T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VEKTÖR METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Seda CEYLAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN
2018

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VEKTÖR METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Seda CEYLAN

TOKAT
2018

Seda CEYLAN tarafından hazırlanan "**Vektör Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri Üzerine**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **10 AĞUSTOS 2018** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **MATEMATİK ANA BİLİM DALI** 'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Ercan TUNÇ Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Serkan ATMACA Cumhuriyet Üniversitesi	....

ONAY

Prof. Dr. Ebubekir ALTUNTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

31/08/2018

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Seda CEYLAN
10/08/2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

VEKTÖR METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Seda CEYLAN

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde; metrik uzay ve vektör metrik uzaylardaki sabit nokta teorisiyle ilgili yapılmış çalışmalar hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde; metrik uzaylar ile ilgili temel kavramlar ve teoremlerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde; metrik uzaylarla ilgili verilen tanım ve teoremler vektör metrik uzayda tanımlanmıştır. Son olarak dördüncü bölümde ise vektör metrik uzaylar üzerinde zayıf uyuşabilirlik, çakışık nokta ve ortak sabit noktanın teoremleri verilerek teorik sonuçlara genelleştirilmiştir.

2018, 49 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Vektör metrik uzay, sabit nokta, çakışık nokta, zayıf uyuşabilirlik.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON SOME FIXED POINT THEOREMS IN VECTOR METRIC SPACES

Seda CEYLAN

Tokat Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

In the first part of this thesis, general information about the studies related fixed point theory in metric spaces and vector metric spaces is given. In the second part of the thesis it is mentioned that the basic concepts and theorems in metric spaces. As the third, the definitions and theorems about metric spaces are defined in vector metric spaces. Finally, in the fourth part, weak compability, coincidence point and common fixed point theorems on vector metric spaces is given and this theorems are generalized to theoretical results.

2018, 49 pages

KEYWORDS: Vector metric space, fixed point, coincidence point, weak compability

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgiyle yaparak tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazımım boyunca yol gösterici katkılarıyla destek olan Arş. Gör. Dr. Orhan ÖZDEMİR'e, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan başta ailem olmak üzere herkese sonsuz teşekkür ederim.

Seda CEYLAN
Ağustos 2018

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
∞	Sonsuzluk
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük veya eşit
$>$	Büyük
$\geq$	Büyük veya eşit
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$\in$	Elemanı
$\notin$	Elemanı değil

1. GİRİŞ

Metrik uzaylardaki sabit nokta teorisi matematiğin bir çok dalındaki özellikle uygulamalı matematikteki problemleri çözmek için önemli bir araçtır. Bugün metrik uzay kavramından genel olarak yeni bir takım uzaylar tanımlanmış ve böylece literatüre çok sayıda çalışma kazandırılmıştır. 2009 yılında Çevik ve Altun Metrik uzayın bir genelleştirmesi olarak vektör metrik uzay kavramını tanımlayarak metrik uzaydaki bazı temel kavramları bu uzaylar için tanımlamışlardır (Altun ve Çevik, 2011). Yine vektör metrik uzaylarda Baire teoreminden de bahsetmişlerdir. Vektör metrik uzayı Riesz uzay değerli olup metrik uzayın bir genelleştirmesidir. Aslında her ikiside vektör uzay değerli bir metrik dönüşümüdür. Metrik tanımı ile Huang-Zhang'ın metrik tanımı arasındaki farklardan biri Riesz uzayı üzerindeki doğal sıralamaya göre bir koninin varlığıdır. Vermiş olduğumuz tanımlardaki diğer bir fark ise vektör uzayının bir topolojik yapıya sahip olması gereğini ortadan kaldırmasıdır. Bir Riesz uzayı (veya bir vektör latis) sıralı bir vektör uzayı ve bir latistir. Huang ve Zhang (Huang ve Zhang, 2007), konik metrik uzayı tanımlayarak ve bu uzaylarda büzülme dönüşümü için bazı sabit nokta teoremlerini kanıtlamıştır. X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde koni metrik sıralı bir Banach uzayı üzerinde değer alır. Öte yandan Zabreiko (Zabreiko, 1997) K-metrik uzayı ve K-normlu uzayı tanımlamıştır. Ayrıca Zabreiko, K metrik uzaylarda lineer ve lineer olmayan Lipschitz koşullarıyla bazı sabit nokta teoremlerini vermiştir. X üzerindeki K-metrik uzayı K-konisi ile birikte sıralı bir lineer B-uzayı üzerinde değer alır. X üzerinde bir vektör metrik uzay Riesz uzayı üzerinde değer alır. Reel sayılarla Riesz uzayları yer değiştirilerek (X,d,E) vektör metrik uzaylarını tanımlarız. Bu tezde yukarıda sözü geçen çalışmaların ışığında vektör metrik uzayda bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde tezimizde yeri geldiğinde kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1.1. (sıralama bağıntısı, sıralı küme, örgü)

(a) Herhangi bir $E \neq \varnothing$ kümesinde $\leq$ bağıntısı

- Her $x \in E$ için $x \leq x$
- Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $y = x$
- Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$

özelliklerini sağlıyorsa $\leq$ sıralama bağıntısıdır ve $(E, \leq)$ ikilisine sıralı küme denir.

(b) $(E, \leq)$ ikilisi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in E$ için

$$x \vee y = \sup\{x, y\} \text{ ve } x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

E ye ait ise E ye örgü veya latis denir.

(c)

$$(x, y) \to x \vee y \text{ ve } (x, y) \to x \wedge y$$

fonksiyonları E de örgü işlemleridir. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bir örgünün sonlu bir kümesi ise

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i = \sup\{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ ve } \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \inf\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

gösterimlerini kullanırız. Bir örgüde boştan farklı her sonlu küme supremum ve infimuma sahiptir.
$(E, \leq)$ kısmi sıralı kümesinde $x < y$ gösterimi,

$$x \leq y \text{ ve } x \neq y$$

anlamına gelmektedir. Bir $[x, y]$ sıra aralığı

$$\{z \in E : x \leq y \leq z\}$$

kümesi demektir eğer $x \nleq y$ ise o zaman da

$$[x, y] = \varnothing$$

anlamına gelir.

Tanım 2.1.2. (koni, konveks, konveks koni)
E reel vektör uzayı ve K, E nin herhangi bir alt kümesi olsun.

(a) Her $t > 0$ için $tK \subset K$ (yani $t > 0$ ve $x \in K$ için $tx \in K$) oluyorsa K ya koni,

(b) $K + K \subseteq K$ (yani $x, y \in K$ için $x + y \in K$) oluyorsa K ya konveks küme,

(c) K hem (a) hemde (b) yi sağlıyorsa K ya konveks koni denir.

Tanım 2.1.3. (sıralı vektör uzayı, Riesz uzayı, örgü normu, Banach örgüsü)

(a) E reel vektör uzayı ve üzerinde ki sıralama bağıntısı $\leq$ olmak üzere , $x \leq y$ iken her $z \in E$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$x + z \leq y + z \text{ ve } \lambda x \leq \lambda y$$

oluyorsa E ye sıralı vektör uzayı ,

(b) E sıralı vektör uzayı ve örgü ise E ye Riesz uzayı(veya vektör örgüsü),

(c) E Riesz uzayı ve üzerinde ki norm $||.||$ olmak üzere her $x, y \in E$ için

$$|x| \leq |y| \text{ iken } ||x|| \leq ||y||$$

oluyorsa $||.||$ normuna örgü normu, E örgü normuna göre tam ise E ye Banach örgüsü denir. Burada

$$|x| = x \vee (-x)$$

dir.

E Riesz uzayının pozitif konisi

$$E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$$

dır.

Şimdi Riesz uzayı ve Banach örgüsü ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 2.1.4.

$\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{2}}$ biçiminde tanımlanan normla Banach uzayıdır. Diğer yandan

$$''x = (x_1, x_2, ..., x_n) \leq y = (y_1, y_2, ..., y_n) \Leftrightarrow \text{Her bir } i = 1, 2, ..., \text{için } x_i \leq y_i''$$

alışılmış sıralama bağıntısıyla $\mathbb{R}^n$ Riesz uzayıdır. x ve y nin supremumu ve infimumu sırasıyla

$$x \vee y = (\max\{x_1, y_1\}, \max\{x_2, y_2\}, ..., \max\{x_n, y_n\})$$

ve

$$x \wedge y = (\min\{x_1, y_1\}, \min\{x_2, y_2\}, ..., \min\{x_n, y_n\})$$

biçimindedir. Aynı sıralamayla $\mathbb{R}^n$ üzerindeki norm örgü normudur. O halde $\mathbb{R}^n$ Banach örgüsüdür.

Örnek 2.1.5.

X kompakt topolojik uzayı üzerinde tanımlı sürekli reel değerli fonksiyonların vektör uzayı $C(X)$ ve sınırlı sürekli reel fonksiyonların vektör uzayı $C_b(X)$ olmak üzere,

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

biçiminde tanımlanan dönüşümle $C(X)$ ve $C_b(X)$ birer Banach uzayıdır. Diğer yandan

$$''f \leq g \Leftrightarrow \text{Her bir } x \in X \text{ için } f(x) \leq g(x)''$$

biçiminde tanımlanan sıralama bağıntısı ile $C(X)$ ve $C_b(X)$ birer Riesz uzayıdır. Burada f ve g reel fonksiyonlarının örgü işlemleri

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ ve } (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

olur. $||.||_\infty$ normu verilen sıralamaya göre örgü normu olduğundan $C(X)$ ve $C_b(X)$ Banach örgüsü olurlar.

Örnek 2.1.6.

$1 \leq p \leq \infty$ için $L_p(\mu)$ vektör uzayı,

$$||f||_p = \begin{cases} (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} & , \quad 1 \leq p \leq \infty \\ \sup |f| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

biçiminde verilen dönüşümü ile Banach uzayıdır. Diğer yandan

$$''f \leq g \Leftrightarrow \mu - \text{hemen hemen her } x \text{ için } f(x) \leq g(x)''$$

ile tanımlanan sıralama bağıntısıyla $L_p(\mu)$ Riesz uzayıdır. Buradaki örgü işlemleri için

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ ve } (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

eşitlikleri kullanılır. $1 \leq p \leq \infty$ için $||.||_p$ normu örgü normu ve böylece $L_p(\mu)$ Banach örgüsüdür.

Şimdi Riesz uzayındaki bazı özellikleri teorem ile verelim.

Teorem 2.1.7. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985)

E Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun.

1. $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$

2. $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$

3. $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$

4. Her $\lambda \geq 0$ için $\lambda(x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y$ ve $\lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y$.

E Riesz uzayı ve (x_n) E de bir dizi olsun. Her n, m için
$n \leq m$ iken $x_n \leq x_m$ oluyorsa (x_n) dizisine artan dizi denir ve $x_n \uparrow$ ile gösterilir.
$n \leq m$ iken $x_n \geq x_m$ oluyorsa (x_n) dizisine azalan dizi denir ve $x_n \downarrow$ ile gösterilir.
$x_n \uparrow \leq x$ ifadesi (x_n) dizisinin üstten x ile sıra sınırlı artan dizi olduğunu, $x_n \downarrow \geq x$ ifadesi de (x_n) dizisinin alttan x ile sıra sınırlı azalan dizi olduğunu gösterir.
$x_n \uparrow x$ gösterimi (x_n) dizisinin artan ve supremumunun x olduğunu, $x_n \downarrow x$ gösterimi de (x_n) dizisinin azalan ve infimumunun x olduğunu belirtir.
(x_n) ve (y_n) E de herhangi iki azalan dizi olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $x_n \downarrow x$ ve $y_m \downarrow y \Rightarrow x_n + y_m \downarrow x + y$,

(ii) $x_n \downarrow x$ ise $\lambda > 0$ için $\lambda x_n \downarrow \lambda x$ ve $\lambda < 0$ için $\lambda x_n \uparrow \lambda x$,

(iii) $x_n \downarrow x$ ve $y_m \downarrow y \Rightarrow x_n \vee y_m \downarrow x \vee y$ ve $x_n \wedge y_m \uparrow x \wedge y$.

Benzer özellikler artan diziler için de geçerlidir.

Tanım 2.1.8. (Arşimedyan Riesz uzayı, Dedekind tam Riesz uzayı, $\sigma-$Dedekind tam Riesz uzayı)
E Riesz uzayı olmak üzere,

(a) Her $x \in E^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa E ye Arşimedyan Riesz uzayı ,

(b) E nin üstten sınırlı her alt kümesi supremuma sahipse, E ye Dedekind tam Riesz uzayı,

(c) E nin sayılabilir ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu varsa, E ye σ-Dedekind tam Riesz uzayı

denir.

Lemma 2.1.9. (Aliprantis ve Border, 1999)
Her Dedekind tam Riesz uzayı Archimedean Riesz uzayıdır. Fakat her Archimedean Riesz uzayı Dedekind tam Riesz uzayı değildir.
$C[0, 1]$ bir Archimedean Riesz uzayı fakat Dedekind tam Riesz uzayı değildir.

Örnek 2.1.10. (Aliprantis ve Border, 1999)
$C[0,1]$ de

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -n(x - \frac{1}{2}) & , \ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & , \ \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{ve } g_n(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \le x \le 1 - \frac{1}{n} \\ n(1-x) & , \ 1 - \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $(f_n)_{n\geq 2}$ ve $(g_n)_{n\geq 2}$ parçalı lineer fonksiyon dizilerini ele alalım. $C[0,1]$ de $\mathbf{1}$ sabit bir fonksiyonu iken $0 \le f_n \uparrow \le \mathbf{1}$ sağlanır, fakat $\{f_n\}$ dizisi $C[0,1]$ de bir supremuma sahip değildir. Böylece $C[0,1]$ Dedekind tam Riesz uzayı değildir. Ayrıca her $x \in [0,1]$ için $f_n(x) \uparrow f(x)$ iken $f_n \uparrow f$ olması örgüye göre doğrudur. Diğer yandan $f_n \uparrow f$ olması örgüye göre her $x \in [0,1]$ için $f_n(x) \uparrow f(x)$ olması anlamına gelmez. $\{g_n\}$ dizisi buna bir örnektir. Örgü anlamında $g_n \uparrow \mathbf{1}$ iken her $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ için $g_n(1) = 0$ dır.

Tanım 2.1.11. ($o-$*yakınsaklık*) (Aliprantis ve Border, 1999)(Cristescu, 1983)
E Riesz uzayı, (b_n) E de bir dizi ve $b \in E$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n \downarrow 0 \text{ ve } |b_n - b| \le a_n$$

olacak şekilde E de bir (a_n) dizisi varsa (b_n) dizisi b ye $o-$*yakınsaktır* (veya *sıra yakınsaktır*) denir ve $b_n \xrightarrow{o} b$ ile gösterilir. Burada

$$b_n = b \text{ ve } a \in E \text{ için } |a| = \sup\{a, -a\}$$

dır.

Tanım 2.1.12. ($o-$*süreklilik*) (Cristescu, 1983)
E ve F Riesz uzayları, $f : E \to F$ bir fonksiyon olsun. Eğer E de

$$b_n \xrightarrow{o} b$$

iken F de

$$f(b_n) \xrightarrow{o} f(b)$$

ise f ye $o-$ *süreklidir* (veya *sıra süreklidir*) denir.

Tanım 2.1.13. ($o-$*Cauchy* dizisi, $o-$*tamlık*) (Aliprantis ve Border, 1999)(Cristescu, 1983)
E bir Riesz uzayı ve (b_n), E de bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ için

$$a_n \downarrow 0 \text{ ve } |b_{n+p} - b_n| \leq a_n$$

olacak şekilde E de bir (a_n) dizisi varsa (b_n) dizisine $o-$ *Cauchy* denir.
Her bir $o-$ *Cauchy* dizisi $o-$ *yakınsak* olan E Riesz uzayına $o-$ *tamdır* denir.

Bir Riesz uzayındaki negatif olmayan elemanların konisi E_+ ile gösterilir.

Lemma 2.1.14. (Altun ve Çevik, 2011)(Altun ve Soleimani Rad, 2016)
E Riesz uzayı olmak üzere , $a \in E_+$ ve $k \in [0,1)$ iken

$$a \leq ka$$

ise

$$a = 0$$

dır.

İspat.
$a \leq ka$ şartı

$$-(1-k)a = ka - a \in E_+$$

olması anlamına gelir. $a \in E_+$ ve $1-k > 0$ olduğundan

$$(1-k)a = 0 \text{ ve } a = 0$$

olur.

Tanım 2.1.15. (kısmi sıralı latis, sıralı lineer uzay, lineer latis)

(a) Bir kısmi sıralı $(E, \leq)$ kümesinin elemanlarının her çifti supremum ve infimuma sahip ise $(E, \leq)$ kümesine kısmi sıralı latis,

(b) E reel lineer uzayı E nin cebirsel yapısıyla uyuşabilir ise $\leq$ sıralama bağıntısıyla bir sıralı lineer uzayı,

(c) $(E, \leq)$ kümesi sıralı latis olacak şekilde bir E sıralı lineer uzayı Riesz uzay (veya lineer latis) olarak adlandırılır.

Lemma 2.1.16.
$(E, \leq)$ kısmi sıralı kümesi üzerinde

$$x < y, x \leq y, x \neq y$$

olsun. Bu durumda bir $[x, y]$ sıralı aralığının kümesi

$$\{z \in E : x \leq z \leq y\}$$

olur.

(Altun ve Çevik, 2011)(Cevik ve Altun, 2009)

(i) Vektör metrik ve (Zabreiko, 1997) de tanımlanan Zabreiko metrikleri arasındaki fark, Riesz uzayının bir yapısına sahip olmasıdır.

(ii) Vektör metrik ve (Huang ve Zhang, 2007) da tanımlanan Huang-Zhang metriği arasındaki farklılıklardan biri Riesz uzayındaki sıralamanın doğal yapısına göre bir koni olmasıdır. Diğer fark ise vektör metriğin vektör uzayı için bir Banach uzayı olması gerekliliğini ortadan kaldırmasıdır.

Tanım 2.1.17. (çakışık nokta, zayıf uyuşabilirlik, ortak sabit nokta)
$S, T : X \to X$ dönüşümler olsun. $x \in X$ için

$$y = Tx = Sx$$

şartı sağlanıyorsa y ye çakışma noktası, x e de T ve S nin çakışık noktası denir. Aynı zamanda T ile S zayıf uyuşabilir olur yani X de çakışık noktaları aynıdır.
O zaman çakışma noktası olan y bu dönüşümlerin tek ortak sabit noktasıdır.

Tanım 2.1.18. (çakışık nokta) (Jungck ve Rhoades, 2006)
$f, g : X \to X$
X kümesi üzerinde dönüşümler olsun. $w \in X$ için

$$fw = gw = z$$

ise w, f ve g nin çakışık noktası adını alır ve z, f ve g nin bir çakışık noktası olur.

Tanım 2.1.19. (zayıf uyuşabilirlik) (Jungck ve Rhoades, 2006)
$f, g : X \to X$
X kümesi üzerinde dönüşümler olsun. Eğer f ve g her çakışık noktasında değişmeli ise zayıf uyuşabilir denir.

Tanım 2.1.20. (ortak sabit nokta) (Jungck ve Rhoades, 2006)
f ve g bir X kümesinde kendi içinde zayıf uyuşabilir dönüşümler olsun. f ve g bir tek

$$z = fw = gw$$

çakışık noktasına sahipse z, f ve g nin bir tek ortak sabit noktasıdır.

3. VEKTÖR METRİK UZAYLAR VE BAZI ÖZELLİKLERİ

3.1. Vektör Metrik Uzaylar

Bu bölümde geçen kavramlar ve sonuçlar (Cevik ve Altun, 2009) dan alınmıştır.

Tanım 3.1.1. (vektör metrik, vektör metrik uzay)
$X \neq \varnothing$ bir küme ve E bir Riesz uzayı olsun. $d : X \times X \to E$ fonksiyonu

(a) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(b) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

özelliklerini sağlıyorsa d ye vektör metrik yada $E-metrik$ denir. (X, d, E) ye *vektör metrik uzay* ya da $E - metrik\ uzay$ denir.
Vektör metrik (veya E-metrik) uzayında her $x, y, z, w \in E$ için

(i) $0 \leq d(x, y)$

(ii) $d\,(x, y) = d\,(y, x)$

(iii) $|d\,(x, z) - d\,(y, z)\,| \leq |d\,(x, y)\,|$

(iv) $|d(x, z) - d(y, w)| \leq |d(x, y) - d(z, w)|$

özellikleri sağlanır.

Şimdi vektör metrik uzaylar ile ilgili bazı örnekler verelim.

Örnek 3.1.2.

(a) E Riesz uzayı,

$$d(x, y) = |x - y|$$

ile tanımlanan $d : E \times E \to E$ dönüşümü ile vektör metrik uzaydır. d vektör metriği E üzerinde mutlak değer metriği adını alır.

(b) (x_1, y_1),$(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2$$

koordinat sıralamasıyla ve

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ ya da } x_1 = x_2, y_1 \leq y_2$$

sözlüksel sıralamasıyla $\mathbb{R}^2$ bir Riesz uzayıdır. Böylece α ve β pozitif reel sayıları için

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (\alpha|x_1 - x_2|, \beta|y_1 - y_2|)$$

ile tanımlanan d dönüşümü bir vektör metriktir.

(c) $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta > 0$ olmak üzere $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$d(x, y) = (\alpha|x - y|, \beta|x - y|)$$

olsun. Bu taktirde d koordinatsal ve sözlüksel sıralamalarıyla vektör metriktir.

$\mathbb{R}^2$, koordinatsal sıralama ile Archimedeandır ancak sözlük sıralamasıyla Archimedean değildir.

Tanım 3.1.3. ($E - yakınsaklık$, $E - Cauchy$, $E - tam$, $E - kapalılık$)

(a) (X, d, E) bir vektör metrik uzay olsun. (x_n) dizisi X üzerinde bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n \downarrow 0 \text{ ve } d(x_n, x) \leq a_n$$

olacak şekilde E de bir (a_n) dizisi varsa (x_n) dizisi x'e $E - yakınsar$ denir ve

$$x_n \xrightarrow{d,E} x$$

şeklinde gösterilir.

(b) (X, d, E) bir vektör metrik uzay ve (x_n) X de bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{N}/\{0\}$ için

$$a_n \downarrow 0 \text{ ve } d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n$$

olacak şekilde E de bir (a_n) dizisi varsa (x_n) disizine $E - Cauchy$ dizisi denir.

(c) Her bir $E-Cauchy$ dizisi $E-yakınsak$ olan vektör metrik uzaya $E-tamdır$ denir.

(d) (X,d,E) bir E-metrik uzay ve $Y \subset X$ bir altküme olsun.

$$(x_n) \subset Y \text{ ve } x_n \overset{d,E}{\to} x$$

iken $x \in Y$ ise Y ye $E-kapalıdır$ denir.

(e) (X,d,E), (Y,p,F) iki vektör metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X de

$$x_n \overset{d,E}{\to} x$$

iken Y de

$$f(x_n) \overset{p,F}{\to} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna $(E,F)-süreklidir$ denir.

Lemma 3.1.4.

$x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) x limiti tektir,

(ii) (x_n) nin her alt dizisi x e E-yakınsar,

(iii) $y_n \overset{d,E}{\to} y$ ise $d(x_n,y_n) \overset{o}{\to} d(x,y)$.

Tanım 3.1.5. ($E-açık\ küme$)
(X,d,E) vektör metrik uzay,

$$A \subseteq X \text{ ve } B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

olsun. Her $x \in A$ için

$$B(x,r) \subseteq A$$

olacak şekilde

$$r > 0$$

sayısı varsa A ya $E-$ *açık küme* denir.

Her $E-$açık yuvar bir $E-$ açık kümedir ve X in tüm $E-$ açık alt kümelerinin kolleksiyonu X üzerinde $\tau_{d,E}$ topolojisini temsil eder.

Tanım 3.1.6. (E-çap, E-sınırlı küme)
(X, d, E) vektör metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

E de mevcutsa o zaman

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

ya A nın $E-$*çapı* denir. Her $x, y \in A$ için

$$d(x, y) \leq a$$

olacak şekilde E de bir

$$a > 0$$

varsa o zaman A ya $E-$ *sınırlı küme* denir.

Sonuç 3.1.7.
X, E Dedekind tam Riesz uzayı ise X in her $E-$ sınırlı kümesi bir $E-$çapa sahiptir.

1) $E = \mathbb{R}$ ise $E-$ *yakınsaklık* ve metrik yakınsaklık kavramları aynıdır.

$E-$ *Cauchy* dizisi ve Cauchy dizisi kavramları da aynıdır.

2) $X = E$ ve d, X üzerinde mutlak değer vektör metrikse $E-$ *yakınsaklık* ve $o-$ *yakınsaklık* kavramları da aynıdır.

Teorem 3.1.8.
(X, d, E) vektör metrik uzayı için aşağıda ki özellikler sağlanır.

(a) Her $E-$ *yakınsak* dizi $E-$ *Cauchy* dizisidir.

(b) Her $E-Cauchy$ dizisi $E-sınırlıdır$.

(c) (x_n), $E-Cauchy$ dizisi

$$x_{n_k} \overset{d,E}{\to} x$$

olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisine sahipse

$$x_n \overset{d,E}{\to} x$$

dir.

(d) (x_n) ve (y_n) $E-Cauchy$ dizisi ise

$$(d(x_n, y_n))$$

$o-Cauchy$ dizisidir.

İspat.

(a) X de $x_n \overset{d,E}{\to} x$ olsun. $a_n \downarrow 0$ ve her n ve p için

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x) + d(x_{n+p}, x) \leq a_n + a_{n+p} \leq 2a_n$$

olacak şekilde E de (a_n) dizisi var olduğundan (x_n), X de $E-Cauchy$ dizisidir.

(b) (x_n), X de $E-Cauchy$ dizisi olsun. $a_n \downarrow 0$ ve her n ve p için

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n$$

olacak şekilde E de (a_n) dizisi var olduğundan

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq a_1$$

dir. Yani (x_n), X de $E-$sınırlıdır.

(c) (x_n), X de $E-Cauchy$ dizisi ve X de

$$x_{n_k} \stackrel{d,E}{\rightarrow} x$$

olacak şekilde (x_{n_k}), (x_n) dizisinin alt dizisi olsun. Her n için

$$n \leq n_k$$

olduğunda

$$n_k = n + p$$

alınırsa

$$a_n \downarrow 0, b_n \downarrow 0 \text{ ve } d\left(x_n, x\right) \leq d\left(x_n, x_{n+p}\right) + d\left(x, x_{n+p}\right) \leq a_n + b_{n+p} \leq a_n + b_n$$

olacak şekilde E de (a_n) ve (b_n) dizileri var olduğundan

$$x_n \stackrel{d,E}{\rightarrow} x$$

dir.

(d) $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$ ve her n ve p için

$$\left|d\left(x_n, y_n\right) - d\left(x_{n+p}, y_{n+p}\right)\right| \leq d\left(x_n, x_{n+p}\right) + d\left(y, y_{n+p}\right) \leq a_n + b_n$$

olacak şekilde E de (a_n) ve (b_n) dizileri var ise $(d\left(x_n, y_n\right))$ E de $o-Cauchy$ dizisidir.

Tanım 3.1.9. ($\tau_{d,E}$−yoğun, E-yoğun)
(X, d, E) vektör metrik uzay olsun.

(a) Y, X in alt kümesi olsun. Her bir $x \in X$ ve $0 < r \in E$ için

$$B(x, r) \cap Y \neq \varnothing$$

ise Y ye $\tau_{d,E} - yoğun$ denir.

(b) Y, X in alt kümesi olsun. Her $x \in X$ için

$$x_n \stackrel{d,E}{\rightarrow} x$$

şartını sağlayan Y de (x_n) dizisi varsa Y ye $E-yo\breve{g}un$ denir.

Sonuç 3.1.10.

E Arşimedyan Riesz uzayı ve Y, (X, d, E) vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Y, $\tau_{d,E} - yo\breve{g}un$ ise Y, $E - yo\breve{g}undur$.

Baire teoremini oluşturmak için vektör metrik topolojisinin bazı özelliklerini kullanacağız. Bir sonraki teorem vektör metrik uzaylar için Cantor kesişim Teoremini açıklamaktadır.

Teorem 3.1.11.

E Dedekind tam olmak üzere X bir E tam vektör metrik uzay olsun. Boş olmayan E kapalı alt kümelerinin azalan bir dizisinin X de çapı sıfırsa dizinin kesişimi bir tek nokta kümesidir.

İspat.

(F_n), E-Dedekind tam olan X E tam vektör metrik uzayının boştan farklı E kapalı alt kümelerinin azalan bir dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(F_n) = 0$$

olduğunu varsayalım.

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

birden fazla nokta içermemektedir. $x, y \in F$ ve her n için

$$d(x, y) \leq d(F_n)$$

dir. Böylece

$$d(x, y) = 0$$

yani

$$x = y$$

dir. F nin boştan farklı olduğunu göstermek için her bir n için $x_n \in F$ alalım. Her n ve p için

$$d\left(x_n, x_{n+p}\right) \leq d(F_n)$$

olduğundan (x_n) dizisi $E - Cauchy$ dir. X, E-tam olduğundan

$$x_n \overset{d,E}{\to} x$$

olacak şekilde $x \in X$ vardır. x_{n+p}, F_n e aittir ve her bir F_n, $E - kapalıdır$. Böylece her bir n için x, F_n e aittir.

Şimdi vektör metrik uzaylar için Baire Teoremini verelim.

Teorem 3.1.12.

X, E-tam vektör metrik uzayı olmak üzere, X, E Archimedean ve Dedekind tam ise X Baire uzayıdır.

İspat.

X, E-tam vektör metrik uzayı ve E Archimedean olsun. X in $\tau_{d,E} - yoğun$ açık alt kümelerinin dizisi

$$(A_n) \text{ ve } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olsun. A nın X in $\tau_{d,E}$-yoğun açık alt kümesi olduğunu ya da her bir $x \in X$ ve $r > 0$ için

$$B(x,r) \cap A \neq \varnothing$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. Sabit bir $x \in X$ ve $r > 0$ alalım. $C(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar ve a, E nin elemanı olmak üzere A_1, X de $\tau_{d,E} - yoğun$ ve açık olduğundan

$$C(y_1, r_1) \subset B\left(x, r\right) \cap A_1$$

olacak şekilde

$$0 < r_1 < a \text{ ve } y_1 \in X$$

vardır. Benzer şekilde A_2, X de $\tau_{d,E}-yoğun$ ve açık olduğundan

$$B\left(x,r\right)\cap A_2\neq\varnothing$$

olur. Böylece

$$C(y_2,r_2)\subset B\left(y_1,r_1\right)\cap A_2$$

olacak şekilde

$$0<r_2<\frac{a}{2} \text{ ve } y_2\in X$$

vardır. Tümevarıma devam edilirse $0<r_n$ ve her bir n için

$$C(y_{n+1},r_{n+1})\subset B\left(y_n,r_n\right)\cap A_{n+1}\subset C(y_n,r_n) \text{ ve } r_n<\frac{a}{n}$$

olacak şekilde E de (r_n) dizisi ve X de (y_n) dizisinin var olduğu görülür. Buradan Cantor kesişim teoremi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}C(y_n,r_n)$$

nin tek noktadan ibaret olduğunu gösterir. Böylece

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}C(y_n,r_n)\subset B(x,r)\cap A$$

dan

$$B(x,r)\cap A\neq\varnothing$$

olduğunu görmüş oluruz.

4. VEKTÖR METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1. Vektör Metrik Uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi

Bu bölümde vektör metrik uzaylarda Banach sabit nokta teoremi verilecektir.

Teorem 4.1.1. (Cevik ve Altun, 2009)
X, bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümünün $k \in [0, 1)$ bir sabit sayı olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{4.1.1}$$

büzülme koşulunu sağladığını varsayalım. Bu taktirde T, X-te bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = Tx_{n-1}$$

ile tanımlanan (x_n) iterasyon dizisi T-nin bu sabit noktasına $E - yakınsar$.

İspat.
$x_0 \in X$ keyfi olsun. $n \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisini

$$x_n = Tx_{n-1}$$

ile tanımlayalım.

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq ... \leq k^n d(x_0, x_1)$$

olup böylece her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+p-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^{n+p-1}}{1-k} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

dır. E Archimedean olduğu için (x_n) dizisi bir $E - Cauchy$ dizisidir. X-in E tamlığından $z \in X$ vardır öyle ki

$$x_n \overset{d,E}{\longrightarrow} z$$

olur. Dolayısıyla E-de (a_n) dizisi vardır öyle ki

$$a_n \downarrow 0 \text{ ve } d(x_n, z) \leq a_n$$

dir.

$$\begin{aligned} d(Tz, z) &\leq d(Tx_n, Tz) + d(Tx_n, z) \\ &\leq kd(x_n, z) + d(x_{n+1}, z) \\ &\leq ka_n + a_{n+1} \leq (k+1)a_n \end{aligned}$$

olduğundan

$$d(Tz, z) = 0$$

yani

$$Tz = z$$

dir. Böylece T, X-te bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.1.2. (Cevik ve Altun, 2009)
X, bir E Archimedeanı ile tam vektör metrik uzayı olsun. $T : X \to X$ dönüşümünün

$$a + b + c + e + f < 1$$

koşulunu sağlayan a, b, c, e ve f negatif olmayan sayıları ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, Ty) + ed(y, Tx) + fd(x, y)$$

daralma (büzülme) koşulunu sağladığını varsayalım. T, X te bir tek sabit noktaya sahiptir ve $x_0 \in X$,$n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = Tx_{n-1}$$

ile tanımlanan (x_n) iterasyon dizisi T nin sabit noktasına E yakınsar.

Yukarıda verdiğimiz teoremi bir önce ki teorem gibi ispatlayabiliriz. Şimdi bir örnek verelim.

Örnek 4.1.3.

Koordinatsal sıralama ile $E = \mathbb{R}^2$ olsun. ($\mathbb{R}^2$ sözlük sıralama bağıntısıyla Archimedean olmadığından bu sıralamayı kullanamayız.) (Aliprantis ve Border, 1999) da olduğu gibi

$$X = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$$

$d : X \times X \to E$ dönüşümü

$$\begin{aligned} d((x,0),(y,0)) &= \left(\frac{4}{3}|x-y|, |x-y|\right), \\ d((0,x),(0,y)) &= \left(|x-y|, \frac{2}{3}|x-y|\right), \\ d((x,0),(0,y)) &= \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y\right) \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu taktirde X, $E - tam$ vektör metrik uzayıdır.$T : X \to X$ dönüşümü

$$T((x,0)) = (0,x) \text{ ve } T((0,x)) = (x/2, 0)$$

şeklinde olsun.O zaman

$$k = 3/4$$

olmak üzere T, 4.1.1 eşitsizliğini sağlar. Teorem 4.1.1 e göre T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir. Ancak T, X reel değerli metriği üzerinde bir büzülme dönüşümü değildir.

Bu nedenle verdiğimiz örnek için metrik uzaylardaki Banach sabit nokta teoremini uygulayamayız.

Teorem 4.1.4. (Altun ve Çevik, 2011)

X bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzayı olsun. $S, T : X \to X$ dönüşümlerinin aşağıdaki şartları sağladığını varsayalım.

(i) Her $x, y \in X$ için $k \in [0,1)$ sabit bir sayı ve

$$u(x,y) \in \left\{ d(Sx,Sy), d(Sx,Tx), d(Sy,Ty), \frac{1}{2}[d(Sx,Ty) + d(Sy,Tx)] \right\}$$

olmak üzere

$$d(Tx,Ty) \leq ku(x,y) \tag{4.1.2}$$

elde edilir.

(ii) $T(X) \subseteq S(X)$

(iii) $S(X)$ veya $T(X)$, X in E tam alt uzayıdır.

Bu taktirde S ve T, X de bir tek çakışık noktaya sahiptir. Ayrıca S ve T zayıf uyuşabilir ise o zaman X de bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat.

$x_0, x_1 \in X$ olsun. (x_n) dizisini her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Sx_{n+1} = Tx_n = y_n$$

olacak şekilde tanımlansın. İlk olarak her n için

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq kd(y_{n-1}, y_n) \tag{4.1.3}$$

olduğunu gösterelim. Her n için

$$d(y_n, y_{n+1}) = d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq ku(x_n, x_{n+1})$$

koşulu sağlanır. Şimdi aşağıdaki durumlara sahip olduğumuzu düşünelim. Eğer

$$u(x_n, x_{n+1}) = d(y_{n-1}, y_n)$$

varsa 4.1.3 sağlanır. Eğer

$$u(x_n, x_{n+1}) = d(y_{,n} y_{n+1})$$

ise Remark 1 'e göre $d(y_n, y_{n+1}) = 0$ ve 4.1.3 koşulu sağlanır. Son olarak

$$u(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{2}d(y_{n-1}, y_{n+1})$$

olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{k}{2}d(y_{n-1}, y_{n+1}) \leq \frac{k}{2}d(y_{n-1}, y_n) + \frac{1}{2}d(y_n, y_{n+1})$$

dır ve 4.1.3 sağlanmış olur.

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq k^n d(y_0, y_1)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece her n ve p için

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+p}) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + ... + d(y_{n+p-1}, y_{n+p}) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+p-1})d(y_0, y_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}d(y_0, y_1) \end{aligned}$$

sağlanır. E, Archimedean olduğu için (y_n) dizisi bir $E-Cauchy$ dizisidir. S aralığı T aralığını içerdiğinden ve en az birinin aralığı $E-$ tam olduğundan

$$Sx_n \overset{d,E}{\longrightarrow} z$$

koşulunu sağlayan bir $z \in S(X)$ vardır. Dolayısıyla E de

$$a_n \downarrow 0 \text{ ve } d(Sx_n, z) \leq a_n$$

koşulunu sağlayan bir (a_n) dizisi vardır. Diğer taraftan

$$Sw = z$$

olacak şekilde $w \in X$ bulunur.

$$Tw = z$$

olduğunu gösterelim. Her n için

$$d(Tw,z) \leq d(Tw,Tx_n) + d(Tx_n,z) \leq ku(x_n,w) + a_{n+1}$$

vardır.

$$u(x_n,w) \in \left\{ d(Sx_n,Sw), d(Sx_n,Tx_n), d(Sw,Tw), \frac{1}{2}[d(Sx_n,Tw) + d(Sw,Tx_n)] \right\}$$

olduğundan aşağıdaki dört durumdan en az biri geçerlidir.

1.Durum: $d(Tw,z) \leq d(Sx_n,Sw) + a_{n+1} \leq a_n + a_{n+1} \leq 2a_n$

2.Durum: $d(Tw,z) \leq d(Sx_n,Tx_n) + a_{n+1} \leq d(Sx_n,z) + 2a_{n+1} \leq 3a_n$

3.Durum: $d(Tw,z) \leq kd(Sw,Tw) + a_{n+1} \leq kd(Tw,z) + a_n$ yani $d(Tw,z) \leq \frac{1}{1-k}a_n$ olur.

4.Durum:

$$\begin{aligned} d(Tw,z) &\leq \frac{1}{2}[d(Sx_n,Tw) + d(Sw,Tx_n)] + a_{n+1} \\ &\leq \frac{1}{2}d(Sx_n,Tw) + \frac{3}{2}a_{n+1} \\ &\leq \frac{1}{2}d(Sx_n,z) + \frac{1}{2}d(Tw,z) + \frac{3}{2}a_n \\ &\leq \frac{1}{2}d(Tw,z) + 2a_n \end{aligned}$$

olduğundan $d(Tw,z) \leq 4a_n$ elde edilir.

Son eşitliğin sağ tarafının üzerindeki dizilerin infimumu sıfır olduğu için

$$d(Tw,z) = 0$$

yani

$$Tw = z$$

dir. Bu nedenle z, S ve T nin bir çakışık noktasıdır. Eğer z_1 diğer bir çakışık nokta ise

$$z_1 = Tw_1 = Sw_1$$

koşulunu sağlayan $w_1 \in X$ vardır.

$$\begin{aligned} u(w, w_1) &\in \left\{ d(Sw, Sw_1), d(Sw, Tw), d(Sw_1, Tw_1), \frac{1}{2}[d(Sw, Tw_1) + d(Sw_1, Tw)] \right\} \\ &= \{0, d(z, z_1)\} \end{aligned}$$

iken

$$d(z, z_1) = d(Tw, Tw_1) \leq ku(w, w_1)$$

olur. Bu yüzden

$$d(z, z_1) = 0$$

yani

$$z = z_1$$

elde edilir. Eğer S ve T zayıf uyuşabilir ise z, S ve T nin bir tek ortak sabit noktasıdır. (Abbas ve Jungck, 2008)

Teorem 4.1.5. (Altun ve Çevik, 2011)
X bir E Archimedean ile vektör metrik uzayı olsun. $S, T : X \to X$ dönüşümlerinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.

(i) Her $x, y \in X$ için $k \in [0, 1)$ sabit bir sayı ve

$$u(x, y) \in \left\{ d(Sx, Sy), \frac{1}{2}[d(Sx, Tx), d(Sy, Ty)], \frac{1}{2}[d(Sx, Ty) + d(Sy, Tx)] \right\}$$

olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq ku(x, y) \tag{4.1.4}$$

olsun.

(ii) $T(X) \subseteq S(X)$

(iii) $S(X)$ veya $T(X)$, X in E tam alt uzayıdır.

Bu taktirde S ve T, X de bir tek çakışık noktaya sahiptir. Ayrıca S ve T zayıf uyuşabilir ise o zaman X de bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat.

Teorem 4.1.4 ün ispatında olduğu gibi dizileri (x_n) ve (y_n) olarak tanımlayalım. İlk önce her n için

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq kd(y_{n-1}, y_n) \tag{4.1.5}$$

olduğunu gösterelim. Her n için

$$d(y_n, y_{n+1}) = d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq ku(x_n, x_{n+1})$$

dir. Teorem 4.1.4 de olduğu gibi üç durum vardır.

$$\begin{aligned} u(x_n, x_{n+1}) &= d(y_{n-1}, y_n) \\ u(x_n, x_{n+1}) &= \frac{1}{2}[d(y_{n-1}, y_n) + d(y_n, y_{n+1})] \end{aligned}$$

ve

$$u(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{2}d(y_{n-1}, y_{n+1})$$

Birinci ve üçüncü durumlar Teorem 4.1.4 dün ispatında gösterilmiştir. Sadece ikinci durumu gösterelim.

$$u(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{2}[d(y_{n-1}, y_n) + d(y_n, y_{n+1})]$$

ise 4.1.4 den

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{1}{2}[d(y_{n-1}, y_n) + d(y_n, y_{n+1})] \leq \frac{k}{2}d(y_{n-1}, y_n) + \frac{1}{2}d(y_n, y_{n+1})$$

dolayısıyla 4.1.5 sağlanır. Teorem 4.1.4 ün ispatında (y_n) dizisinin bir $E - Cauchy$ dizisi olduğu gösterilmiştir. Bu taktirde

$$Sw = z, d(Sx_n, z) \leq a_n \text{ ve } a_n \downarrow 0$$

koşullarını sağlayan E de $z \in S(X)$, $w \in X$ ve (a_n) dizisi vardır. Şimdi

$$Tw = z$$

olduğunu gösterelim. Her n için

$$d(Tw, z) \leq d(Tw, Tx_n) + d(Tx_n, z) \leq u(x_n, w) + a_{n+1}$$

dir.

$$u(x_n, w) \in \left\{ d(Sx_n, Sw), \frac{1}{2}[d(Sx_n, Tx_n), d(Sw, Tw)], \frac{1}{2}[d(Sx_n, Tw) + d(Sw, Tx_n)] \right\}$$

olduğundan her n için üç durumdan en az biri sağlanır. Yalnızca

$$u(x_n, w) = \frac{1}{2}[d(Sx_n, Tx_n) + d(Sw, Tw)]$$

durumunu düşünelim. Çünkü diğer iki durum Teorem 4.1.4 ün ispatından görülebilir.

$$\begin{aligned} d(Tw, z) &\leq \frac{1}{2}[d(Sx_n, Tx_n) + d(Sw, Tw)] + a_{n+1} \\ &\leq \frac{1}{2}d(Sx_n, z) + \frac{1}{2}d(Tx_n, z) + \frac{1}{2}d(Tw, z) + a_{n+1} \\ &\leq \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}d(Tw, z) + \frac{3}{2}a_{n+1} \\ &\leq \frac{1}{2}d(Tw, z) + 2a_n \end{aligned}$$

koşulu sağlanır yani

$$d(Tw, z) \leq 4a_n$$

dir. $4a_n \downarrow 0$ olduğundan

$$Tw = z$$

olur. Dolayısıyla z, S ve T nin bir çakışık noktasıdır. z nin tek olduğu Teorem 4.1.4 ün ispatındaki gibi gösterilebilir. Ayrıca S ve T zayıf uyuşabilirse (Abbas ve Jungck, 2008) dan S ve T nin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Teorem 4.1.6. (Altun ve Çevik, 2011)
X, bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzayı olsun. $S, T : X \to X$ dönüşümlerinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.

(i) a,b,c,e,f negatif olmayan sayılar ve

$$b + c + e + f + g < 1$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq bd(Sx, Tx){+}cd(Sy, Ty){+}ed(Sx, Ty){+}fd(Sy, Tx){+}gd(Sx, Sy) \tag{4.1.6}$$

sağlansın;

(ii) $T(X) \subseteq S(X)$ olsun;

(iii) $S(X)$ veya $T(X)$, X in E tam alt uzayıdır olsun.

Bu taktirde S ve T, X de bir tek çakışık noktaya sahiptir. Ayrıca S ve T zayıf uyuşabilir ise o zaman X de bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat.
Teorem 4.1.4 ün ispatında olduğu gibi dizileri (x_n) ve (y_n) olarak tanımlayalım. Bazı $k \in [0, 1)$ ve her n için

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq kd(y_{n-1}, y_n) \tag{4.1.7}$$

olduğunu gösterelim. Her n için

$$Sx_{n+1} = Tx_n = y_n$$

olduğunu düşünelim. Bu taktirde her n için

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq (b + g)d(y_{n-1}, y_n) + cd(y_n, y_{n+1}) + ed(y_{n-1}, y_{n+1})$$

ve

$$d(y_{n+1},y_n)\leq bd(y_n,y_{n+1})+(c+g)d(y_{n-1},y_n)+fd(y_{n-1},y_{n+1})$$

dir. Böylece

$$d(y_n,y_{n+1})\leq \frac{b+c+e+f+2g}{2-(b+c+e+f)}d(y_{n-1},y_n)$$

elde edilir.

$$k=\frac{b+c+e+f+2g}{2-(b+c+e+f)}$$

seçersek $k\in[0,1)$ ve 4.1.7 koşulu sağlanır. Teorem 4.1.4 ün ispatında (y_n) dizisinin bir $E-Cauchy$ dizisi olduğu gösterilmiştir. Bu taktirde

$$Sw=z,d(Sx_n,z)\leq a_n \text{ ve } a_n\downarrow 0$$

koşullarını sağlayan E de $z\in S(X)$, $w\in X$ ve (a_n) dizisi vardır. Şimdi

$$Tw=z$$

olduğunu gösterelim. Her n için

$$\begin{aligned}
d(Tw,z) &\leq d(Tw,Tx_n)+d(Tx_n,z)\\
&\leq (b+f)d(Tw,z)+(c+f+g)d(Sx_n,z)+(c+e+1)d(Tx_n,z)\\
&\leq (b+f)d(Tw,z)+(c+f+g)a_n+(c+e+1)a_{n+1}\\
&\leq (b+f)d(Tw,z)+(2c+e+f+g+1)a_n
\end{aligned}$$

yani

$$d(Tw,z)\leq\frac{2c+e+f+g+1}{1-(b+f)}a_n$$

dir. Bu taktirde

$$d(Tw,z)=0$$

yani

$$Tw=z$$

dir. Dolayısıyla z, S ve T nin bir çakışık noktasıdır. z nin tek olduğu Teorem 4.1.4 ün ispatındaki gibi gösterilebilir. Ayrıca S ve T zayıf uyuşabilirse (Abbas ve Jungck, 2008) dan S ve T nin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Sonuç 4.1.7.
X, bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzay olsun. $S, T : X \to X$ dönüşümlerinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.

(i) Her $x, y \in X$ için $k < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq kd(Sx, Sy) \tag{4.1.8}$$

dir.

(ii) $T(X) \subseteq S(X)$

(iii) $S(X)$ veya $T(X)$, X in E tam alt uzayıdır.

Bu taktirde S ve T, X de bir tek çakışık noktaya sahiptir. Ayrıca S ve T zayıf uyuşabilir ise o zaman X de bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Örnek 4.1.8. (Altun ve Çevik, 2011)
$E = \mathbb{R}^2$ koordinatsal sıralamayla düşünelim ve eşitlik sıralamasına göre $E = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}$

$$d(x, y) = (|x - y|, a|x - y|), a > 0, Tx = x^2 + 1 \text{ ve } Sx = 2x^2$$

olsun. Burada $\mathbb{R}^2$ sözlük sıralamayla Archimedean değildir. Bu yüzden biz bu sıralamayı kullanamayız. Bu taktirde her $x, y \in X$ için $k \in [\frac{1}{2}, 1)$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{2} d(Sx, Sy) \leq kd(Sx, Sy)$$

$T(X) = [1, \infty) \subseteq [0, \infty) = S(X)$ ve $T(X)$, X in tam alt uzayı olsun. Dolayısıyla Sonuç 4.1.7 nin tüm koşulları sağlanmış olur. Böylece S ve T, X de bir tek çakışık noktaya sahiptir.

Dikkat edilirse Örnek 4.1.8 de

$$x = 1 \text{ ile } y = -1$$

için $z = 2 \in X$ olduğundan z, S ve T nin çakışık noktasıdır yani

$$2 = T(1) = S(1) = T(-1) = S(-1)$$

dir. Fakat S ve T bir ortak sabit noktaya sahip değildir. Çünkü

$$TS(1) = T(2) = 5 \neq 8 = S(2) = ST(1)$$

olduğundan zayıf uyuşabilir değillerdir.

Aşağıdaki teoremler ve sonuçlar Jungck (Jungck, 1988), Arshad ve ark., (Arshad ve ark., 2009), Abbas ve ark. (Abbas ve ark., 2010) ve Rahime ve ark. (Rahimi ve Soleimani Rad, 2014) nın bazı sabit nokta sonuçlarının vektör metrik versiyonudur.

Teorem 4.1.9. (Altun ve Soleimani Rad, 2016)
X, bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzay olsun. $f, g, T : X \to X$ dönüşümlerinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.

(i) Her $x, y \in X$ için ve $k \in (0, 1)$ sabit bir sayı olmak üzere

$$d(fx, gy) \leq k u_{x,y}(f, g, T) \tag{4.1.9}$$

ve

$$u_{x,y}(f, g, T) \in \left\{ d(Tx, Ty), d(fx, Tx), d(gy, Ty), \frac{1}{2}[d(fx, Ty) + d(gy, Tx)] \right\} \tag{4.1.10}$$

(ii) $f(X) \cup g(X) \subset T(X)$

(iii) $f(X)$, $g(X)$ ya da $T(X)$ den biri X in E tam alt uzayıdır. O zaman $\{f, T\}$ ve $\{g, T\}$, X in bir tek çakışık noktasına sahiptir. Eğer $\{f, T\}$ ve $\{g, T\}$ zayıf uyuşabilir ise f, g ve T, X in bir tek ortak sabit noktasına sahiptir.

İspat.

X in keyfi bir noktası x_0 olsun. $f(X) \subset T(X)$ olduğundan $x_1 \in X$ vardır öyle ki

$$f(x_0) = T(x_1) = y_1$$

$g(X) \subset T(X)$ olduğundan $x_2 \in X$ vardır öyle ki

$$g(x_1) = T(x_2) = y_2$$

ve bu şekilde devam edersek $n = 0, 1, ...$ için

$$\begin{aligned} \exists x_{2n+1} &\in X \text{ için } \quad y_{2n+1} = fx_{2n} = Tx_{2n+1} \\ \exists x_{2n+1} &\in X \text{ için } \quad y_{2n+2} = gx_{2n+1} = Tx_{2n+2} \end{aligned}$$

İlk olarak her n için

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq kd(y_{2n}, y_{2n+1}) \tag{4.1.11}$$

olduğunu gösterelim. 4.1.9 dan $n = 1, 2, ...$ için ve

$$u_{x_{2n},x_{2n+1}}(f,g,T) \in \{d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}), d(fx_{2n}, Tx_{2n}), d(gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}),$$

$$\left.\frac{d(fx_{2n}, Tx_{2n+1}) + d(gx_{2n+1}, Tx_{2n})}{2}\right\}$$

$$= \left\{d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n+1}, y_{2n}), d(y_{2n+2}, y_{2n+1}), \frac{d(y_{2n+1}, y_{2n+1}) + d(y_{2n+2}, y_{2n})}{2}\right\}$$

$$= \left\{d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n+1}, y_{2n+2}), \frac{d(y_{2n+2}, y_{2n})}{2}\right\}$$

olmak üzere

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) = d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \leq ku_{x_{2n},x_{2n+1}}(f,g,S,T)$$

elde edilir. Eğer

$$u_{x_{2n},x_{2n+1}}(f,g,T) = d(y_{2n}, y_{2n+1})$$

ise o zaman 4.1.11 denklemi sağlanır. Eğer

$$u_{x_{2n},x_{2n+1}}(f,g,T) = d(y_{2n+1}, y_{2n+2})$$

ise o zaman Lemma 2.1.14 e göre

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) = 0$$

ve 4.1.11 denklemi sağlanır. Son olarak

$$u_{x_{2n},x_{2n+1}}(f, g, T) = \frac{d(y_{2n}, y_{2n+2})}{2}$$

olduğunu varsayalım. Bu taktirde 4.1.11 denklemini sağlayan

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq \frac{k}{2} d(y_{2n}, y_{2n+1}) + \frac{1}{2} d(y_{2n+1}, y_{2n+2})$$

eşitsizliği vardır. Benzer şekilde

$$d(y_{2n+2}, y_{2n+3}) \leq kd(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \tag{4.1.12}$$

denklemi vardır. 4.1.11 ve 4.1.12 eşitsizliklerinden

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq k^n d(y_0, y_1) \tag{4.1.13}$$

elde edilir. Her n ve p için 4.1.13 denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+p}) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + ... + d(y_{n+p-1}, y_{n+p}) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+p-1}) d(y_0, y_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(y_0, y_1) \end{aligned}$$

elde edilir. E, Archimedean olduğu için $\{y_n\}$ bir $E - Cauchy$ dizisidir. $T(X)$ in tam olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $T(X)$ de

$$Tx_{2n} = y_{2n} \to^{d,E} v \text{ ve } Tx_{2n+1} = y_{2n+1} \to^{d,E} v$$

olacak şekilde bir v vardır. Dolayısıyla E de

$$a_n \downarrow 0, d(Tx_{2n}, v) \leq a_n \text{ ve } d(Tx_{2n+1}, v) \leq a_{n+1}$$

koşullarını sağlayan bir $\{a_n\}$ dizisi vardır. T, X üzerinde kendi içine dönüşüm olduğu için

$$Tw = v$$

olacak şekilde $w \in X$ vardır. Şimdi

$$gw = v$$

olduğunu ispatlayalım. Her n için

$$\begin{aligned} u_{x_{2n},w}(f,g,T) &\in \left\{ d(Tx_{2n}, Tw), d(fx_{2n}, Tx_{2n}), d(gw, Tw), \frac{d(fx_{2n}, Tw) + d(gw, Tx_{2n})}{2} \right\} \\ &= \left\{ d(y_{2n}, v), d(y_{2n+1}, y_{2n}), d(gw, v), \frac{d(y_{2n+1}, v) + d(gw, y_{2n})}{2} \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$d(v, gw) \leq d(v, fx_{2n}) + d(fx_{2n}, gw) \leq a_{n+1} + ku_{x_{2n},w}(f,g,T)$$

olduğunu düşünelim. Burada dört durum vardır.

1.Durum: $d(v, gw) \leq kd(y_{2n}, v) + a_{n+1} \leq a_n + a_{n+1} \leq 2a_n$

2.Durum: $d(v, gw) \leq kd(y_{2n+1}, y_{2n}) + a_{n+1} \leq a_{n+1} + 2a_n \leq 3a_n$

3.Durum: $d(v, gw) \leq kd(v, gw) + a_{n+1} \leq kd(v, gw) + a_n$ böylece $d(v, gw) \leq \frac{1}{1-k} a_n$

4.Durum: $d(v, gw) \leq \frac{d(y_{2n+1}, v) + d(gw, y_{2n})}{2} + a_{n+1} \leq \frac{1}{2} d(v, gw) + 2a_n$

olduğundan $d(v, gw) \leq 4a_n$ elde edilir.

Son eşitliğin sağ tarafındaki dizilerin infimumu sıfır olduğu için

$$d(v, gw) = 0$$

yani

$$gw = v$$

dir. Böylece

$$gw = Tw = v$$

yani v, g ve T dönüşümlerinin bir çakışma noktasıdır ve w, g ve T dönüşümlerinin bir çakışık noktasıdır. Şimdi

$$fw = v$$

olduğunu gösterelim. Her n için

$$u_{w,x_{2n+1}}(f,g,T) \in \{d(Tw, Tx_{2n+1}), d(fw, Tw), d(gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \frac{d(fw, Tx_{2n+1}) + d(gx_{2n+1}, Tw)}{2}\}$$

olmak üzere

$$d(fw, v) \leq d(fw, gx_{2n+1}) + d(gx_{2n+1}, v) \leq a_n + ku_{w,x_{2n+1}}(f,g,T)$$

denklemini düşünelim. Burada dört durum bulunur.

1.Durum: $d(fw, v) \leq a_n + d(v, y_{2n+1}) \leq a_n + a_{n+1} \leq 2a_n$

2.Durum: $d(fw, v) \leq \frac{1}{1-k}a_n$ olduğunda $d(fw, v) \leq a_n + kd(fw, v)$

3.Durum: $d(fw, v) \leq a_n + kd(y_{2n+2}, y_{2n+1}) \leq 3a_n$

4.Durum: $d(fw, v) \leq a_n + \frac{d(fw, y_{2n+1}) + d(gx_{2n+2}, v)}{2} \leq 2a_n + \frac{1}{2}d(fw, v)$

olduğundan $d(fw, v) \leq 4a_n$ elde edilir.

Son eşitsizliğin sağ tarafındaki dizilerin infimumu sıfır olduğu için

$$d(fw, v) = 0$$

yani

$$fw = v$$

dir. Böylece

$$fw = Tw = v$$

yani v, f ve T dönüşümlerinin bir çakışma noktasıdır ve w, f ve T dönüşümlerinin bir çakışık noktasıdır.

Şimdi v nin $\{f,T\}$ ve $\{g,T\}$ çiftlerinin bir tek çakışık noktası olduğunu gösterelim. v' de bu üç dönüşümün bir çakışık noktası olsun bu taktirde $w' \in X$ için

$$fw' = gw' = Tw' = v'$$

dir. Şimdi

$$\begin{aligned} u_{w,w'}(f,g,T) &\in \left\{ d(Tw,Tw'), d(fw,Tw), d(gw',Tw'), \frac{d(fw,Tw') + d(gw',Tw)}{2} \right\} \\ &= \left\{ 0, d(v,v') \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$d(v,v') = d(fw,gw') \leq k u_{w,w'}(f,g,T)$$

dir. Dolayısıyla

$$d(v,v') = 0$$

yani

$$v = v'$$

dir. Eğer $\{f,T\}$ ve $\{g,T\}$ zayıf uyuşabilir ise v Tanım 2.1.20 den f,g ve T nin bir tek ortak sabit noktasıdır.

$f(X)$ ve $g(X)$ in tam olma durumları için ispatlar benzerdir.

Sonuç 4.1.10. (Altun ve Soleimani Rad, 2016)
X bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzay olsun. $f,T : X \to X$ dönüşümlerinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.

(i) Her $x, y \in X$ için ve $k \in (0,1)$ sabit bir sayı ve

$$u_{x,y}(f,T) \in \left\{ d(Tx,Ty), d(fx,Tx), d(fy,Ty), \frac{1}{2}[d(fx,Ty)+d(fy,Tx)] \right\}$$

olmak üzere

$$d(fx,fy) \leq k u_{x,y}(f,T)$$

dir.

(ii) $f(X) \subset T(X)$

(iii) $f(X)$ veya $T(X)$ den biri X in E tam alt uzayıdır. O zaman $\{f,T\}$, X de bir tek çakışık noktasına sahiptir. Eğer $\{f,T\}$ zayıf uyuşabilir ise f ve T, X te bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Örnek 4.1.11. (Altun ve Soleimani Rad, 2016)
$E = \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$$

tarafından tanımlanan koordinatsal sıralamaya sahiptir ancak ve ancak

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } (y_1, y_2),$$

$X = \mathbb{R}$ ve $c > 0$ olmak üzere

$$d(x,y) = (|x-y|, c|x-y|)$$

ise

$$fx = x^2 + 2 \text{ ve } Tx = 3x^2$$

dönüşümlerini tanımlayalım. $k = \in [1/3, 1)$ ve $u_{x,y}(f,T) = d(Tx,Ty)$ olmak üzere

$$d(fx,fy) = \frac{1}{3} d(Tx,Ty) \leq k u_{x,y}(f,T)$$

dir. Ayrıca

$$f(X) = [2,\infty) \subset [0,\infty) = T(X) \text{ ve } f(X)$$

X in E tam alt uzayıdır. Dolayısıyla Sonuç 4.1.10 nun tüm koşulları sağlanır. Sonuç olarak f ve T, X de bir tek çakışık noktaya sahiptir.

$$v = 3 \in X$$

f ve T nin bir tek çakışık noktasıdır ve

$$x_1 = 1 \text{ ve } x_2 = -1$$

f ve T nin çakışık noktalarıdır. f ve T zayıf uyuşabilir olmadığı için bir ortak sabit noktaya sahip değildir.

$\mathbb{R}^2$ sözlük sıralama bağıntısına göre Archimedean olmadığından yukarıdaki örnek için $E = \mathbb{R}^2$ de

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

yada

$$x_1 = x_2 \text{ ve } (y_1, y_2)$$

şeklinde tanımlanan bu sıralamayı kullanamayız. Aşağıdaki sonuç Fishers'in iyi bilinen sonucunu (Fisher, 1981) E Archimedeanı ile vektör metrik uzaylara genişletir.

Sonuç 4.1.12.

X bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzay olsun. $f, g, T : X \to X$ dönüşümlerinde her $x, y \in X$ ve $k < 1$ için

$$d(fx, gy) \leq kd(Tx, Ty)$$

denkleminin sağlandığını kabul edelim. $f(X) \cup g(X) \subset T(X)$ ve $f(X)$, $g(X)$ yada $T(X)$ den biri X in $E - tam$ alt uzayıdır. O zaman $\{f, T\}$ ve $\{g, T\}$, X de bir tek çakışık noktaya sahiptir. Eğer $\{f, T\}$ ve $\{g, T\}$ zayıf uyuşabilir ise f, g ve T, X de bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.1.13. (Altun ve Soleimani Rad, 2016)

X, bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzay olsun. $f, g, T : X \to X$ dönüşümlerinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.

(i) Her $x, y \in X$ ve k_i $(i = 1, 2, ..., 5)$ negatif olmayan sabitleri için

$$k_1 + k_2 + k_3 + 2\max\{k_4, k_5\} < 1$$

olmak üzere

$$d(fx, gy) \le k_1 d(Tx, Ty) + k_2 d(fx, Tx) + k_3 d(gy, Ty) + k_4 d(fx, Ty) + k_5 d(gy, Tx) \tag{4.1.14}$$

(ii) $f(X) \cup g(X) \subset T(X)$

(iii) $f(X), g(X)$ veya $T(X)$ den biri X in $E - tam$ alt uzayıdır.

Bu taktirde $\{f, T\}$ ve $\{g, T\}$, X de bir tek çakışık noktaya sahiptir. Eğer $\{f, T\}$ ve $\{g, T\}$ zayıf uyuşabilir ise f,g ve T, X te bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat.

Teorem 4.1.9 un ispatında olduğu gibi $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerini tanımlayalım. 4.1.18 dan

$$\begin{aligned} d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) &= d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \\ &\le k_1 d(y_{2n}, y_{2n+1}) + k_2 d(y_{2n+1}, y_{2n}) + k_3 d(y_{2n+2}, y_{2n+1}) \\ &\quad + k_4 d(y_{2n+1}, y_{2n+1}) + k_5 d(y_{2n+2}, y_{2n}) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$a = \frac{k_1 + k_2 + k_5}{1 - k_3 - k_5} < 1$$

olmak üzere

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \le a d(y_{2n}, y_{2n+1}) \tag{4.1.15}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} d(y_{2n+3}, y_{2n+2}) &= d(fx_{2n+2}, gx_{2n+1}) \\ &\le k_1 d(y_{2n+2}, y_{2n+1}) + k_2 d(y_{2n+3}, y_{2n+2}) + k_3 d(y_{2n+2}, y_{2n+1}) \end{aligned}$$

$$+k_4d(y_{2n+3},y_{2n+1})+k_5d(y_{2n+2},y_{2n+2})$$

dir. Sonuç olarak

$$a=\frac{k_1+k_3+k_4}{1-k_2-k_4}<1$$

olmak üzere

$$d(y_{2n+3},y_{2n+2})\leq ad(y_{2n+2},y_{2n+1}) \tag{4.1.16}$$

dir. 4.1.15 ve 4.1.16 denklemlerinden

$$d(y_n,y_{n+1})\leq a^n d(y_0,y_1)$$

elde edilir. Teorem 4.1.9 ile benzer argümanlarla $\{y_n\}$ dizisinin bir $E-Cauchy$ dizisi olduğu görüldü. $T(X)$ in tam olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $T(X)$ de

$$Tx_{2n}=y_{2n}\overset{d,E}{\to}v \text{ ve } Tx_{2n+1}=y_{2n+1}\overset{d,E}{\to}v$$

olacak şekilde bir v vardır. T, X üzerinde kendi içine dönüşüm olduğu için

$$Tw=v$$

olacak şekilde $w\in X$ vardır. Şimdi

$$fw=v$$

olduğunu ispatlayalım. Bunun için

$$\begin{aligned} d(fw,v) &\leq d(fw,gx_{2n+1})+d(gx_{2n+1},v)\\ &\leq k_1d(Tw,Tx_{2n+1})+k_2d(fw,Tw)+k_3d(gx_{2n+1},Tx_{2n+1})\end{aligned}$$

$$+k_4d(fw,Tx_{2n+1})+k_5d(gx_{2n+1},Tw)+d(gx_{2n+1},v)$$

$$\leq(k_1+k_3+k_4)d(v,Tx_{2n+1})+(k_2+k_4)d(fw,v)+(k_3+k_5+1)d(gx_{2n+1},v)$$

olduğunu düşünelim. Sonuç olarak her n için

$$d(fw, v) \leq \frac{k_1 + 2k_3 + k_4 + k_5 + 1}{1 - k_2 - k_4} a_n$$

elde edilir. Böylece

$$d(fw, v) = 0$$

yani

$$fw = v$$

dir. Böylece

$$fw = Tw = v$$

yani v, f ve T dönüşümlerinin bir çakışma noktasıdır ve w, f ve T dönüşümlerinin bir çakışık noktasıdır. Şimdi

$$gw = v$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d(v, gw) &\leq d(v, fx_{2n}) + d(fx_{2n}, gw) \\ &\leq d(v, fx_{2n}) + k_1 d(Tx_{2n}, Tw) + k_2 d(fx_{2n}, Tx_{2n}) \end{aligned}$$

$$+k_3 d(gw, Tw) + k_4 d(fx_{2n}, Tw) + k_5 d(gw, Tx_{2n})$$

$$\leq (k_1 + k_3 + k_5) d(v, Tx_{2n}) + (k_3 + k_5) d(gw, v) + (k_2 + k_4 + 1) d(fx_{2n}, v)$$

dir. Sonuç olarak her n için

$$d(gw, v) \leq \frac{k_1 + 2k_2 + k_4 + k_5 + 1}{1 - k_3 - k_5} a_n$$

elde edilir. Böylece

$$d(gw, v) = 0$$

yani

$$gw = v$$

dir. Böylece

$$gw = Tw = v$$

yani v, g ve T dönüşümlerinin bir çakışık noktasıdır. Şimdi v nin $\{f, T\}$ ve $\{g, T\}$ çiftlerinin bir tek çakışık noktası olduğunu gösterelim. $v^{'}$ de bu üç dönüşümün bir çakışık noktası olsun. Bu taktirde $w^{'} \in X$ için

$$fw^{'} = gw^{'} = Tw^{'} = v^{'}$$

dir. Şimdi

$$\begin{aligned} d(v, v^{'}) &= d(fw, gw^{'}) \\ &\leq k_1 d(Tw, Tw^2) + k_2 d(fw, Tw) + k_3 d(gw^{'}, T^{'}) + k_4 d(fw, Tw^{'}) + k_5 d(gw^{'}, Tw) \end{aligned}$$

alalım. Böylece

$$d(v, v^{'}) = 0$$

yani

$$v = v^{'}$$

dır. Eğer $\{f, T\}$ ve $\{g, T\}$ zayıf uyuşabilir ise v Tanım 2.1.20 den f, g ve T-nin bir tek ortak sabit noktasıdır.

$g(X)$ veya $T(X)$ in tam olma durumları için ispatlar benzerdir.

Sonuç 4.1.14. (Altun ve Soleimani Rad, 2016)
X bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzay olsun. $f, T : X \to X$ dönüşümlerinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.

(i) Her $x, y \in X$ ve k_i $(i = 1, 2, ..., 5)$ negatif olmayan sabit sayıları için

$$k_1 + k_2 + k_3 + 2\max\{k_4, k_5\} < 1$$

olmak üzere

$$d(fx,fy) \leq k_1 d(Tx,Ty)+k_2 d(fx,Tx)+k_3 d(fy,Ty)+k_4 d(fx,Ty)+k_5 d(fy,Tx) \tag{4.1.17}$$

(ii) $f(X) \subset T(X)$

(iii) $f(X)$ veya $T(X)$ den biri X in $E-tam$ alt uzayıdır.

Bu taktirde $\{f,T\}$, X de bir tek çakışık noktaya sahiptir. Eğer $\{f,T\}$ zayıf uyuşabilir ise f ve T, X te bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.1.15.
X bir E Archimedeanı ile vektör metrik uzay olsun. $f: X \to X$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım. Her $x,y \in X$ ve k_i $(i = 1,2,...,5)$ negatif olmayan sabit sayıları için

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 < 1$$

olmak üzere

$$d(fx,fy) \leq k_1 d(x,y)+k_2 d(fx,x)+k_3 d(fy,y)+k_4 d(fx,y)+k_5 d(fy,x) \tag{4.1.18}$$

dir. Bu taktirde f, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

Örnek 4.1.16. (Altun ve Soleimani Rad, 2016) Koordinatsal sıralamayla $E = \mathbb{R}^2$ alalım. Ayrıca (Arshad ve ark., 2009) daki gibi

$$X = \{(X,0) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,x) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1\}$$

olsun.

$$\begin{aligned} d((x,0),(y,0)) &= (\frac{4}{3}|x-y|, |x-y|) \\ d((0,x),(0,y)) &= (|x-y|, \frac{2}{3}|x-y|) \\ d((x,0),(0,y)) &= (\frac{4}{3}x+y, x+\frac{2}{3}y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $d : X \times X \to E$ dönüşümünü düşünelim. Bu taktirde X, E tam vektör metrik uzayıdır. $f : X \to X$ alınırsa

$$f(x, 0) = (0, x) \text{ ve } f(0, x) = (x/2, 0)$$

olmak üzere f

$$k_1 = 3/4 \text{ ve } k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$$

için 4.1.18 koşulunu sağlar. Sonuç 4.1.15 e göre f, X de bir tek sabit noktaya sahiptir. Ancak f, X üzerindeki reel değerli d metriğinde bir büzülme dönüşümü değildir. Bu nedenle metrik uzaylardaki Banach sabit nokta teoremi uygulanamaz.

$X = E$ ve d mutlak değerli vektör metriği ise o zaman E Riesz uzayının ortak sabit nokta sonuçlarını elde edebiliriz.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde metrik uzaylardaki sabit nokta teorisi hakkında temel bilgilerden bahsedilmiştir. Vektör metrik uzaylar üzerinde zayıf uyuşabilirlik ve ortak sabit nokta teoremleri verilmiştir. Metrik uzaylardaki sabit nokta teoremleri ile alakalı literatür çalışması yapılarak vektör metrik uzaylardaki önceden yapılmış çalışmalardan söz edilmiştir. Banach sabit nokta teoremi, çakışık nokta kavramları tanıtılarak büzülme koşulunu sağlayan kendi üzerine dönüşümler için sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri verilmiştir. Dahası bu teoremlerin vektör metrik uzaylardaki genelleştirmelerinden bahsedilmiştir. Vektör metrik uzaylardaki bilinen sabit nokta teoremlerinin bazı özel şartlar altındaki ispatları incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abbas, M. ve Jungck, G., 2008. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces. J. Math. Anal. Appl., 341, 416-420.

Abbas, M., Rhoades, B. E., ve Nazir, T., 2010. Common fixed points for four maps in cone metric spaces, Appl. Math. Comput., 216, 80-86.

Aliprantis, C. D. ve Border, K. C., 1999. Infinite Dimensional Analysis, Springer-Verlag, Berlin.

Aliprantis, C. D. ve Burkinshaw, O., 1985. Positive Operators, Academic Press, London., 1-3, 43-44, 174-175.

Altun, I., 2011. Common fixed point theorems for weakly increasing mappings on ordered uniform spaces, Miskolc Math. Notes., 12(1), 3-10.

Altun, I., ve Çevik, C., 2011. Some common fixed point theorems in vector metric spaces, Filomat., 25(1), 105-113.

Altun, I., ve Soleimani Rad, G., 2016. Common fixed point results on vector metric spaces, Vol., 05, 29-39.

Altun, I. ve Turkoglu, D., 2009. Some fixed point theorems for weakly compatible mappings satisfying an implicit relation, Taiwanese J. Math., 13(4), 1291-1304.

Altun, I., Turkoğlu, D. ve Rhoades, B. E., 2007. Fixed points of weakly compatible maps satisfying a general contractive condition of integral type, Fixed Point Theory Appl., Art. ID 17301, 9 pp.

Arshad, M., Azam, A. ve Vetro, P., 2009. Some common fixed point results in cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl., Article ID 493965.

Cevik, C. ve Altun, I., 2009. Vector metric space and some properties, Topol. Met. Nonlin. Anal., 34(2), 375-382.

Cvetkovic, A. S., Stanic, M. P., Dimitrijevic, S. ve Simic, S., 2011. Common fixed point theorems for four mappings on cone metric type space, Fixed Point Theory Appl., Article ID 589725.

Cristescu, R., 1983. Ordered Structures in Normed Vector Spaces, Editura Ştiintifica şi Enciclopedica, Bucureşti.

Fisher, B., 1981. Four mappings with a common fixed point, J. Univ. Kuwait Sci., 8, 131-139.

Huang, L. G. ve Zhang, X., 2007. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl., 332, 1467-1475.

Hardy, G. E. ve Rogers, T. D., 1973. A generalization of a fixed point theorems of Reich, Canad. Math. Bull., 16, 201-206.

Jankovic, S., Kadelburg, Z. ve Radenovic, S., 2011. On cone metric spaces; a survey, Nonlinear Anal., 74, 2591-2601.

Jungck, G., 1988. Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta, Proc. Am. Math. Soc., 103, 977-983.

Jungck, G. ve Rhoades, B. E., 2006. Fixed point theorems for occasionally weakly compatible mappings, Fixed Point Theory., (7)(2), 287-296.

Jungck, G., Radenovic, S., Radojevic, S. ve Rakocevic, V., 2009. Common fixed point theorems for weakly compatible pairs on cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl., Art. ID 643840, 13 pp.

Rahimi, H., Rhoades, B.E., Radenovic S. ve Soleimani Rad, G., 2013. Fixed and periodic point theorems for T-contractions on cone metric spaces, Filomat., 27(5), 881-888.

Rahimi, H. ve Soleimani Rad, P., 2014. Common fixed point theorems and c-distance in ordered cone metric spaces, Ukrainian Mathematical Journal., 65(12), 1845-1861.

Rahimi, H., Vetro, P. ve Soleimani Rad, G., 2013. Some common fixed point results for weakly compatible mappings in cone metric type space, Miskolc Math. Notes., 14(1), 233-243.

Rezapour, S. ve Hamlbarani, R., 2008. Some note on the paper cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl., 345, 719-724.

Rhoades, B. E., 1977. A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 226, 257-290.

Kadelburg, Z., Radenovic, S., Rakocevic, V., 2010. Topological vector space-valved cone metric spaces and fixed point theorems, Fixed Point Theory Appl., Art. ID 170253, 17 pp.

Zabreiko, P. P., 1997. K-metric and K-normed linear spaces: survey, Collect. Math., 48, 825-859.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Seda CEYLAN

Doğum Tarihi : 29.07.1992

Doğum Yeri : Çankırı

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 0543 734 02 83

E-posta : sedaa.ceylan@hotmail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2018
Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2014
Lise	Ankara Nefise Andiçen Lisesi	2010