında kuantum faz geçişleridir. Bu durum faz geçiş noktalarında çekirdeklerin yapısını açıklayan 'kritik nokta simetrisi' kavramına odaklanan yeni bir araştırma alanına yol açtı (Casten, 2006). Iachello (2000, 2001, 2003) çekirdeklerin kritik nokta davranışlarını inceleyen çalışmasında, E(5), X(5) ve Y(5) adı verilen üç yeni dinamik simetriyi ortaya koydu. E(5), küresel vibratörden γ -kararsız (U(5) \leftrightarrow O(6)) şekillere geçişteki kritik noktayı, X(5), küresel vibratör ile aksel deforme (U(5) \leftrightarrow SU(3)) şekiller arasındaki kritik noktayı, Y(5) ise aksel deforme ile üç aksenli deforme şekiller arasındaki kritik noktayı tanımlamaktadır. Z(4) ve Z(5) modelleri ise aksel deforme oblate ile aksel deforme prolate ($\overline{SU(3)} \leftrightarrow SU(3)$) arasındaki kritik noktayı tanımlamaktadır, sırasıyla $\gamma = 30^\circ$ ve $\gamma \approx 30^\circ$ alınarak elde edilen çözümleridir.

Bohr Hamiltonyeninin tam ve yaklaşık olarak iki tip çözümü vardır. E(5) modeli, γ 'dan bağımsız potansiyeller için Bohr Hamiltonyeninin tam çözümü olarak elde edilir. Bohr diferansiyel denkleminde kullanılan potansiyel γ dan bağımsızdır ve β serbestlik derecesine bağlı terim ise sonsuz kare kuyu potansiyel olarak alınır. X(5) modeli, $\gamma \approx 0^\circ$ için yaklaşık bir çözüm olarak elde edilir. Bir diğer yaklaşık çözüm ise Z(5) (Bonatsos ve ark., 2004) denilen $\gamma \approx 30^\circ$ için elde edilir. Bütün bu durumlarda, beş serbestlik derecesi (kolektif değişkenler β , γ ve üç Euler açıları) dikkate alınır. Z(4) modeli (Bonatsos ve ark., 2005), Bohr Hamiltonyeninin $\gamma = 30^\circ$ için tam bir çözümüdür ve γ 'dan bağımsız ve sadece dört serbestlik derecesini (β ve Euler açıları) dikkate alınarak elde edilir.

İki farklı şekil-faz geçiş bölgesinde bulunan çekirdeklerin yapılarının araştırılması amacıyla değişik potansiyeller seçilerek Bohr Hamiltonyeninin tam ve yaklaşık analitik

çözümlerinin elde edildiği birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin; Mors (Boztosun ve ark., 2008), Kratzer (Fortunato ve Vitturi, 2004; Fortunato ve ark., 2006; Bonatsos ve ark., 2013), Coulomb (Fortunato ve Vitturi, 2004; Fortunato ve ark., 2006), Davidson (Fortunato ve ark., 2006; Bonatsos ve ark., 2013; Yigitoglu ve Bonatsos, 2011; Sobhani ve Hassanabadi, 2017; Yiğitoglu ve Gokbulut, 2018), Eckart (Naderi ve Hassanabadi, 2016), Manning-Rosen (Chabab ve ark., 2016), Killingbeck (Sobhani ve Hassanabadi, 2016) ve Sextic (Buganu ve Budaca, 2015) gibi çeşitli potansiyelleri kullanılmıştır.

Bu çalışmada $Z(4)$ modeli için Schrödinger denkleminin β -kısımında Kratzer potansiyeli seçilerek bir çözüm türetildi. Enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonu Nikiforov-Uvarov tarafından geliştirilen analitik bir yöntem ile elde edildi. Bu çözüm $Z(4)$ -K Model olarak isimlendirildi. Temel seviye bandı (gsb), β_1 bandı ve γ bandına ait enerji seviyeleri ve dalga fonksiyonu elde edildi. Temel seviye bandı için $Z(4)$ -K model tahminleri, $^{74,76}\text{G}$, $^{110-114}\text{Ru}$, $^{128-132}\text{Xe}$, $^{192-198}\text{Pt}$, ^{192}Os çekirdeklerine ait mevcut deneysel veriler, $Z(4)$ (Bonatsos, 2005), $Z(5)$ (Bonatsos ve ark., 2004), $Z(4)$ -D ($Z(4)$ -Davidson potansiyeli) (Yiğitoglu ve Gokbulut, 2018) ve $Z(4)$ -S ($Z(4)$ -Sextic potansiyeli) (Buganu ve Budaca, 2015) model tahminleri ile karşılaştırıldı.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Bohr Hamiltonyeni

Kolektif modun spektrum ve dalga fonksiyonunu tanımlayan Bohr Hamiltonyeni (Bohr, 1952) oluşturmak için Euler açıları ve kolektif koordinatları

$$q_1 = \theta_1 ; \quad q_2 = \theta_2 ; \quad q_3 = \theta_3 ; \quad q_4 = \beta ; \quad q_5 = \gamma \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır. Bohr Hamiltonyeni'deki kinetik enerji

$$T = \frac{B}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (2)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik 2.'de yer değiştirme karesi $ds^2 = g_{ij} dq_i dq_j$ 'dir. Hamiltonyeni, Pauli-Podolsky kuralı ile kuantum mekaniksel olarak elde edilir (Podolsky, 1928).

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j \Phi \quad (3)$$

Eşitlik 3.'deki simetrik matrisi Eşitlik 4.'deki gibi ifade edilir:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} \end{pmatrix} \quad (4)$$

g ve g^{ij} sırasıyla g_{ij} 'nin determinanı ve ters matrisidir (Sitenko ve Tartakovski, 1975).

$$g = \frac{J_1 J_2 J_3}{B^3} \beta^2 \sin^2 \theta_2 = 4\beta^8 \sin^2 3\gamma \sin^2 \theta_2 \quad (5)$$

buradaki eylemsizlik momentleri Eşitlik 6.'da gösterilmiştir.

$$J_k = 4B\beta^2 \sin^2\left(\gamma - k \frac{2\pi}{3}\right) \quad (6)$$

Son olarak, Eşitlik 3.'den, kolektif değişkenlerin herhangi bir potansiyel açısından Eşitlik 7.'deki Bohr Hamiltonyen denklemini elde edilir.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B_m} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (7)$$

burada B_m , kütle parametresidir. Esas deformasyon koordinatları β (küresel şekilden sapmayı ölçen deformasyon koordinatı), γ (eksenel simetriden sapmanın bir ölçüsü) ve \hat{Q}_k ($k=1,2,3$) gerçek yapı içindeki açısal momentumun bileşenleri olmak üzere Bohr Hamiltonyen beş boyutludur.

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_x = -i \left(-\frac{\cos\theta_3}{\sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \sin\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \cot\theta_2 \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right), \quad (8)$$

$$\hat{Q}_2 = \hat{Q}_y = -i \left(-\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \cot\theta_2 \sin\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right), \quad (9)$$

$$\hat{Q}_3 = \hat{Q}_z = -i \frac{\partial}{\partial \theta_3}. \quad (10)$$

Kolektif dalga fonksiyonu;

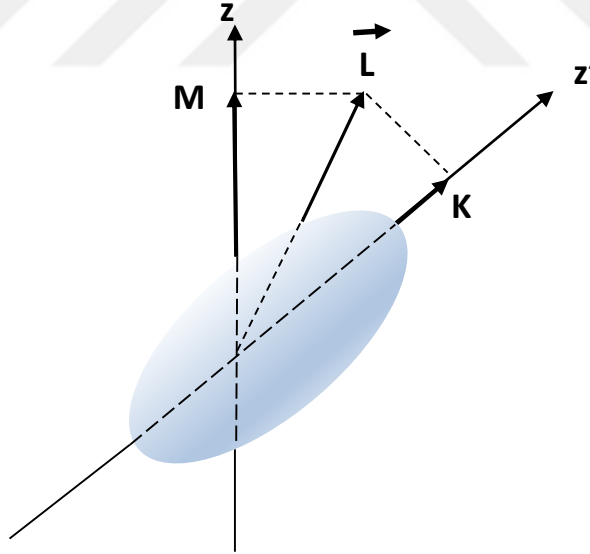
$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = f(\beta) \Phi_{M,K}^L(\gamma, \theta_i) \quad (11)$$

şeklinde yazılır.

$\Phi_{M,K}^L$, Wigner fonksiyonlarına $D_{M,K}^L(\theta_i)$ göre Eşitlik 12.'deki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \Phi_{M,K}^{L,\tau}(\gamma, \theta_i) = & \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K,0})}} g_K^{L,\tau}(\gamma) [D_{M,K}^L(\theta_i) \\ & + (-1)^L D_{M,-K}^L(\theta_i)] \end{aligned} \quad (12)$$

burada θ_i ($i=1,2,3$) Euler açıları, $D_{M,K}^L(\theta_i)$ Euler açılarının Wigner fonksiyonları, L açısal momentum kuantum sayısıdır. M ve K , sırasıyla z eksenini üzerindeki laboratuvar sabiti, z' eksenini üzerindeki cisim sabiti ve kuantum sayısı L 'nin izdüşümleridir (bkz. Şekil 2.1).



Şekil 2.1. z eksenini üzerindeki laboratuvar sabiti ve z' eksenini üzerindeki cisim-sabitinin toplam açısal momentum vektörünün iz düşümleri

Normalleştirme şartı ve hacim elemanı;

$$1 = \int_{\beta=0}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\pi/3} \int_{\theta_1=0}^{2\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} \Psi^*(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \Psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) dv \quad (13)$$

$$dv = \beta^4 d\beta |\sin 3\gamma| d\gamma d\theta_1 \sin\theta_2 d\theta_2 d\theta_3$$

şeklinde verilir.

2.2 Kritik Nokta Simetrileri

Kolektif çift-çift çekirdeğin üç tane idealleştirilmiş, bilinen ve yaygın olarak kullanılan durumları vardır. Bu durumlar harmonik vibratör (Scharff-Godhaber ve Weneser, 1955), deforme simetrik rotor (Bohr ve Mottelson, 1953) ve γ -kararsız (Wilets ve Jean, 1956)'dur. Nükleer yapının bu durumları bir simetri üçgenin köşeleri ile ifade edilir. Bunlar Etkileşen boson yaklaşım modelinde (Iachello ve Arima, 1987) sırasıyla U(5), SU(3) ve O(6) dinamik simetrileri terimlerine karşılık gelir. Bu simetrilerin her biri farklı karakteristik özelliklere sahiptir. Bohr Hamiltonyen tarafından elde edilen spektrumda $R_{4/2}$ enerji oranları bu karakteristik özelliklerden biridir ve her bir çekirdeği tanımlamak için ayırt edici bir özelliktir. Açısal momentum sayısı 4 olan enerji seviyesinin, açısal momentum sayısı 2 olan enerji seviyesine oranı $R_{4/2}$ enerji oranını verir (bkz. Eşitlik 14.).

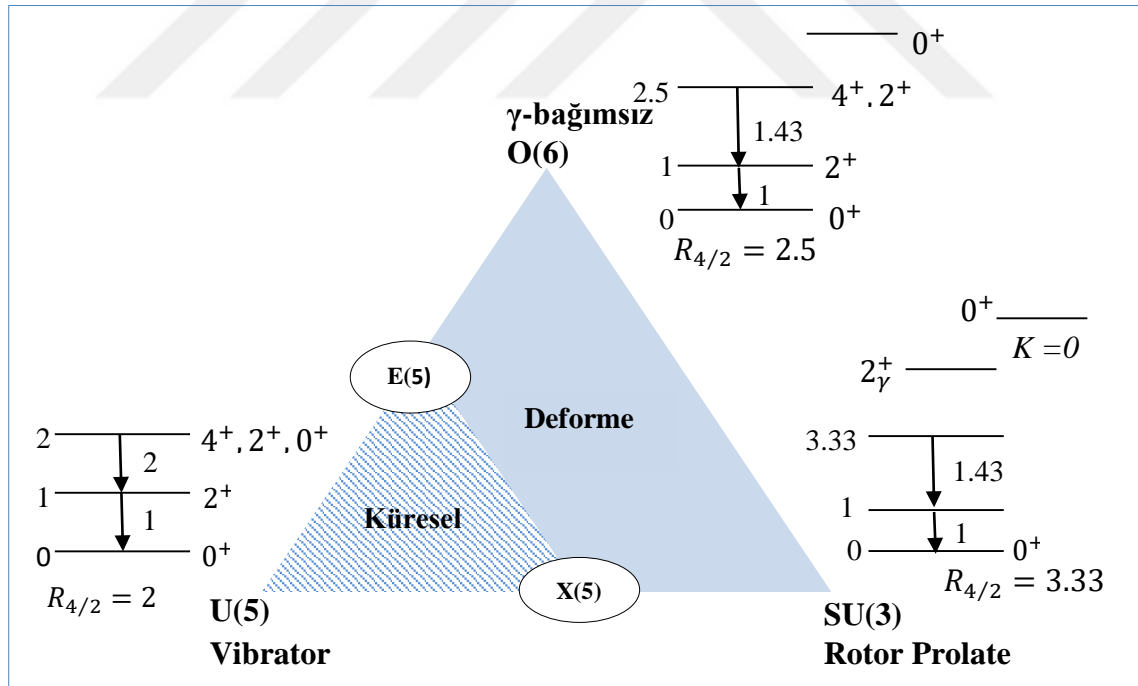
$$R_{4/2} = \frac{E_4 - E_0}{E_2 - E_0} \quad (14)$$

Kolektif model çerçevesinde $R_{4/2} = 2.0; 2.5; 3.33$ enerji oranları sırasıyla harmonik vibratör, γ -kararsız rotor ve deforme olmuş bir aksenal rotor yapılarına karşılık gelir (Casten, 2006). $R_{4/2} = 2.0$ için, kapalı kabuk etrafındaki çekirdekler neredeyse küresel bir şekle ve yüzey titreşimlerine sahiptir. $R_{4/2} = 2.5$ için, çekirdek şekli sürekli prolate ve oblate arasında değişmektedir. Kararlı bir şeklin olmaması nedeniyle, potansiyel γ 'dan bağımsızdır. Herhangi bir zamanda, üç eksenin uzunlukları farklıdır. $R_{4/2} = 3.33$ için, kapalı kabuk konfigürasyon uzak nükleonların sayısına sahip olan çekirdekleri kalıcı şekilde prolate veya oblate deforme şekle sahiptir. Titreşime ek olarak, simetri eksenine dik olarak dönerler.

Tablo 2.1. Bazı kritik nokta simetrisi için $R_{4/2}$ enerji oranları

Model	Potansiyel	Potansiyel	Geçişler	Tahminler	Kaynak
	β	γ		$R_{4/2}$	
E(5)	$\beta^{2n} \rightarrow \infty$	Bağımsız	Kritik Nokta	2.19	Iachello, 2000
X(5)	$\beta^{2n} \rightarrow \infty$	Harmonik osilatör min $\gamma=0^\circ$	Kritik Nokta	2.91	Iachello, 2001
Z(5)	Sonsuz Kuyu Potansiyeli	Harmonik osilatör min $\gamma=30^\circ$	Prolate-oblata	2.35	Bonatsos ve ark., 2004
Z(4)	Sonsuz Kuyu Potansiyeli	$\gamma=30^\circ$	Vibrator- γ - kararsız	2.23	Bonatsos ve ark., 2005

Bu üç sınır Şekil 2.2'deki Casten üçgeninin kenarlarını oluşturmaktadır. Sınırlar arasında gözlenen şekil faz geçişleri, basınç, sıcaklık vb. gibi sürekli kontrol parametrelerine bağlı olağan faz geçişlerinin aksine kontrol parametresi olarak nükleon sayılarına bağlı kuantum faz geçişleridir.



Şekil 2.2. Casten üçgeni (Casten, 2006)

İki Kritik Nokta Simetri modeli vardır. Üçgenin $U(5) \leftrightarrow SU(3)$ bacağı boyunca meydana gelen birinci dereceden faz geçişi için X(5) kritik nokta simetrisi ve $U(5) \leftrightarrow O(6)$ bacağı boyunca meydana gelen ikinci dereceden bir faz geçişi için E(5) kritik nokta simetrisidir

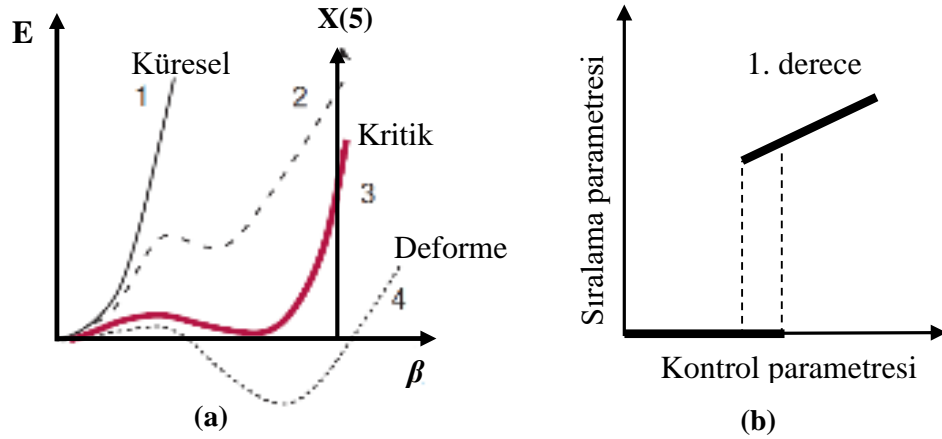
(bkz. Şekil 2.2). Böylece üçgeni, küresel simetri ve deforme olmuş simetri olmak üzere iki bölgeye ayırır. Sistemin faz geçiş bölgesindeki ve özellikle kritik noktalardaki özellikleri, geometrik bir potansiyel $V(\beta, \gamma)$ 'nin farklı seçimleri için Bohr Hamiltonyen analitik çözümleridir (Casten, 2006).

E(5) modeli, γ -bağımsız ($\gamma = 0^\circ$) potansiyeller için Bohr Hamiltonyenin tam çözümü olarak elde edilirken; X(5) modeli ise, $\gamma \approx 0^\circ$ için Bohr Hamiltonyenin yaklaşık bir çözümüne karşılık gelir. $\gamma \approx 30^\circ$ alındığında prolate yapı ile oblate yapı arasında şekil-faz geçiş bölgesindeki kritik nokta Z(5) (Bonatsos ve ark., 2004) olarak isimlendirilen diğer bir yaklaşık çözümde elde edilmiştir. Bütün bu durumlarda, beş serbestlik derecesi (kolektif değişkenler β , γ ve üç Euler açıları) dikkate alınır. $\gamma = 30^\circ$ olan ve Z(4) olarak isimlendirilen Bohr Hamiltonyenin tam çözümü elde edilir ve sadece dört serbestlik derecesi (β ve üç Euler açıları) dikkate alınır (Bonatsos ve ark., 2005).

2.2.1 X(5) Kritik Nokta Simetrisi

X(5), küresel vibratörden aksel rotora geçişin gerçekleştiği yol üstündeki kritik noktaya karşılık gelir. Potansiyelin minimum (min) ($\gamma = 0^\circ$) olduğu durumda birinci dereceden faz geçişi görülmektedir. Birinci dereceden faz geçişi, küresel ve deforme fazları bir arada sergiler ve sıralama parametresi süreksizdir. İki minimum değeri vardır. Faz geçişinin kritik noktası, potansiyeldeki bir minimum değerden diğer minimum değerine geçtiğinde ortaya çıkar (Casten, 2006).

Şekil 2.3a'da görüldüğü üzere; birinci derece faz geçişi için, birlikte var olma, deforme olmuş bir minimum uyarılmış bir konfigürasyon olarak (eğri2) ortaya çıkar. Değerlik nükleon sayısı artarsa enerji düşmeye başlar ve deforme denge durumu (eğri 4) oluşur. Minimumların dejenere olduğu kritik noktayı (eğri 3) gösterir ve sonsuz kare kuyu potansiyeline benzetilir. Birlikte varolan şekillerin dejenerasyon (bozunma) noktası (eğri 3) kritik bir noktadır. Kritik noktada (eğri 3) deformasyonun kesintili olarak sıfırdan sonsuza değişir. Daha sonra (eğri 4), çekirdek deforme olur (Casten, 2006).



Şekil 2.3. a. Birinci derece faz geçişi için kritik noktadaki enerji yüzeylerini gösterir (Casten, 2009). b. Birinci derece faz geçişini gösterir (Casten, 2007).

Şekil 2.3a'da görüldüğü üzere; birinci derece faz geçişi için, birlikte var olma, deforme olmuş bir minimum uyarılmış bir konfigürasyon olarak (eğri2) ortaya çıkar. Değerlik nükleon sayısı artarsa enerji düşmeye başlar ve deforme denge durumu (eğri 4) oluşur. Minimumların dejenere olduğu kritik noktayı (eğri 3) gösterir ve sonsuz kare kuyu

potansiyeline benzetilir. Birlikte varolan şekillerin dejenerasyon (bozunma) noktası (eğri 3) kritik bir noktadır. Kritik noktada (eğri 3) deformasyonun kesintili olarak sıfırdan sonsuza değişir. Daha sonra (eğri 4), çekirdek deforme olur (Casten, 2006).

Ehrenfest koşuluna göre, kritik noktada birinci dereceden faz geçişi ortaya çıkar çünkü kontrol parametresine göre sıralama parametresinin birinci türevi süresizdir. Faz geçişinin meydana geldiği noktada bir bariyer vardır. Bunun sonucu olarak geçiş aniden belirir. Bu durum Şekil 2.3b’de görülmektedir.

Şekil 2.3a’da eğriler kritik noktada tipik potansiyel enerji yüzeyleri verir. Genel olarak, bu potansiyeller için Schrödinger denklemini analitik olarak çözmek mümkün değildir. Bununla birlikte; Iachello (2001), analitik çözümler üreten bir sadeleştirme önerdi (Casten, 2009).

Bohr Hamiltonyen diferansiyel denkleminin analitik çözümü ile X(5) dinamik simetrisine sahip çekirdeklerin yapısı elde edilebilir. Eşitlik 7.’deki Bohr Hamiltonyen denklemini Bohr (1952)’un kesin çözümlerini desteklemez. X(5) dinamik simetrisi için çözüm aşağıdaki gibidir.

Eşitlik 7.’de potansiyel $\gamma = 0^\circ$ için minimumdur ve dalga fonksiyonu

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \varphi_{M,K}^L(\beta, \gamma) D_{M,K}^L(\theta_i) \quad (15)$$

şeklinde alınır. Burada θ_i ($i=1, 2, 3$) Euler açıları, $D_{M,K}^L(\theta_i)$ Euler açılarının Wigner fonksiyonudur. Eşitlik 7.’de son terimi $\gamma = 0^\circ$ alınarak

$$\sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)} \cong \frac{4}{3} \frac{(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)}{L^2} + Q_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{4}{3} \right) \quad (16)$$

şeklinde yazılabilir. İndirgenmiş enerjileri ve potansiyelleri sırasıyla $\varepsilon = \frac{2B_m}{\hbar^2} E$, $u = \frac{2B_m}{\hbar^2} V$ değişkenleri ile tanımlanırsa, Hamiltonyen Eşitlik 17.deki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4\beta^2} \left[\frac{4}{3} L(L+1) + K^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \right] + u(\beta, \gamma) \right\} \varphi_K^L(\beta, \gamma) \\
& = \varepsilon \varphi_K^L(\beta, \gamma)
\end{aligned} \quad (17)$$

Şimdi $u(\beta, \gamma) = u(\beta) + u(\gamma)$ olduğu durumda Eşitlik 17.'de $\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$ yazılarak denklem yaklaşık olarak değişkenlerine aşağıdaki gibi ayrılabilir.

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} \frac{4}{3} L(L+1) + u(\beta) \right] \xi_L(\beta) = \varepsilon_\beta \xi_L(\beta) \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\langle \beta^2 \rangle} K^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + u(\gamma) \right] \eta_K(\gamma) \\
& = \varepsilon_\gamma \eta_K(\gamma)
\end{aligned} \quad (19)$$

Burada, $\langle \beta^2 \rangle, \beta^2$, nin $\xi(\beta)$ üzerinden ortalamasıdır. Potansiyelin, β değişkeni için kare kuyu ve γ değişkeni için harmonik osilatör olduğunu varsayalım. Kare kuyu potansiyeli için; $u(\beta) = 0$ için $\beta \leq \beta_W$ ve $u(\beta) = \infty$ için $\beta > \beta_W$ alınır.

$\tilde{\xi}(\beta) = \beta^{3/2} \xi(\beta)$, $\varepsilon_\beta = k_\beta^2$ ve $z = \beta k_\beta$ dönüşümleri yapılarak aşağıdaki Bessel denklemi elde edilir.

$$\tilde{\xi}'' + \frac{\tilde{\xi}'}{z} + \left[1 - \frac{v^2}{z^2} \right] \tilde{\xi} = 0; \quad \tilde{\xi}(\beta_W) = 0. \quad (20)$$

Burada

$$v = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4} \right)^{1/2} \quad (21)$$

şeklinde ifade edilir. Sınır koşulu özdeğer ve özfonksiyonlarını belirler. Buna göre;

$$\varepsilon_{\beta,s,L} = (k_{s,L})^2 \quad \xi_{s,L}(\beta) = c_{s,L} \beta^{-3/2} J_\nu(k_{s,L} \beta) \quad k_{s,L} = \frac{x_{s,L}}{\beta_W} \quad (22)$$

burada $x_{s,L}, J_\nu(z)$ ' nin s sıfır noktasıdır ve L açılal momentumdur.

γ ' nın kuvvetinde genişleme yapıldığında γ değişkenindeki denklem, Eşitlik 19., iki boyutlu bir harmonik osilatörün radyal denklemi haline gelir.

$$\left[-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{(K/2)^2}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{1}{\gamma^2} + (3a)^2 \frac{\gamma^2}{2} \right] \eta_K(\gamma) = \tilde{\varepsilon}_\gamma \eta_K(\gamma) \quad (23)$$

Burada;

$$\tilde{\varepsilon}_\gamma = \varepsilon_\gamma + \frac{(K/2)^2}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{4}{3}$$

Eşitlik 23. çözüldüğünde;

$$\eta_{n_\gamma, K}(\gamma) = c_{n,K} \gamma^{|K/2|} e^{-(3a)\gamma^2/2} L_n^K(3a\gamma^2) \quad (24)$$

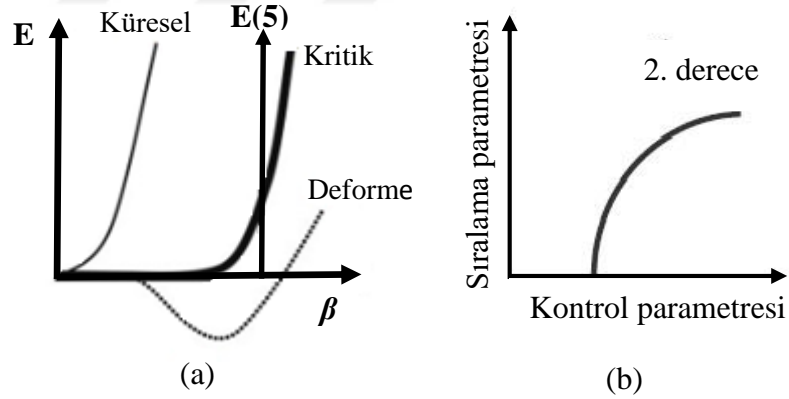
$$n = \left(\frac{n_\gamma - K}{2} \right)$$

Burada $n_\gamma=0,1,2,\dots$ ve L_n^K , Laguerre polinomudur. a parametresi harmonik osilatör potansiyelinin kuvveti veya genliğidir (Iachello, 2001; Fortunato, 2005).

2.2.2 E(5) Kritik Nokta Simetrisi

Küresel vibratör ile γ -kararsız çekirdek yapısı arasında yer alan ve kritik noktaya karşılık gelen çözüm E(5) olarak isimlendirilir. Bu bölgede ikinci dereceden faz geçişi gözlenir. Burada potansiyel γ 'dan ($V(\gamma) = \text{sabit}$) bağımsızdır yani $V(\beta, \gamma) = U(\beta)$ (Casten, 2006). E(5) kritik nokta simetrisinin analitik çözümleri sadece β değişkenine bağlı sonsuz kuyu potansiyeli vasıtasıyla elde edilir. Enerji oranı $R_{4/2} = 2.19$ 'dir.

İkinci derece faz geçişi, iki fazın bir arada bulunma durumu olmaksızın, β 'nin beklenen değerinin sürekli olduğu, potansiyelde iki minimum değeri oluşmadığı ve deformasyonun düzgün bir şekilde ortaya çıktığı durumda meydana gelir. Şekil 2.4a değerlik nükleonların farklı sayıları için üç eğri gösterir. Biri küresel minimuma ve diğeri (noktalı eğri) faz geçişinden sonra deforme olmuş minimuma sahiptir. Ortadaki eğri kritik noktadır. Hiçbir faz birlikteliği yoktur. Bu tür geçişler γ kararsız yapı ile küresel vibratör yapı arasındaki geçişlerde gözlenir (Casten, 2009).



Şekil 2.4.a. İkinci derece faz geçişi için kritik noktadaki enerji yüzeylerinin gösterimi (Casten, 2009). b. İkinci derece faz geçişini gösterir (Casten, 2007)

Ehrenfest koşuluna göre, kritik noktada ikinci dereceden faz geçişi ortaya çıkar. Şekil 2.4b'de görüldüğü üzere sıralama parametresinin kontrol parametresine göre ikinci türevi süreksizdir.

2.2.3 Z(5) Kritik Nokta Simetrisi

Z(5) (Bonatsos ve ark., 2004) kritik nokta simetrisini oluşturmak için izlenen yol aşağıdaki gibidir.

- 1) Bohr denklemi $\gamma = 30^\circ$ alınarak değişkinlerine ayrılır. $\gamma = 0^\circ$ (prolate)'den $\gamma = 60^\circ$ (oblate)'e geçiş göz önüne alındığında, üç eksenli bölgeden ($0^\circ < \gamma < 60^\circ$) geçmesi beklenir ve $\gamma = 30^\circ$ bu geçişin tam ortasında bulunur. Bu varsayımı destekleyen deneysel kanıtlar vardır (Gizon ve ark., 1978).
- 2) K kuantum sayısı $\gamma = 30^\circ$ için (açısal momentumun cisim-sabit \hat{z}' eksenine izdüşümü) artık iyi bir kuantum sayısı değildir. Fakat α kuantum sayısı, cisim-sabit \hat{x}' eksenindeki izdüşümü üç eksenli rotor çalışmasında bulunmuştur (Davydov ve Filippov, 1958; Davydov ve Rostovsky, 1959).
- 3) β değişkeninde bir sonsuz kuyu potansiyeli ve γ değişkeninde min $\gamma = 30^\circ$ olan bir harmonik osilatör potansiyeli varsayılarak, Z(5) modeli elde edilir.

Bu üç adımla ilgili aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

- i) $\gamma = 30^\circ$ 'yi kullanmak demek katı üç eksenli şekillerin tercih edildiği anlamına gelmez. Aslında γ -yassı potansiyele sahip (Wilets ve Jean, 1956) bir çekirdek (Zamfir ve Casten, 1991) (prolate-oblate şekil faz geçişinden beklendiği gibi) γ üzerinde $\gamma = 0^\circ$ ile $\gamma = 60^\circ$ arasında ortalama $\gamma_{ort} = 30^\circ$ değerine sahip olan düzgün bir salınım yapar. Bu nedenle karşılaştırılması gereken üç-eksenli yapıya karşılık gelen ($\gamma = 30^\circ$) değerler ile bu salınımdan $\gamma = 30^\circ$ için elde edilen değerlerdir. Ayrıca, büyük katı üç eksenli modellerin birçok tahminlerinin, γ -dalgalanmalarını içeren γ yumuşak modellere ait tahminlere çok yakın olduğu bilinmektedir ve $\gamma_{katı}$ değerinin γ_{rms} değerlerine eşit olması bu benzerliklerden biridir. Ek olarak, γ -kararsız ve $\gamma = 30^\circ$ 'deki katı üç eksenlilik arasındaki eş değerlik, iz düşüm tekniklerini kullanarak etkileşen boson modelindeki O(6) sınırına göre gösterilir. Bunlar göz önüne

alındığında, Z(5) tahminlerinin, O(6) simetrisinin iyi örnekleri olduğu bilinen ¹⁹⁴Pt gibi çekirdekleri açıklaması şaşırtıcı değildir.

- ii) β 'ya bağlı kısım bir sonsuz kuyu potansiyel alınması ($\gamma, 30^\circ$ 'de sabit iken), üç eksenli vibratörden üç eksenli rotor geçişe karşılık gelir. Aynı şekilde X(5) modelindeki β sonsuz kuyu potansiyeli alınmasıyla ($\gamma = 0^\circ$ varsayılır) bir vibratörden (U(5)) bir prolate rotoruna (SU(3)) geçişe karşılık gelir.
- iii) Yukarıdakiler göz önüne alındığında; Z(5) modelinin prolate-oblate şekil faz geçişi daha önceki çalışmalarla uyumlu sonuçlar vermesi şaşırtıcı değildir. Daha önceki çalışmalarda, prolate-oblate kritik noktasının geçişini sağlayan γ -yumuşak havuzu $\beta \neq 0$ bölgesinde $\gamma = 0^\circ$ ile $\gamma = 60^\circ$ arasında yani $\beta = 0$ vibrasyonel bölgeden uzakta hareket ettirilir. Genişletilmiş Casten üçgeninde SU(3) (prolate) yapıdan $\overline{SU(3)}$ (oblate) yapıya doğru hareket ettiğinde kritik nokta olarak O(6) belirlenir. Z(5) modelinde, aynı havuz $\gamma = 30^\circ$ 'ye sabitlenerek üç eksenli vibratörden ($\beta = 0$ 'a yakın) üç eksenli rotor'a ($\beta=0$ 'dan uzak) hareket ettirilerek farklı şekillere geçilir.

2.2.4 Z(4) Kritik Nokta Simetrisi

Davydov ve Chaban'ın modelinde (Davydov, 1960) çekirdeğin γ -titreşimlerine göre katı olduğu varsayılmaktadır. Hamiltonyen dört değişkene (β , θ_i) bağlıdır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B_m} \left[\frac{1}{\beta^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)} \right] + U(\beta) \quad (25)$$

burada β ve γ kolektif koordinatlar (Bohr, 1952), Q_k ($k = 1, 2, 3$) açısal momentumun bileşenleri ve B_m kütle parametresidir. Bu Hamiltonyen de γ bir parametre olarak davranır yani değişken olarak davranmaz. Eşitlik 25.'de kinetik enerji terimi, E(5) ve X(5) modellerinde görünenden farklıdır, çünkü her durumda serbestlik derecelerinin sayısı farklıdır.

İndirgenmiş enerjileri $\epsilon = (2B_m/\hbar^2)E$, indirgenmiş potansiyelleri $u = (2B_m/\hbar^2)U$ ve dalga fonksiyonu $\Psi(\beta, \theta_i) = \phi(\beta)\psi(\theta_i)$, burada θ_i ($i=1,2,3$ üç Euler açıları), düşünüldüğünde Eşitlik 25. değişkenlerine ayrılarak aşağıdaki gibi iki denklem oluşturur.

$$\left[\frac{1}{\beta^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\lambda}{\beta^2} + (\epsilon - u(\beta)) \right] \phi(\beta) = 0 \quad (26)$$

$$\left[\frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)} - \lambda \right] \psi(\theta_i) = 0 \quad (27)$$

Eşitlik 27.'de $\gamma = \pi/6$ olarak alındığında;

$$\left[\frac{1}{4} (Q_1^2 + 4Q_2^2 + 4Q_3^2) - \lambda \right] \psi(\theta_i) = 0 \quad (28)$$

olarak yazılır. Eşitlik 28. ilk önce Meyer-ter-Vehn (1975) tarafından çözülmüştür. Dalga fonksiyonu Eşitlik 29. ve λ' nın değeri Eşitlik 30. ile ifade edilir.

$$\begin{aligned}\psi(\theta_i) &= \psi_{\mu,\alpha}^L(\theta_i) \\ &= \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} \times \left[D_{\mu,\alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\alpha}^{(L)}(\theta_i) \right]\end{aligned}\quad (29)$$

$$\lambda = \lambda_{L,\alpha} = L(L+1) - \frac{3}{4}\alpha^2 \quad (30)$$

burada $D(\theta_i)$, Euler açılarının Wigner fonksiyonları, L açısal momentumun özdeğerleridir. μ , açısal momentumun laboratuvar sabit \hat{z} -ekseni üzerine iz düşümüdür. α açısal momentumun laboratuvar cisim-sabit \hat{x}' -eksenine olan izdüşümüdür. α değerleri çift tam sayı olmalıdır (Meyer-ter-Vehn, 1975).

Açısal momentumun \hat{x}' -ekseni üzerindeki iz düşümü α yerine $n_w = L - a$ Wobbling kuantum sayısının kullanımı oldukça yaygındır. Burada $n_w = 0$ temel seviye bandına karşılık gelirken ($n_w > 0$), $L = n_w, n_w + 2, n_w + 4, \dots$ bir dizi uyarılmış enerji bandlarını ifade eder.

Radyal olan Eşitlik 26. sonsuz kare kuyu potansiyeli ($u(\beta) = 0$ için $\beta \leq \beta_w$, $u(\beta) = \infty$ için $\beta > \beta_w$) olması durumunda tam olarak çözülebilir. $\emptyset(\beta) = \beta^{-1}f(\beta)$ dönüşümü kullanıldığında Eşitlik 26. Bessel denklemi elde edilir.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \left(\epsilon - \frac{\nu^2}{\beta^2} \right) \right] f(\beta) = 0 \quad (31)$$

Burada;

$$\begin{aligned}
v = \sqrt{\lambda + 1} &= \sqrt{L(L + 1) - \frac{3}{4}\alpha^2 + 1} \\
&= \frac{\sqrt{L(L + 4) + 3n_w(2L - n_w) + 4}}{2}
\end{aligned} \tag{32}$$

Sınır koşulu $f(\beta_W) = 0$, enerji spektrumunu belirler,

$$\epsilon_{\beta;s,v} = \epsilon_{\beta;s,n_w,L} = (k_{s,v})^2, \quad k_{s,v} = \frac{x_{s,v}}{\beta_W} \tag{33}$$

elde edilir. Burada $x_{s,v}, J_\nu(z)$ Bessel fonksiyonunun, s 'inci kökünü temsil eder. Enerji öz fonksiyonları ise;

$$\phi(\beta) = \phi_{s,v}(\beta) = \phi_{s,n_w,L}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{c}}\beta^{-1}J_\nu(k_{s,v}\beta), \quad c = \frac{\beta_W^2}{2}J_{\nu+1}^2(x_{s,v}) \tag{34}$$

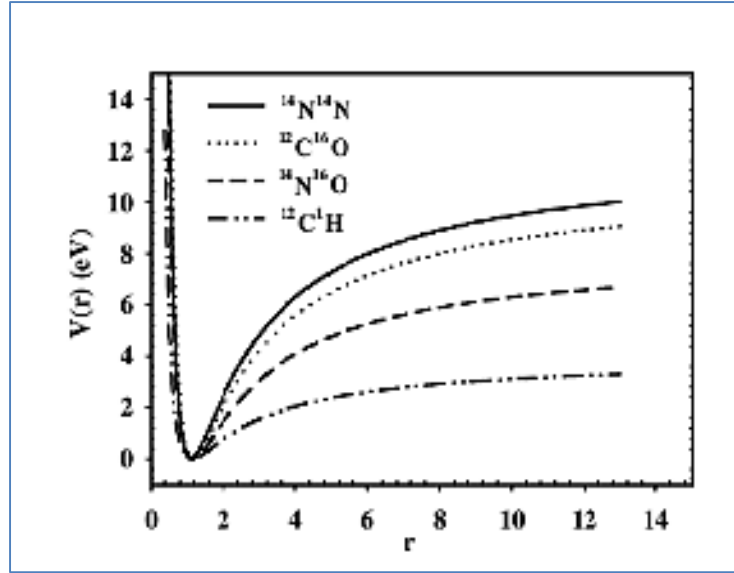
olarak yazılır. Burada c normalleştirme katsayısıdır ve $\int_0^{\beta_W} \beta^3 \phi^2(\beta) d\beta = 1$ koşuluna bağlı olarak belirlenir. Burada kullanılan simgeler Iachello (2001) ile aynı tutulmuş ve enerji simgeleri için $E_{s,n_w,L}$ kullanılmıştır. Temel seviye bandı için $s = 1, n_w = 0$ 'a karşılık gelir (Bonatsos, 2005).

2.3 Kratzer Potansiyeli

Kratzer potansiyeli (Kratzer, 1920), kuantum mekaniği tarihinde önemli bir rol oynamıştır. Şimdiye kadar, moleküler yapı ve etkileşimleri tanımlamak için yaygın olarak kullanılmıştır (Le Roy ve Bernstein, 1970). Kratzer potansiyeli;

$$V(\beta) = -2D_e \left(\frac{\beta_0}{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \right) \quad (35)$$

olarak tanımlanır. Burada D_e ayrışma enerjisidir ve β_0 , internükleer ayrışma dengesidir. Bu potansiyelin şekli birkaç farklı molekül için Şekil 2.5’de gösterilmiştir. Kratzer potansiyeli hem itici hem de çekici uzun erimli bir kısım içerir Bu parçaların üst üste binmesi etkili bir potansiyel boşluk oluşturur. Bu potansiyel boşluk formunun doğru titreşim ve dönme enerjisi özdeğerleri için çok önemlidir. Kratzer potansiyeli için, β sıfıra gittiğinde, internükleer itme sebebi ile β sıfır gittiğinde, $V(\beta)$ sonsuza gider, yani molekül ayrışır (Bayrak, 2007).



Şekil 2.5. Farklı iki atomlu moleküller için Kratzer potansiyelinin şekli ($r=\beta$) (Bekdemir, 2006)

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Nikiforov-Uvarov Yöntemi

3.1.1 Standart Nikiforov-Uvarov Yöntemi

Nikiforov-Uvarov (NU) yöntemi özel ortogonal fonksiyonlar vasıtasıyla hipergeometrik tip ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerine dayanmaktadır (Szegő, 1959). Belirli türden potansiyeller için göreceli olmayan Schrödinger denkleminin tam bir çözümünü sağlamaktadır. Verilen bir potansiyel için, küresel koordinatlarda Schrödinger denklemi veya göreceli olmayan Schrödinger denklemine uygun bir koordinat dönüşümü $s = s(r)$ ile birlikte genelleştirilmiş hipergeometrik bir denkleme indirgenir. Ana denklem aşağıdaki gibi yazılır (Nikiforov ve Uvarov, 1988).

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0 \quad (36)$$

burada $\sigma(s)$ ve $\tilde{\sigma}(s)$ ikinci dereceden polinomlardır, $\tilde{\tau}(s)$ birinci dereceden polinomdur ve $\psi(s)$ hipergeometrik tipte bir fonksiyondur.

Eşitlik 36.'nın özel çözümünü bulmak için $\psi(s) = \phi(s)y(s)$ dönüşümü kullanılarak aşağıdaki gibi hipergeometrik bir denklem elde edilir.

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \zeta y(s) = 0 \quad (37)$$

burada;

$$\sigma(s) = \pi(s) \frac{\phi(s)}{\phi'(s)} \quad (38)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad (39)$$

olarak verilir. $\tau(s)$ 'nin türevi negatif olmalıdır. ζ sabit bir parametresi ve π fonksiyonu aşağıdaki denklemlerde görüldüğü gibi tanımlanır.

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tau(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tau(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad (40)$$

$$k = \zeta - \pi'(s) \quad (41)$$

$\pi(s)$ en fazla birinci dereceden bir polinom olmalıdır, Eşitlik 40.'da karekök işareti altındaki ifade birinci dereceden bir polinomun karesi olacak şekilde düzenlenebilir. Bu sadece diskriminantı sıfır ise mümkündür. Bu durumda k için bir denklem elde edilir. Bu denklemin çözümünden sonra elde edilen k değerleri Eşitlik 41.'de yerine yazılırsa ζ değeri bulunur. Schrödinger denklemi için enerji özdeğer denklemi

$$\zeta = \zeta_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s), \quad n = 0,1,2, \dots \quad (42)$$

bulunur. Eşitlik 41. ve Eşitlik 42. karşılaştırılırsa enerji özdeğerleri elde edilir.

Hipergeometrik tipte bir fonksiyon olan $y(s)$ 'nin tüm çözümleri Rodrigues bağıntısı ile verilir.

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)] \quad (43)$$

B_n , normalleştirme sabitidir ve $\rho(s)$ ağırlık fonksiyonudur (Bekdemir, 2012).

3.1.2 Parametrik Standart Nikiforov-Uvarov Yöntemi

Aşağıdaki denklem, farklı potansiyeller ile elde edilebilen Schrödinger denkleminin genel bir şeklidir.

$$\frac{\partial^2 \phi(s)}{\partial s^2} + \frac{c_1 - c_2 s}{s(1 - c_3 s)} \frac{\partial \phi(s)}{\partial s} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{[s(1 - c_3 s)]^2} \phi(s) = 0 \quad (44)$$

Bunu aşağıdaki gibi çözebiliriz. Eşitlik 44.'ü, Eşitlik 36. ile karşılaştırdığımızda

$$\tilde{t} = c_1 - c_1 s, \quad \sigma = s(1 - c_3 s), \quad \tilde{\sigma} = -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \quad (45)$$

elde edilir. Bunları Eşitlik 40.'da yerine konursa;

$$\pi = c_4 + c_5 s \pm \sqrt{(c_6 - kc_3)s^2 + (c_7 + k)s + c_8} \quad (46)$$

elde edilir. Burada;

$$c_4 = \frac{1}{2}(1 - c_1) \quad (47)$$

$$c_5 = \frac{1}{2}(c_2 - 2c_3) \quad (48)$$

$$c_6 = (c_5^2 + \xi_1) \quad (49)$$

$$c_7 = (2c_4 c_5 - \xi_2) \quad (50)$$

$$c_8 = (c_4^2 + \xi_3) \quad (51)$$

Eşitlik 46.'da karekök altındaki fonksiyonun Nikiforov-Uvarov yöntemine göre bir polinomun karesi olmalıdır.

$$k_{1,2} = -(c_7 + 2c_3c_8) \pm \sqrt{c_8c_9} \quad (52)$$

burada;

$$c_9 = (c_3c_7 + c_3^2c_8 + c_6) \quad (53)$$

tanımlarız. Her k değeri için aşağıdaki π 'ler elde edilmiştir.

$$k = -(c_7 + 2c_3c_8) - \sqrt{c_8c_9} \quad (54)$$

$$\pi = c_4 + c_5s - [(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8})s - \sqrt{c_8}] \quad (55)$$

olur. Aynı k için, Eşitlik 39., Eşitlik 45. ve Eşitlik 46.'dan

$$\tau = c_1 + 2c_4 - (c_2 - 2c_5)s - 2[(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8})s - \sqrt{c_8}] \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \tau' &= -(c_2 - 2c_5) - 2(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}) \\ &= -2c_3 - 2(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}) < 0 \end{aligned} \quad (57)$$

elde edilir. Eşitlik 41.'de Eşitlik 56. ve Eşitlik 57. kullanıldığında Eşitlik 58. elde edilir.

$$\begin{aligned} c_2n - (2n + 1)c_5 + (2n + 1)(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}) + n(n - 1)c_3 + c_7 \\ + 2c_3c_8 + 2\sqrt{c_8c_9} = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Eşitlik 58., belirli bir problemin enerji spektrumunu verir.

$$\rho(s) = s^{c_{10}-1}(1 - c_3s)^{\frac{c_{11}}{c_3}-c_{10}-1} \quad (59)$$

Eşitlik 59.' da, Eşitlik 43. kullanıldığında;

$$y_n = P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1)}(1 - 2\alpha_3 s) \quad (60)$$

elde edilir ve burada;

$$c_{10} = (c_1 + 2c_4 + 2\sqrt{c_8}) \quad (61)$$

$$c_{11} = [c_2 - 2c_5 + 2(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8})] \quad (62)$$

ve $P_n^{(\alpha,\beta)}$ Jacobi polinomlarıdır. Eşitlik 38. kullanıldığında

$$\phi(s) = s^{c_{12}}(1 - c_3 s)^{-c_{12}-\frac{c_{13}}{c_3}} \quad (63)$$

elde edilir ve genel çözüm;

$$\psi = \phi(s)y(s) \quad (64)$$

$$\psi = s^{c_{12}}(1 - c_3 s)^{-c_{12}-\frac{c_{13}}{c_3}} P_n^{(c_{10}-1, \frac{c_{11}}{c_3}-c_{10}-1)}(1 - 2c_3 s) \quad (65)$$

burada c fonksiyonları;

$$c_{12} = (c_4 + \sqrt{c_8}) \quad (66)$$

$$c_{13} = [c_5 - (\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8})] \quad (67)$$

Bazı problemlerde $c_3 = 0$ alınır. Bu tip sorunlar için;

$$\lim_{c_3 \rightarrow 0} P_n^{(c_{10}-1, \frac{c_{11}}{c_3}-c_{10}-1)}(1 - c_3 s) = L_n^{c_{10}-1}(c_{11} s) \quad (68)$$

$$\lim_{c_3 \rightarrow 0} (1 - c_3 s)^{-c_{12} - \frac{c_{13}}{c_3}} = e^{c_{13}s} \quad (69)$$

Eşitlik 65.'de verilen dalga denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur ve L_n^a Laguerre polinomlarıdır (Tezcan ve Sever, 2009).

$$\psi = s^{c_{12}} e^{c_{13}s} L_n^{(c_{10}-1)}(c_{11}s) \quad (70)$$

3.2 Z(4) Kritik Nokta Simetrisi için Kratzer Potansiyelinin Uygulanması

Nikiforov-Uvarov metodu kullanılarak Bohr Hamiltonyenin $\gamma = 30^\circ$ durumu için Kratzer potansiyeli kullanılarak bir analitik çözümü elde edildi. Bu model Z(4) Kratzer olarak isimlendirilecektir. Z(4) için Bohr Hamiltonyen denklemini Eşitlik 25.'teki gibi alınırsa diferansiyel denklemin analitik çözümü Kratzer potansiyeli için elde edildi. Laguerre polinomları denklemin özfonksiyonlarıdır.

Eşitlik 26.'da, λ değerini yani Eşitlik 30.'u yerine yazarsak β 'ya bağlı kısım aşağıdaki gibi olur.

$$\left[\frac{1}{\beta^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} + (\varepsilon - u(\beta)) - \frac{L}{\beta^2} (L + 1) + \frac{3}{4\beta^2} \alpha^2 \right] \phi(\beta) = 0 \quad (71)$$

Kratzer Potansiyeli,

$$u(\beta) = -\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} \quad (72)$$

olarak alırız. Burada; $A = 2D_e\beta_0$ ve $B = D_e\beta_0^2$, dir. Kratzer potansiyelini Eşitlik 71.'de yerine yazılır ve düzenlenir ise,

$$\frac{\partial^2 \phi(\beta)}{\partial \beta^2} + \frac{3}{\beta} \frac{\partial \phi(\beta)}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \left(\varepsilon \beta^2 + A\beta + \frac{3}{4} \alpha^2 - L(L + 1) - B \right) \phi(\beta) = 0 \quad (73)$$

ifadesi elde edilir. Burada sabit terimlere $\zeta = \frac{3}{4} \alpha^2 - L(L + 1) - B$ diyelim. Eşitlik 73.'e $\beta = s$ dönüşümü yapılırsa parametrik Nikiforov-Uvarov metodu formunda Eşitlik 74. elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \phi(\beta)}{\partial s^2} + \frac{3}{s} \frac{\partial \phi(\beta)}{\partial s} + \frac{1}{s^2} (\epsilon s^2 + As + \zeta) \phi(\beta) = 0 \quad (74)$$

Eşitlik 74.'e parametrik Nikiforov-Uvarov metodunu uygulayalım. Eşitlik 44. ve Eşitlik 74. karşılaştırırsak;

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\epsilon, & \xi_2 &= A, & \xi_3 &= -\zeta, & c_1 &= 3, & c_2 &= 0, \\ c_3 &= 0, & c_4 &= -1, & c_5 &= 0, & c_6 &= -\epsilon, & c_7 &= -A, \\ c_8 &= 1 - \zeta, & c_9 &= -\epsilon, & c_{10} &= 1 + 2\sqrt{1 - \zeta}, \\ c_{11} &= 2\sqrt{-\epsilon}, & c_{12} &= \sqrt{1 - \zeta} - 1, & c_{13} &= -\sqrt{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (75)$$

değerlerini elde ederiz. Bu değerleri Eşitlik 58.'de yerine yazılırsa;

$$(2n + 1)(\sqrt{-\epsilon}) + 2\sqrt{-\epsilon} \cdot (1 - \zeta) = A \quad (76)$$

ifadesi elde edilir. Her iki tarafın karesini alıp düzenlenirse;

$$\epsilon = \frac{-A^2}{[(2n + 1) + 2\sqrt{(1 - \zeta)}]^2} \quad (77)$$

enerji spektrumunu elde ederiz. $\epsilon = (2B_m/\hbar^2)E$ ve $\zeta = \frac{3}{4}\alpha^2 - L(L + 1) - B$ ifadelerini Eşitlik 77.'de yerine yazılır ise enerji denklemini elde ederiz.

$$E_{n,L} = \frac{-\hbar^2 A^2}{2B_m \left[(2n + 1) + 2\sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\alpha^2 + L(L + 1) + B\right)} \right]^2} \quad (78)$$

Eşitlik 78.'de A ifadesi numerik hesaplamalarda Fortunato (2005)'ya göre, $A=20$ alındı. n osilatör kuantum sayısıdır. α yerine Wobbling kuantum sayısı $n_w=L-\alpha$ (Meyer-ter-Vehn, 1975) kullanmak daha uygundur. Burada $n_w=0$ temel seviye bandına karşılık gelirken $L= n_w, n_w+2, n_w+4, \dots$ ($n_w>0$) bir dizi uyarılmış enerji bandlarını ifade eder. Eşitlik 78.'de $\alpha= L- n_w$ alırsak enerji denklemi Eşitlik 79. ile ifade edilir.

$$E_{n,L} = \frac{-\hbar^2 A^2}{2B_m \left[1 + 2\sqrt{\left(\frac{L(L+4)+3n_w(2L-n_w)+4}{4} + B\right)} \right]^2} \quad (79)$$

Eşitlik 75.'de, bulunan değerleri Eşitlik 70.'de yerine yazılırsa dalga fonksiyonunu elde ederiz.

$$\psi(s) = s^{\sqrt{1-\zeta}-1} e^{-s\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{1-\zeta}}(2s\sqrt{-\varepsilon}) \quad (80)$$

Eşitlik 81. 'a, $s = \beta$ dönüşümü yapılırsa dalga fonksiyonu;

$$\psi_{n,L}(\beta) = C_N \beta^{\sqrt{1-\zeta}-1} e^{-\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{1-\zeta}}(2\beta\sqrt{-\varepsilon}) \quad (81)$$

şeklinde ifade edilir. Burada C_N , normalleştirme katsayısı ve L_n , Laguerre polinomlarıdır. C_N normalizasyon denklemi $C_N^2 \int_0^\infty \psi^2(\beta) \beta^3 d\beta = 1$ ile elde edilir. Normalizasyon denkleminde, Eşitlik 81.'de yerine konulursa normalleştirme katsayısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$C_N^2 \int_0^\infty \beta^{2+2\sqrt{1-\zeta}} e^{-2\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{1-\zeta}}(2\beta\sqrt{-\varepsilon}) L_n^{2\sqrt{1-\zeta}}(2\beta\sqrt{-\varepsilon}) \beta^3 d\beta = 1 \quad (82)$$

$2\beta\sqrt{-\varepsilon} = s$ ve $2\sqrt{1-\zeta} = \alpha$ ifadeleri kullanılırsa Eşitlik 82. aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_N^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}} \right)^{2+\alpha} \int_0^\infty s^{1+\alpha} e^{-s} L_n^\alpha(s) L_n^\alpha(s) ds = 1 \quad (83)$$

Laguerre polinomu;

$$\int_0^\infty x^{1+k} e^{-x} L_n^k(x) L_n^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} (2n+k+1) \quad (84)$$

çözümünü verir (Arfken, 1985). Eşitlik 83.'deki integralin çözümü;

$$\int_0^\infty s^{1+\alpha} e^{-s} L_n^\alpha(s) L_n^\alpha(s) ds = \frac{(n+\alpha)!}{n!} (2n+\alpha+1) \quad (85)$$

biçiminde olur. Burada C_N normalleştirme katsıyı aşağıdaki gibi elde ederiz

$$C_N = (2\sqrt{-\varepsilon})^{\alpha+2} \sqrt{\frac{n!}{(n+\alpha)!} \frac{1}{(2n+\alpha+1)}} \quad (86)$$

Eşitlik 86. dalga fonksiyonunda yerine koyduğumuzda, Z(4) Kratzer potansiyeli için dalga fonksiyonu Eşitlik 87. ile ifade edilir.

$$\psi_{n,L}(\beta) = (2\sqrt{-\varepsilon})^{\alpha+2} \sqrt{\frac{n!}{(n+\alpha)!} \frac{1}{(2n+\alpha+1)}} \beta^{-1+\sqrt{1+\zeta}} e^{-\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{1+\zeta}} \quad (87)$$

Burada $\alpha = 2\sqrt{1 - \frac{3}{4}\alpha^2 + L(L+1) + B}$ ve $\zeta = \frac{3}{4}\alpha^2 - L(L+1) - B$ olduğunu unutmayalım.

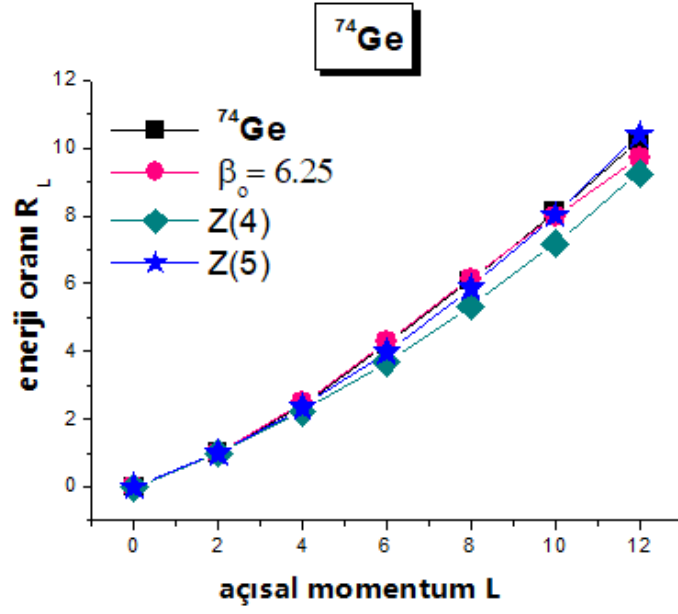
4. BULGULAR

Tablo 4.1. Farklı β_0 değerleri, Z(4)-K modelinin gsb için $R_{n,L}$ enerji oranları Z(4) model, Z(5) model, Z(4)-D model ve katı üç eksenli rotor model (RTR) sonuçları

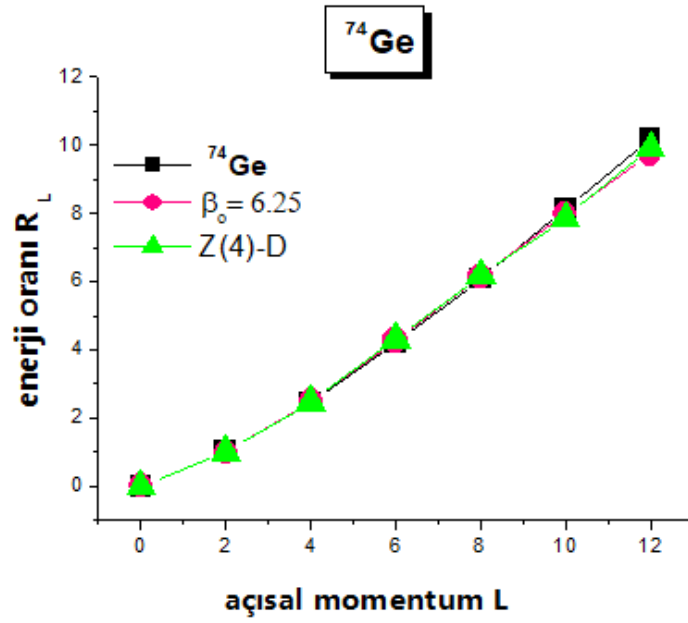
gsb	β_0	0	2	8	∞	Z(4)-D	Z(4)	Z(5)	RTR
	L_{s,n_w}					∞			
	$0_{1,0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$2_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
	$4_{1,0}$	1.28	2.230	2.520	2.667	2.667	2.226	2.350	2.667
	$6_{1,0}$	1.39	3.420	4.400	5.000	5.000	3.669	3.984	5.00
	$8_{1,0}$	1.45	4.420	6.450	8.000	8.000	5.324	5.877	8.000
	$10_{1,0}$	1.48	5.230	8.540	11.667	11.667	7.188	8.019	11.667
γ -bandı	β_0	0	2	8	∞	Z(4)-D	Z(4)	Z(5)	RTR
	L_{s,n_w}					∞			
	$2_{1,2}$	1.21	1.79	1.93	2.000	2.000	1.766	1.837	2.000
	$3_{1,1}$	1.30	2.43	2.81	3.000	3.000	2.445	2.597	3.000
	$4_{1,2}$	1.41	3.68	4.89	5.667	5.667	4.051	4.420	5.667
	$5_{1,1}$	1.41	3.80	5.12	6.000	6.000	4.239	4.634	6.000
	$6_{1,2}$	1.47	4.90	7.64	10.000	10.000	6.357	7.063	10.000
	$7_{1,1}$	1.46	4.83	7.45	9.667	9.667	6.188	6.869	9.667
	$8_{1,2}$	1.50	5.74	10.14	15.000	15.000	8.788	9.864	15.000
	$9_{1,1}$	1.49	5.60	9.69	14.000	14.000	8.316	9.318	14.000
	$10_{1,2}$	1.51	6.33	12.35	20.667	20.667	11.378	12.852	20.667
	$11_{1,1}$	1.51	6.18	11.76	19	19.000	10.630	11.989	19.000

Tablo 4.1. (Devam) Farklı β_0 değerleri, Z(4)-K modelinin gsb için $R_{n,L}$ enerji oranları Z(4) model, Z(5) model, Z(4)-D model ve katı üç eksenli rotor model (RTR) sonuçları

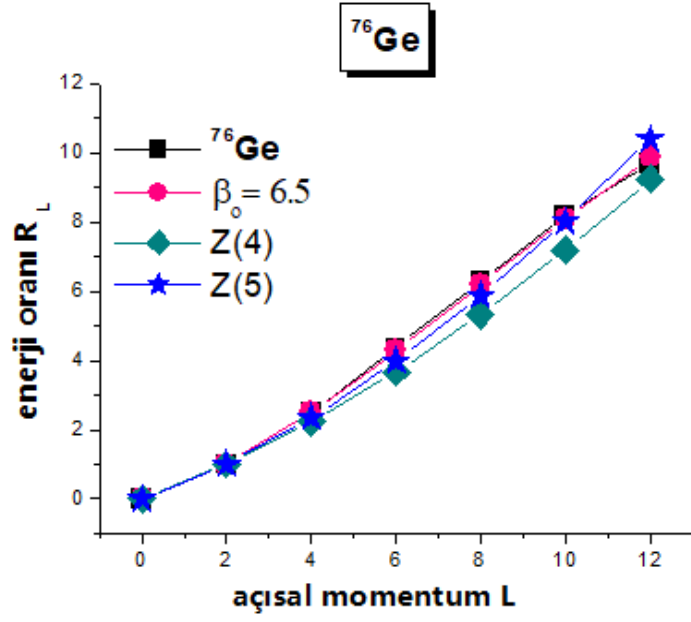
β_1 - bandı	β_0 L_{s,n_w}	0	2	8	∞	Z(4)-D ∞	Z(4)	Z(5)	RTR
	$0_{2,1}$	1.00	2.65	5.35			2.954	3.913	
	$2_{2,1}$	1.28	3.24	6.10			4.804	5.697	
	$4_{2,1}$	1.39	4.00	7.23			6.893	7.962	
	$6_{2,1}$	1.45	4.75	8.65			9.215	10.567	
	$8_{2,1}$	1.48	5.42	10.21			11.765	13.469	
	$10_{2,1}$	1.50	5.98	11.82			14.538	16.646	



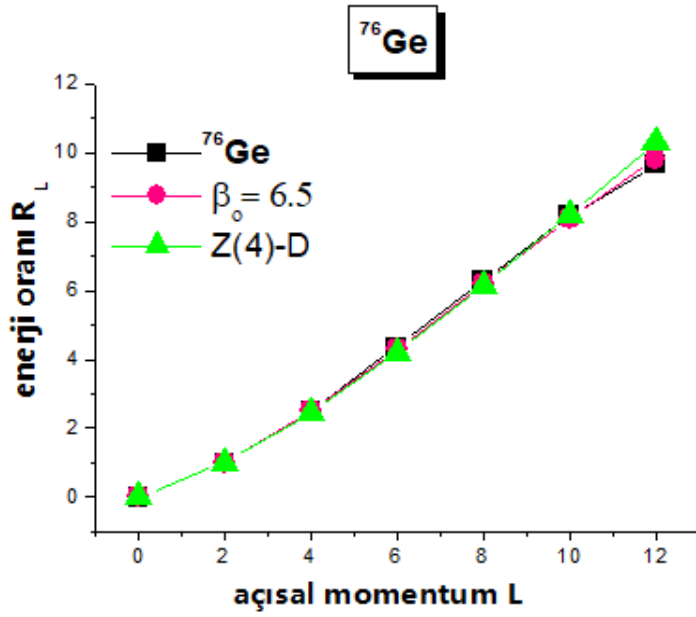
Şekil 4.1. ^{74}Ge çekirdeğinin deneysel verileri, $Z(4)$ -K ($\beta_0 = 6.25$) model ile $Z(4)$, $Z(5)$ modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



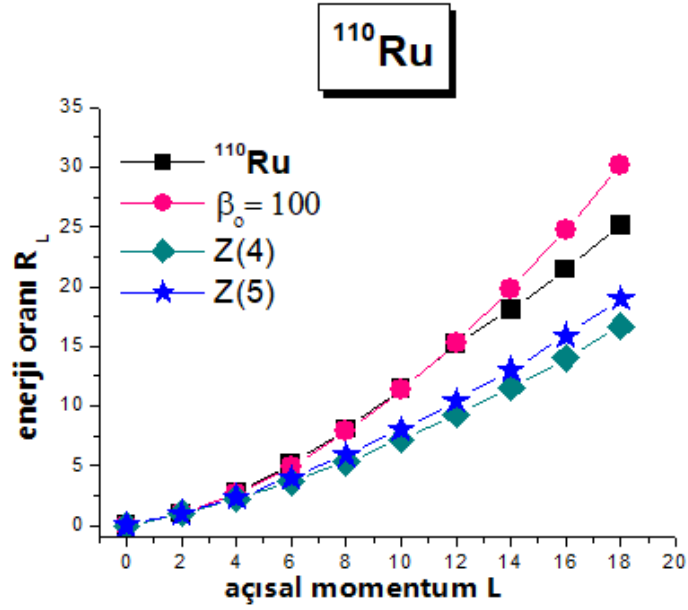
Şekil 4.2. ^{74}Ge çekirdeğinin deneysel verileri, $Z(4)$ -K ($\beta_0 = 6.25$) model ile $Z(4)\text{-D}$ modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



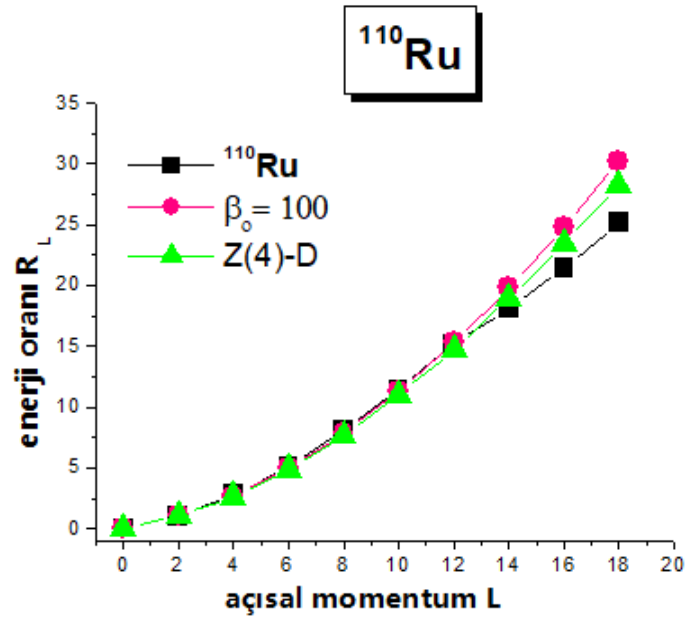
Şekil 4.3. ⁷⁶Ge çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.5$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



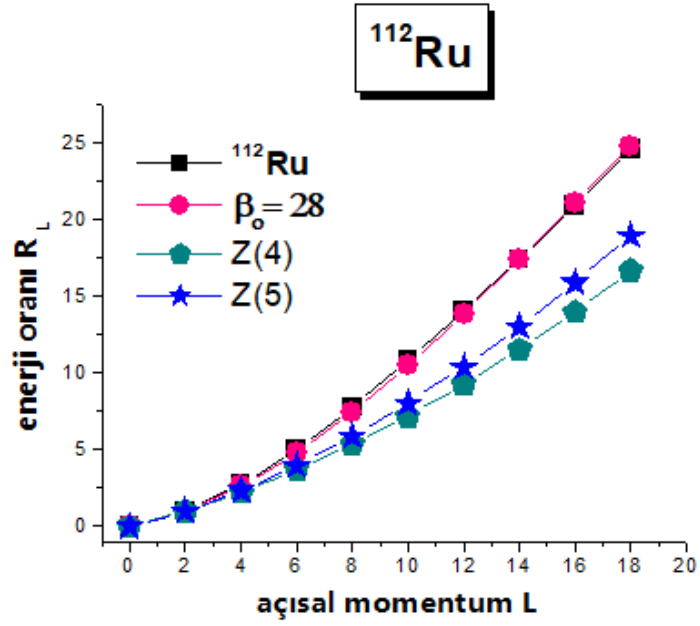
Şekil 4.4. ⁷⁶Ge çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.5$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



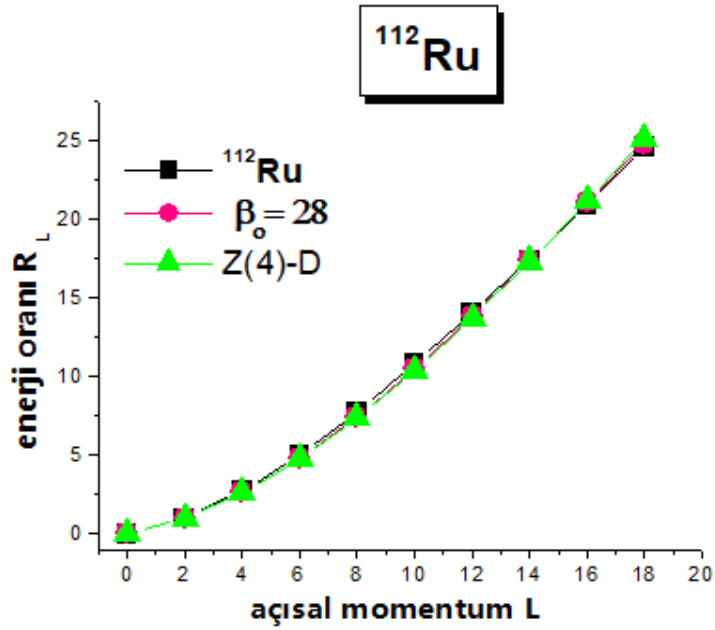
Şekil 4.5. ^{110}Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 100$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



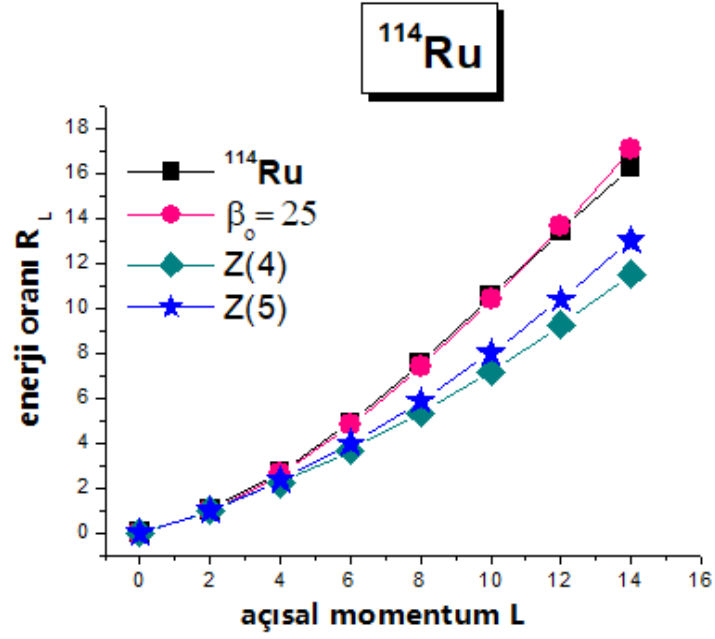
Şekil 4.6. ^{110}Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 100$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



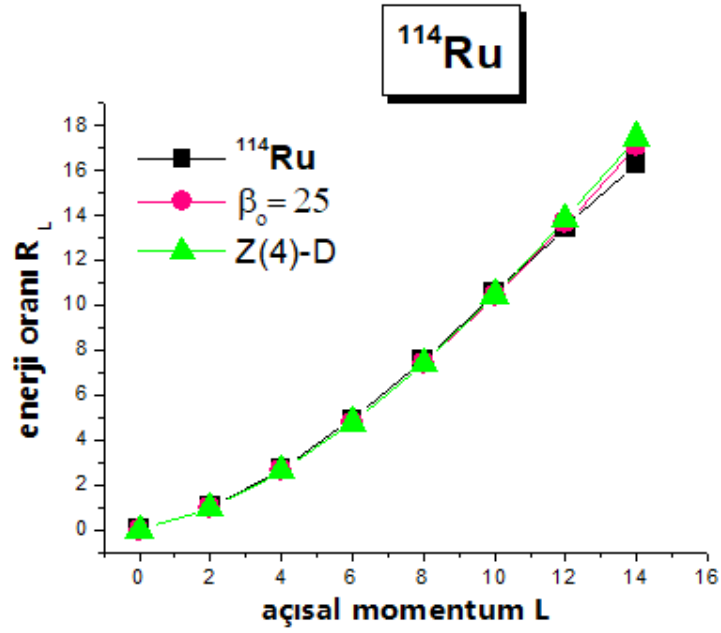
Şekil 4.7. ^{112}Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 28$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



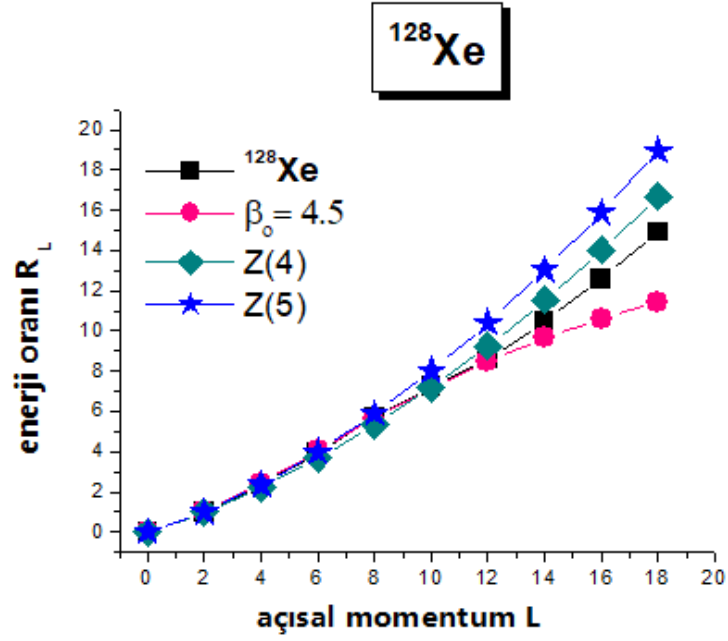
Şekil 4.8. ^{112}Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 28$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



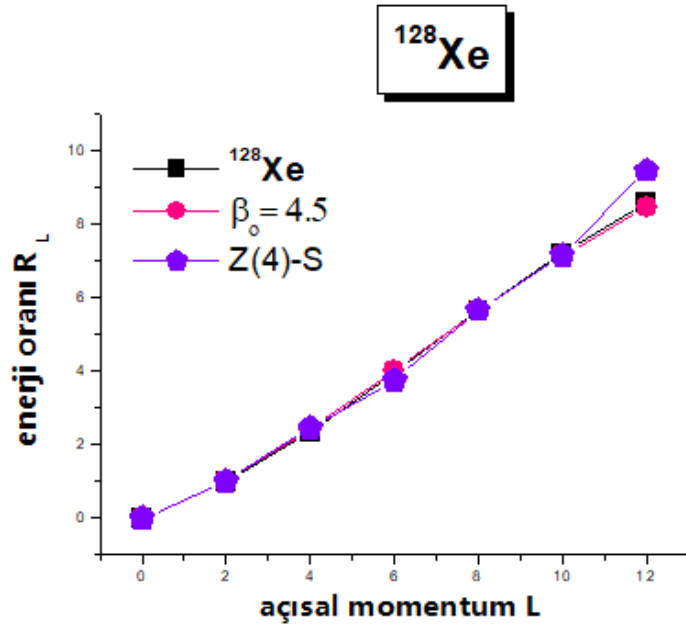
Şekil 4. 9. ^{114}Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 25$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



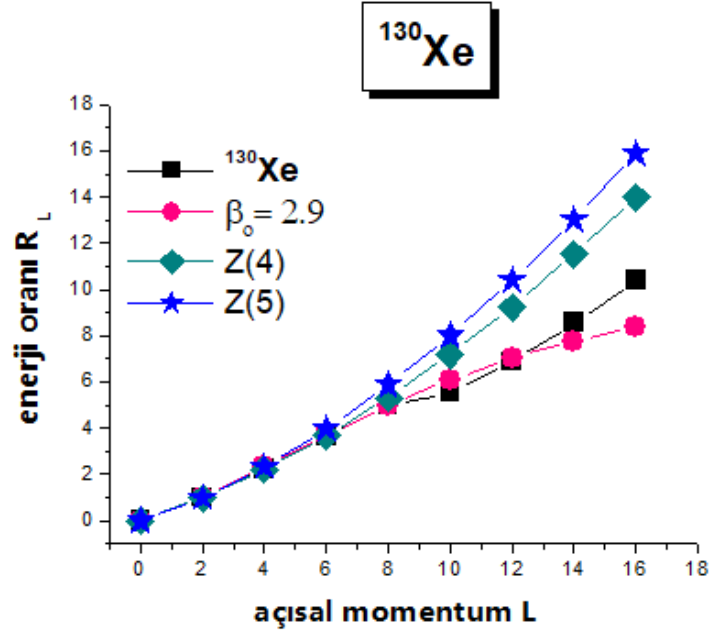
Şekil 4.10 ^{114}Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 25$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



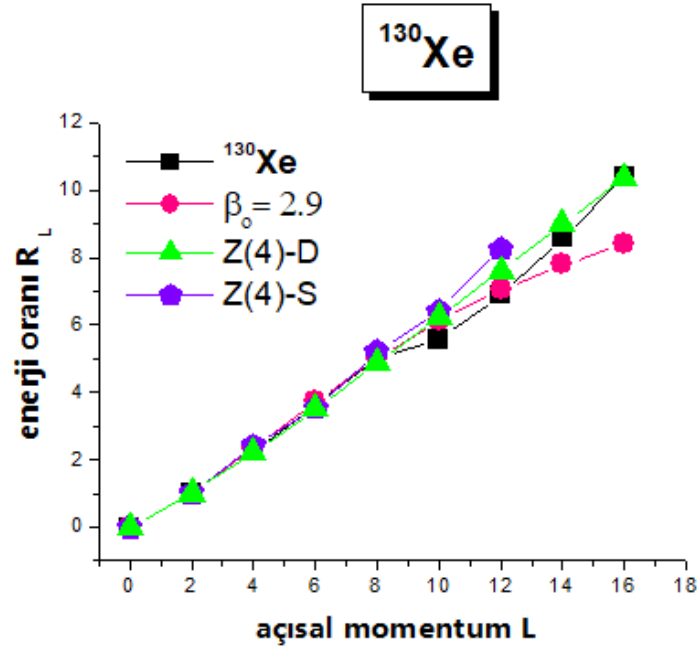
Şekil 4.11. ^{128}Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 4.5$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



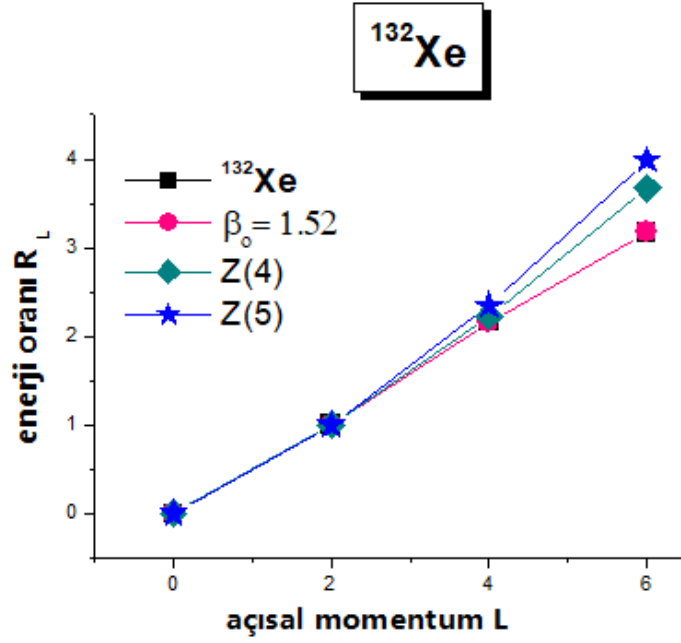
Şekil 4.12. ^{128}Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 4.5$) model ile Z(4)-D modelinin temel durum bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



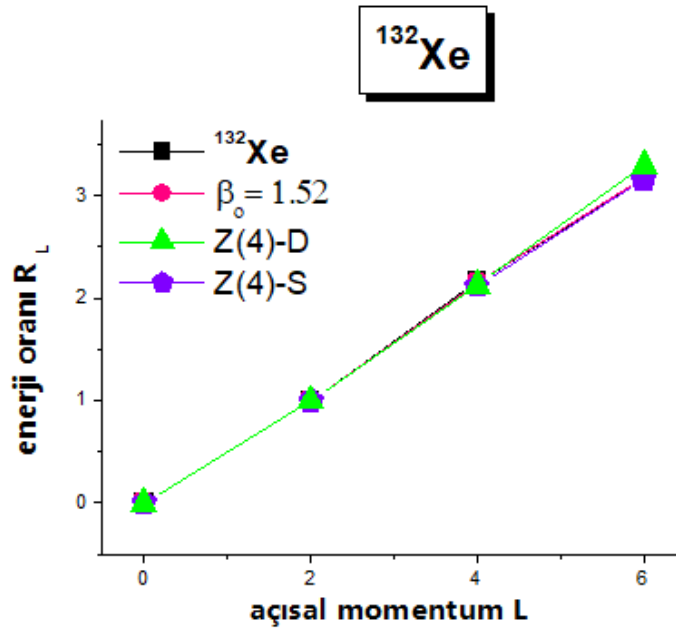
Şekil 4.13. ^{130}Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 2.9$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



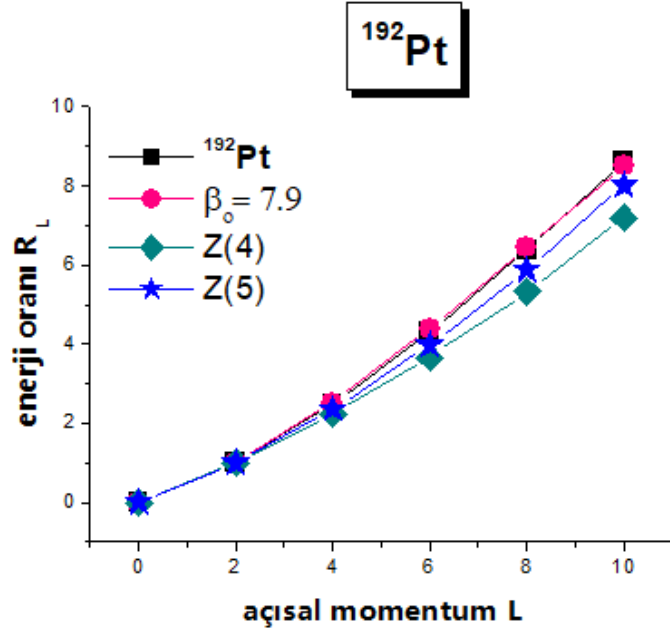
Şekil 4.14. ^{130}Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 2.9$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



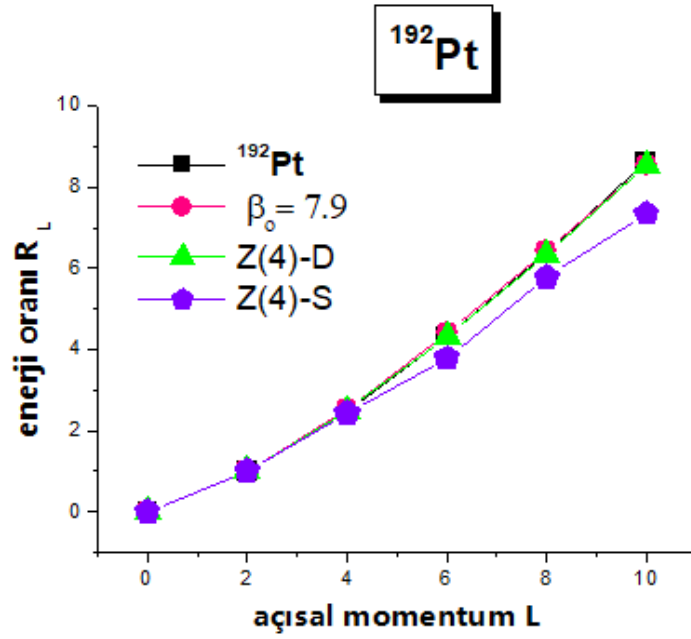
Şekil 4.15. ^{132}Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 1.52$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



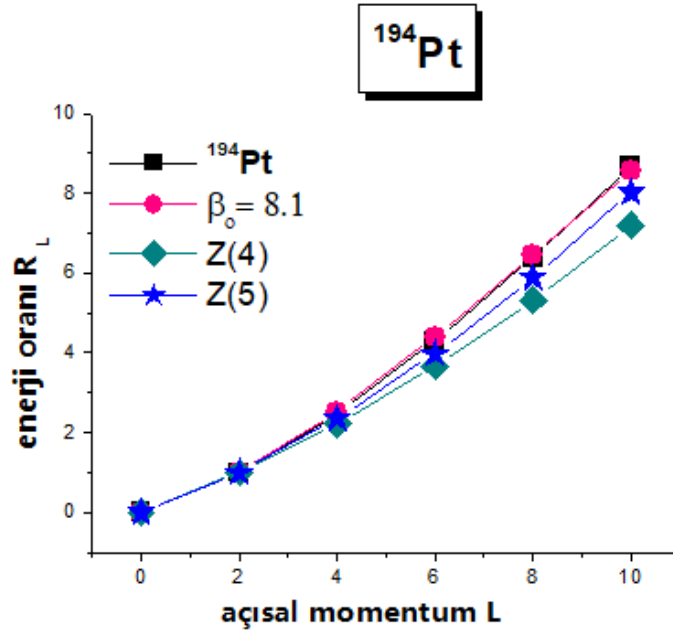
Şekil 4.16. ^{132}Xe çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 1.52$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



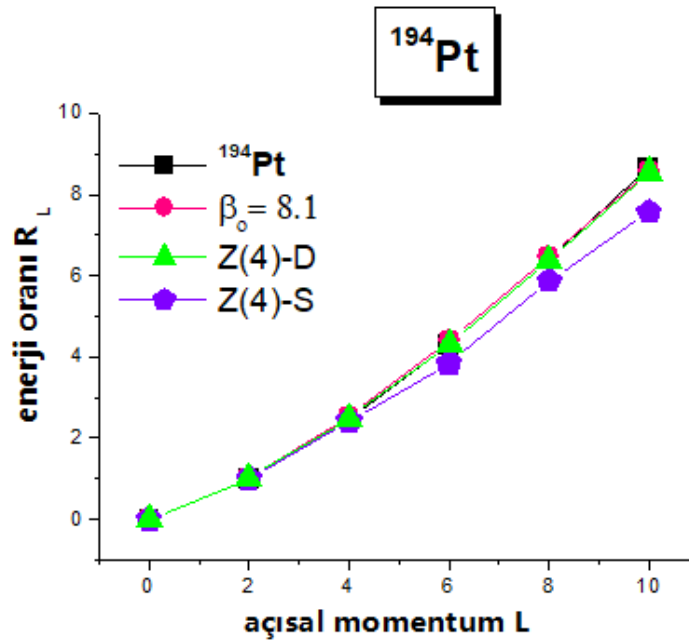
Şekil 4.17. ^{192}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 7.9$) modeli ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



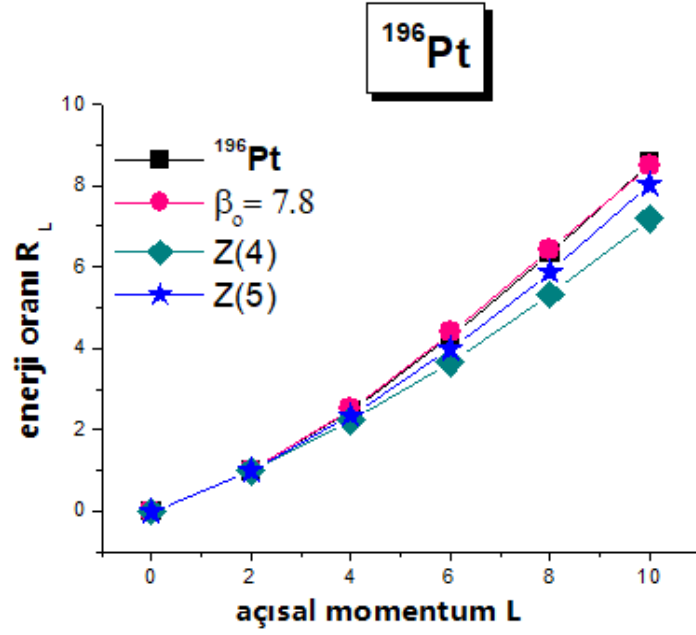
Şekil 4.18. ^{192}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 7.9$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



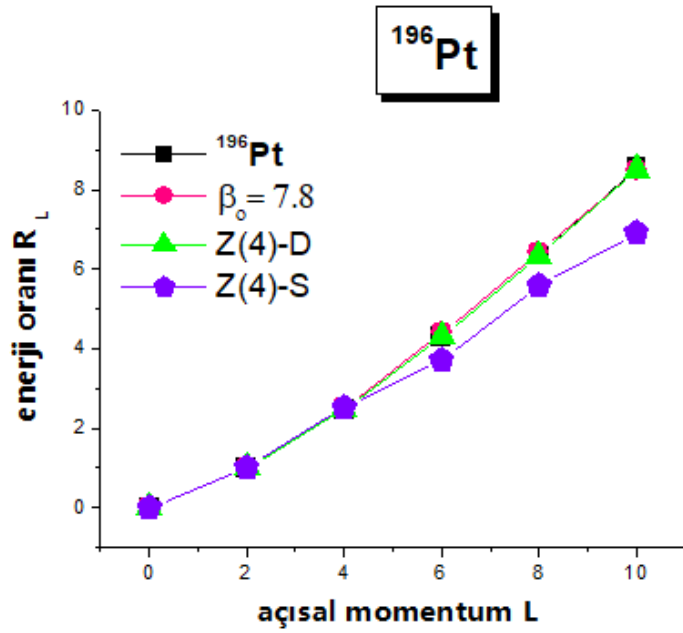
Şekil 4.19. ^{194}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 8.1$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



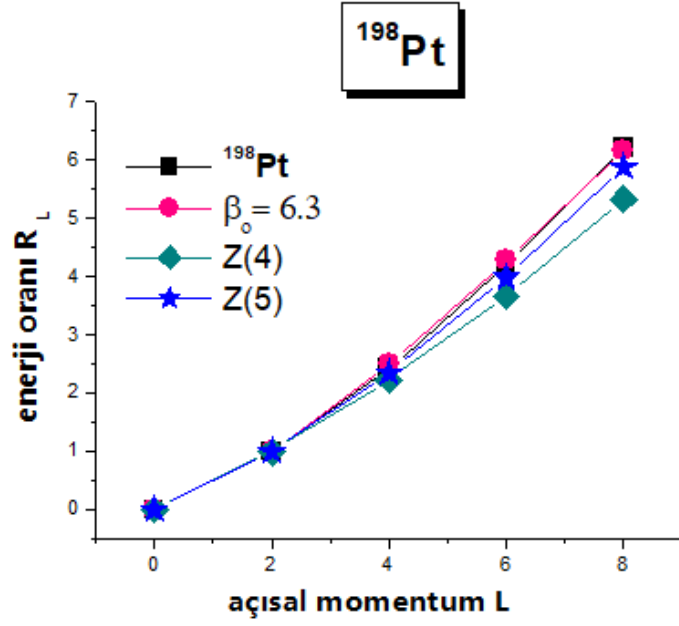
Şekil 4.20. ^{194}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 8.1$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



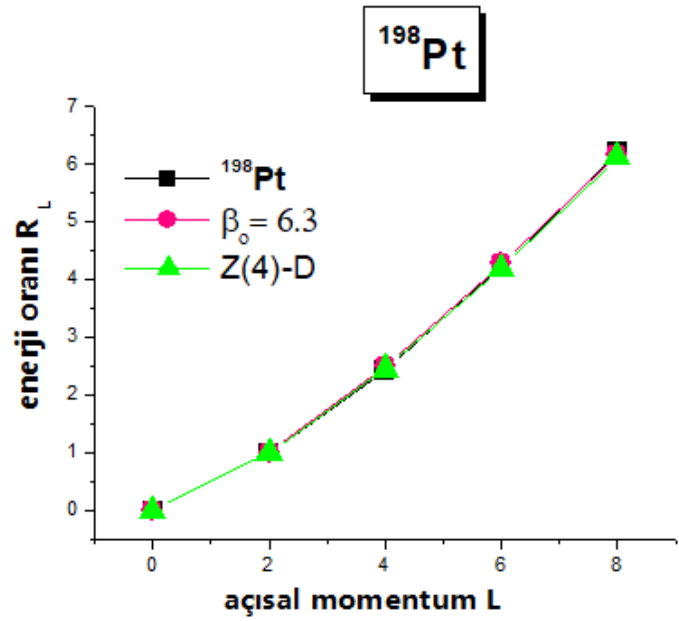
Şekil 4.21. ^{196}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 7.8$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



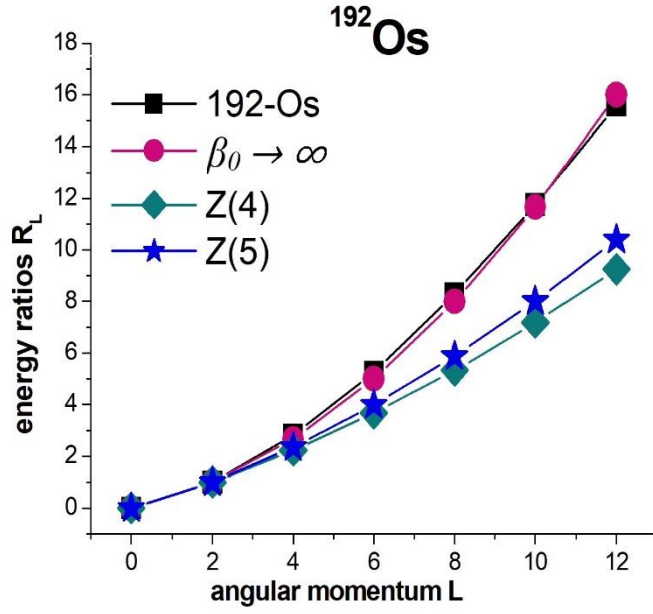
Şekil 4.22. ^{196}Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 7.8$) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



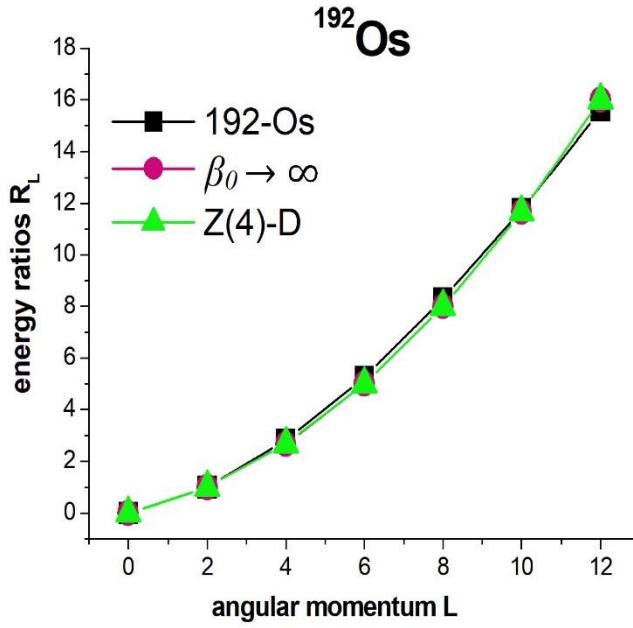
Şekil 4.23. ¹⁹⁸Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.3$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



Şekil 4.24. ¹⁹⁸Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 = 6.3$) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



Şekil 4.25. ^{192}Os çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ($\beta_0 \rightarrow \infty$) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



Şekil 4. 26. ^{192}Os çekirdeğinin deneysel verileri ile Z(4)-K ($\beta_0 \rightarrow \infty$) modeli ve Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması

Tablo 4.2. Uygun β_0 değerleri için Z(4)-K modelinin teorik tahminleri, $^{74,76}\text{Ge}$, $^{110-114}\text{Ru}$, $^{128-132}\text{Xe}$, $^{192-198}\text{Pt}$, ^{192}Os deneysel verileri ve Z-(4) modelin γ bandı enerji değerleri

β_0	^{74}Ge	^{74}Ge	^{76}Ge	^{76}Ge	^{110}Ru	^{110}Ru	^{112}Ru	^{112}Ru	^{114}Ru	^{114}Ru	^{128}Xe	^{128}Xe	
L_{s,n_w}	Veri	$\beta_0 = 6.25$	Veri	$\beta_0 = 6.5$	Veri	$\beta_0 = 100$	Veri	$\beta_0 = 28$	Veri	$\beta_0 = 25$	Veri	$\beta_0 = 4.5$	Z(4)
$2_{1,2}$	2.02	1.917	1.969	1.920	2.5458	1.994	2.212	1.979	2.124	1.978	2.188	1.890	1.766
$3_{1,1}$	2.848	2.762	2.734	2.769	3.5723	2.982	3.158	2.939	3.124	2.933	3.227	2.688	2.445
$4_{1,2}$	3.633	4.717	3.591	4.745	4.5045	5.590	4.143	5.406	4.079	5.378	3.620	4.458	4.051
$5_{1,1}$	4.526	4.936	4.417	4.967	5.7135	5.913	5.219	5.705	5.175	5.674	4.508	4.650	4.239
$6_{1,2}$	5.564	7.206	5.389	7.278	6.9965	9.741	6.634	9.149	6.642	9.061	5.149	6.570	6.357
$7_{1,1}$	6.394	7.039	6.276	7.107	8.3948	9.426	7.779	8.872	7.757	8.790	6.165	6.433	6.188
$8_{1,2}$		9.361	7.336	9.486	9.9572	14.404	9.563	13.104		12.917	6.715	8.283	8.788
$9_{1,1}$		8.977	8.077	9.092	11.5353	13.482	10.707	12.342	10.68	12.177		7.986	8.316
$10_{1,2}$		11.198		11.382	13.518	19.532	12.812	17.176		16.849		9.667	11.378
$11_{1,1}$		10.710		10.877	15.0671	18.041	13.902	16.020		15.737		9.306	10.63

Tablo 4.2. (Devamı) Uygun β_0 değerleri için Z(4)-K modelinin teorik tahminleri,^{74,76}Ge, ¹¹⁰⁻¹¹⁴Ru, ¹²⁸⁻¹³²Xe, ¹⁹²⁻¹⁹⁸Pt, ¹⁹²Os deneysel verileri ve Z-(4) modelin γ bandı enerji değerleri

β_0	¹³⁰ Xe	¹³⁰ Xe	¹³² Xe	¹³² Xe	¹⁹² Pt	¹⁹² Pt	¹⁹⁴ Pt	¹⁹⁴ Pt	¹⁹⁶ Pt	¹⁹⁶ Pt	¹⁹² Os	¹⁹² Os	
L_{s,n_w}	Veri	$\beta_0 = 2.9$	Veri	$\beta_0 = 1.52$	Veri	$\beta_0 = 7.9$	Veri	$\beta_0 = 8.1$	Veri	$\beta_0 = 7.8$	Veri	$\beta_0 \rightarrow \infty$	Z(4)
2 _{1,2}	2.093	1.843	1.944	1.748	1.935	1.933	1.894	1.934	1.936	1.932	2.376	2.000	1.766
3 _{1,1}	3.046	2.562	2.701	2.329	2.910	2.805	2.809	2.809	2.854	2.803	3.355	3.000	2.445
4 _{1,2}	3.374	4.054	2.940	3.392	3.795	4.876	3.743	4.892	3.636	4.869	4.42	5.667	4.051
5 _{1,1}	4.051	4.207	3.246	3.492	4.682	5.112	4.563	5.129	4.526	5.105	5.557	6.000	4.239
6 _{1,2}		5.664	3.450	4.370	5.905	7.620		7.662	5.644	7.601	7.12	10.000	6.357
7 _{1,1}		5.564		4.313	6.677	7.431		7.471		7.413	8.323	9.667	6.188
8 _{1,2}		6.853		5.001	8.186	10.098		10.175		10.062	10.369	15.000	8.788
9 _{1,1}		6.653		4.900		9.650		9.719		9.617		14.000	8.316
10 _{1,2}		7.748		5.434		12.292		12.407		12.237	14.064	20.667	11.378
11 _{1,1}		7.520		5.327		11.701		11.806		11.652		19.000	10.63

Tablo 4.3. Uygun β_0 değerleri için Z(4)-K modelinin teorik tahminleri ve Z-(4) modelinin β_1 bandı enerji değerleri

β_0	^{74}Ge	^{76}Ge	^{110}Ru	^{112}Ru	^{114}Ru	^{128}Xe	^{130}Xe	^{132}Xe	^{192}Pt	^{194}Pt	^{196}Pt	^{198}Pt
L_{s,n_w}	$\beta_0 = 6.25$	$\beta_0 = 6.5$	$\beta_0 = 100$	$\beta_0 = 28$	$\beta_0 = 25$	$\beta_0 = 4.5$	$\beta_0 = 2.9$	$\beta_0 = 1.52$	$\beta_0 = 7.9$	$\beta_0 = 8.1$	$\beta_0 = 7.8$	$\beta_0 = 6.3$
$0_{2,1}$	4.704	4.801	20.207	10.381	9.781	3.967	3.176	2.337	5.318	5.388	5.284	4.724
$2_{2,1}$	5.421	5.522	21.119	11.226	10.618	4.650	3.810	2.898	6.059	6.132	6.024	5.442
$4_{2,1}$	6.499	6.610	22.628	12.597	11.974	5.641	4.676	3.572	7.193	7.272	7.156	6.522
$6_{2,1}$	7.800	7.929	24.716	14.444	13.791	6.786	5.606	4.204	8.600	8.689	8.557	7.827
$8_{2,1}$	9.198	9.354	27.360	16.701	16.000	7.959	6.489	4.735	10.156	10.262	10.105	9.231
$10_{2,1}$	10.592	10.782	30.532	19.295	18.522	9.073	7.271	5.159	11.756	11.884	11.695	10.631
$12_{2,1}$	11.916	12.145	34.197	22.150	21.277	10.085	7.940	5.493	13.322	13.477	13.248	11.963
$14_{2,1}$	13.133	13.405	38.318	25.191	24.189	10.979	8.501	5.755	14.803	14.988	14.715	13.190
$16_{2,1}$	14.229	14.544	42.856	28.348	27.188	11.757	8.968	5.963	16.172	16.387	16.068	14.295
$18_{2,1}$	15.203	15.560	47.766	31.560	30.214	12.426	9.355	6.128	17.416	17.662	17.296	15.277

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada; $\gamma = 30^\circ$ için Bohr Hamiltonyenin β kısmında Kratzer potansiyeli kullanılarak analitik tam bir çözümü türetilmiştir. Bu çözüm Z(4)-K olarak adlandırıldı. Nikiforov ve Uvarov tarafından geliştirilen analitik yöntem kullanılarak enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonları elde edildi. Temel seviye bandı enerjileri için farklı β_0 değerlerinin Z(4)-K modelinden elde edilen sayısal sonuçlar $^{74-76}\text{Ge}$, $^{110-114}\text{Ru}$, $^{128-132}\text{Xe}$, $^{192-196}\text{Pt}$, ^{192}Os izotoplarının mevcut deneysel verileri, Z(4), Z(5), Z(4)-S ve Z(4)-D modellerinin temel seviye band tahminleri ile karşılaştırıldı ve geliştirilen teorik modelle uyumlu çekirdekler araştırıldı (bkz. Şekil 4.1-4.26). Enerji oran değerleri $2_1 \rightarrow 0_1$ değerine normalize edildi.

Parametreye bağlı modellerde serbest parametre değerini değiştirerek ilgili bölgenin karakteristik yapısının nasıl değiştiğini incelemek açısından önemlidir. Bunu görebilmek için, değişken β_0 parametresinin farklı değerlerinin gsb, γ -bandı ve β_1 - bandının sayısal sonuçları Tablo 4.1'de Z(4)-D (Yiğitoglu ve Gokbulut, 2018), Z(4) (Bonatsos ve ark., 2005), Z(5) (Bonatsos ve ark., 2004) ve RTR model tahminleri ile birlikte verilmiştir. Tablo 4.1'deki L_{s,n_w} ifadesi, seviye enerjileri için kullanılır. Temel seviye bandının seviyeleri $s = 1$, $n_w = 0$ ($n = 0$) ile karakterize edilirken, β_1 - bandı $s = 2$, $n_w = 0$ ($n = 1$) ile karakterize edilir. γ -bandı ise, çift L seviyeleri için $s = 1$, $n_w = 2$ ve tek L seviyeleri için $s = 1$, $n_w = 1$ ile karakterize edilir (Bonatsos ve ark., 2005).

Tablo 1 incelendiğinde; Z(4)-K modeli için, değişken β_0 'ın artan değerleri için seviye enerjilerinin de arttığı görülmektedir. $\beta_0 \rightarrow \infty$ limiti, gsb ve γ -bandları RTR çekirdek yapısına karşılık gelmektedir. $\beta_0 = 0$ değeri Z(4)-K model kabuk modele karşılık gelmektedir. $R_{4/2} < 2$ ise kabuk modele karşılık gelmektedir (Casten, 1990).

Şekil 4.1'de görüldüğü üzere, $\beta_0 = 6.25$ değeri için Z(4)-K model tahminlerinin $L=10$ açısal momentum değerine kadar ^{74}Ge çekirdek verisi ile örtüştüğü fakat $L=12$ açısal momentum değerinde sapma meydana geldiği görülmektedir. Z(5) model tahmini ise $L=12$ açısal momentum değeri içinde ^{74}Ge çekirdeği ile uyumludur. Bu durum Z(5)

modelinin ^{74}Ge çekirdeğini daha iyi açıkladığını gösterir. ^{74}Ge çekirdeğinin, bir Z(5) modeli çekirdeği olduğunu söylenebilir. Şekil 4.2 incelendiğinde ise; L=12 açısai momentum değeriine kadar deneysel veriler ile Z(4)-K modelinin daha uyumlu tahminler yaptığı fakat L=12 açısai momentum değeriinde Z(4)-D modelinin, ^{74}Ge çekirdeği ile daha uyumlu olduğu görölmektedir.

Şekil 4.3'te göröldüğü gibi, $\beta_0 = 6.5$ değeri için Z(4)-K modeli, ^{76}Ge çekirdeği ile L=12 açısai momentum değeriine kadar enerji oranlarının örtüştüğü görölmektedir. L=12 açısai momentum değeriine kadar ^{76}Ge çekirdeği deneysel verisi ile Z(4)-K model tahminleri Z(4)-D model tahminlerine göre daha uyumlu olduğu Şekil 4.4'te görölmektedir. Z(4)-D modeli ^{74}Ge çekirdeğini daha iyi açıklarken Z(4)-K modeli ise ^{76}Ge çekirdeğini daha iyi açıklamaktadır.

Z(4)-K modelinin $\beta_0 = 100$ değeri için ^{110}Ru çekirdeği ile L=12 enerji seviyesine kadar örtüştüğü, $L \geq 14$ enerji seviyelerinde sapma meydana geldiği Şekil 4.5'te görölmektedir. Şekil 4.6 incelendiğinde ise; L=12 açısai momentum seviyesine kadar Z(4)-D modelinin, Z(4)-K modeline göre ^{110}Ru çekirdeği temel seviye band yapısını daha iyi açıkladığı görölmektedir.

Şekil 4.7 incelendiğinde, temel seviye bandı L=18 açısai momentum seviyesine kadar $\beta_0 = 28$ değeri için Z(4)-K model tahminlerinin ^{112}Ru çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüştüğü gözlenmiştir. ^{112}Ru çekirdeğinin deneysel verilerinin hem Z(4)-D modeli hem de $\beta_0 = 28$ parametre değeri için Z(4)-K modeli ile örtüştüğü Şekil 4.8'de görölmektedir.

^{114}Ru çekirdeğinin deneysel verileri ile $\beta_0 = 25$ için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçları L=12 spin seviyesine kadar uyumlu olduğu Şekil 4.9'da gözlenmiştir. Şekil 4.10'daki grafik incelendiğinde L=12 açısai momentum değeriine kadar Z(4)-D model tahminlerinin ^{114}Ru çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüştüğü fakat L=14 açısai momentum değeriyle birlikte hafif bir sapmanın başladığı gözlenmiştir. $\beta_0 = 25$ değeri için Z(4)-K model tahminlerinin ^{114}Ru çekirdeğini daha iyi açıkladığı görölmektedir.

Şekil 4.5, Şekil 4.7 ve Şekil 4.9 incelendiğinde; Z(4)-K model tahminlerinin, ^{112}Ru izotopu ile çok iyi örtüştüğü, ^{114}Ru izotopu ile uyumlu olduğu ve ^{110}Ru izotopu ile alt spinlerde örtüştüğü üst spinlerde ise sapma meydana geldiği gözlemlendi. Şekil 4.6'da Z(4)-D modeli ^{110}Ru çekirdeğini daha iyi açıklarken Şekil 4.10'da ise; Z(4)-K modeli ^{114}Ru çekirdeğini daha iyi açıklar. Şekil 4.8'de ise Z(4)-K ve Z(4)-D modellerinden her ikisi de ^{112}Ru çekirdeğini açıklamaktadır.

Şekil 4.11'de görüldüğü gibi, $\beta_0 = 4.5$ değeri için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçları ^{128}Xe çekirdeğinin deneysel verileri ile $L=12$ açısal momentum seviyesine kadar uyumludur. $L \geq 14$ açısal momentum seviyelerinde sapma meydana geldiği görülür. Z(4) model tahminlerinin de ^{128}Xe çekirdeğinin deneysel verileri ile $L=12$ açısal momentum değerine kadar örtüştüğü görülmektedir ve Z(4) model tahminleri ^{128}Xe çekirdeğini daha iyi açıklar. Şekil 4.12 incelendiğinde, $L=12$ açısal momentum seviyesinde Z(4)-S model tahmininde sapma görülmektedir. $\beta_0 = 4.5$ değeri için Z(4)-K modeli, ^{128}Xe çekirdeğini daha iyi açıklamaktadır.

Şekil 4.13 incelendiğinde; ^{130}Xe çekirdeğinin deneysel verilerinin, $L=8$ açısal momentum seviyesine kadar $\beta_0 = 2.9$ değeri için Z(4)-K model tahminlerinin ve Z(4) model tahminlerinin örtüştüğü görülmektedir. Yüksek spinli seviyelerde her üç modelde ^{130}Xe çekirdeğini tam olarak açıklayamamaktadır. Şekil 4.14'e göre; $L=8$ spin seviyesine kadar Z(4)-D, Z(4)-S ve $\beta_0 = 2.9$ için Z(4)-K model tahminlerinin ^{130}Xe çekirdeği ile uyumlu iken yüksek spinlere kadar ^{130}Xe çekirdeğini en iyi açıklayan model Z(4)-D modelidir.

Şekil 4.15'te $L=6$ açısal momentum seviyesine kadar $\beta_0 = 1.52$ için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçları ^{132}Xe çekirdeği ile örtüştüğü görülmektedir. Şekil 4.16'da görüldüğü gibi; $L=6$ spin seviyesine kadar Z(4)-S model tahminlerinin ^{132}Xe çekirdek verileri ile örtüşür. Z(4)-S ve $\beta_0 = 1.52$ için Z(4)-K modelleri, Z(4)-D model tahminlerine göre ^{132}Xe çekirdeğini daha iyi açıklamaktadır.

Şekil 4.11, Şekil 4.13 ve Şekil 4.15 birlikte değerlendirildiğinde; Z(4)-K model tahminlerinin ^{132}Xe çekirdeği ile örtüştüğü, $^{128,130}\text{Xe}$ izotoplarının alt spin seviyelerinde

uyumlu olduğu üst spin seviyelerinde sapma meydana geldiği gözlemlendi. Şekil 4.12, Şekil 4.14 ve Şekil 4.16'da görüldüğü üzere; Z(4)-K modeli $^{128,132}\text{Xe}$ çekirdek yapısını iyi açıklarken, Z(4)-D modeli ^{130}Xe çekirdek yapısını iyi açıklar.

Şekil 4.17 incelendiğinde; temel seviye bandına göre, L=10 açısall momentum seviyesine kadar $\beta_0 = 7.9$ değeri için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçları ^{192}Pt çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüşmektedir. Şekil 4.18 incelendiğinde; Z(4)-D model tahminlerinin de ^{192}Pt çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüştüğü gözlenmiştir.

L=10 açısall momentum enerji seviyesine kadar $\beta_0 = 8.1$ değeri için Z(4)-K model tahmin sonuçlarının ^{194}Pt çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüştüğü Şekil 4.19'da görülmektedir. ^{194}Pt çekirdeğinin deneysel verilerinin, Z(4)-D model tahmin sonuçları ile L=10 açısall momentum enerji seviyesine kadar örtüştüğü fakat Z(4)-S model tahminlerinin L=4 açısall momentum enerji seviyesinden sonra uyumlu olmadığı Şekil 4.20'de görülmektedir.

^{196}Pt çekirdeğinin deneysel verileri ile $\beta_0 = 7.8$ değeri için Z(4)-K model tahminlerinin L=10 açısall momentum seviyesine kadar uyumlu olduğu Şekil 4.21'de görülmektedir. Z(4)-D model tahminlerinin L=10 açısall momentum enerji seviyesine kadar ^{196}Pt çekirdeğinin deneysel verileri ile uyumlu olduğu gözlenmiştir. Z(4)-S model tahminleri ise ilk üç enerji seviyelerini açıkladığı Şekil 4.22'de görülmektedir.

L=8 açısall momentum enerji seviyesine kadar $\beta_0 = 6.3$ değeri için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçlarının ^{198}Pt çekirdeğinin deneysel verileri ile eşleştiği Şekil 4.23'de gözlemlendi. Z(4)-D model tahminlerinin ^{198}Pt çekirdeğinin deneysel verileri ile L=8 enerji seviyesine kadar uyumlu olduğu Şekil 4.24'te görülmektedir.

Şekil 4.17, Şekil 4.19, Şekil 4.21 ve Şekil 4.23'te $^{192-196}\text{Pt}$ izotoplarının mevcut deneysel verileri Z(4)-K modeli ile çok iyi örtüşmektedir. Şekil 4.18, Şekil 4.20, Şekil 4.22 ve Şekil 4.24'te Z(4)-K model tahminleri ve Z(4)-D tahminleri $^{192-196}\text{Pt}$ çekirdek yapılarını Z(4)-S modeline göre iyi açıkladığı görülmektedir.

Şekil 4.25 incelendiğinde; $\beta_0 \rightarrow \infty$ değeri için Z(4)-K model tahminleri hem ^{192}Os çekirdeği ile hem de RTR modeli ile örtüşür (bkz. tablo 1). Bu sonuç, ^{192}Os çekirdeğinin bir RTR model çekirdeği olduğunu göstermektedir. Şekil 4.26 incelendiğinde; Z(4)-D model tahminlerinin ^{192}Os çekirdeğinin deneysel verileri ile L=12 açısai momentum enerji seviyelerine kadar örtüştüğü gözlenmiştir.

Şekil 4.25 ve Şekil 4.26 incelendiğinde; Z(4)-K ve Z(4)-D model tahminleri ^{192}Os çekirdek yapısını iyi açıkladığı gözlendi.

Tablo 4.2’de γ bandlarının numerik sonuçları, $^{74-76}\text{Ge}$, $^{110-114}\text{Ru}$, $^{128-132}\text{Xe}$, $^{192-196}\text{Pt}$, ^{192}Os mevcut deneysel verilerin ve Z(4) model tahminlerinin γ band sonuçlarının karşılaştırılması verilmiştir.

Tablo 4.3’de ise β_1 bandının enerji seviyelerinin numerik sonuçları bulunmaktadır. $^{74-76}\text{Ge}$, $^{110-114}\text{Ru}$, $^{128-132}\text{Xe}$, $^{192-196}\text{Pt}$, ^{192}Os çekirdek verilerinin karşılaştırma yapacak kadar verisi bulunmamaktadır ve bazı çekirdek deneysel verilerin ise β bandları gözlenmemiştir.

Bu çalışmanın sonucunda elde edilen veriler ışığında, Z(4)-K model tahminlerinin Z(4) modeline göre deneysel verileri daha iyi açıkladığı söylenebilir.

6. KAYNAKLAR

- Arfken, G., 1985. Laguerre Functions, *Mathematical Methods for Physicists*. Orlando, Florida, 721-731.
- Bayrak, O., Boztosun, I. ve Ciftci, H., 2007. Exact analytical solutions to the Kratzer potential by the asymptotic iteration method. *International Journal of Quantum Chemistry*, 107, 540–544.
- Bekdemir, C., Bekdemir, A. ve Han, J., 2006. Bound state solutions of the schrödinger equation for modified Kratzer’s molecular potential. *Chemical Physics Letters*, 417, 326-329.
- Berkdemir, C., 2012. Application of the Nikiforov-Uvarov Method in Quantum Mechanics.
- Bohr, A., 1952. The Coupling of Nuclear Surface Oscillations to the Motion of Individual Nucleons. *Dan. Mat. Fys. Medd.* 26, (14).
- Bohr, A. ve Mottelson, B.R., 1953. Collective and Individual-Particle Aspects of Nuclear Structure. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 27 (16).
- Bonatsos, D., Lenis, D., Petrellis, D. ve Terziev, P.A., 2004. Z(5): Critical point symmetry for the prolate to oblate nuclear shape phase transition. *Physics Letters B*, 588, 172-179.
- Bonatsos, D., Lens, D., Petrellis, D., Terziev, P.A. ve Yigitoglu, I., 2005. γ -rigid solution of the Bohr Hamiltonian for $\gamma = 30^\circ$ compared to the E(5) critical point symmetry. *Physics Letters B*, 621, 102-108.
- Bonatsos, D., Georgoudis P.E., Minkov, N., Petrellis, D. ve Quesne, C., 2013. Bohr Hamiltonian with deformation-dependent mass term for the Kratzer potential. *Physics Letters C*, 88, 034316.
- Boztosun, I., Bonatsos, D. ve Inci, I., 2008. Analytical solutions of the Bohr Hamiltonian with the Morse potential. *Physical Review C*, 77, 044302.
- Buganu, P. ve Budaca, R., 2015. Analytical Solution for the Davydov-Chaban hamiltonian with a Sextic potential for $\gamma = 30^\circ$. *Physical Review C*, 91, 014306.
- Casten, R.F., 1990. *Nuclear Structure From A Simple Perspective*. New York Oxford, Oxford University Press, 391p.
- Casten, R.F., 2006. Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei. *Nature Physics*, 2(12), 811–820.
- Casten, R.F. ve McCutchan, E.A., 2007. Quantum phase transitions and structural evolution in nuclei. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 34, R285-R320.
- Casten, R.F., 2009. Quantum phase transitions and structural evolution in nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 62, 183-209.
- Chabab, M., El Batoul A., Lahbas, A. ve Oulne, M., 2016. Electric quadrupole transitions of the Bohr Hamiltonian with Manning–Rosen potential *Nuclear Physics A*, 953, 158-175.
- Cizewski, J.A., Casten, R.F., Smith, G.J., Stelts, M.L., Kane, W.R., Borner, H.G. ve Davidson, W.F., 1978. Evidence for a new symmetry in nuclei: the structure of ^{196}Pt and the O(6) limit. *Physical Review Letters*, 40 (3), 167.
- Davydov, A.S. ve Filippov, G.F., 1958. Rotational states in even atomic nuclei. *Nuclear Physics*, 8, 237-249.

- Davydov, A.S. ve Rostovsky, V.S., 1959. Relative transition probabilities between rotational levels of non-axial nuclei. *Nuclear Physics*, 12, 58-68.
- Davydov, A.S. ve Chaban, A.A., 1960. Rotation-vibration interaction in non axial even nuclei. *Nuclear Physics A*, 20, 499-508.
- Fortunato, L., ve Vitturi A., 2004. New analytic solutions of the collective Bohr Hamiltonian for a β -Soft, γ -Soft axial rotor. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 30 (5), 627.
- Fortunato, L., 2005. Solutions of the Bohr Hamiltonian, a compendium. *The European Physical Journal A*, 26, s01, 1-30.
- Fortunato, L., De Baerdemacker, S. ve Heyde, K., 2006. Solution of the Bohr Hamiltonian for soft triaxial nuclei. *Physical Review C*, 74, 014310.
- Gizon, J., Gizon, A., Diamond, R.M. ve Stephens, F.S., 1978. Prolate-oblate transition in Nd isotopes. *Journal of Physics. G: Nuclear Physics*, 4(7), L171
- Iachello F., 1979. Group theoretical methods in physics. *Lecture Notes in Physics*, edited by A. Böhm (Lange Springer, Berlin,), 94, 420.
- Iachello, F. ve Arima, A., 1987. *The Interacting Boson Model*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Iachello, F. ve Levine, R.D., 1995. *Algebraic Theory of Molecules*. Oxford University Press., Oxford, England.
- Iachello, F., 2000. Dynamic symmetries at the critical point. *Physical Review Letters*, 85 (17), 3580-3583.
- Iachello, F., 2001. Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition. *Physical Review Letters*, 87 (5), 052502.
- Iachello, F., 2003. Phase transitions in angle variables. *Physical Review Letters*, 91, 132502.
- Kotb, M., 2016. U(5)-SU(3) Nuclear shape transition with in the interacting boson model applied to dysprosium isotopes. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 13(4), 451–459.
- Kratzer, A., 1920. Die ultraroten Rotationsspektren der Halogenwasserstoffe. *Zeitschrift für Physik*, 3, 289.
- Le Roy, R.J. ve Bernstein, R.B., 1970. dissociation energy and long-range potential of diatomic molecules from vibrational spacings of higher levels. *The Journal of Chemical Physics*, 52, 3869.
- Meyer-ter-Vehn, J. 1975. Collective model description of transitional odd-A nuclei, The triaxial-rotor-plus-particle model, *Nuclear Physics A*, 249, 111-140.
- Naderi, L. ve Hassanabadi H., 2016. Bohr Hamiltonian with Eckart potential for triaxial nuclei. *The European Physical Journal Plus*, 131, 133.
- Nikiforov, A.F. ve Uvarov V.B., 1988. *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhauser, Basel.
- Podolsky, B., 1928. Quantum-Mechanically correct form of hamiltonian function for conservative systems, *Physical Review*, 32, 812-816.
- Scharff -Goldhaber, G. ve Weneser, J.J., 1955. System of even-even nuclei. *Physical Review*, 98, 212–214.
- Sitenko, A.G. ve Tartakovski, V.K., 1975. *Lectures on the Theory of the Nucleus*. Pergamon, Oxford.

- Sobhani, H. and Hassanabadi, H., 2016. Study of Davydov–Chaban approach considering shifted Killingbeck potential for any l -state. *Modern Physics Letters A*, 31, 1650152.
- Sobhani, H. ve Hassanabadi, H., 2017. Electric quadrupole transitions for some isotopes of Xenon; considering rigidity for $\gamma=30^\circ$ collective parameter. *Nuclear Physics A*, 957, 177–183.
- Szego, G., 1959. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, New York.
- Tezcan, C., ve Sever, R., 2009. A General Approach for the Exact Solution of the Schrödinger Equation. *International Journal of Theoretical Physics*, 48, 337–350.
- Wilets, L. ve Jean, M., 1956. Surface oscillations in even-even nuclei. *Physical Review*, 102, 788–796.
- Yigitoglu, I. ve Bonatsos, D., 2011. Bohr Hamiltonian with Davidson potential for triaxial nuclei. *Physical Review C*, 83, 014303.
- Yigitoglu, I. ve Gokbulut, M., 2018. Bohr Hamiltonian for $\gamma=30^\circ$ with Davidson potential. *European Physical Journal Plus*, 133, 129.
- Zamfir N.V., ve Casten R.F., 1991. Signatures of γ softness or triaxiality in low energy nuclear spectra. *Physics Letters B*, 260, 265-270.

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Burcu UÇAR

Doğum Yeri : Tokat

Doğum Tarihi : 11/06/1986

Medeni Hali : Bekar

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

İlkokul : Bağcılar İnönü İlköğretim Okulu (1996)

Ortaokul : Tokat Atatürk Lisesi (2000)

Lise : Tokat Atatürk Lisesi (2004)

Lisans : Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi (2014)

Yayımlar : **Ucar, B.**, Yiğitoğlu İ., Kabalay İ.A., Altınparmak D. ve Kılıçaslan S., 2015. An investigation on some of the tumor treatment cases using X-rays and electron beams. EPJ Web of Conferences, 100,03005.

Yiğitoglu, İ., Oner F., Yalim H.A. and **Ucar B.**, 2016. Measurements of radon concentrations in Spa waters in Amasya, Turkey. AIP Conference Proceedings 1726, 020123.

Bildiriler : Yiğitoglu, İ., Oner F., Yalim H.A. and **Ucar B.**, 2016. Measurements of radon concentrations in Spa waters in Amasya, Turkey. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya.

Yigitoglu, İ. ve **Ucar, B.**, 2018. Bohr Hamiltonian for $\gamma=30^\circ$ with Kratzer potential. 4th International Conference on Theoretical and Experimental Studies in Nuclear Applications and Technology, Antalya.

Yigitoglu, İ. ve **Ucar, B.**, 2018. A solution of Bohr Hamiltonian for $\gamma \approx 30^\circ$ with Kratzer Potential. 4th International Conference on Theoretical and Experimental Studies in Nuclear Applications and Technology, Antalya.

Poster

:Yigitoglu, İ. ve **Ucar B.**, 2016. An Analytical Solution of Bohr Hamiltonian with Davidson Potential for E(5) Model using the Nikiforov-Uvarov Method. Turkish Physical Society 32nd International Physics Congress, Bodrum.

Yaz - Kış Okulları

:Nükleer Ve Parçacık Fiziğinde Monte Carlo Uygulamaları Bahar Okulu, 2-6 Eylül, 2015, Amasya Üniversitesi, Amasya.

Nükleer Bilimler ve Uygulamaları Kış Semineri, 4-11 Şubat, 2016, Ankara Üniversitesi, Ilgaz / Örsem.

