T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

DERYA ALTAN

Yüksek Lisans Tezi Matematik
Anabilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN
2018

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

DERYA ALTAN

TOKAT
2018

Derya ALTAN tarafından hazırlanan "**Kısmi Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri Üzerine**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **01 EKİM 2018**tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **MATEMATİK ANA BİLİM DALI** 'nda**YÜKSEK LİSANS TEZİ**olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Filiz YILDIZ Hacettepe Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....

ONAY

Prof. Dr. Ebubekir ALTUNTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

05/10/2018

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

DERYA ALTAN
01/10/2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Derya ALTAN

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde metrik uzay ve kısmi metrik uzaylardaki sabit nokta teorisi çalışmalarıyla ilgili genel bilgi verilmiştir. İkinci bölümde metrik uzaylar ve sabit nokta ile ilgili temel tanım, örnek ve kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde kısmi metrik uzay kavramı verilerek bunun metrik uzay ile karşılaştırması yapılmıştır. Ayrıca bu uzaylarda yeni bir takım topolojik kavramlardan bahsedilmiştir. Son bölümde ise, kısmi metrik uzaylar üzerinde bazı büzülme koşullarını sağlayan dönüşümler için sabit nokta, çakışık nokta ve ortak sabit nokta teoremleri ispat edilmiştir.

2018, 57 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Kısmi Metrik Uzay, 0- Tam Uzay, Büzülme Dönüşümü, Sabit Nokta.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON SOME FIXED POINT THEOREMS IN PARTIAL METRIC SPACES

Derya ALTAN

Tokat Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

In the first part of this thesis, general information about the studies related fixed point theory in metric spaces and partial metric spaces is given. In the second part of the this thesis it is mentioned that basic definitions, examples and concepts with about metric spaces and fixed points. In the third section, the concept of partial metric space is given and this partial metric spaces are compared with the metric spaces. Also, some new topological conceps in the partial metric spaces are mentioned. Finally, in the fourth part, the theorems related with fixed point, coincidence point and common fixed point are proved for some contractive mappings on partial metric spaces.

2018, 57 pages

KEYWORDS: Partial Metric Space, 0-Complete Space, Contractive Mapping, Fixed Point.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgiyle yaparak tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazımım boyunca yol gösterici katkılarıyla destek olan Arş. Gör. Dr. Orhan ÖZDEMİR'e, Matematik Öğretmeni arkadaşım Seda CEYLAN'a, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan başta ailem olmak üzere herkese sonsuz teşekkür ederim.

DERYA ALTAN

Ekim 2018

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
R	Reel sayılar kümesi
R^+	Pozitif reel sayılar kümesi
Z	Tam sayılar kümesi
N	Doğal sayılar kümesi
N_0	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
Q	Rasyonel sayılar kümesi
C	Kompleks sayılar kümesi
∞	Sonsuzluk
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük veya eşit
$>$	Büyük
$\geq$	Büyük veya eşit

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi matematiğin bir çok dalında özellikle uygulamalı matematik ve diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği problemlerinde sıklıkla kullanılan bir teoridir. Son yüzyılda matematiğin, fonksiyonel analiz, lineer olmayan fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teori, potansiyel yaklaşım teorisi, kontrol sistemleri ve oyun teorisi gibi bir çok alanında sabit nokta teorisinden faydalanılarak çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca sabit nokta teorisinin; mühendislik, istatistik ve esneklik teorisi gibi alanlarda da bir takım uygulamalarına rastlamak mümkündür. Son yıllarda metrik uzay kavramının genelleştirmesi olarak bazı yeni uzaylar tanımlanmış ve literatürde yer alan çalışmalar bu uzaylara aktarılmıştır. Matthews (Matthews, 1994, 1992) 1994 yılında metrik uzaylar kavramını kısmi metrik uzaylar kavramına genelleştirmiştir. Daha sonra (Oltra ve Valero, 2004) Oltra ve Valero, (Ilić ve ark., 2012, 2011) D"Iliç, V. Pavloviç, V. Rakoceviç gibi araştırmacılar farklı büzülme koşullarını sağlayan dönüşümler için bu uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri vermişlerdir. Son zamanlarda (Abdeljawad ve ark., 2012) T. Abdeljawad, E. Karapınar ve K. Taş kısmi metrik uzaylar üzerine kontrol fonksiyonlarıyla genelleştirilmiş büzülme prensibi için bir sabit nokta sonucu ispatlamışlardır. Bunun dışında M. Abbas, T. Nazir, R.P. Agarwal, I. Altun, F. Şalah ve H. Şimşek bu uzaylarda bazı yeni sabit nokta sonuçları vermişlerdir. Bu tez çalışmasındaki amacımız, yukarıda bahsettiğimiz kaynaklar ışığında kısmi metrik uzaylarda bazı sabit nokta, çakışık nokta ve ortak sabit nokta teoremlerini ele almaktır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde, tezin ileri bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun.

$$Tx = x \tag{2.1.1}$$

eşitliğini sağlayan $x \in X$ elemanına T nin bir sabit noktası denir.

Aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi $T : X \to X$ ile tanımlanan bir T fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya bir sabit noktası olabilir ya da birden çok sabit noktası olabilir.

Örnek 2.1.2. **a)** $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $a \neq 0$ olmak üzere $Tx = a + x$ ile tanımlanan $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ öteleme (translation) fonksiyonunun sabit noktası yoktur.

b) $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $0 < \theta < 2\pi$ için,

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ile verilen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönme (rotation) fonksiyonunun yalnız bir sabit noktası vardır ve bu $(0, 0)$ noktasıdır.

c) $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanı

$$T(x, y) = (x, -y)$$

ile tanımlanan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yansıma fonksiyonunun sabit noktasıdır. Yani T fonksiyonunun sonsuz sayıda sabit noktası vardır.

I, X üzerindeki birim fonksiyon olmak üzere $T : X \to X$ fonksiyonunun sabit noktaları aslında

$$(T - I)(x) = 0 \tag{2.1.2}$$

denkleminin çözümleridir. O halde bir denklemin çözümünü bulmak için standart bir teknik, buna karşılık gelen fonksiyonun sabit noktalarını bulmaktır.

Tanım 2.1.3. (X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\ x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$$

olacak şekilde bir $0 < \alpha < 1$ varsa, T ye bir daralma (büzülme) fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.4. X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun.

$$T \circ T(x) = T(T(x))$$

ile tanımlanan fonksiyon da X den X e bir fonksiyondur ve T nin ikinci iterasyonu adını alır. Genel olarak n adet T den elde edilen $T \circ T \circ T \circ ... \circ T(x)$, *n.iterasyon* adını alır ve

$$\underbrace{T \circ T \circ T \circ ... \circ T(x)}_{n \text{ adet } T} = T(T(...T(x)...))$$

ile verilir. Ayrıca, $T^n = \underbrace{T \circ T \circ ... \circ T}_{n \text{ adet } T}$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.5. a) $T(x) = x^2$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun üçüncü iterasyonu

$$T^3(x) = T(T(T(x))) = \left(\left(x^2\right)^2\right)^2 = x^8$$

ile verilir.

b) $T(x) = x^2 - 1$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun dördüncü iterasyonu

$$T^4(x) = T(T(T(T(x)))) = \left(((x^2-1)^2-1)^2-1\right)^2 - 1$$

ile verilir.

Aşağıda vereceğimiz Banach sabit nokta teoremi, bir tam metrik uzay üzerindeki herhangi bir daralma fonksiyonu için bir sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti ederek ve onu hesaplamak için bir metod sağlar.

Teorem 2.1.6. (X, d) tam metrik uzay olmak üzere $T : X \to X$ bir daralma fonksiyonu ise o zaman

i) T nin bir ve yalnız bir sabit $x \in X$ noktası vardır.

ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyonu dizisi, T nin bu sabit noktasına yakınsar. (Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisi T nin bu sabit x noktasına yakınsar.)

Tanım 2.1.7. (Ahmad ve ark., 2012)f ve g, X ' in kendi içine birer dönüşümü olsun. Bazı $x \in X$ için

$$w = fx = gx$$

ise x, f ve g ' nin bir çakışık noktası olarak adlandırılır. Burada w, f ve g ' nin bir çakışma noktasıdır.

Tanım 2.1.8. (Ahmad ve ark., 2012) f ve g, X ' in kendi içine birer dönüşümü olsun.

$$w = fw = gw$$

koşulunu sağlayan bir $w \in X$, f ve g ' nin ortak sabit noktasıdır.

Tanım 2.1.9. (Ahmad ve ark., 2012) Kendi içine iki f, g dönüşümü, eğer kendi çakışık noktalarında değişmeli ise zayıf uyuşabilirdir.

Lemma 2.1.10. (Ahmad ve ark., 2012) f ve g, bir X kümesinin zayıf uyuşabilir dönüşümleri olsun. Eğer f ve g bir tek $w = fx = gx$ çakışık noktasına sahipse w, f ve g ' nin ortak sabit noktasıdır.

Tanım 2.1.11. (Nashine ve ark., 2013) $(X, \preceq)$ kısmi sıralı küme olsun. O halde ;

a) $x \preceq y$ veya $y \preceq x$ ise $x, y \in X$ elemanları karşılaştırılabilirdir adını alır.

b) κ, X ' in alt kümesi ve κ ' nın herhangi iki elemanı karşılaştırılabilirse iyi sıralı küme adını alır.

c) Bir $T : X \to X$ dönüşümü, eğer

$$x \preceq y \Rightarrow Tx \preceq Ty$$

koşulunu sağlıyorsa azalmayan dönüşümdür.

Tanım 2.1.12. (Nashine ve ark., 2013) $(X, \preceq)$ kısmi sıralı küme olsun. Eğer $\delta, T : X \to X$ dönüşümleri $\forall\ x \in X$ için

$$\delta x \preceq T\delta x \text{ ve } Tx \preceq \delta Tx$$

koşulunu sağlıyorsa T ve δ dönüşüm çifti zayıf artandır denir.
Dikkat edilirse, zayıf artan iki dönüşüm azalan olmak zorunda değildir. Bunu göstermek için bazı örnekler mevcuttur (Altun ve ark., 2009). Bu bölümde, T-zayıf izoton artan olma özelliğini sağlayan bir dönüşüm çifti için bir ortak sabit nokta teoremi vereceğiz. Bunun için (Nashine ve ark., 2011) da verilmiş şu tanıma ihtiyacımız vardır.

Tanım 2.1.13. (Nashine ve ark., 2013) $(X, \preceq)$ kısmi sıralı küme ve $\delta, T : X \to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\delta x \preceq T\delta x \preceq \delta T\delta x$$

şartı sağlanıyorsa, δ ve T dönüşümü zayıf izoton artan olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.14. (Nashine ve ark., 2013) Eğer $\delta, T : X \to X$ zayıf artan dönüşüm ise δ ve T zayıf izoton artan dönüşümdür.

3. KISMİ METRİK UZAYLAR VE BAZI ÖZELLİKLERİ

3.1. Kısmi Metrik Uzaylar

Tanım 3.1.1. (Ahmad ve ark., 2012) X boş olmayan bir küme ve $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu, $\forall\ x, y, z \in X$ için aşağıda verilen şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(p1) $x = y \ \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$

(p2) $p(x,x) \leq p(x,y)$

(p3) $p(x,y) = p(y,x)$

(p4) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

Bu durumda p, X üzerinde kısmi metrik, (X,p) ikilisine de kısmi metrik uzay denir. Eğer $p(x,y) = 0$ ise $(p1)$ ve $(p2)$ ' den $x = y$ elde edilir. Fakat $x = y$ ise $p(x,y)$ değeri 0 olmayabilir.

Lemma 3.1.2. Her metrik uzay bir kısmi metrik uzaydır.

Örnek 3.1.3. $p : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ ve $p(x,y) = \max\{x,y\}$ dönüşümünü alalım. $x, y, z \in [0,\infty)$ ve $0 \leq x \leq y \leq z$ olsun.

p1) $\max\{x,x\} = \max\{x,y\} = \max\{y,y\}$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $x = y$ olmasıdır.

p2) $x \leq y$ olduğundan $\max\{x,x\} \leq \max\{x,y\}$ ' dır.

p3) $\max\{x,y\} = \max\{y,x\}$ olduğu açıktır.

p4) $\max\{x,y\} = y, \max\{x,z\} = z, \max\{z,y\} = z, \max\{z,z\} = z,$ olduğundan $\max\{x,y\} \leq \max\{x,z\} + \max\{z,y\} - \max\{z,z\}$ olduğu kolaylıkla görülür.

Kısmi metrik aksiyomları sağlandığından p bir kısmi metrik ve $([0,\infty), p)$ de kısmi metrik uzay olur. Fakat $(m2)$ özelliğini sağlamadığından p metrik değildir.

Örnek 3.1.4. Ω, $\mathbb{R}$ de boştan farklı kapalı sınırlı aralıkların kümesi, yani $\Omega = \{[x,y] : x \leq y\}$ olsun. $[x,y], [z,t], [k,l] \in \Omega$ için

$$p([x,y],[z,t]) = \max\{y,t\} - \min\{x,z\}$$

olsun ve $x \leq z \leq k$ ve $y \leq t \leq l$ alalım.

p1) Eğer $\max\{y,y\} - \min\{x,x\} = \max\{y,t\} - \min\{x,z\} = \max\{t,t\} - \min\{z,z\}$ ise $y - x = t - x = t - z$ ' dir. Yani $x = z$ ve $y = t$ ' dir.

p2) $y - x \leq t - x$ olduğundan $\max\{y,y\} - \min\{x,x\} \leq \max\{y,t\} - \min\{x,z\}$ elde edilir.

p3) $\max\{y,t\} - \min\{x,z\} = \max\{t,y\} - \min\{z,x\}$ olduğu açıktır.

p4) $\max\{y,t\} - \min\{x,z\} = t - x$, $\max\{y,l\} - \min\{x,k\} = l - x$, $\max\{l,t\} - \min\{k,z\} = t - k$, ve $\max\{l,l\} - \min\{k,k\} = l - k$ olduğundan $t - x \leq (l - x) + (l - z) - (l - k)$ ' dır. Bu durumda

$$p([x,y],[z,t]) \leq p([x,y],[k,l]) + p([k,l],[z,t]) - p([k,l],[k,l])$$

elde edilir. Kısmi metrik aksiyomları sağlandığından p bir kısmi metrik ve (Ω, p) de kısmi metrik uzay olur.

Tanım 3.1.5. $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $x \in X$ ve (X,p) kısmi metrik uzay olsun.

$$B_p(x,\epsilon) = \{y : p(x,y) < p(x,x) + \epsilon\}$$

kümesine x merkezli ϵ yarıçaplı p -açık yuvar denir.

X üzerindeki her p kısmi metriği, $\forall\, x \in X$ ve $\epsilon > 0$ için X üzerindeki p -açık yuvarlarının ailesini taban olarak kabul eden bir τ_p topolojisi üretir. Bu τ_p topolojisi ile birlikte (X, τ_p) bir T_0 uzaydır.

Örnek 3.1.6. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $p : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ ve $p(x, y) = |x - y|$ olarak tanımlanırsa p bir kısmi metrik ve $(\mathbb{R}, p)$ kısmi metrik uzay olur.

Gerçekten de $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$ için

p1) $x = y$ ise

$$p(x, x) = |x - x| = 0, p(x, y) = |x - y| = 0, p(y, y) = |y - y| = 0$$

olduğundan

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

dir. Bu taktirde

$$|x - x| = |y - y| = |x - y| = 0$$

olup $x = y$ ' dır. Dolayısıyla

$$x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

olur.

p2) $p(x, x) = |x - x| = 0 \leq p(x, y) = |x - y|$ ' dır.

p3) $p(x, y) = |x - y| = |y - x| = p(x, y)$ ' dır.

p4)

$$\begin{aligned} p(x, z) &= |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| - |y - y| \\ &= p(x, y) + p(y, z) - p(y, y) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla kısmi metrik aksiyomları sağlandığından $p(x, y) = |x - y|$ kısmi metriğine göre (X, p) bir kısmi metrik uzay olur.

Şimdi p kısmi metriğine göre açık yuvar kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} B_p(x,\epsilon) &= \{y : p(x,y) < p(x,x) + \epsilon\} = \{y : |x-y| < |x-x| + \epsilon\} \\ &= \{y : |x-y| < 0 + \epsilon\} = \{y : |y-x| < \epsilon\} \\ &= (x-\epsilon, x+\epsilon). \end{aligned}$$

Tanım 3.1.7. $F \subseteq X$ bir küme ve (X,p) kısmi metrik uzay olsun. $B_p(x,\epsilon) \subseteq F$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa F kümesine x ' in bir komşuluğu denir. $\aleph(x)$, x ' in bütün komşuluklarının kümesini gösterir.

Tanım 3.1.8. (X,p) kısmi metrik uzay ve $M \subseteq X$ olsun. $\forall\, x \in M$ için $B_p(x,\epsilon) \subseteq M$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ varsa M ' ye τ_p -açık denir.

Teorem 3.1.9. Bütün p -açık yuvarlar τ_p -açıktır.

İspat. (X,p) kısmi metrik uzay ve $B_p(z,r)$ açık yuvarını alalım. Şimdi,

$$\epsilon = r + p(z,z) - p(x,z)$$

seçilirse, $B_p(x,\epsilon) \subseteq B_p(z,r)$ olduğunu göstereceğiz: $y \in B_p(x,\epsilon)$ alalım. Bu durumda $p(x,y) < p(x,x) + \epsilon$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} p(z,y) &\leq p(z,x) + p(x,y) - p(x,x) \\ &< p(z,x) + p(x,x) + \epsilon - p(x,x) \\ &= p(z,x) + \epsilon \\ &= p(z,x) + r + p(z,z) - p(x,z) \\ &= p(z,z) + r \end{aligned}$$

dir. Böylece $y \in B_p(z,r)$ elde edilir.

Tanım 3.1.10. $K \subseteq X$ olsun. Eğer K ' nın tümleyeni $X - K$ τ_p -açık ise K alt kümesine τ_p -kapalıdır denir.

Tanım 3.1.11. (X,p) kısmi metrik uzay olsun ve X ' in bir A alt kümesini alalım. x ' in her komşuluğu A kümesinde bir nokta içeriyorsa, X ' deki bütün x noktalarının kümesine A ' nın kapanışı denir ve

$$\overline{A} = \{\forall x \in X : \forall F \in \aleph(x), F \cap A \neq \varnothing\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.12. (X,p) kısmi metrik uzay ve $L \subseteq X$ olsun. Eğer $\overline{L} = X$ oluyorsa L ' ye X ' de yoğun küme denir.

Tanım 3.1.13. (Nashine ve ark., 2013) (X,p) kısmi metrik uzay olsun. Bu taktirde

1. (X,p) üzerinde bir $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$$

varsa (ve sonlu ise) $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

2. (X,p) kısmi metrik uzayındaki bir $\{x_n\}$ dizisi için

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x)$$

ise $\{x_n\}$ $x \in X$ noktasına yakınsar.

3. X üzerindeki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi τ_p topolojisine göre

$$p(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktasına yakınsarsa (X,p) tam uzay adını alır.

4. $T : X \to X$ dönüşümü ve $\forall\ \epsilon > 0$ için

$$T(B_p(x_0, \delta)) \subset B_p(Tx_0, \epsilon)$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ varsa T, $x_0 \in X$ de sürekli dönüşümdür.

Ayrıca bir tam kısmi metrik uzayın her τ_p -kapalı alt kümesi tamdır.

Tanım 3.1.14. (Ahmad ve ark., 2012) (X,p) kısmi metrik uzayındaki bir $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

ise $\{x_n\}$ 0-Cauchy olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.15. (Ahmad ve ark., 2012) (X,p) üzerindeki $\{x_n\}$ dizisi, eğer ;

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

ise 0 -Cauchy dizisi (τ_p göre) ' dir ve $\{x_n\}$,

$$p(x,x) = 0$$

olacak şekilde $x \in X$ noktasına yakınsarsa (X,p) uzayına 0 -tamdır denir.

Teorem 3.1.16. (Ahmad ve ark., 2012) Açık olarak kısmi metrik uzayda bir dizinin limitinin tek olması gerekmez. Ayrıca $p(\cdot,\cdot)$ fonksiyonu $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ iken $p(x_n, y_n) \to p(x,y)$ olması anlamında sürekli olmak zorunda değildir.

Örneğin; Eğer $X = [0,\infty]$ ve $x, y \in X$ için

$$p(x,y) = \max\{x,y\}$$

alınırsa $\forall\ x \geq 1$ ve $\{x_n\} = \{1\}$ için

$$p(x_n, x) = x = p(x,x)$$

dır ve böylece örneğin; $n \to \infty$ iken

$$x_n \to 2 \text{ ve } x_n \to 3$$

olur. Ancak

$$p(x_n, x) \to p(x,x) = 0$$

ise $\forall\ y \in X$ için

$$p\left(x_n, y\right) \to p\left(x, y\right)$$

dır.

Lemma 3.1.17. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) kısmi metrik uzay ve $\{y_n\}$ X de $p\left(y_n, y_{n+1}\right)$ artmayan ve

$$\lim_{n\to\infty} p\left(y_n, y_{n+1}\right) = 0 \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde bir dizi olsun. Eğer $\{y_{2n}\}, (X, p)$ içinde bir 0-Cauchy dizisi değilse $\epsilon > 0$ vardır üstelik, $m_k > n_k > k$ olacak şekilde pozitif tamsayıların iki dizisi $\{m_k\}$ ve $\{n_k\}$ vardır. Ve aşağıdaki dört dizi $k \to \infty$ olduğunda

$$p\left(y_{2m_k}, y_{2n_k}\right), p\left(y_{2m_k}, y_{2n_{k+1}}\right), p\left(y_{2m_{k-1}}, y_{2n_k}\right), p\left(y_{2m_{k-1}}, y_{2n_{k+1}}\right) \tag{3.1.2}$$

olup ϵ^+ 'na gider.

Lemma 3.1.18. (Ahmad ve ark., 2012) Dönüşümlerin iki sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\Psi = \{\psi \mid \psi : [0, \infty] \to [0, \infty]\}$$

$\forall\ t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \psi^n\left(t\right) = 0$$

olacak şekilde azalmayan bir sağdan sürekli fonksiyon ve

$$\Phi = \{\psi \mid \psi : [0, \infty] \to [0, \infty]\}$$

$\forall\ t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n\left(t\right) = 0$$

olacak şekilde azalmayan bir fonksiyon olsun.

Bu durumda,

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 1 \\ \frac{2}{3}t & , \quad t > 1 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

3.1.3 fonksiyonu için $\psi \in \Phi$ ancak $\psi \notin \Psi$ olduğu açıktır.

Lemma 3.1.19. (Ahmad ve ark., 2012) $\psi \in \Phi$ ise $\forall\, t > 0$ için $\psi(t) < t$ ve $\psi(0) = 0$ dır.

Tanım 3.1.20. (Nashine ve ark., 2013) X boş olmayan kümesi için

i) (X, p) kısmi metrik uzay ve

ii) $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme

şartları sağlanır ise $(X, p, \preceq)$ üçlüsüne, sıralı kısmi metrik uzay **denir.**

Tanım 3.1.21. (Nashine ve ark., 2013) $(X, p, \preceq)$ sıralı kısmi metrik uzay olsun. Eğer $\{z_n\}$, $\preceq$ bağıntısına göre X ' de azalmayan bir dizi öyle ki

$$n \to \infty \text{ iken } z_n \to z$$

ve $z \in X$ olduğunda $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$z_n \preceq z$$

koşulları sağlanırsa X düzenlidir denir.

3.2. Kısmi Metrik Uzayların Ürettiği Metrik Uzay Ve Özellikleri

Teorem 3.2.1. (Ahmad ve ark., 2012) (X,p) kısmi metrik uzay olsun.

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

olarak tanımlanan $p^s : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir metriktir.

İspat. 1) a) $x, y, z \in X$ alalım.

$$\begin{aligned}
p^s(x,y) = 0 &\Longrightarrow 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0 \\
&\Longrightarrow 2p(x,y) = p(x,x) + p(y,y) \\
&\Longrightarrow 2p(x,y) = p(x,x) + p(x,x) \wedge 2p(x,y) = p(y,y) + p(y,y) \\
&\Longrightarrow 2p(x,y) = 2p(x,x) \wedge 2p(x,y) = 2p(y,y) \\
&\Longrightarrow p(x,y) = p(x,x) = p(y,y) \\
&\Longrightarrow x = y
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $x = y$ olsun. $p^s(x,y) = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\
&= 2p(x,y) - p(x,y) - p(x,y) \\
&= 2p(x,y) - 2p(x,y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur.

2) $p^s(x,y) = p^s(y,x)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\
&= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x) \\
&= p^s(y,x)
\end{aligned}$$

dir.

3) $p^s(x,y) \leq p^s(x,z) + p^s(z,y)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\
&\leq 2\left[p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)\right] - p(x,x) - p(y,y) \\
&\leq 2p(x,z) + 2p(z,y) - p(z,z) - p(z,z) - p(x,x) - p(y,y) \\
&= \left[2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z)\right] + \left[2p(z,y) - p(z,z) - p(y,y)\right] \\
&= p^s(x,z) + p^s(z,y)
\end{aligned}$$

dır. Böylece, $\forall\ x,y,z \in X$ için 1), 2), 3) şartları sağlandığından (X,p^s) bir metrik uzaydır.

Örnek 3.2.2. 1. $(\mathbb{R}^+, p)$ çifti kısmi metrik uzay için aşikar bir örnektir. $\forall\ x,y \in \mathbb{R}^+$ için

$$p(x,y) = \max\{x,y\}$$

dır. Ürettiği metrik ise

$$p^s(x,y) = 2\max\{x,y\} - x - y = |x-y|$$

dır.

2. Eğer (X,d) bir metrik uzay ve $c \geq 0$ keyfi sabit ise bu taktirde

$$p(x,y) = d(x,y) + c$$

şeklinde tanımlanan p, X üzerinde bir kısmi metrik olup ürettiği metrik ise

$$p^s(x,y) = 2d(x,y)$$

dır.

Lemma 3.2.3. (Nashine ve ark., 2013) (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun.

a) $\{x_n\}$ ' in (X, p) kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul (X, p^s) metrik uzayında da bir Cauchy dizisi olmasıdır.

b) (X, p) kısmi metrik uzayı tamdır $\Longleftrightarrow$ (X, p^s) metrik uzayı tamdır. Ayrıca

$$p(x, x) = \lim_{n \to \infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m \to \infty} p(x_n, x_m)$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \to \infty} p^s(x_n, x) = 0$$

olmasıdır.

Lemma 3.2.4. (Nashine ve ark., 2012) (X, p) kısmi metrik uzay olsun. p^s, d : $X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ olmak üzere

$$p^s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y),$$

ve

$$d(x, y) = \max\{p(x, y) - p(x, x), p(x, y) - p(y, y)\}$$

dönüşümleri X üzerinde metriklerdir. Bu dönüşümler için eğer $[0, \infty)$ kümesi üzerinde $p(x, y) = \max\{x, y\}$ kısmi metriğini alırsak aşağıdaki sonucunu elde ederiz.

Sonuç 3.2.5. (Nashine ve ark., 2012) $T : X \longrightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında τ_p topolojisine göre sürekli ise bu taktirde X-deki her bir $\{x_n\}$ dizisi için

$$x_n \longrightarrow x_0 \Rightarrow Tx_n \longrightarrow Tx_0$$

dır. Yani

$$p(x_n, x_0) \longrightarrow p(x_0, x_0) \Longrightarrow p(Tx_n, Tx_0) \longrightarrow p(Tx_0, Tx_0) \tag{3.2.4}$$

dır. X üzerinde kendi içine dönüşümler için p^s-süreklilik ve p-süreklilik kavramları karşılaştırılamaz.

Örnek 3.2.6. (O'Neill, 1996) $X : [0,+\infty)$, $p(x,y) = \max\{x,y\}$ (ve böylece $p^s(x,y) = |x-y|$) ve $x > 0$ için

$$T0 = 1,\ Tx = x^2 \text{ ve } Sx = |\ sinx|$$

olsun. Bu taktirde $x = \pi$ noktasında S, p^s -sürekli ve p -süreksiz iken T ' nin $x = 0$ noktasında p^s -süreksiz ve p -sürekli olduğunu göstermek kolaydır.

Lemma 3.2.7. i) (Abdeljawad ve ark., 2012; Karapinar ve Erhan, 2011)

Eğer $n \to \infty$ iken $p(x_n, z) \longrightarrow p(z,z) = 0$ ise bu taktirde

$$\forall\ y \in X \text{ için } n \to \infty \text{ iken } p(x_n, y) \longrightarrow p(z,y)$$

dır.

ii) (X,p) üzerindeki her 0 -Cauchy dizisi (X,p^s) de Cauchy dizisidir.

iii) Eğer (X,p) tam ise 0 -tamdır.

(ii) ve (iii) ' nin karşıtı doğru değildir. Aşağıdaki basit örnek ile gösterelim.

Örnek 3.2.8. (Romaguera, 2012) $X = [0,\infty) \cap \mathbb{Q}$ $p(x,y) = \max\{x,y\}$ kısmi metriğine göre 0 -tamdır. Fakat tam değildir (Çünkü ; $p^s(x,y) = |x-y|$ ve (X,p^s) tam değidir). Dahası $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 1$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (X,p) üzerinde bir Cauchy dizisidir. Fakat 0 -Cauchy dizisi değildir.

4. KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1. Kısmi Metrik Uzaylarda Ortak Sabit Nokta Teoremleri Ve Sonuçları

Bu bölümde, kısmi metrik uzaylar üzerinde bazı büzülme koşullarını sağlayan dönüşümler için sabit nokta, çakışık nokta ve ortak sabit nokta teoremleri verilecektir.

Teorem 4.1.1. (Nashine ve ark., 2013) T, (X,p) tam kısmi metrik uzayından kendi içine bir dönüşüm olsun. Bu durumda,
$\forall$ x,y$\in$ X için 0<c<1 olacak şekilde bir c reel sayısı var öyle ki

$$p(Tx, Ty) \leq cp(x, y)$$

koşulunu sağlayan T dönüşümü, bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.1.2. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) kısmi metrik uzay T ve f, X üzerinde $TX \subset fX$ koşulunu sağlayan dönüşümler olsun.

Kabul edelim ki, $\forall\ x, y \in X$ için $\psi \in \Psi$ olmak üzere

$$p(Tx, Ty) \leq \psi\left(\max\left\{p(fx, fy), p(fx, Tx), p(fy, Ty), \frac{p(fx, Ty) + p(fy, Tx)}{2}\right\}\right) \tag{4.1.5}$$

dır. TX ya da fX, X ' in 0-tam alt uzayı ise T ve f tek bir çakışık noktaya sahiptir. Üstelik T ve f zayıf uyuşabilirse, T ve f ' nin bir tek ortak sabit noktası vardır.

İspat. Öncelikle T ve f 'nin tek bir çakışık noktası olduğunu ispatlayalım.

$$y = Tu = fu \text{ olmak üzere } y \in X$$

ve

$$z = Ts = fs \text{ olmak üzere } z \in X$$

ise $z \neq y$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}
p(y,z) &= p(Tu,Ts) \\
&\leq \psi\left(\max\left\{p(fu,fs), p(fu,Tu), p(fs,Ts), \frac{p(fu,Ts)+p(fs,Tu)}{2}\right\}\right) \\
&= \psi\left(\max\left\{p(y,z), p(y,y), p(z,z), \frac{p(y,z)+p(z,y)}{2}\right\}\right) \\
&= \psi(p(y,z)) \\
&< p(y,z) \qquad (4.1.6)
\end{aligned}$$

dır. Bu taktirde, $p(y,z) < p(y,z)$ elde edilir ki bu ise bir çelişkidir. Bu nedenle $z = y$ ' dır.

Şimdi $x_0 \in X$ ve $T_{x_n} = fx_{n+1}$ olmak üzere $\{x_n\} \subset X$ dizisini tanımlayalım. Olası iki durumu düşünelim.

i) Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $p(Tx_{n+1}, Tx_n) = 0$. Bu durumda, $Tx_n = fx_n$ ($= y$ bir çakışık noktası) Lemma 2.1.10 (tek çakışık noktası ve zayıf uyuşabilir dönüşümler) nedeniyle tek bir sabit noktaya sahiptir.

ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $p(Tx_{n+1}, Tx_n) > 0$. Bu durumda,

$$x = x_{n+1} \text{ ve } y = x_n$$

ile (4.1.5) uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
p\left(Tx_{n+1}, Tx_n\right) &\leq \psi\left(\max\left\{p\left(fx_{n+1}, fx_n\right), p\left(fx_{n+1}, Tx_{n+1}\right), p\left(fx_n, Tx_n\right),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\frac{p\left(fx_{n+1}, Tx_n\right) + p\left(fx_n, Tx_{n+1}\right)}{2}\right\}\right) \\
&= \psi\left(\max\left\{p\left(Tx_n, Tx_{n-1}\right), p\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right), p\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\frac{p\left(Tx_n, Tx_n\right) + p\left(Tx_{n-1}, Tx_{n+1}\right)}{2}\right\}\right) \\
&= \psi\left(\max\left\{p\left(Tx_n, Tx_{n-1}\right), p\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\frac{p\left(Tx_n, Tx_n\right) + p\left(Tx_{n-1}, Tx_{n+1}\right)}{2}\right\}\right) \\
&\leq \psi\left(\max\left\{p\left(Tx_n, Tx_{n-1}\right), p\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\frac{p\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) + p\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right)}{2}\right\}\right) \\
&= \psi\left(\max\left\{p\left(Tx_n, Tx_{n-1}\right), p\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right)\right\}\right). \qquad (4.1.7)
\end{aligned}
$$

$p\left(Tx_{n+1}, Tx_n\right)$ maksimum ise

$$p\left(Tx_{n+1}, Tx_n\right) \leq \psi\left(p\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right)\right) < p\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right) \qquad (4.1.8)$$

dır. Bu ise bir çelişkidir. Yani, maksimum $p\left(Tx_n, Tx_{n-1}\right)$ olduğu sonucuna vardık. Şimdi sonuç olarak

$$p\left(Tx_{n+1}, Tx_n\right) \leq \psi(p\left(Tx_n, Tx_{n-1}\right)) < p\left(Tx_n, Tx_{n-1}\right). \qquad (4.1.9)$$

Böylece, (4.1.9) den $p(Tx_{n+1}, Tx_n)$ dizisinin monoton artan olduğunu görüyoruz. ψ ' nin özelliklerine göre $n \to \infty$ olduğunda

$$\begin{aligned} p(Tx_{n+1}, Tx_n) &\leq \psi(p(Tx_n, Tx_{n+1})) \\ &\leq \psi^2(p(Tx_{n-1}, Tx_{n-2})) \leq ... \leq \psi^n(p(Tx_1, Tx_0)) \to 0 \end{aligned}$$

vardır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} p(Tx_{n+1}, Tx_n) = 0, \tag{4.1.10}$$

dır. Şimdi, $\{Tx_n\}$ 'in (X, p) uzayında 0 -Cauchy dizisi olduğunu ispatlayalım. Bunun için $\{Tx_{2n}\}$ 'nin 0 -Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir:

Bunun tam karşıtını varsayalım. O halde, Lemma 3.1.17 ' yi kullanarak $\epsilon > 0$ ve pozitif tamsayıların $\{m(k)\}$ ve $\{n(k)\}$ olacak şekilde iki dizisi vardır ve

$$p\left(y_{2m_k}, y_{2n_k}\right), p\left(y_{2m_k}, y_{2n_{k+1}}\right), p\left(y_{2m_{k-1}}, y_{2n_k}\right), p\left(y_{2m_{k-1}}, y_{2n_{k+1}}\right) \tag{4.1.11}$$

dizileri $k \to \infty$ olduğunda ϵ^+ 'a gider. Ayrıca, $\forall n \geqslant 0$ için

$$x = x_{2m(k)}\ ,\ y = x_{2n(k)+1} \text{ ve } y_n = Tx_n = fx_{n+1}$$

eşitliklerine koşul (4.1.5) uygulandığında

$$\begin{aligned}
p(Tx,Ty) &= p\left(Tx_{2m(k)},Tx_{2n(k)+1}\right) \\
&= p\left(y_{2m(k)},y_{2n(k)+1}\right) \\
&\leq \psi\left(\max\left\{p\left(fx_{2m(k)},fx_{2n(k)+1}\right),p\left(fx_{2m(k)},Tx_{2m(k)}\right),\right.\right. \\
&\quad p\left(fx_{2n(k)+1},Tx_{2n(k)+1}\right), \\
&\quad \left.\left.\frac{p\left(fx_{2m(k)},Tx_{2n(k)+1}\right)+p\left(fx_{2n(k)+1},Tx_{2m(k)}\right)}{2}\right\}\right) \qquad (4.1.12) \\
&= \psi\left(\max\left\{p\left(y_{2m(k)-1},y_{2n(k)}\right),p\left(y_{2m(k)-1},y_{2m(k)}\right),p\left(y_{2n(k)},y_{2n(k)+1}\right),\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\frac{p\left(y_{2m(k)-1},y_{2n(k)+1}\right)+p\left(y_{2n(k)},y_{2m(k)}\right)}{2}\right\}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $k\longrightarrow\infty$ olduğunda

$$\begin{aligned}
&\max\left\{p\left(fx_{2m(k)},fx_{2n(k)+1}\right),p\left(fx_{2m(k)},Tx_{2m(k)}\right),p\left(fx_{2n(k)+1},Tx_{2n(k)+1}\right),\right. \\
&\quad \left.\frac{p\left(fx_{2m(k)},Tx_{2n(k)+1}\right)+p\left(fx_{2n(k)+1},Tx_{2m(k)}\right)}{2}\right\} \qquad (4.1.13) \\
&\longrightarrow \max\left\{\epsilon^+,0,0,\frac{1}{2}\left(\epsilon^++\epsilon^+\right)\right\}=\epsilon^+
\end{aligned}$$

dır. ψ 'nin özelliklerini kullanarak, $\epsilon>0$ olduğu için $\epsilon\leq\psi(\epsilon)<\epsilon$ çelişkisini elde ederiz. Bu $\{Tx_{2n}\}$ 'in (X,p) uzayında bir 0 -Cauchy dizisi ve dolayısıyla $\{Tx_n\}$ 'nin (X,p) uzayında bir 0 -Cauchy dizisi olduğunu gösterir. TX 'in, (X,p) kısmi metrik uzayının 0 -tam alt uzayı olduğunu varsayarsak o zaman $y\in TX\subset fX$ vardır.

Öyle ki

$$p(y,y)=\lim_{n\to\infty}p(Tx_n,y)=\lim_{n\to\infty}p(fx_n,y)=\lim_{n,m\to\infty}p(Tx_n,Tx_m)=0 \quad (4.1.14)$$

dır. Eğer fX, $y\in fX$ koşulunu sağlayan (X,p) 'nin 0 -tam alt uzayı ise (4.1.14) sağlanır.

Şimdi, $u\in X$ ve $y\in fu$ olsun. y 'nin T ve f nin bir çakışık noktası olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki,

$$p(Tu,fu)>0$$

olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} p(Tx_n,fu) &\le \psi(\max\{p(fx_n,fu),p(fx_n,Tx_n),p(fu,Tu),\\ &\qquad p\left(\frac{p(fx_n,Tu),p(fu,Tx_n)}{2}\right)\}) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$n\to\infty$ iken

$$p(fx_n,fu)\to 0,p(fx_n,Tx_n)\to 0$$

ve Teorem 3.1.16 den

$$\frac{(p(fx_n,Tu)+p(fu,Tx_n))}{2}\to\frac{p(fu,Tu)}{2}$$

dır. $p(fu,Tu)>0$ olduğu için $\exists\ n_0\in\mathbb{N}$ vardır, öyle ki $n>n_0$ için

$$p(fx_n,fu)<\frac{1}{2}p(fu,Tu) \text{ ve } p(fx_n,Tx_n)<\frac{1}{2}p(fu,Tu)$$

sağlanır. Şimdi $n>n_0$ için

$$p(fu,Tu)\le p(fu,fx_{n+1})+p(Tx_n,Tu)\le p(fu,fx_{n+1})+\psi(p(fu,Tu)) \quad (4.1.16)$$

ya da

$$p(fu,Tu)\le p(fu,fx_{n+1})+\psi(p(fu,Tu)) \quad (4.1.17)$$

elde edilir. O halde, $n \to \infty$ iken bir çelişki elde ederiz öyle ki

$$p(fu, fu) \leq \psi(p(fu, Tu)) < p(fu, Tu) \tag{4.1.18}$$

dır. Bu ise $p(fu, Tu) = 0$ yani $Tu = fu$ olmasını gerektirir.

Dolayısıyla T ve f 'nin tek bir çakışık noktası vardır. Tanım 2.1.8 'den T ve f 'nin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Sonuç 4.1.3. (Ahmad ve ark., 2012) Teorem 4.1.2 'de ψ fonksiyonunun sağdan sürekliliği hakkındaki varsayım yalnızca $\{Tx_n\}$ 'ın bir 0 -Cauchy dizisi olduğunun ispatı için kullanılır. Aşağıdaki teoremde, ψ fonksiyonu için daha zayıf bir varsayım olduğunu kabul edelim. Biraz daha güçlü bir büzülme dönüşümünü ele alalım.

Teorem 4.1.4. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) kısmi metrik uzay T ve f, X üzerinde $TX \subset fX$ koşulunu sağlayan dönüşümler olsun. Kabul edelim ki $\forall\, x, y \in X$ için $\psi \in \Phi$ olmak üzere

$$p(Tx, Ty) \leq \psi\left(\max\left\{p(fx, fy), p(fx, Tx), p(fy, Ty), \frac{p(fx, Ty)}{2}\right\}\right) \tag{4.1.19}$$

olsun. TX veya fX, X 'in bir 0 -tam uzayı ise T ve f tek çakışık noktaya sahiptir. Üstelik eğer T ve f zayıf uyuşabilirse, T ve f bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 4.1.2 de olduğu gibi T ve f 'nin tek bir çakışık noktaya sahip olduğunu ispatlayalım: $\{x_n\} \subset X$ dizisini, $x_0 \in X$ ve $Tx_n = fx_{n+1}$ ile tanımlarsak Teorem 4.1.2 kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} p(Tx_{n+1}, Tx_n) = 0$$

olduğunu gösterelim. Burada tümevarımla $\{Tx_n\}$ 'ın bir (X, p) uzayında 0 -Cauchy dizisi olduğunu ispatlayalım.

$\forall\, n \geq 0$ için $y_n = Tx_n = fx_{n+1}$ olsun. $n \to \infty$ iken $p(y_n, y_{n+1}) \to 0$ olur. Bu durumda, $\epsilon > 0$ için bir $n(\epsilon)$ vardır öyle ki $\forall\, n > n(\epsilon)$ için

$$p(y_n, y_{n+1}) < \epsilon - \psi(\epsilon)$$

dır. Bazı $n > n(\epsilon)$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$p(y_n, y_{n+k}) < \epsilon$$

olduğunu varsayarsak

$$p(y_n, y_{n+k+1}) < \epsilon$$

eşitsizliğini ispatlayalım.

$$p(y_n, y_{n+k+1}) \leq p(y_n, y_{n+1}) + p(y_{n+1}, y_{n+k+1}) \ ,$$

$$\begin{aligned}
p(y_{n+1}, y_{n+k+1}) &= p(Tx_{n+1}, Tx_{n+k+1}) \\
&\leq \psi\left(\max\left\{p(fx_{n+1}, fx_{n+k+1}), p(fx_{n+1}, Tx_{n+1}),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. p(fx_{n+k+1}, Tx_{n+k+1}), \frac{p(fx_{n+1}, Tx_{n+k+1})}{2}\right\}\right) \\
&= \psi\left(\max\left\{p(y_n, y_{n+k}), p(y_n, y_{n+1}), p(y_{n+k}, y_{n+k+1}),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \frac{p(y_n, y_{n+k+1})}{2}\right\}\right) \\
&\leq \psi\left(\max\left\{p(y_n, y_{n+k}), p(y_n, y_{n+1}), p(y_{n+k}, y_{n+k+1}),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \frac{p(y_n, y_{n+k}) + p(y_{n+k}, y_{n+k+1})}{2}\right\}\right) \\
&\leq \psi\left(\max\left\{\epsilon, \epsilon - \psi(\epsilon), \epsilon - \psi(\epsilon), \frac{\epsilon + \epsilon - \psi(\epsilon)}{2}\right\}\right) \\
&= \psi(\epsilon) \qquad (4.1.20)
\end{aligned}$$

dır. Sonra (4.1.20) den

$$p(y_n, y_{n+k+1}) \leq p(y_n, y_{n+1}) + p(y_{n+1}, y_{n+k+1}) < \epsilon - \psi(\epsilon) + \psi(\epsilon) = \epsilon$$

olur. Bu $\{Tx_n\}$ 'in (X,p) de 0 -Cauchy dizisi olduğunu gösterir. İspatın devamı Teorem 4.1.2 de olduğu gibi yapılabilir.

Sonuç 4.1.5. (Ahmad ve ark., 2012) (X,p) kısmi metrik uzay olsun ve bir $T : X \to X$ dönüşümünü, $\forall\ x, y \in X$ için $\psi \in \Psi$ olmak üzere

$$p(Tx, Ty) \leq \psi\left(\max\left\{p(x,y), p(x,Tx), p(y,Ty), \frac{p(x,Ty)+p(y,Tx)}{2}\right\}\right) \tag{4.1.21}$$

olacak biçimde ele alalım. Eğer TX, X 'in 0 -tam alt uzayı ise, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 4.1.2 de $f = ix$ (özdeşlik dönüşümü) alınarak yapılabilir.

Sonuç 4.1.6. (Ahmad ve ark., 2012) (X,p) kısmi metrik uzay olsun ve bir $T : X \to X$ bir dönüşümünü, $\forall\ x, y \in X$ için $\psi \in \Phi$ olmak üzere

$$p(Tx, Ty) \leq \psi\left(\max\left\{p(x,y), p(x,Tx), p(y,Ty), \frac{p(x,Ty)}{2}\right\}\right) \tag{4.1.22}$$

olarak ele alalım. Eğer TX, X 'in 0 -tam alt uzayı ise, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 4.1.4 de $f = ix$ (özdeşlik dönüşümü) alınarak yapılabilir.

Sonuç 4.1.7. (Ahmad ve ark., 2012) (X,p) bir kısmi metrik uzay T ve f, X üzerinde $TX \subset fX$ koşulunu sağlayan dönüşümler olsun. $\forall\ x, y \in X$ için $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere

$$p(Tx, Ty) \leq \lambda \max\left\{p(fx,fy), p(fx,Tx), p(fy,Ty), \frac{p(fx,Ty)+p(fy,Tx)}{2}\right\} \tag{4.1.23}$$

dır. TX ya da fX , X 'in bir 0 -tam alt uzayı ise, T ve f tek bir çakışık noktaya sahiptir. Üstelik eğer T ve f zayıf uyuşabilirse, T ve f 'nin tek bir ortak sabit noktası vardır.

İspat. Teorem 4.1.2 den $\lambda \in [0,1)$ için $\psi(t) = \lambda t$ alınarak yapılabilir.

Sonuç 4.1.8. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) bir kısmi metrik uzay T ve f, X üzerinde $TX \subset fX$ koşulunu sağlayan dönüşümler olsun. Kabul edelim ki, $\forall\, x, y \in X$ için $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$ ve $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 \in [0,1)$ iken

$$p(Tx, Ty) \leq a_1 p(fx, fy) + a_2 p(fx, Tx) + a_3 p(fy, Ty) + a_4(p(fx, Ty) + p(fy, Tx)) \tag{4.1.24}$$

olsun. Eğer TX veya fX, X 'in 0 -tam alt uzayı ise, T ve f tek bir çakışık noktaya sahiptir. Üstelik, eğer T ve f zayıf uyuşabilirse, T ve f 'nin tek bir ortak sabit noktası vardır.

İspat. Sonuc 4.1.7 den

$$a_1 p(fx, fy) + a_2 p(fx, Tx) + a_3 p(fy, Ty) + a_4(p(fx, Ty) + p(fy, Tx)$$

$$\leq (a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4) \max\left\{p(fx, fy), p(fx, Tx), p(fy, Ty), \frac{p(fx, Ty) + p(fy, Tx)}{2}\right\} \tag{4.1.25}$$

Sonuç 4.1.9. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) kısmi metrik uzay T ve f, X üzerinde $TX \subset fX$ koşulunu sağlayan dönüşümler olsun. Kabul edelim ki $\forall\, x, y \in X$ için $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere

$$p(Tx, Ty) \leq \lambda p(fx, fy) \tag{4.1.26}$$

olsun. Eğer TX veya fX, X 'in 0 -tam alt uzayı ise, T ve f tek bir çakışık noktaya sahiptir. Üstelik eğer T ve f zayıf uyuşabilirse, T ve f 'nin tek bir ortak sabit noktası vardır.

İspat. Sonuç 4.1.8 den açıkca görülür. Sonuç 4.1.9 Jungck (Jungck, 1976) tarafından ispatlanan teorem ile elde edilir. Burada T ve f nin uyuşabilir dönüşümler olduğu varsayımı altında bir tam metrik uzay yerine bir tam kısmi metrik uzayı düşünülür.

Sonuç 4.1.10. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) 0 -tam kısmi metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü, $\psi \in \Phi$ olmak üzere $\forall\ x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \psi(p(x, y)) \tag{4.1.27}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda, TX, X 'in kapalı bir alt uzayı ise, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 4.1.4 ve Sonuc 4.1.6 'dan $f = ix$ (özdeşlik dönüşümü) alınırsa kanıt görülür. Ayrıca, ψ fonksiyonu için daha zayıf bir varsayım altında, Sonuc 4.1.10 'dan Boyd ve Wong (Boyd ve Wong, 1969) tarafından kanıtlanan teorem elde edilir. Burada standart bir metrik yerine kısmi metrik düşünülür. Sonuç 4.1.8 den bazı iyi bilinen teoremlerin uzantıları olarak aşağıdaki sonuçları çıkaracağız.

Sonuç 4.1.11. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) 0 -tam kısmi metrik uzay ve $\forall\ x, y \in X$ için $\lambda \in [0, 1)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü

$$p(Tx, Ty) \leq \lambda p(x, y) \tag{4.1.28}$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bu sonuç Banach büzülme teoreminin 0 -tam kısmi metrik uzayda bir genişlemesidir. Bu sonuç, (Matthews, 1992) çalışmasında tam bir kısmi metrik uzay için verilmişti. Ancak 0 -tam kısmi metrik uzaylar için de geçerlidir.

Sonuç 4.1.12. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) 0 -tam kısmi metrik uzay ve $\forall\ x, y \in X$ için $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü olsun

$$p(Tx, Ty) \leq \lambda\left(p(x, Tx) + p(y, Ty)\right) \tag{4.1.29}$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bu sonuç, Kannan teoreminin (Rhoades, 1977) 0 -tam kısmi metrik uzayda bir genişletilmesidir.

Sonuç 4.1.13. (Ahmad ve ark., 2012) (X,p) bir 0 -tam kısmi metrik uzay ve $\forall\, x,y \in X$ için $a_1,a_2,a_3 \geq 0$ ve $a_1+a_2+a_3 \in [0,1)$ olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü

$$p(Tx,Ty) \leq a_1 p(x,y) + a_2 p(x,Tx) + a_3 p(y,Ty) \tag{4.1.30}$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bu sonuç, Reich teoreminin (Rhoades, 1977) 0 -tam kısmi metrik uzayda genişletilmesidir.

Sonuç 4.1.14. (Ahmad ve ark., 2012) (X,p) 0 -tam kısmi metrik uzay ve $\forall\, x,y \in X$ için $\lambda \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü

$$p(Tx,Ty) \leq \lambda\left(p(x,Ty) + p(y,Tx)\right) \tag{4.1.31}$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bu sonuç, Chartterjea teoreminin (Rhoades, 1977) 0 -tam kısmi metrik uzayda genişletilmesidir.

Sonuç 4.1.15. (Ahmad ve ark., 2012) (X,p) 0 -tam kısmi metrik uzay ve $\forall\, x,y \in X$ için $a_1 \in [0,1)\,, a_2,a_3 \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü aşağıdakilerden en az birini sağlasın. Bu taktirde, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

$$\begin{aligned} p(Tx,Ty) &\leq a_1 p(x,Tx) \\ p(Tx,Ty) &\leq a_2(p(x,Tx) + p(y,Ty)) \\ p(Tx,Ty) &\leq a_3\left(p(x,Ty) + p(y,Tx)\right) \end{aligned} \tag{4.1.32}$$

Bu sonuç, Zamfirescu teoreminin (Rhoades, 1977) 0 -tam kısmi metrik uzayda genişletilmesidir.

Teorem 4.1.16. (Nashine ve ark., 2013) (X,p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall\, x,y \in X$ için $\varphi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ fonksiyonu azalmayan ve $t>0$ için $\sum_{n\geq 1}\varphi^n(t)$ serisi yakınsak olmak üzere

$$p(Tx,Ty) \leq \varphi\left(\max\left\{p(x,y), p(x,Tx), p(y,Ty), \frac{p(y,Tx)+p(x,Ty)}{2}\right\}\right)$$

Sonuç 4.1.13. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) bir 0 -tam kısmi metrik uzay ve $\forall\, x, y \in X$ için $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ ve $a_1 + a_2 + a_3 \in [0, 1)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü

$$p(Tx, Ty) \leq a_1 p(x, y) + a_2 p(x, Tx) + a_3 p(y, Ty) \tag{4.1.30}$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bu sonuç, Reich teoreminin (Rhoades, 1977) 0 -tam kısmi metrik uzayda genişletilmesidir.

Sonuç 4.1.14. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) 0 -tam kısmi metrik uzay ve $\forall\, x, y \in X$ için $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü

$$p(Tx, Ty) \leq \lambda \left(p(x, Ty) + p(y, Tx)\right) \tag{4.1.31}$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bu sonuç, Chartterjea teoreminin (Rhoades, 1977) 0 -tam kısmi metrik uzayda genişletilmesidir.

Sonuç 4.1.15. (Ahmad ve ark., 2012) (X, p) 0 -tam kısmi metrik uzay ve $\forall\, x, y \in X$ için $a_1 \in [0, 1), a_2, a_3 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü aşağıdakilerden en az birini sağlasın. Bu taktirde, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

$$\begin{aligned} p(Tx, Ty) &\leq a_1 p(x, Tx) \\ p(Tx, Ty) &\leq a_2 (p(x, Tx) + p(y, Ty)) \\ p(Tx, Ty) &\leq a_3 (p(x, Ty) + p(y, Tx)) \end{aligned} \tag{4.1.32}$$

Bu sonuç, Zamfirescu teoreminin (Rhoades, 1977) 0 -tam kısmi metrik uzayda genişletilmesidir.

Teorem 4.1.16. (Nashine ve ark., 2013) (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall\, x, y \in X$ için $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonu azalmayan ve $t > 0$ için $\sum_{n \geq 1} \varphi^n(t)$ serisi yakınsak olmak üzere

$$p(Tx, Ty) \leq \varphi\left(\max\left\{p(x, y), p(x, Tx), p(y, Ty), \frac{p(y, Tx) + p(x, Ty)}{2}\right\}\right)$$

koşulunu sağlayan T dönüşümü, bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.1.17. (Nashine ve ark., 2013) $(X, p, \preceq)$ tam sıralı bir kısmi metrik uzay olsun. $T : X \to X$ sürekli ve azalmayan bir dönüşüm olduğunu kabul edelim. Öyleki $x \succeq y$ olacak şekilde $\forall\, x, y \in X$ için $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ Teorem 4.1.16 nın tüm koşullarını sağlasın. Eğer $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa o zaman

$$Tx = x$$

koşulunu sağlayan $x \in X$ vardır. Ayrıca $p(x, x) = 0$ dır.

Teorem 4.1.18. (Nashine ve ark., 2013) $(X, p, \preceq)$ tam sıralı bir kısmi metrik uzay

$$\mathbf{M}(x, y) = \max\left\{\varphi(p(x, y)), \varphi(p(x, Tx)), \varphi(p(y, \delta y)), \varphi\left(\frac{p(y, Tx) + p(x, \delta y)}{2}\right)\right\} \tag{4.1.33}$$

ve $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonu $\forall t > 0$ için $\varphi(t) < t$ koşulu ile birlikte bir sürekli fonksiyon öyle ki $\varphi(0) = 0$ olsun. $T, \delta : X \to X$ dönüşümleri karşılaştırılabilir. Ayrıca $\forall\, x, y \in X$ için

$$p(Tx, \delta y) \leq \mathbf{M}(x, y) \tag{4.1.34}$$

koşulu sağlansın ve kabul edelim ki;

i) δ, T -zayıf izoton artan

ii) δ, T sürekli

olsun. Bu durumda, T ve δ -nin ortak sabit noktalarının kümesi olan $F(T, \delta)$ kümesi boş değildir ve $\forall\, z \in F(T, \delta)$ için

$$p(z, z) = p(Tz, Tz) = p(\delta z, \delta z) = p(z, \delta z) = p(z, Tz) = 0$$

elde edilir. Üstelik, T ve δ-nin bir ve yalnız bir ortak sabit noktaya sahip olması için gerek ve yeter koşul $F(T, \delta)$ kümesinin iyi sıralı olmasıdır.

İspat. x_0, X 'de keyfi bir nokta olsun. Eğer, $x_0 = \delta x_0$ veya $x_0 = Tx_0$ ise (4.1.31) büzülme koşulu kullanılarak kanıt kolaylıkla görülür. Bu nedenle, kabul edelim ki $x_0 \neq \delta x_0$ ve $x_0 \neq Tx_0$ olsun. X 'de bir $\{x_n\}$ dizisini $\forall\ n \in \{0,1,2,...\}$ için

$$x_{2n+1} = \delta x_{2n} \text{ ve } x_{2n+2} = Tx_{2n+1} \tag{4.1.35}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Genelliği bozmaksızın $\{x_n\}$ 'ın ardışık terimlerinin farklı olduğunu kabul edelim. δ 'nın T -zayıf izoton artan olması nedeniyle

$$x_1 = \delta x_0 = T\delta x_0 = Tx_1 = x_2 \preceq \delta T\delta x_0 = \delta Tx_1 = \delta x_2 = x_3,$$

$$x_3 = \delta x_2 = T\delta x_2 = Tx_3 = x_4 \preceq \delta T\delta x_2 = \delta Tx_3 = \delta x_4 = x_5,$$

koşulları vardır. Bu şekilde devam edilirse,

$$x_1 \preceq x_2 \preceq ...x_n \preceq x_{n+1} \preceq ... \tag{4.1.36}$$

elde edilir. Şimdi $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$p\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) < p\left(x_n, x_{n+1}\right) \tag{4.1.37}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (4.1.36) den $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq x_{n+1}$ olduğundan $x = x_{2n+1}$ ve $y = x_{2n}$ ile (4.1.34) kullanılarak

$$p\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right) = p\left(Tx_{2n+1}, \delta x_{2n}\right) \leq \mathbf{M}\left(x_{2n+1}, x_{2n}\right) \tag{4.1.38}$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.33) ve (4.1.35) den

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(x_{2n+1}, x_{2n}) &= \max\{\varphi(p(x_{2n}, x_{2n+1})), \varphi(p(x_{2n}, Tx_{2n})), \varphi(p(x_{2n+1}, \delta x_{2n+1})), \\
&\quad \varphi\left(\frac{P(x_{2n+1}, Tx_{2n}) + p(x_{2n}, \delta x_{2n+1})}{2}\right)\right\} \\
&= \max\{\varphi(p(x_{2n}, x_{2n+1})), \varphi(p(x_{2n+1}, x_{2n+2})), \\
&\quad \varphi\left(\frac{P(x_{2n+1}, x_{2n+1}) + p(x_{2n}, x_{2n+2})}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

dır. Şimdi,

- Eğer $\mathbf{M}(x_{2n+1}, x_{2n}) = \varphi(p(x_{2n+1}, \delta x_{2n+2}))$ ise (4.1.38) ile $\forall\, t > 0$ için $\varphi(t) < t$ olduğu kullanılırsa

  $$p(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \varphi(p(x_{2n+1}, x_{2n+2})) < p(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

  elde edilir ki bu bir çelişkidir.

- Eğer $\mathbf{M}(x_{2n+1}, x_{2n}) = \varphi(p(x_{2n}, x_{2n+1}))$ olarak alınırsa,

  $$p(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \varphi(p(x_{2n}, x_{2n+1})) < p(x_{2n}, x_{2n+1})$$

  elde edilir.

- Eğer $\mathbf{M}(x_{2n+1}, x_{2n}) = \varphi\left(\frac{P(x_{2n+1}, x_{2n+1}) + p(x_{2n}, x_{2n+2})}{2}\right)$ olarak alırsak

  $$\begin{aligned}
  p(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &\leq \varphi\left(\frac{P(x_{2n+1}, x_{2n+1}) + p(x_{2n}, x_{2n+2})}{2}\right) \\
  &< \frac{P(x_{2n+1}, x_{2n+1}) + p(x_{2n}, x_{2n+2})}{2}
  \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (p4) 'den,

$$p(x_{2n}, x_{2n+2}) + p(x_{2n+1}, x_{2n+1}) \leq p(x_{2n}, x_{2n+1}) + p(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

dır. Bu nedenle

$$p(x_{2n+1}, x_{2n+2}) < \frac{p(x_{2n}, x_{2n+1})}{2} + \frac{p(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2}$$

olup bu gösterir ki

$$p(x_{2n+1}, x_{2n+2}) < p(x_{2n}, x_{2n+1})$$

dır. Böylece, olası tüm durumlarda $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$p(x_{2n+1}, x_{2n+2}) < p(x_{2n}, x_{2n+1})$$

elde edilir. Benzer şekilde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$p(x_{2n}, x_{2n+1}) < p(x_{2n-1}, x_{2n})$$

ispat edilebilir. Sonuç olarak (4.1.37) sağlanır. Ayrıca (4.1.37) den $\{p(x_n, x_{n+1})\}$ dizisinin monoton azalan olduğu görülür. Böylece

$$\lim_{n \to \infty} p(x_n, x_{n+1}) = \gamma \tag{4.1.39}$$

olacak şekilde bir $\gamma \geq 0$ vardır. Ayrıca (p4) kullanılarak

$$p(x_n, x_{n+2}) \leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) - p(x_{n+1}, x_{n+1})$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\frac{1}{2}p(x_n, x_{n+2}) + \frac{1}{2}p(x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}p(x_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2}p(x_{n+1}, x_{n+2})$$

dır. Üstelik (4.1.37) 'dan

$$\frac{1}{2}p\left(x_n,x_{n+2}\right)+\frac{1}{2}p\left(x_{n+1},x_{n+1}\right)\leq p\left(x_n,x_{n+1}\right) \tag{4.1.40}$$

elde edilir ve (4.1.40) de $n\to\infty$ iken üst limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left[\frac{1}{2}p(x_{2n},x_{2n+2})+\frac{1}{2}p\left(x_{n+1},x_{n+1}\right)\right]\leq\lim_{n\to\infty}p\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)$$

bulunur. Şimdi,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left[\frac{1}{2}p(x_{2n},x_{2n+2})+\frac{1}{2}p\left(x_{2n+1},x_{2n+1}\right)\right]=b \tag{4.1.41}$$

alınırsa $0\leq b\leq\gamma$ olduğu açıktır. Diğer yandan, φ sürekli ve (4.1.38) ın iki tarafının üst limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup p\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right) \leq\ & \max\Big\{\varphi(\lim_{n\to\infty}\sup p\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right)),\\ & \varphi\left(\lim_{n\to\infty}\sup p\left(x_{2n+1},x_{2n}\right)\right),\\ & \varphi\left(\lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{1}{2}p(x_{2n},x_{2n+2})+\frac{1}{2}p\left(x_{2n+1},x_{2n+1}\right)\right)\right)\Big\}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.1.39) ile (4.1.41) den

$$\gamma\leq\max\left\{\varphi\left(\gamma\right),\varphi\left(b\right)\right\}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\gamma>0$ olsun. Bu taktirde

$$\gamma\leq\max\left\{\varphi\left(\gamma\right),\varphi\left(b\right)\right\}<\max\left\{\gamma,b\right\}=\gamma$$

çelişkisi bulunur. Böylece $\gamma=0$ dır ve sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty}p\left(x_n,x_{n+1}\right)=0 \tag{4.1.42}$$

dır. Şimdi $\{x_n\}$ 'in (X, p^s) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayalım. (Böylece, Lemma 3.2.3 'den (X, p) uzayında da Cauchy olduğu görülür). Bunun için $\{x_{2n}\}$ 'in Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $\{x_{2n}\}$ Cauchy dizisi olmasın.

Şimdi, Lemma 3.2.3 i kullanarak $\epsilon > 0$ ve $n_k > m_k > k$ olmak üzere pozitif tamsayıların iki dizisini $\{m_k\}$ ve $\{n_k\}$ olarak alalım. Bu durumda, $k \to \infty$ iken Lemma 3.1.2 deki diziler ϵ 'na gider ve koşul (4.1.34) da

$$x = x_{2m(k)-1} \text{ ve } y = x_{2n(k)}$$

elemanları alınırsa

$$\begin{aligned} p\left(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}\right) &\leq p\left(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}\right) + p\left(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)}\right) - p\left(x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}\right) \\ &\leq p\left(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}\right) + p\left(\delta x_{2n(k)}, T x_{2m(k)-1}\right) \\ &\leq p\left(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}\right) + \mathbf{M}\left(x_{2m(k)-1}, x_{2n(k)}\right) \end{aligned} \tag{4.1.43}$$

elde edilir. Burada $k \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left(x_{2m(k)-1}, x_{2n(k)}\right) &= \max\left\{\varphi\left(p\left(x_{2m(k)-1}, x_{2n(k)}\right)\right), \varphi\left(p\left(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}\right)\right),\right. \\ &\qquad \varphi\left(p\left(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}\right)\right), \\ &\qquad \left.\varphi\left(\frac{p\left(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}\right) + p\left(x_{2m(k)-1}, x_{2n(k)+1}\right)}{2}\right)\right\} \\ &\longrightarrow \max\{\varphi(\epsilon), 0, 0, \varphi(\epsilon)\} = \varphi(\epsilon) \end{aligned}$$

dır. Böylece (4.1.42) de $k \to \infty$ iken

$$\epsilon \leq \varphi(\epsilon) < \epsilon$$

çelişkisi elde edilir. $\{x_{2n}\}$ bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle $\{x_n\}$ hem (X,p) hem de (X,p^s) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Lemma 3.2.3 'de (X,p) tam ise (X,p^s) metrik uzayı da tamdır ve $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak olduğu kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} p^s(x_n,z)=0$$

dır. Yine Lemma 3.2.3 kullanılarak

$$p(z,z)=\lim_{n\to\infty} p(x_n,z)=\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) \tag{4.1.44}$$

dır. Ayrıca (X,p^s) metrik uzayında $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} p^s(x_n,x_m)=0$$

dır ve böylece p^s tanımından

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)=0$$

elde edilir. Bu taktirde (4.1.44) 'dan $p(z,z)=0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,z)=p(z,z)=0 \tag{4.1.45}$$

dır. O halde (p4) 'den

$$\begin{aligned} p(z,Tz) &\le p(z,x_{2n+2})+p(x_{2n+2},Tz)-p(x_{2n+2},x_{2n+2}) \\ &\le p(z,x_{2n+2})+p(x_{2n+2},Tz) \qquad (4.1.46) \end{aligned}$$

dır. Şimdi, T 'nin sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda $n\to\infty$ iken (4.1.45) ve (4.1.46) uygulanırsa

$$\begin{aligned} p(z,Tz) &\le \lim_{n\to\infty} p(z,x_{2n+2})+\lim_{n\to\infty} p(Tx_{2n+1},Tz) \\ &= p(Tz,Tz) \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat (p2) 'den $p(Tz, Tz) \leq p(z, Tz)$ dır ve bundan dolayı

$$p(z, Tz) = p(Tz, Tz) \tag{4.1.47}$$

dır. Benzer şekilde δ sürekli ise

$$p(z, \delta z) = p(\delta z, \delta z) \tag{4.1.48}$$

dır. Üstelik, (p4) ve (4.1.48) den

$$\begin{aligned} p(z, Tz) &\leq p(z, \delta z) + p(\delta z, Tz) - p(\delta z, \delta z) \\ &= p(z, \delta z) + p(\delta z, Tz) - p(z, \delta z) \\ &= p(\delta z, Tz) \end{aligned}$$

dır. Yani;

$$p(z, Tz) \leq p(\delta z, Tz) \tag{4.1.49}$$

olur. Benzer şekilde (p4) ve (4.1.47) den

$$p(z, \delta z) \leq p(\delta z, Tz) \tag{4.1.50}$$

elde edilir. Şimdi, kabul edelim ki $p(Tz, \delta z) > 0$ olsun. Bu taktirde $z \preceq z$ olduğundan (4.1.34) eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} p(Tz, \delta z) &\leq \mathbf{M}(z, z) \\ &\leq \max\left\{\varphi(p(z, z)), \varphi(p(z, Tz)), \varphi(p(z, \delta z)), \varphi\left(\frac{p(z, Tz) + p(z, \delta z)}{2}\right)\right\} \\ &< p(\delta z, Tz) \end{aligned}$$

dır. Fakat bu (4.1.49) ve (4.1.50) 'e göre bir çelişkidir ($\varphi(t) < t$ kullanılarak) . Böylece

$$p(\delta z, Tz) = 0$$

elde edilir ve (p1) 'den $\delta z = Tz$ dır. Yani z, T ve δ 'nin çakışık noktası olur.

Dahası $p(\delta z, Tz) = 0$, (4.1.49) ve (4.1.50) ile birlikte

$$p(z, \delta z) = 0 = p(z, Tz)$$

elde edilir. Böylece, (p1) 'den $\delta z = z$ ve $Tz = z$ sonucuna ulaşılır. Yani z, T ve δ 'nın ortak bir sabit noktasıdır. Ayrıca (p2) 'den

$$p(\delta z, \delta z) = 0 = p(\delta z, Tz)$$

eşitliği ve böylece

$$p(Tz, Tz) = p(\delta z, \delta z) = p(z, Tz) = p(z, \delta z) = p(z, z) = 0$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki, T ve δ 'nın ortak sabit noktalarının kümesi iyi sıralı olsun. Gösterelim ki, T ve δ 'nin ortak sabit noktası bir tektir. Bunun için, $\delta u = Tu = u$ ve $Tv = \delta v = v$ fakat $u \neq v$ olsun. Şimdi, (4.1.34) da x yerine u ve y yerine v alınırsa

$$p(u, v) = p(Tu, \delta v) \leq \mathbf{M}(u, v)$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(u, v) &= \max\left\{\varphi(p(u, v)), \varphi(p(u, Tu)), \varphi(p(v, \delta v)), \varphi\left(\frac{p(v, Tu) + p(u, \delta v)}{2}\right)\right\} \\ &= \max\left\{\varphi(p(u, v)), \varphi(p(u, u)), \varphi(p(v, v)), \varphi\left(\frac{p(v, u) + p(u, v)}{2}\right)\right\} \\ &< p(u, v) \end{aligned}$$

dır. Böylece $p(u, v) < p(u, v)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde, $p(u, v) = 0$ olup $u = v$ dır. Tersine, eğer T ve δ tek bir ortak sabit noktaya sahipse, T ve δ 'nin ortak sabit nokta kümesi iyi sıralıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.19. (Nashine ve ark., 2012)

$$\mathbf{M}_1(x,y) = \max\left\{p(x,y), p(x,Tx), p(y,\delta y), \frac{p(y,Tx), p(x,\delta y)}{2}\right\}$$

olmak üzere

$$p(Tx,\delta y) \leq \varphi(\mathbf{M}_1(x,y)) \qquad (4.1.51)$$

koşulunu sağlasın. Üstelik, φ azalmayan bir fonksiyon ise (4.1.34) ile (4.1.51) koşulunun eşdeğer olduğu görülebilir. Bununla birlikte, eğer φ azalmayan bir dönüşüm değilse (4.1.34) koşulu daha genel olur. Bunu aşağıdaki örnek ile gösterelim.

Örnek 4.1.20. (Nashine ve ark., 2013) $X = [0,1]$ standart sıralı olsun ve $p(x,y) = \max\{x,y\}$ kısmi metriği ile verilsin. $x \in X$ için

$$Tx = \delta x = x - \frac{3}{4}x^2$$

ile tanımlanan $T, \delta : X \to X$ dönüşümlerini göz önüne alalım.
Ayrıca, $\varphi(t) : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ dönüşümü

$$\varphi(t) = \begin{cases} t - \frac{3}{4}t^2 & , \quad t \in [0,1] \\ \frac{1}{4} & , \quad t > 1 \end{cases}$$

şeklinde olsun. φ azalmayan bir fonksiyondur. T ve δ dönüşümlerinin koşul (4.1.34) sağladığını ancak koşul (4.1.51) 'i sağlamadığını ispatlayacağız.
Örneğin; $x \geq y$ olsun. Bu taktirde

$$p(Tx,\delta y) = \max\left\{x - \frac{3}{4}x^2, y - \frac{3}{4}y^2\right\} = \begin{cases} x - \frac{3}{4}x^2 & , \quad x + y \leq \frac{4}{3} \vee x = y \\ y - \frac{3}{4}y^2 & , \quad x + y \geq \frac{4}{3} \vee x = y \end{cases}$$

Diğer yandan

$$\mathbf{M}(x,y) = \max\left\{\varphi(x), \varphi(x), \varphi(y), \varphi\left(\frac{1}{2}\left(x + \max\left\{y, x - \frac{3}{4}x^2\right\}\right)\right)\right\}$$

dır. Eğer $x = y$ veya $x + y \leq \frac{4}{3}$ ise

$$p(Tx, \delta y) = \varphi(x) \leq \mathbf{M}(x, y)$$

Eğer $x + y \geq \frac{4}{3}$ ise o zaman

$$p(Tx, \delta y) = \varphi(y) \leq \mathbf{M}(x, y)$$

dır. Dolayısıyla tüm durumlarda koşul (4.1.34) sağlanır. Ayrıca, $x = 1$ ve $y = \frac{2}{3}$ ise

$$p(Tx, \delta y) = p\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{M}_1(x, y)) &= \varphi\left(\max\left\{1, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\right)\right\}\right) \\
&= \varphi(1) < \frac{1}{3} = p(Tx, \delta y)
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla koşul (4.1.51) $\forall\ x, y \in X$ için sağlanmaz.

Sonuç 4.1.21. (Nashine ve ark., 2013) Açık olarak görülebilir ki Teorem 4.1.18 den (4.1.34) koşulunu içeren bir sonuç çıkarılabilir. Dahası φ 'nın azalmayan bir fonksiyon olduğu hipotezi altında (Dukić ve ark., 2011) de kurulan denklikler kullanılarak bazı başka sonuçlar yazılabilir.

Teorem 4.1.18 ve Teorem 2.1.14 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.22. (Nashine ve ark., 2013) δ, T -zayıf izoton artan dönüşüm almak yerine $T, \delta : X \to X$ iki zayıf artan dönüşüm olarak alınırsa Teorem 4.1.18 hükümleri sağlanır.

Aşağıdaki teoremde δ veya T 'nin sürekli olduğunu kullanmadan iki dönüşümün ortak bir sabit noktasının varlığını ispatlıyoruz.

Teorem 4.1.23. (Nashine ve ark., 2013) $(X, p, \preceq)$ tam sıralı kısmi metrik uzay,

$$\mathbf{M}(x,y) = \max\left\{\varphi(p(x,y)), \varphi(p(x,Tx)), \varphi(p(y,\delta y)), \varphi\left(\frac{p(y,Tx)+p(x,\delta y)}{2}\right)\right\} \tag{4.1.52}$$

ve $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ sürekli fonksiyon olsun. $\forall t > 0$ için $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi(t) < t$ olmak üzere $T, \delta : X \to X$ dönüşümleri $x, y \in X$ için

$$p(Tx, \delta y) \leq \mathbf{M}(x,y) \tag{4.1.53}$$

koşulunu sağlasın. Kabul edelim ki;

i) δ, T -zayıf izoton artan

ii) X düzenli

olsun. Bu taktirde, T ve δ 'nin bir ortak sabit noktaya sahiptir. Yani bir $z \in X$ vardır. Öyle ki

$$Tz = \delta z = z \text{ ve } p(z,z) = p(Tz,Tz) = p(\delta z, \delta z) = p(z, \delta z) = p(z, Tz) = 0$$

dır. Diğer taraftan, T ve δ 'nin ortak sabit noktalarının kümesi $F(T,\delta)$ 'nin iyi sıralı olması için gerek ve yeter koşul T ve δ 'nin bir ve yalnız bir ortak sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat. Teorem 4.1.18 'in ispatındaki argümanları kullanarak (X, p^s) de $\{x_n\}$ Cauchy dizisinin z 'ye yakınsadığını söyleyebiliriz.
$\{x_n\}$ azalmayan bir dizi olduğundan eğer X düzenli ise $\forall\, n$ için $x_n \preceq z$ dır.
Bu nedenle $\forall\, n$ için

$$x = x_{2n+1} \text{ ve } y = z$$

(4.1.52) koşuluna uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\left(x_{2n+1},z\right) &= \max\left\{\varphi(p\left(x_{2n+1},z\right)),\varphi(p\left(x_{2n+1},Tx_{2n+1}\right)),\varphi\left(p\left(z,\delta z\right)\right),\right. \\
&\quad \left.\varphi\left(\frac{p\left(z,Tx_{2n+1}\right)+p\left(x_{2n+1},\delta z\right)}{2}\right)\right\} \\
&= \max\left\{\varphi(p\left(x_{2n+1},z\right)),\varphi(p\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right)),\varphi\left(p\left(z,\delta z\right)\right),\right. \\
&\quad \left.\varphi\left(\frac{p\left(z,x_{2n+2}\right)+p\left(x_{2n+1},\delta z\right)}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\left(z,x_{2n+1}\right)=\max\left\{\varphi\left(p\left(z,\delta z\right)\right),\varphi\left(\frac{p\left(z,\delta z\right)}{2}\right)\right\}$$

dır. Şimdi, (p4) ve (4.1.53) kullanılarak

$$\begin{aligned}
p\left(z,\delta z\right) &\leq p\left(z.x_{2n+2}\right)+p\left(Tx_{2n+1},\delta z\right)-p\left(x_{2n+2},x_{2n+2}\right) \\
&\leq p\left(z,x_{2n+2}\right)+\mathbf{M}\left(x_{2n+1},z\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $n\to\infty$ iken limit alındığında

$$p\left(z,\delta z\right)\leq\max\left\{\varphi\left(p\left(z,\delta z\right)\right),\varphi\left(\frac{p\left(z,\delta z\right)}{2}\right)\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla $p\left(z,\delta z\right)=0$ ve böylece $\delta z=z$ dır.

Benzer şekilde, $x=z$ ve $y=x_{2n}$ için $Tz=z$ olduğunu ispat edebiliriz. Buradan

$$z=\delta z=Tz$$

olur. Yani T ve δ 'nin ortak bir sabit noktası vardır.

Ayrıca (p2) 'den

$$p(Tz, Tz) = 0 \text{ ve } p(\delta z, \delta z) = 0$$

elde edebiliriz.

Teorem 4.1.18 'in ispatına benzer olarak T ve δ 'nin ortak sabit noktalarının kümesi $F(T, \delta)$ 'nın iyi sıralı olması için gerek ve yeter koşul T ve δ 'nin bir ve yalnız bir ortak sabit noktaya sahip olmasıdır.

Sonuç 4.1.24. (Nashine ve ark., 2013) δ, T - zayıf izoton artan dönüşüm almak yerine $T, \delta : X \longrightarrow X$ iki zayıf artan dönüşüm olarak alınırsa Teorem 4.1.23 'ün koşulları sağlanır.

Sonuç 4.1.24 'de $\delta = T$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.25. (Nashine ve ark., 2013) $(X, p, \preceq)$ tam sıralı kısmi metrik uzay olsun. $\forall\ t > 0$ için $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi(t) < t$ olmak üzere sürekli bir $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonunu alalım ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \max\left\{\varphi(p(x, y)), \varphi(p(x, Tx)), \varphi(p(y, Ty)), \varphi\left(\frac{p(y, Tx) + p(x, Ty)}{2}\right)\right\}$$

koşulunu sağlasın. Ayrıca,

a) Her $x \in X$ için $Tx \preceq T(Tx)$

b) X düzenli

olsun. Bu taktirde T sabit bir noktaya sahiptir ve

$$p(Tz, Tz) = 0 = p(z, z)$$

dır. Dahası T 'nın sabit noktalarının $F(T)$ kümesi iyi sıralıdır.

Aşağıdaki örnek yardımıyla Teorem 4.1.18 ve Teorem 4.1.23 'in kullanımları görülecektir. Ayrıca, aşağıdaki örnek bu teoremlerin bilinen sabit nokta sonuçlarından daha genel olduğunu da gösterecektir.

Örnek 4.1.26. (Nashine ve ark., 2013) $X : [0, +\infty)$ kümesi $p(x, y) = \max\{x, y\}$ alışılmış $p : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ kısmi metriği ile düşünülsün. X 'deki kısmi sıralamayı

$$x \preceq y \Leftrightarrow x = y$$

ya da $x, y \in [0, 1]$ olmak üzere $x \leq y$ ile verelim. (X, p) tam kısmi metrik uzay olduğundan (X, p^s) tamdır. Gerçekten, herhangi $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} p^s(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= 2\max\{x, y\} - (x + y) \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

dır. Böylece $(X, p^s) = ([0, +\infty), |\cdot|)$ tam alışılmış metrik uzaydır. $T, \delta : X \longrightarrow X$

$$Tx = \begin{cases} \frac{x^2}{2(1+x)} & , \quad x \in [0,1] \\ \frac{x}{4} & , \quad x > 1 \end{cases} \qquad \delta x = \begin{cases} \frac{x^2}{4(1+x)} & , \quad x \in [0,1] \\ \frac{x}{4} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonunu

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2(1+t)} & , \quad t \in [0,1] \\ \frac{t}{4} & , \quad t > 1 \end{cases}$$

şeklinde alalım. Bu taktirde φ , Teorem 4.1.18 'de belirtilen özelliklere sahiptir. Şimdi, X 'de $y \leq x$ koşulunu sağlayan keyfi elemanlar alalım. O halde iki durum vardır.

- Eğer $x \in [0, 1]$ (Dolayısıyla $y \in [0, 1]$) ise

$$p(Tx, \delta y) = \max\left\{\frac{x^2}{2(1+x)}, \frac{y^2}{4(1+y)}\right\} = \frac{x^2}{2(1+x)}$$

dır. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(x,y) &= \max\left\{\varphi(p(x,y)),\varphi\left(p\left(x,\frac{x^2}{2(1+x)}\right)\right),\varphi\left(p\left(y,\frac{y^2}{4(1+y)}\right)\right),\right.\\
&\quad \left.\varphi\left(\frac{1}{2}\left[p\left(x,\frac{y^2}{4(1+y)}\right)+p\left(y,\frac{x^2}{2(1+x)}\right)\right]\right)\right\}\\
&= \max\left\{\varphi(x),\varphi(x),\varphi(y),\varphi\left(\frac{1}{2}\left[x+\max\left\{y,\frac{x^2}{2(1+x)}\right\}\right]\right)\right\}\\
&= \varphi(x)
\end{aligned}$$

dır. (φ fonksiyonu artan olduğundan $x \geq y$ ve $x \geq \frac{x^2}{2(1+x)}$ olduğundan

$$\frac{x+\max\left\{y,\frac{x^2}{2(1+x)}\right\}}{2} \leq x$$

olduğu kullanıldı.) Dolayısıyla bu durumda $p(Tx,\delta y) \leq \mathbf{M}(x,y)$ 'dır.

- Eğer $x > 1$ (ve böylece $x = y$) ise

$$p(Tx,\delta y) = \frac{x}{4} \text{ ve } \mathbf{M}(x,y) = \varphi(x) = \frac{x}{4}$$

dır. Dolayısıyla olası tüm durumlarda (4.1.34) sağlanır.

Ayrıca X 'in düzenli olma koşulunun sağlandığı açıktır. Bu nedenle, Teorem 4.1.18 ve Teorem 3.1.16 deki tüm koşullar sağlanmış olur ve böylece

$$p(z,z) = p(Tz,Tz) = p(\delta z,\delta z) = 0$$

olmak üzere T ve δ 'nin bir $z = 0$ ortak sabit noktası vardır.

Öte yandan $d(x,y)$ standart metriğinde aynı problemi düşünelim ve $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$ alalım. Bu taktirde

$$d(Tx,\delta y) = \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right| = \frac{5}{24}$$

ve

$$\mathbf{M}(x,y) = \max\left\{\varphi\left(\frac{1}{2}\right), \varphi\left(\frac{3}{4}\right), \varphi\left(\frac{11}{24}\right), \varphi\left(\frac{29}{48}\right)\right\} = \varphi\left(\frac{3}{4}\right)$$

olur. Böylece $\mathbf{M}(x,y) = \varphi\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{56} < \frac{5}{24}$ 'dır. Dolayısıyla standart metrik uzaylardaki bilinen sonuçlardan

$$d(Tx, \delta y) \leq \mathbf{M}(x,y)$$

koşulunun sağlanmadığı görülür. (Nashine ve ark., 2011).

4.2. Kısmi Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.2.1. (Nashine ve ark., 2012) $(X, p, \preceq)$ 0 -tam sıralı kısmi metrik uzayı

$$\mathbf{M}(x,y) = Ap(x,y) + Bp(x,Tx) + Cp(y,Ty) + Dp(y,Tx) + Ep(x,Ty) \quad (4.2.54)$$

olsun. Böylece, $T : X \to X$ azalmayan dönüşüm olmak üzere karşılaştırılabilir $\forall\ x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \mathbf{M}(x,y) \quad (4.2.55)$$

koşulunu sağlasın. Kabul edelim ki;

i) T sürekli,

veya

ii) X düzenli

olsun. Bu taktirde T bir z sabit noktasına sahiptir ve $p(Tz, Tz) = 0 = p(z,z)$ dır. Dahası T 'nin sabit noktalarının $F(T)$ kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter koşul tek nokta kümesi olmasıdır.

İspat. Azalmayan bir dönüşüm için teorem ispatlanacaktır. $x_0 \in X$ alarak $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1}$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisini alalım. Eğer bazı $n \geq 0$ için $p(x_n, x_{n+1}) = 0$ ise bu taktirde $Tx_n = x_{n+1} = x_n$ ve $p(x_n, x_n) = 0$ (p2 'den) olur, böylece ispat tamamlanır. Kabul edelim ki, $\forall n \geq 0$ için $p(x_n, x_{n+1}) > 0$ olsun.
T azalmayan olduğundan

$$x_0 \preceq Tx_0 = x_1 \preceq Tx_1 = x_2 \preceq ... \preceq x_n \preceq Tx_n = x_{n+1} \preceq ...$$

elde edilir. $x = x_n$ ve $y = x_{n+1}$ karşılaştırılabilir elemanları koşul (4.2.55) 'e uygulanırsa

$$\begin{aligned}
p(x_{n+1}, x_{n+2}) &= p(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \mathbf{M}(x_n, x_{n+1}) \\
&= Ap(x_n, x_{n+1}) + Bp(x_n, x_{n+1}) + Cp(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + Dp(x_{n+1}, x_{n+1}) + Ep(x_n, x_{n+2}) \\
&\leq (A+B+E)\,p(x_n, x_{n+1}) + (C+E)\,p(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + (D-E)\,p(x_{n+1}, x_{n+1}) \qquad (4.2.56)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $x = x_{n+1}$ ve $y = x_n$ karşılaştırılabilir elemanları koşul (4.2.55) e uygulanırsa

$$\begin{aligned}
p(x_{n+2}, x_{n+1}) &= p(Tx_{n+1}, Tx_n) \leq \mathbf{M}(x_{n+1}, x_n) \\
&= Ap(x_{n+1}, x_n) + Bp(x_{n+1}, x_{n+2}) + Cp(x_n, x_{n+1}) \\
&\quad + Dp(x_n, x_{n+2}) + Ep(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
&\leq (A+C+D)\,p(x_n, x_{n+1}) + (B+D)\,p(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + (E-D)\,p(x_{n+1}, x_{n+1}) \qquad (4.2.57)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.56) ve (4.2.57) kullanılarak

$$A+B+C+D+E < 1 \text{ ve } 0 \leq \lambda = \frac{2A+B+C+D+E}{2-(B+C+D+E)} < 1$$

olmak üzere

$$p(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \lambda p(x_n,x_{n+1})$$

elde edilir. Buradan $p(x_n,x_{n+1}) \leq \lambda^n p(x_0,x_1)$ ve $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x_{n+1}) = 0$ olduğu görülür. Ayrıca $\forall\ n > m$ için

$$p(x_n,x_m) \leq \left(\lambda^m + ... + \lambda^{n-1}\right) p(x_0,x_1)$$

ve böylece

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) = 0$$

dır. Bu taktirde $\{x_n\}, (X,p)$ üzerinde bir 0 -Cauchy dizisidir.

(X,p) 0 -tam uzay olduğundan $x_n \to z$ ve $p(z,z) = 0$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,z) = p(z,z) = 0 \qquad (4.2.58)$$

elde edilir. Şimdi $Tz = z$ olduğunu ispatlayalım.

İ) Kabul edelim ki T sürekli olsun. $n \to \infty$ iken

$$p(z,Tz) \leq p(z,x_{n+1}) + p(x_{n+1},Tz) - p(x_{n+1},x_{n+1}) \leq p(z,x_{n+1}) + p(x_{n+1},Tz)$$

ve (4.2.58), (3.2.4) koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} p(z,Tz) &\leq \lim_{n\to\infty} p(z,x_{n+1}) + \lim_{n\to\infty} p(Tx_n,Tz) \\ &= p(z,z) + p(Tz,Tz) \\ &= p(Tz,Tz) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$p(z,Tz) \leq p(Tz,Tz)$$

olduğu görülür. (p2) 'den

$$p(Tz,Tz) \leq p(z,Tz)$$

elde edilir. Bu taktirde

$$p(z, Tz) = p(Tz, Tz)$$

dır. Kabul edelim ki $p(z, Tz) > 0$ olsun. Şimdi $z \preceq z$ ve koşul (4.2.55) 'den

$$\begin{aligned} p(z, Tz) &= p(Tz, Tz) \leq \mathbf{M}(z, z) = (B + C + D + E)\, p(z, Tz) \\ &\leq (A + B + C + D + E)\, p(z, Tz) \\ &< p(z, Tz) \end{aligned}$$

olup bu ise bir çelişkidir. Buradan

$$p(Tz, Tz) = p(z, Tz) = p(z, z) = 0$$

elde edilir. (p1) den $z = Tz$ olduğu görülür. Yani z, T-nin bir sabit noktasıdır.

ii) Kabul edelim ki X uzayı düzenli olsun. $x = x_n$ ve $y = z$ (bu elemanlar karşılaştırılabilirdir) (4.2.55) büzülme dönüşümünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} p(x_{n+1}, Tz) &= p(Tx_n, Tz) \\ &\leq Ap(x_n, z) + Bp(x_n, x_{n+1}) + Cp(z, Tz) \\ &\quad + Dp(z, x_{n+1}) + Ep(x_n, Tz) \end{aligned}$$

dır. $n \to \infty$ iken limite geçilir ve Lemma 3.2.7 kullanılırsa

$$p(z, Tz) \leq (C + E)\, p(z, Tz) \leq (A + B + C + D + E)\, p(z, Tz)$$

elde edilir. Buradan $A + B + C + D + E < 1$ olduğundan $p(z, Tz) = 0$ dır. Bu taktirde

$$z = Tz$$

dır.

Şimdi T sabit noktalar kümesinin iyi sıralı olduğunu kabul edelim. T 'nin bir tek sabit noktası olduğunu iddia ediyoruz. Aksine kabul edelim ki, $Tu = u$ ve $Tv = v$ fakat $u \neq v$ olsun. Kabulden $x = u$ ve $y = v$, koşul (4.2.55) 'e uygulanırsa $p(u, v) = 0$ değilse

$$\begin{aligned} p(u,v) &= p(Tu,Tv) \leq \mathbf{M}(u,v) \\ &= Ap(u,v) + Bp(u,Tu) + Cp(v,Tv) + Dp(v,Tu) + Ep(u,Tv) \\ &= Ap(u,v) + Bp(u,u) + Cp(v,v) + Dp(v,u) + Ep(u,v) \\ &\leq (A+B+C+D+E)\,p(u,v) < p(u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $u = v$ olup T 'nin bir tek sabit noktasıdır. Karşıtı açıktır. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde metrik uzaylardaki sabit nokta teorisi hakkında temel bilgilerden bahsedilmiştir. Metrik uzaylardaki sabit nokta teoremleri ile alakalı literatür çalışması yapılarak kısmi metrik uzaylarda önceden yapılmış çalışmalardan söz edilmiştir. Bu çalışmada Banach sabit nokta teoremi, çakışık nokta, ortak sabit nokta kavramları tanıtılarak kısmi metrik uzaylar üzerinde büzülme koşulunu sağlayan kendi üzerine dönüşümler için sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri verilmiştir. Bunların yanı sıra, kısmi metrik uzaylarda bilinen sabit nokta teoremlerinin bazı özel şartlar altındaki ispatları incelenebilir.

KAYNAKLAR

Altun, I. ve Simsek, H., Some fixed point theorems on dualistic partial metric spaces, J. Adv. Mat. Stut., 1–8.

Altun, I., Sola, F. ve Simsek, H., 2010. Generalized contractions on partial metric spaces, Topology Appl. 157(18), 2778–2785.

Altun, I. ve Sadarangani, H., 2010. Corrigendum to generalized contractions on partial metric spaces [Topology Appl., 157(18), 2778–2785], Topology Appl. 1738–1740.

Agarwal, R. P., El-Gebbily, M. A. ve O'Regan, D., 2008. Generalized contractions in patially ordered metric spaces, Appl. Anal. 87(1), 109–116.

Altun, I. ve Erduran, A., 2011. Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric spaces, Fixed Point Theory Appl. Article ID 508730, 10 pages.

Aydi, H., 2011. Some fixed points results in ordered partial metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl. (in press).

Altun, I., Damjanović, B. ve Djorić, D., 2009. ,Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces, Appl. Math. Lett. 23, 310–316.

Abdeljawad, T., Karapinar, E. ve Tas, K., 2011. Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric spaces, Applied Mathematics Letters, vol. 24, no. 11, pp. 1900–1904.

Abbas, M., Nazir, T. ve Romaguera, S., 2011. Fixed pooint results for generalized cyclic contrac-tion mappings in partial metric spaces, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. In press.

Abdeljawad, T., 2011. Fixed points for generalized weakly contractive mappings in partial metric spaces, Mathematical and Computer Modelling, vol. 54, no. 11-12, pp. 2923–2927.

Abdeljawad, T., Karapinar, E. ve Tas, K., 2012. A generalized contraction principle with control functions on partial metric spaces, Computers Mathematics with Applications. An International Journal, vol. 63, no. 3, pp. 716–719.

Agarwal, R. P, Alghamdi, M. A. ve Shahzad, N., 2012. Fixed point theory for cyclic generalized contractions in partial metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2012, article 40.

Abbas, M. ve Jungck, G., 2008. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 341, no. 1, pp. 416-420.

Ahmad, A. G. B., Fadail, Z. M., Rajiĉ, V. Ć. ve Radenović, S., 2012. Nonlinear Contractions in 0-Complete Partial Metric Spaces. Article ID. 451239, 12 pages, doi:10.1155/451239.

Boyd, D. W. ve Wong, J. S. W., 1969. On nonlinear contractions, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 20, pp. 458-464.

Ćirić, L., Ćakić, N., Rajović, M. ve Ume, J. S., 2008. Monotone generalized nonlinear contractions in partially ordered metric spaces, Fixed Point Theory Appl. Article ID 131294, 11 pages.

Ćirić, L., Samet, B., Aydi, H. ve Vetro, C., 2011. Common fixed points of generalized contractions on partial metric spaces and an application, Applied Mathematics and Computation, vol. 218, no. 6, pp. 2398–2406.

Dukić, D., Kadelburg, Z. ve Radenović, S., 2011. Fixed points of Geraghty-type mappings in various generalized metric spaces, Abstract and Applied Analysis, Article ID 561245, 13 pages.

Escardo, M. H., 1996. Pcf extended with real numbers, Theoret. Comput. Sci. 162, 79–115.

Fadail, Z. M. ve Ahmad, A. G. B., 2012. Coupled fixed point theorems of single-valued mapping for cdistance in cone metric spaces, Journal of Applied Mathematics, Article ID 246516, 20 pages.

Fadail, Z. M., Ahmad, A. G. B. ve Golubovic, Z., 2012. Fixed Point theorems single-valued mapping for c-distance in cone metric spaces,Abstract and Applied Analysis, Article ID. 826815, 10 pages.

Harjani, J. ve Sadarangani, K., 2009. Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets, Nonlinear Anal., 71(7-8), 3403–3410.

Heckmann, R., 1999. Approximation of metric spaces by partial metric spaces, Appl. Categ. Structures. 7, 71–83.

Hussain, N., Kadelburg, Z. ve Radenović, S., 2012. Comparison functions and fixed point results in partial metric spaces, Abstrac and Applied Analysis, Article ID 605781, 15 pages.

Ilić, D., Pavlović, V. ve Rakočević, V., 2012. Extensions of the Zamfirescu theorem to partial metric spaces, Mathematical and Computer Modelling, vol. 55, no. 3-4, pp. 801-809.

Ilić, D., Pavlović, V. ve Rakočević, V., 2011. Some new extensions of Banach's contraction principle to partial metric space, Applied Mathematics Letters, vol. 24, no. 8, pp. 1326–1330.

Jachymski, J., 2011. Equivalent conditions for generalized contractions on (ordered) metric spaces, Nonlinear Anal., 768–774

Jungck, G., 1976. Commuting mappings and fixed points, The American Mathematical Monthly, vol. 83, no. 4, pp. 261-263.

Karapinar, E. ve Erhan, M., 2011. Fixed point theorems for operators on partial metric spaces, Applied Mathematics Letters, vol. 24, no. 11, pp. 1894-1899.

Matthews, S.G., 1994. Partial metric topology. in: Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann. New York Acad. Sci., vol. 728, 183–197.

Matthews, S. G., 1992. Partial metric topology, Research Report 212, Department of Computer Science, University of Warwick.

Matkowski, J., 1977. Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 62, no. 2, pp. 344-348.

Nieto, J. J. ve Rodrígupez-López, R., 2005. Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary diffential equations, Order 22(3), 223–239.

Nashine, H. K. ve Samet, B., 2011. Fixed point results for mappings satisfying (ψ,φ)-weakly contractive condition in partially ordered metric spaces, Nonlinear Anal. 2201–2209.

Niteo, J.J ve Rodríguez-Lòpez, R., 2007. Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 23(12), 2205–2212.

Nashine, H. K., Samet, B. ve Vetro, C., 2011. Monotone generalized nonlinear contractions and fixed point theorems in ordered metric spaces, Math. Comput. Modelling 712–720.

Nashine, H. K., Kadelburg, Z. ve Radenović, S., 2013. Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered partial metric spaces., Mathematical and Computer Modelling 57, 2355–2365.

Nashine, H. K., Kadelburg, Z., Radenović, S. ve Kim, J. K., 2012. Fixed point theorems under Hardy-Rogers contractive conditions on 0-complete ordered partial metric spaces. Fixed Point Theory and Applications 180.

Oltra, S. ve Valero, O., 2004. Banach's fixed point theorem for partial metric spaces. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 36, 17–26.

O'Neill, S.J., 1996. Partial metrics, valuations and domain theory. in:Proc.11th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann. New York Acad. Sci., vol. 806, 304–315.

Oltra, S., Romaguera, S. ve Sánchez-Pérez, E. A., 2005. The canonical partial metric and the uniform convexity on normed spaces, Appl. Gen. Topal, 6(2), 185–194.

O'Rgan, D. ve Petrusel, A., 2008. Fixed point theorems for generalized conractions in ordered metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 341(2), 1241–1252.

Oltra, S., Romaguera, S. ve Sánchez-Pérez, E. A., 2002. Bicompleting weightable quasi-metric spaces and partial metric spaces, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Serie II, vol. 51, no. 1, pp. 151-162.

Paesano, D. ve Vetro, P., 2012. Suzuki's type characterizations of completeness for partial metric spaces and fixed points for partially ordered metric spaces, Topology and its Applications, vol. 159, no. 3, pp. 911-920.

Romeguera, S., 2010.A Kirk type characterization of completeness for partial metric spaces, Fixed Point Theory Appl. Article ID.493298, 6 pages.

Ran, A. C. M. ve Reurings, M. C. B., 2004. A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to metrix equations, Proc. Amer. Math. Soc. 132(5), 1435–1443.

Romaguera S., 2012. Fixed point theorems for generalized contractions on partial metric spaces, Topology and its Applications, vol. 159, no. 1, pp. 194-199.

Rus, I.A., 2001. Generalized Contractions and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca, Romania.

Rhoades, B. E., 1977. A comparison of various defnitions of contractive mappings, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 226, pp. 257-290.

Samet, B., Rajović, M., Lazović, R. ve Stoiljković, R., 2011. Common fixed point results for nonlinear contractions in ordered partial metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 71, doi:10.1186/1687-1812-71.

Valero, S., 2005. On Banach fixed point theorems for partial metric spaces. Appl. Gen. Topol., vol. 6(2), 229–240.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : DERYA ALTAN

Doğum Tarihi : 07/04/1991

Doğum Yeri : MALATYA

Medeni Hali : BEKAR

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

Telefon :

E-posta : altndryy@hormail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2018
Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2014
Lise	Gazi Anadolu Lisesi	2009