



**NIKIFOROV-UVAROV YÖNTEMİ  
KULLANILARAK  $X(3)$  VE  $X(5)$  MODELİ İÇİN  
BOHR HAMILTONYENİNİN KRATZER  
POTANSİYELİ İLE ANALİTİK ÇÖZÜMÜ**

**TUĞBA TURAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
FİZİK ANA BİLİM DALI  
Doç. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU  
Temmuz - 2018  
Her hakkı saklıdır.**

T.C.  
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NIKIFOROV-UVAROV YÖNTEMİ KULLANILARAK  $X(3)$  VE  $X(5)$   
MODELİ İÇİN BOHR HAMILTONYENİNİN KRATZER  
POTANSİYELİ İLE ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Tuğba TURAN

TOKAT  
Temmuz - 2018

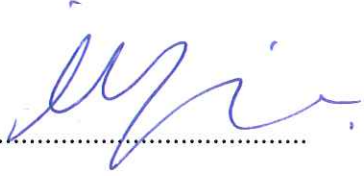
Her hakkı saklıdır.

Tuğba TURAN tarafından hazırlanan “Nikiforov-Uvarov Yöntemi Kullanılarak X(3) ve X(5) Modeli için Bohr Hamiltonyeninin Kratzer Potansiyeli ile Analitik Çözümü” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 4 TEMMUZ 2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü FİZİK ANA BİLİM DALI’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman  
Doç. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU  
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi



Üye  
Prof. Dr. Bahtiyar MEHMETOĞLU  
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi



Üye  
Doç. Dr. Erhan ESER  
Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi



ONAY



Prof. Dr. Ebubekir ALTUNTAŞ  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

24.07/20.18

## **TEZ BEYANI**

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

**TUĞBA TURAN**

**4 Temmuz 2018**

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### NIKIFOROV-UVAROV YÖNTEMİ KULLANILARAK X(3) VE X(5) MODELİ İÇİN BOHR HAMILTONYENİNİN KRATZER POTANSİYELİ İLE ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

TUĞBA TURAN

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ  
ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANA BİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU

Yapılan bu çalışmada; faz geçiş bölgesinde yer alan atom çekirdeklerinin nükleer yapılarını doğru biçimde ortaya koyacak özel Bohr Hamiltonyen çözümleri elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda X(3) ve X(5) kritik nokta simetrileri için Bohr Hamiltonyeninde Kratzer potansiyeli kullanılarak iki yeni model oluşturuldu. Çalışmayı iki bölüme ayırmak mümkündür. Birinci bölümde;  $\gamma = 0^\circ$  için  $\gamma$ -katı Bohr Hamiltonyeninin bir çözümü Kratzer potansiyeli ile elde edildi. Bu çözüm X(3)-Kratzer olarak adlandırıldı. Enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonları Nikiforov ve Uvarov tarafından geliştirilen bir analitik yöntem kullanılarak elde edildi. X(3)-K modelinin temel seviye bandları;  $^{112}\text{Cd}$ ,  $^{142}\text{Sm}$  ve  $^{156}\text{Gd}$  çekirdeklerinin mevcut deneysel verileri ile uyumludur. Ancak bu uyum  $\beta_1$ -bandında gözlenmemiştir. Bu uyumsuzluk bu çözümün  $\gamma$ -katı bir çözüm olmasından ileri gelir. İkinci bölümde ise  $\gamma \approx 0^\circ$  için Bohr Hamiltonyeninin yaklaşık bir çözümü Kratzer potansiyeli ile elde edildi. Bu çözüm X(5)-Kratzer olarak adlandırıldı. Enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonu elde edildi. X(5)-K model tahminlerinin  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$  ve  $^{176-178}\text{Os}$  çekirdeklerinin deneysel verileriyle üst spin seviyelerine kadar örtüştüğü gözlemlendi.

2018, 74 Sayfa

## ABSTRACT

### MASTER THESIS

#### ANALYTICAL SOLUTION OF BOHR HAMILTONIAN WITH KRATZER POTENTIAL FOR X(3) AND X(5) MODEL BY USING NIKIFOROV-UVAROV METHOD

TUĞBA TURAN

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF PHYSICS

SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU

The purpose of the study is to obtain special Bohr Hamiltonian solutions that will accurately represent the nuclear structures of the atomic nuclei in the phase transition region. In this context, two new models were created by using Kratzer potential in the Bohr Hamiltonian for X(3) and X(5) critical point symmetries. It is possible to separate the study into two parts. In the first part; a solution of  $\gamma$ -rigid Bohr Hamiltonian for  $\gamma = 0^\circ$  is obtained from Kratzer potential. This solution was called X(3)-Kratzer. Energy eigenvalues and wave functions are obtained by using an analytic method developed by Nikiforov and Uvarov. The ground state band of the X(3)-K model are consistent with the experimental data available for the  $^{112}\text{Cd}$ ,  $^{142}\text{Sm}$  and  $^{156}\text{Gd}$  nuclei. However, this consistency has not been observed in the  $\beta_1$ -band. The inconsistency results from that this solution is a  $\gamma$ -rigid solution. In the second part; an approximate solution of Bohr Hamiltonian for  $\gamma \simeq 0^\circ$  was obtained from Kratzer potential. This solution was called X(5)-Kratzer. Energy eigenvalues and wave functions were obtained. It was observed that the X(5)-K model predictions are consistent with the experimental data of  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$  and  $^{176-178}\text{Os}$  nuclei upper spin levels.

2018, 74 Pages

**KEYWORDS:** Bohr Hamiltonian, Critical Point Symmetries, Kratzer Potential, X(3) Model, X(5) Model

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan başta danışmanım Doç. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU olmak üzere Fizik Anabilim Dalındaki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca maddi/manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürler ederim.

**Tuğba TURAN**

**4 Temmuz 2018**

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ .....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
SİMGELER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
TABLO LİSTESİ.....	ix
1. GİRİŞ .....	1
2. GENEL KISIMLAR .....	7
2.1 E(5) Kritik Nokta Simetrisi.....	7
2.2 X(5) Kritik Nokta Simetrisi .....	11
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	17
3.1 Nikiforov-Uvarov Yöntemi .....	17
3.2 Kratzer Potansiyel .....	28
3.3 X(3) Modeli İçin Kratzer Potansiyeli Uygulanması .....	35
3.4 X(5) Modeli İçin Kratzer Potansiyeli Uygulanması .....	42
4. BULGULAR.....	49
4.1 X(3) - K Modeli Tahminleri.....	49
4.2 X(5) - K Modeli Tahminleri.....	61
5. TARTIŞMA ve SONUÇ .....	70
6. KAYNAKLAR .....	72
7. ÖZGEÇMİŞ .....	74



## SİMGELER

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
$n_w$	wobbling kuantum sayısı
$J_\nu$	Bessel fonksiyonu
$T^{(E2)}$	Kuadropol geçiş operatörü
$C_{\xi,\tau}$	normalizasyon sabiti
$x_{s,L}$	Bessel fonksiyonu $J_\nu(z)$ 'nin s. kökü
$\beta_0$	potansiyelin minimum olduğu nokta
$B$	kütle parametresi
$B(E2)$	gama geçiş oranı
$C$	Clebsch-Gordon katsayısı
$h$	plank sabiti
$L$	açısal momentum
$R_s$	Enerji oran değeri
$t$	skala faktörü
$u(\gamma)$	$\gamma$ değişkenine bağlı potansiyel
$u(\beta)$	$\beta$ değişkenine bağlı potansiyel
$\varepsilon$	indirgenmiş enerji
$\mu$	parçacık kütlesi
$\Psi$	dalga fonksiyonu
$\mathcal{D}$	Euler açıları $\theta_i (i = 1,2,3)$ 'nin Wigner fonksiyonu
$\gamma$	kollektif koordinat
$\beta$	kollektif koordinat
$\langle \beta^2 \rangle$	$\beta^2$ 'nin $\xi(\beta)$ üzerinden ortalaması
$\theta_i$	$i = 1,2,3$ olmak üzere üç Euler açısı

## ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1.	Casten Üçgeni .....	2
Şekil 1.2.	Seviye şemaları ve nükleer yapı tipleri dizisi .....	3
Şekil 1.3.	Genişletilmiş Casten Üçgeni.....	3
Şekil 1.4.	a; İkinci dereceden, b; birinci dereceden faz geçişlerine ait yapıların evrimini gösteren enerji yüzeyleri.....	4
Şekil 1.5.	Hill-Wheeler koordinatları $\{\beta, \gamma\}$ . $\beta=0.4$ ve $\gamma=n\pi/3$ 'e karşılık gelen kuadropol deforme olmuş şekiller ( $n = 0, \dots, 5$ ile).....	5
Şekil 2.1.	E(5) modelinin enerji spektrumu ve B(E2) geçiş oranları .....	10
Şekil 2.2.	X(5) modelinin enerji spektrumu ve B(E2) geçiş oranları.....	15
Şekil 3.1.	Fortunato ve Vitturi tarafından $0 < \gamma < 3\pi/2$ için ele alınan Coulomb(a) ve Kratzer (b) $V(\beta, \gamma)$ potansiyelleri.....	30
Şekil 3.2.	Coulomb potansiyelin spektrumu .....	31
Şekil 3.3.	Kratzer potansiyel .....	33
Şekil 3.4.	Sabit $A = 20$ ile spektrumların evrimi ve iki sınırlayıcı durum için B artışı ( $B = 0$ , Coulomb ve $B \rightarrow \infty$ , O (6)).....	34
Şekil 4.1.	$R_L$ enerji oranları ve L açısal momentum, farklı $\beta_0$ değerleriyle gösterilmiştir. U(5), SU(3), X(3) ve X(5) tahminleri ile karşılaştırılması. Tüm enerji seviyeleri en düşük enerjili uyarılmış duruma $2_{1,0}$ normalize edilmesi.....	50
Şekil 4.2.	X(3)-K modeli ( $\beta_0 = 2$ değeri için) $^{104}\text{Ru}$ çekirdeğinin deneysel verileri ile X(3) ve X(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyeleri ile karşılaştırılması.....	51

Şekil 4.3.	$\beta_0 = 1.2$ değeri için X(3)-K modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri, $^{112}\text{Cd}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	52
Şekil 4.4.	$\beta_0 = 1.32$ değeri için X(3)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{120}\text{Xe}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	53
Şekil 4.5.	X(3)-K ( $\beta_0 = 2.23$ ) modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri, $^{122}\text{Xe}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	54
Şekil 4.6.	$\beta_0 = 1.4$ değeri için X(3)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{126}\text{Xe}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	55
Şekil 4.7.	$\beta_0 = 0.9$ değeri için X(3)-K modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{142}\text{Sm}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	56
Şekil 4.8.	X(3)-K ( $\beta_0 = 1.6$ ) modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{148}\text{Nd}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması.....	57
Şekil 4.9.	$\beta_0 = 25$ değeri için X(3)-K modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{156}\text{Gd}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	58
Şekil 4.10.	X(3)-K ( $\beta_0 = 2.71$ ) modeli temel seviye bandın enerji seviyelerinin $^{172}\text{Os}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	59
Şekil 4.11.	Farklı $\beta_0$ değerleri için elde edilen $\beta_1$ band enerjilerin, çekirdeklere ait mevcut deneysel verileri ile karşılaştırılması	60
Şekil 4.12.	X(5)-K ( $\beta_0 = 46.5$ ) modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{150}\text{Nd}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	62
Şekil 4.13.	$\beta_0 = 75$ değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{152}\text{Sm}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	63

Şekil 4.14.	X(5)-K ( $\beta_0 = 75$ ) modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{154}\text{Gd}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması.....	64
Şekil 4.15.	$\beta_0 = 50$ değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{156}\text{Dy}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	65
Şekil 4.16.	$\beta_0 = 48.5$ değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{176}\text{Os}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	66
Şekil 4.17.	$\beta_0 = 55$ değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri $^{178}\text{Os}$ çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması .....	67

## TABLO LİSTESİ

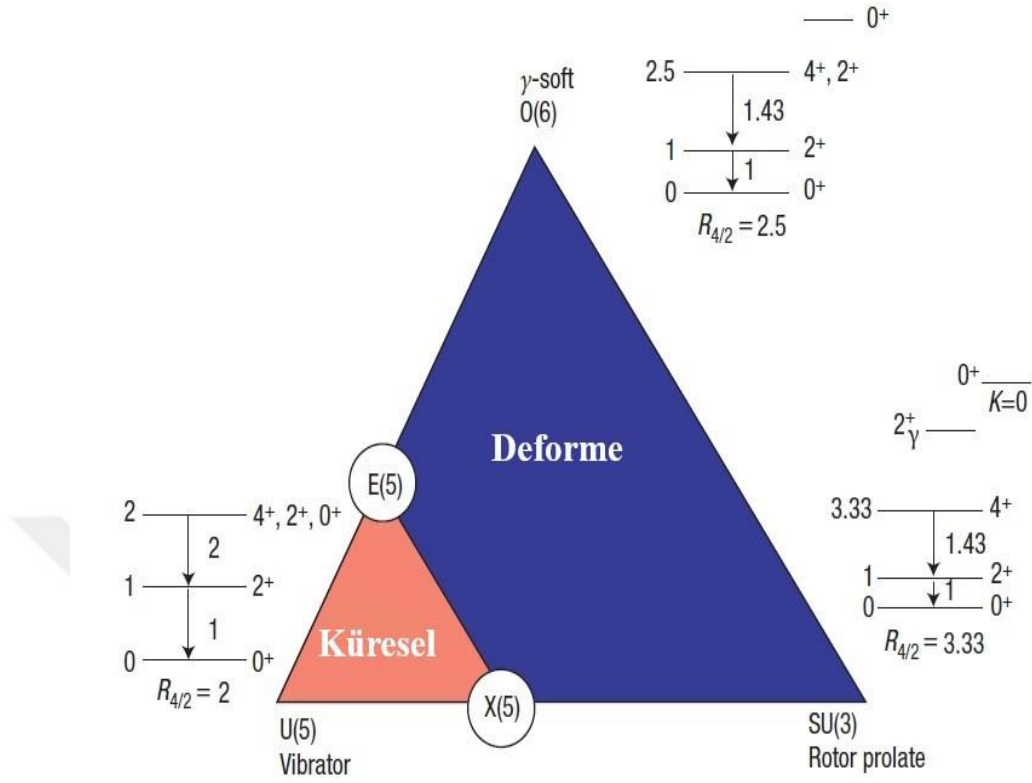
<b><u>Tablo</u></b>		<b><u>Sayfa</u></b>
Tablo 2.1.	E(5) kritik nokta simetrisine ait enerji spektrumu.....	9
Tablo 2.2.	X(5) kritik nokta simetrisine ait enerji spektrumu .....	13
Tablo 2.3.	Kritik nokta simetrilerin bazı özellikleri ve olağan dinamik simetriler .....	16
Tablo 4.1.	X(3) modeli, X(5) modeli ve eksensel deforme modeli (SU(3)) ile farklı $\beta_0$ değerleri için X(3)-K modelinin $L_{s,n}$ enerji oranlarının karşılaştırması .....	49
Tablo 4.2	$\beta_1$ band enerji oranları $R_n, L_{n_w}$ X(5)-K çözümü, X(3), X(5) model tahminleri ve $^{150}\text{Nd}, ^{152}\text{Sm}, ^{154}\text{Gd}, ^{156}\text{Dy}, ^{176}\text{Os}, ^{178}\text{Os}$ çekirdeklerin mevcut deneysel verileri.....	68
Tablo 4.3	$\gamma$ -band enerji oranları $R_n, L_{n_w}$ X(5)-K çözümü, X(3), X(5) model tahminleri ve $^{150}\text{Nd}, ^{152}\text{Sm}, ^{154}\text{Gd}, ^{156}\text{Dy}, ^{176}\text{Os}, ^{178}\text{Os}$ çekirdeklerin mevcut deneysel verileri.....	69

## 1. GİRİŞ

Iachello 2000’li yılların başında Bohr Hamiltonyenini (Bohr, 1952) kullanarak iki farklı faz arasında kritik noktalardaki çekirdeklerin yapılarını analitik bir modelle açıklayan bir çözüm önermiştir.

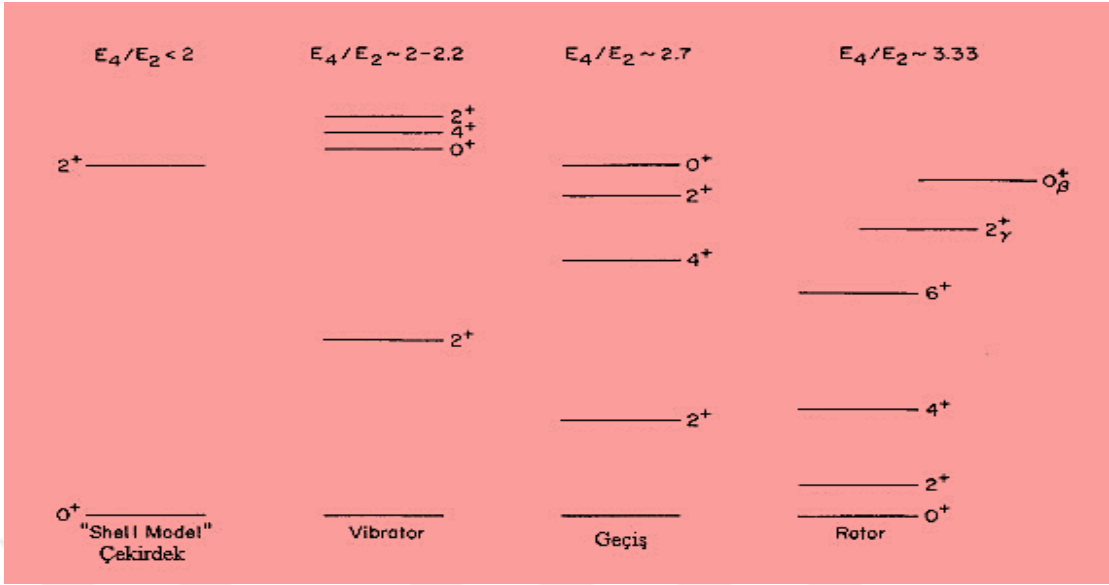
Iachello’nun öne sürdüğü bu çözüm; Bohr Hamiltonyenin düzenlenmesinde Morse (Boztosun ve ark, 2008), Kratzer (Fortunato ve ark, 2006; Bonatsos ve ark, 2013), Coulomb (Fortunato ve ark, 2006; Fortunato ve Vitturi, 2004), Davidson (Fortunato ve ark, 2006), Eckart (Naderi ve Hassanabadi, 2016), Manning-Rosen (Chabab ve ark, 2016), Killingbeck (Sobhani ve Hassanabadi, 2016) gibi farklı potansiyel türlerinin seçilerek özdeğer-özfonksiyon probleminin çözümüne ve çekirdeklerin kollektif dinamiklerinin araştırılmasına dayanır (Yigitoğlu ve Gökbulut, 2017).

Dinamik simetri atom çekirdeklerin yapısal özelliklerini açıklar. Farklı iki dinamik simetri arasında şekil faz geçiş bölgesinde bulunan kritik noktalardan birincisi; U(5) titreşimsel (vibratör, küresel) ve O(6)  $\gamma$ -kararsız (soft, bağımsız) çekirdekler arasında ki E(5) (Iachello, 2000), diğeri ise; U(5) titreşimsel ve SU(3) eksensel deforme (rotor prolate) çekirdekler arasında ki X(5) (Iachello, 2001) modeli olarak adlandırılır. E(5) simetrisi  $\gamma$ -soft (kararsız, bağımsız) için Bohr Hamiltonyeni (Bohr, 1952) tam bir çözüm iken, X(5) simetrisi  $\gamma \simeq 0^\circ$  için ise yaklaşık bir çözümdür.



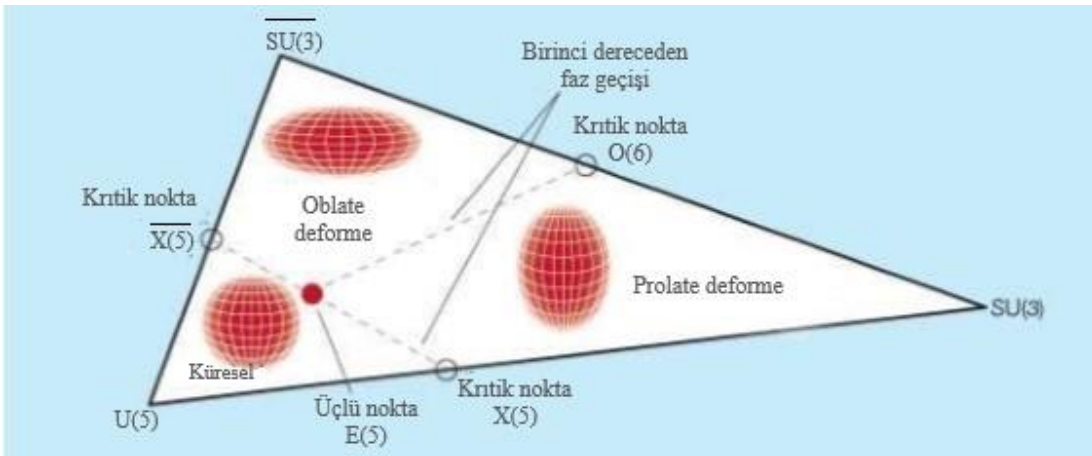
Şekil 1.1. Casten Üçgeni (Casten, 2006)

Etkileşen bozon modelinde (IBM) Şekil 1.1’de görülen üçgenin köşeleri  $U(5)$ ,  $SU(3)$  ve  $O(6)$  ile gösterilen dinamik simetrilere karşılık gelir. Bu simetrilerin her birinin karakteristik özelliği vardır. Sırasıyla küresel, eksensel deforme ve  $\gamma$ -kararsız çekirdek yapılarına karşılık gelirler.  $4^+$  durumun enerjisinin,  $2^+$  durum enerjisine oranı olan  $R_{4/2}$ , çekirdeğin deforme olup olmadığının bir ölçüsüdür. Ancak deformasyonun büyüklüğü hakkında bilgi vermez.  $R_{4/2}$  oranı, vibratör (küresel, titreşimsel) için 2.0,  $\gamma$ -bağımsız (soft, kararsız) için 2.5 ve eksensel deforme (rotor prolate) için 3.33 değerini alır (bkz. Şekil 1.2).



Şekil 1.2. Seviye şemaları ve nükleer yapı tipleri dizisi (Casten, 1990)

Şekil 1.3'te üçgenin köşeleri;  $U(5)$  (küresel),  $SU(3)$  (prolate deforme) ve  $\overline{SU(3)}$  (oblate deforme); üç çekirdek yapısına karşılık gelen matematiksel bir simetriyi gösterir. Geçiş noktaları ve bunlarla ilişkili kritik nokta simetrisi, birinci dereceden faz geçişleri olarak ifade eder. Jolie ve arkadaşları (2002), küresel bir nükleer şekil ve bir prolate veya oblate deforme yapı arasındaki ikinci dereceden geçişi işaret eden bir nükleer üçlü nokta olduğunu öne sürerler (Warner, 2002).



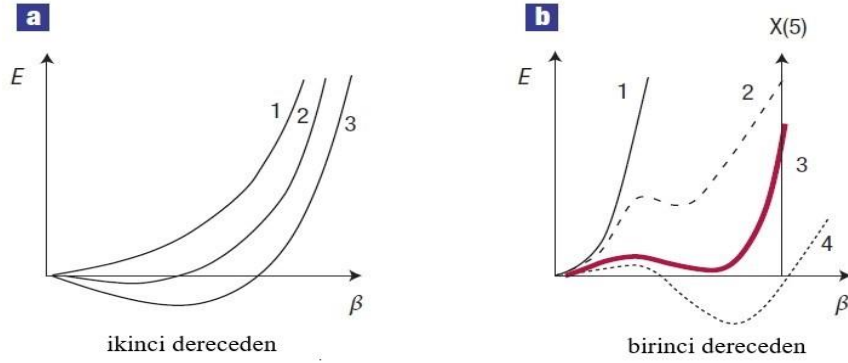
Şekil 1.3. Genişletilmiş Casten Üçgeni (Iachello, 1987)

$$\beta = 0 \text{ küresel, } \beta > 0 \text{ prolate, } \beta < 0 \text{ oblate}$$

$$(a_x = a_y = a_z) \quad (a_x = a_y < a_z) \quad (a_x = a_y > a_z)$$



$U(5) \leftrightarrow SU(3)$  arasında birinci dereceden,  $U(5) \leftrightarrow O(6)$  arasında ise ikinci dereceden bir faz geçişinin olduğu ancak  $SU(3) \leftrightarrow O(6)$  arasında hiçbir geçişin olmadığı gösterilmiştir (bkz. Şekil 1.3).

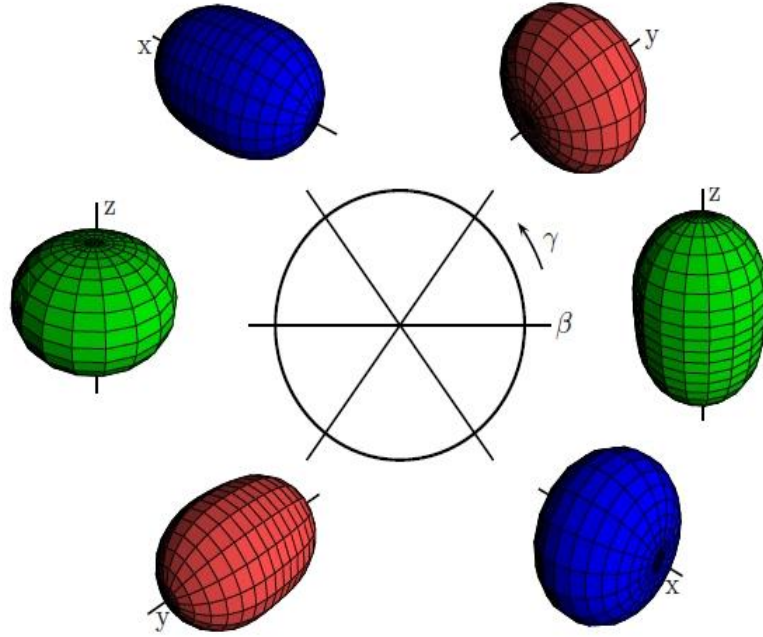


Şekil 1.4. a, İkinci dereceden - b, birinci dereceden faz geçişlerine ait yapıların evrimini gösteren enerji yüzeyleri (Casten, 2006)

Şekil 1.4a'da, eğriler 1-3, deformasyona hassasiyetin giderek artmasına ve sonuç olarak deforme denge şeklinin oluştuğunu gösteren ikinci dereceden bir faz geçişine karşılık gelmektedir. Şekil 1.4b'de, birinci dereceden bir geçiş için uyarılmış bir konfigürasyon biçiminde deforme minimumum ortaya çıktığı (eğri 2) bir durum söz konusudur. Artan değerlik nükleon sayısıyla, enerjisi azalır, sonunda denge şekli elde edilir (eğri 4). Birlikte var olan şekillerin dejenerelik noktası (eğri 3) kritik noktadır (Casten, 2006).

Nükleer bağlamda, sırasıyla birinci ve ikinci derece faz geçişleri arasındaki farklılık, birinci dereceden faz geçişinde, kesintili bir şekilde değişmesi ve küresel-deforme fazların bir arada bulunmasıdır. İkinci dereceden bir faz geçişinde deformasyon sürekli büyür ve sadece tek bir faz vardır.

Dörtlü faz veya elipsoid biçimindeki çekirdekler için Bohr Hamiltoniyeninde, iki iç yapısal değişken  $\beta - \gamma$  sırasıyla küresel şekilden ve eksensel simetriden ayrılmayı; üç Euler açısı  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  ise elipsoidin uzayda yönelimini ifade eder (Şekil 1.5). (Farklı renkler, farklı temel simetri eksenleri ile gösterilir. z yeşil, y için kırmızı ve x için mavi )



Şekil 1.5. Hill-Wheeler koordinatları  $\{\beta, \gamma\}$ .  $\beta = 0.4$  ve  $\gamma = n\pi/3$ 'e karşılık gelen kuadrupol deforme olmuş şekiller ( $n = 0, \dots, 5$  ile) (Fortunato, 2005)

$\beta$  ve  $\gamma$  parametrelerine göre tanımlanan dört kutuplu veya elipsoidal şekillere sahip çekirdekleri dikkate alındığında; elipsoidal deformasyon parametresi  $\beta$  küresel bir çekirdek için 0'dır ve tipik prolate (Amerikan futbol topu biçimli) çekirdekler için yaklaşık 0,3'tür.  $\gamma$  simetri eksenini etrafında elipsoidal şeklin simetrisini yansıtır ve eksensel simetrik bir şekil için  $0^\circ$ , maksimal asimetric (ezilmiş futbol topu biçimli) şekli için  $30^\circ$  ve oblate (disk biçimli) şekil için  $60^\circ$  'dir.

Bu çalışmada, X(3) ve X(5) modelleri için Schrödinger denkleminde  $\beta$  değişkenine bağlı kısmi Kratzer potansiyeli için iki analitik çözüm elde edildi. Bu çözümler sırasıyla X(3)-K ve X(5)-K olarak adlandırıldı. Modellere ait enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonları, Nikiforov ve Uvarov (1988) tarafından geliştirilen bir analitik yöntem kullanılarak hesaplandı.

Çalışmanın birinci kısmında;  $^{104}\text{Ru}$ ,  $^{112}\text{Cd}$ ,  $^{120}\text{Xe}$ ,  $^{122}\text{Xe}$ ,  $^{126}\text{Xe}$ ,  $^{142}\text{Sm}$ ,  $^{148}\text{Nd}$ ,  $^{156}\text{Gd}$ ,  $^{172}\text{Os}$  çekirdeklerinin temel seviye bandları,  $\beta_1$ -bandları, X(3)-K (farklı  $\beta_0$  değerleri için), X(3) ve X(5) modellerine ait tahminler ile karşılaştırıldı.

Çalışmanın ikinci kısmında ise;  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{176}\text{Os}$  ve  $^{178}\text{Os}$  çekirdeklerinin temel seviye bantları,  $\beta_1$ -bantları ve  $\gamma$ -bantları, X(5)-K (farklı  $\beta_0$  değerleri için), X(3) ve X(5) modellerine ait tahminler ile karşılaştırıldı.



## 2. GENEL KISIMLAR

### 2.1 E(5) Kritik Nokta Simetrisi

U(5) (titreşimsel) ve O(6) ( $\gamma$ -kararsız) çekirdekler arasındaki faz geçiş bölgesinde yer alan kritik nokta simetrisi E(5) modelini temsil etmektedir. Bohr Hamiltonyeni (Bohr, 1952);

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{\kappa} \frac{Q_{\kappa}^2}{\sin^2 \left( \gamma - \frac{2}{3} \pi \kappa \right)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (1)$$

şeklinde verilir. Hamiltonyen iki esas değişken  $\beta$ ,  $\gamma$  ve üç Euler açısı  $\theta_i$  ( $i = 1,2,3$ ) olmak üzere beş boyutlu uzayda yer almaktadır.

Potansiyel sadece  $\beta$  parametresine bağlı olduğu durum için  $V(\beta, \gamma) = U(\beta)$  ile ifade edilir. Sistemin dalga fonksiyonu;

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = f(\beta) \Phi(\gamma, \theta_i). \quad (2)$$

Denklem 2.'deki gibi ifade edildiğinde modele ait Schrödinger denklemi aşağıdaki değişkenlerine ayrılabilir.

$$\Lambda = \tau(\tau + 3) \quad \tau = 0,1,2, \dots \quad (3)$$

$$\left[ -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4} \sum_{\kappa} \frac{Q_{\kappa}^2}{\sin^2 \left( \gamma - \frac{2}{3} \pi \kappa \right)} \right] \Phi(\gamma, \theta_i) = \Lambda \Phi(\gamma, \theta_i) \quad (4)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2B} \left( \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - 3 \frac{\Lambda}{\beta^2} \right) + U(\beta) \right] f(\beta) = E f(\beta) \quad (5)$$

İndirgenmiş enerjileri  $(\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E)$  ve potansiyelleri  $(u = \frac{2B}{\hbar^2} U)$  Denklem 5.'te yerine yazarak  $\beta$  değişkenine bağlı denklem;

$$\left[ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\Lambda}{\beta^2} + u(\beta) \right] f(\beta) = \varepsilon f(\beta) \quad (6)$$

elde edilir.  $\varphi(\beta) = \beta^{3/2} f(\beta)$  dönüşümü yapılırsa,

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{\beta} + \left[ \varepsilon - u(\beta) - \frac{(\tau + 3/2)^2}{\beta^2} \right] \varphi = 0 \quad (7)$$

Denklem 7., E(5) dinamik simetrisine ait özellikler içerir. Buna göre beş boyutlu sonsuz kuyu potansiyeli ele alındığında,

$$\begin{aligned} u(\beta) &= 0, & \beta &\leq \beta_w \\ u(\beta) &= \infty, & \beta &> \beta_w \end{aligned} \quad (8)$$

Bu durumda  $z = \beta k$  ve  $k = \varepsilon^{1/2}$  ile  $\nu = \tau + \frac{3}{2}$  kökünden Bessel denklemi elde edilir.

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{z} + \left[ 1 - \frac{(\tau + 3/2)^2}{z^2} \right] \varphi = 0 \quad (9)$$

$\varphi(\beta_w) = 0$  sınır koşulu için özdeğerler;

$$E_{\xi, \tau} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{\xi, \tau}^2, \quad k_{\xi, \tau} = \frac{\chi_{\xi, \tau}}{\beta_w} \quad (10)$$

$\chi_{\xi, \tau}$ ,  $J_{\tau+3/2}(z)$  Bessel fonksiyonunun  $\xi$ 'inci sıfır değeridir.

Enerji öz fonksiyonları ise;

$$\varphi_{\xi,\tau}(\beta) = c_{\xi,\tau} J_{\tau+3/2}(k_{\xi,\tau}\beta), \quad (11)$$

$$f_{\xi,\tau}(\beta) = c_{\xi,\tau} \beta^{-3/2} J_{\tau+3/2}(k_{\xi,\tau}\beta). \quad (12)$$

Normalizasyon katsayısı  $c_{\xi,\tau}$  aşağıdaki şekilde elde edilir.

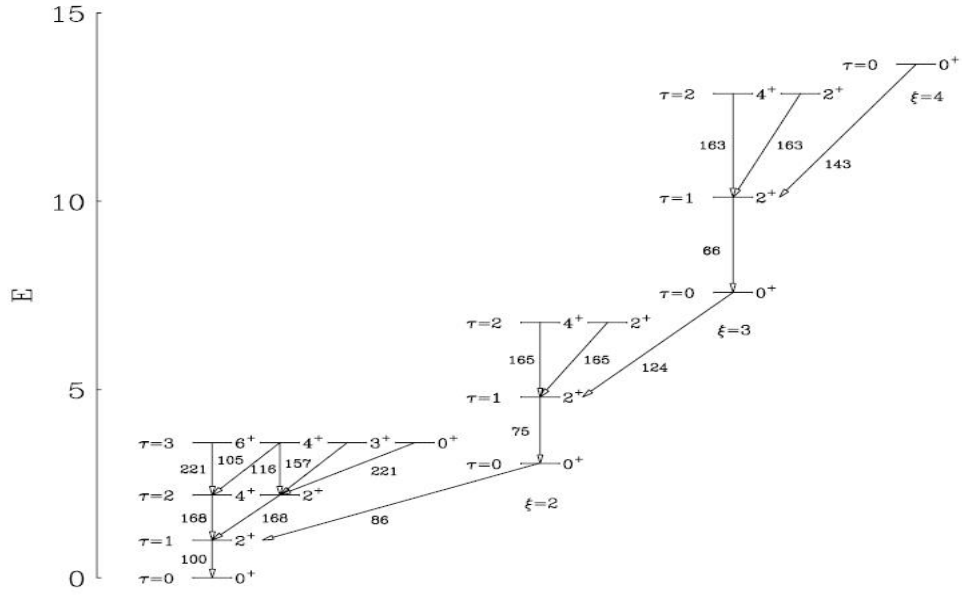
$$\int_0^{\infty} \beta^4 d\beta f^2(\beta) = 1 \quad (13)$$

Bu simetri yaklaşımı, Bessel fonksiyonları Öklid grubunda (Miller, 1968) bir taban oluşturdukları ve ele alınan problem beş boyutlu olması nedeniyle, E(5) simetrisi olarak adlandırılır. Genel olarak, H (Hamiltonyen)'nin özdeğerleri olan bütün problemler, özel fonksiyonların sıfırncı kökü olduklarında tam çözülebilir fonksiyon kümesinin başka bir sınıfını oluştururlar ve dolayısıyla "temsil simetrisi" olarak adlandırılacak dinamik simetrisi oluşturmaktadır. Bunlar temsili olarak  $\tilde{G}$  grubu ile ifade edilebilirler. Ele alınan durum için Bessel fonksiyonu bu sınıfa ait bir elemandır. E(5) kritik nokta simetrisine ait enerji spektrum Mathematica programında hesaplanmıştır. Enerji spektrumuna ait sonuçlar Tablo 2.1'de verilmiştir.

Tablo 2.1. E(5) Kritik Nokta Simetrisine ait Enerji Spektrumu

	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$	$\xi = 4$
$\tau = 0$	0	3.03	7.58	13.64
$\tau = 1$	1	4.80	10.11	16.93
$\tau = 2$	2.20	6.78	12.86	20.44
$\tau = 3$	3.59	8.97	15.81	24.16
$\tau = 4$	5.17	11.36	18.989	28.10

Tablo 2.1'den  $E_{4,1,2}/E_{2,1,1} = 2.20$ ,  $E_{2,1,2}/E_{2,1,1} = 2.20$ ,  $E_{0,2,0}/E_{2,1,1} = 3.03$  değerlerini aldığı hesaplanabilir. Tablo 2.1'de ki enerji spektrumlarının ilk dört bandı için normalizasyon enerji spektrumu Şekil 2.1'de verilmiştir.



Şekil 2.1. E(5) modelinin enerji spektrumu ve B(E2) geçiş oranları

## 2.2 X(5) Kritik Nokta Simetrisi

U(5) ve SU(3) yani küresel ve eksensel deforme olmuş şekiller arasında bir başka şekil faz geçiş şekli vardır. Etkileşen bozon modeli bakımından davranış sergileyen çekirdeklerin teorik açıklaması verilmiştir (Iachello, 1998). E(5) modeli ile kıyaslandığında buradaki durum daha karmaşıktır. E(5) simetrisinde oluşu gibi Bohr Hamiltonyeni hareket noktasıdır. Bohr Hamiltonyeni;

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{\kappa=1,2,3} \frac{Q_\kappa^2}{\sin^2 \left( \gamma - \frac{2}{3} \pi \kappa \right)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (14)$$

E(5) ve SO(5) cebirleri, Bohr Hamiltonyendeki değişkenlerden (E(5), beş boyutlu  $\pi_\mu$  momentumdan SO(5) ise beş boyutlu  $L_{\mu\nu}$  açısal momentumdan oluşur.) elde edilebilir. Denklem 14.'te, potansiyelin  $\gamma = 0^\circ$ 'de minimum bir değere sahip olduğu ve dalga denklemi;

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \varphi_K^L(\beta, \gamma) \mathcal{D}_{M,K}^L(\theta_i) \quad (15)$$

şeklinindedir. Burada  $\mathcal{D}$  ise Euler açıları  $\theta_i (i = 1,2,3)$ 'nın Wigner fonksiyonu olarak ele alınır.

$$\sum_{\kappa=1,2,3} \frac{Q_\kappa^2}{\sin^2 \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \kappa \right)} \simeq \frac{4}{3} (Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_3^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \quad (16)$$

$\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$  ve  $u = \frac{2B}{\hbar^2} V$  değişkenleri tanımlandığında, Bohr Hamiltonyeni,



$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4\beta^2} \left[ \frac{4}{3} L(L+1) + K^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \right] + u(\beta, \gamma) \right\} \varphi_K^L(\beta, \gamma) \\
& = \varepsilon \varphi_K^L(\beta, \gamma)
\end{aligned} \quad (17)$$

Potansiyelin  $u(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma)$  olduğu durumu ele aldığımızda;

$$\left[ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} \frac{4}{3} L(L+1) + u(\beta) \right] \xi_L(\beta) = \varepsilon_\beta \xi_L(\beta) \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\langle \beta^2 \rangle} K^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + v(\gamma) \right] \eta \kappa(\gamma) \\
& = \varepsilon_\gamma \eta \kappa(\gamma)
\end{aligned} \quad (19)$$

şeklinde radyal ve açısal olarak ayrılabilirler.  $\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$  olmak üzere  $\langle \beta^2 \rangle$ ,  $\beta^2$ 'nin  $\xi(\beta)$  üzerinden ortalamasıdır. Sistem için gerçek potansiyelin,  $\beta$  değişkeni için kare kuyu ve  $\gamma$  değişkeni için ise harmonik osilatör olduğu varsayıldığında; kare kuyu potansiyeli  $\beta \leq \beta_w$  için  $u(\beta) = 0$  ve  $\beta > \beta_w$  için  $u(\beta) = \infty$  alınır.

$$\xi(\beta) = \beta^{3/2} \xi(\beta), \quad \varepsilon_\beta = k^2 \beta, \quad z = \beta k_\beta \quad (20)$$

ve

$$v = \left( \frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4} \right)^{1/2} \quad (21)$$

dönüşümleri yapıldığında Bessel denklemi elde edilir.

$$\xi'' + \frac{\xi'}{z} + \left[ 1 - \frac{v^2}{z^2} \right] \xi = 0 \quad (22)$$

Sınır koşulu özdeğerler ve özfonksiyonlar:

$$\varepsilon_{\beta;s,L} = (k_{s,L})^2, \quad \xi_{s,L}(\beta) = c_{s,L}\beta^{-3/2}J_\nu(k_{s,L}\beta), \quad k_{s,L} = \frac{x_{s,L}}{\beta_w} \quad (23)$$

Şeklinde verilir.  $x_{s,L}$ ,  $J_\nu(z)$ 'nin  $s$ 'inci köküdür. Denklem 22.'den elde edilen enerji spektrumu, Tablo 2.2'de gösterilmektedir.

Normalizasyon sabitleri, koşulların uygulanmasıyla elde edilir.

$$\int_0^\infty \beta^4 \xi_{s,L}^2(\beta) d\beta = 1 \quad (24)$$

Tabla 2.2'deki enerji değerleri  $E_{1,2} - E_{1,0}$  enerji farkına normalize edilmiş halidir. Farklı enerji bandlarına ait seviyeler, farklı  $s$  kuantum sayılarıyla belirlenir. Birbirinden farklı bandlar,  $R_s = \frac{E_{s,4} - E_{s,0}}{E_{s,2} - E_{s,0}}$  enerji oranı ile hesaplanır. Bu enerji oranı  $s = 1$  bandı için 2.91 iken daha üst bandlar için ( $s = 2, 3, \dots$ ) düzenli bir azalma gösterir. Ayrıca simetri nedeniyle bandların yerleri sabittir.  $s = 2$  bandı için;  $R_s = \frac{E_{2,0} - E_{1,0}}{E_{1,2} - E_{1,0}} = 5.67$  değerini alır. Terimler  $\gamma$  değişkeninin kuvvetleri biçiminde yazıldığı zaman, iki boyutlu bir osilatörün radyal denklemi haline gelir.

Tablo 2.2. X(5) kritik nokta simetrisine ait enerji spektrumu

<b>s = 1</b>	<b>s = 2</b>	<b>s = 3</b>	<b>s = 4</b>
0	5.6485	14.120	25.414
1	7.450	16.746	28.805
2.904	10.689	21.271	34.670
5.430	14.751	26.832	41.717
8.483	19.441	33.103	49.551
12.027	24.687	37.979	58.033

$$\left[ -\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{(K/2)^2}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{1}{\gamma^2} + (3\alpha)^2 \frac{\gamma^2}{2} \right] \eta\kappa(\gamma) = \tilde{\varepsilon}_\gamma \eta\kappa(\gamma) \quad (25)$$

$$\tilde{\varepsilon}_\gamma = \varepsilon_\gamma + \frac{(K/2)^2 4}{\langle \beta^2 \rangle 3} \quad (26)$$

Denklem 26. çözümlendiğinde;

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_\gamma &= \frac{3\alpha}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} (n_\gamma + 1) \quad n_\gamma = 0, 1, 2, \dots \\ n_\gamma &= 0, \quad K = 0 \\ n_\gamma &= 0, \quad K = 0 \\ n_\gamma &= 2, \quad K = \pm 4; \end{aligned} \quad (27)$$

değerlerini alır.

$$\eta_{n_\gamma, K}(\gamma) = c_{n, K} \gamma^{|K/2|} e^{-(3\alpha)\gamma^2/2} L_n^{|K|}(3\alpha\gamma^2); \quad (28)$$

$$n = \left( \frac{n_\gamma - |K|}{2} \right) \quad (29)$$

$L_n^{|K|}$ , Laguerre polinomudur. Tüm değişkenleri birleştiren  $\beta, \gamma, \theta_i$ , en genel ifadeyi alır.

$$E(s, L, n_\gamma, K, M) = E_0 + B(x_{s, L})^2 + An_\gamma + CK^2 \quad (30)$$

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = c_{s, L} \beta^{-3/2} J_\nu(k_{s, L} \beta) \times \eta_{n_\gamma, K}(\gamma) \mathcal{D}_{MK}^L(\theta_i) \quad (31)$$

burada  $E_0, B, A, C$  isteğe bağlı parametrelerdir.  $K = 0$  için  $L = 0, 2, 4, \dots$ , ve  $K \neq 0$ ,  $L + K, K + 1, K + 2, \dots$  (Bohr, 1952). Şekil 2.2'de  $n_\gamma = 0$  için gösterimi verilmiştir. Ayrıca dalga fonksiyonu  $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ , tam çözümünü elde etmek için düzgün bir şekilde simetrik hale getirilmelidir.

Simetrik dalga fonksiyonu;

$$\begin{aligned}\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = & (1/\sqrt{2})[\varphi_{L,K}(\beta, \gamma)\mathcal{D}_{MK}^L(\theta_i) \\ & + (-1)^{I+K}\varphi_{L,-K}(\beta, \gamma)\mathcal{D}_{M,-K}^L(\theta_i)]\end{aligned}\quad (32)$$

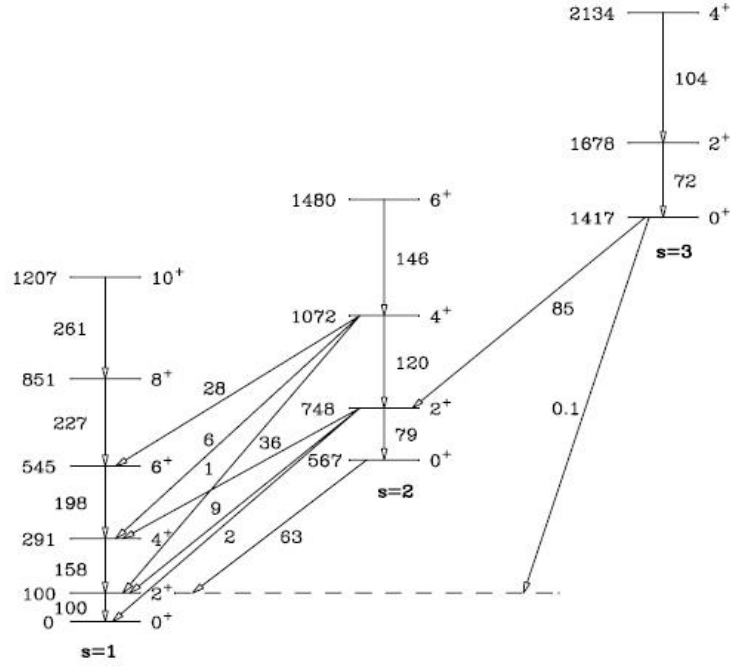
Geçiş oranları, kuadrupol operatörünün matris elemanları alınarak hesaplanabilir.

$$T^{(E2)} = t\beta \left[ \mathcal{D}_{\mu,0}^{(2)} \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{D}_{\mu,2}^{(2)} - \mathcal{D}_{\mu,-2}^{(2)}) \sin \gamma \right] \quad (33)$$

$t$  bir skala faktörüdür. Iachello (2000)'nin çalışmasındaki yaklaşım kullanılarak  $\gamma \simeq 0^\circ$  için Hamiltonyende yalnız  $\mathcal{D}_{\mu,0}^{(2)}$  terimleri kalacaktır. Euler açıları  $\theta_i$  üzerindeki integral çözümü, Wigner  $\mathcal{D}$  fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak yapılabilir.  $\beta$  kısmı için;

$$\begin{aligned}\int \beta \xi_{s,L}(\beta) \xi_{s',L'}(\beta) \times \beta^4 \partial \beta &= \int_0^1 c_{s,L} c_{s',L'} J_\nu(k_{sL}\beta) J_{\nu'}(k_{s'L'}\beta) \beta^2 \partial \beta \\ &= I_{s,L;s',L'}\end{aligned}\quad (34)$$

Bu integrallerin değerlendirilmesi Şekil 2.2'de görülen seviye şemasına ait geçiş oranlarını vermektedir.



Şekil 2.2. X(5) modelinin enerji spektrumu ve B(E2) geçiş oranları

Burada açıklanan çözüm, küresel ve eksensel olarak deforme olmuş şekiller arasındaki faz geçişlerini incelemek için kullanılabilir (Casten ve Zamfir, 2001). E(5) ve X(5) kritik simetrisi ile U(5), O(6) ve SU(3) dinamik simetrisi için enerji oran değerleri Tablo 2.3’de gösterilmiştir.

Tablo 2.3. Kritik nokta simetrisinin bazı özellikleri ve olağan dinamik simetrisi

Özellik	E(5)	X(5)	U(5)	O(6)	SU(3)
“Kritik derece” $\nu$	$\tau + \frac{3}{2}$	$\left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4}\right)^{1/2}$			
“Ratasyonel uyarılmalar” $R = \frac{E_{4_1} - E_{0_1}}{E_{2_1} - E_{0_1}}$	2.20	2.91	2.00	2.50	3.33
“Vibrasyonel uyarılmalar” $R = \frac{E_{0_2} - E_{0_1}}{E_{2_1} - E_{0_1}}$	3.03	5.67			

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1 Nikiforov-Uvarov Yöntemi

Nikiforov-Uvarov yöntemi zamandan bağımsız Schrödinger denklemini (Schrödinger, 1926) A.F. Nikiforov ve V.B. Uvarov'un (1988) ortaya koyduğu alternatif bir yöntemdir.

Schrödinger denklemi, fizikteki temel dalga denklemlerinden biridir. Bazı potansiyeller için çözümleri; atomik, nükleer, yoğunlaşmış - yüksek enerjili fizik ve parçacık fiziğinde önemli uygulamalara sahiptir.

Fiziksel bir sistem için Schrödinger denkleminin kuantum mekaniğindeki çözümü büyük bir önem taşımaktadır. Çünkü dalga fonksiyonu  $\Psi(r, t)$  ve enerji  $E$ 'nin bilgisi, bir sistemin temel özellikleri ile ilgili olası tüm bilgileri içermektedir. Bu bilgi kuantum mekaniksel sistemi, olasılık genliği  $|\Psi(r, t)|^2$  ve fazı olarak tanımladığımız zaman, parçacığın enerjisi, momentumu ve parçacık koordinatının, frekans ve dalga boyunun dalga özelliklerine kadar uzanır (Tang, 2005).  $\Psi(r, t)$ , potansiyel enerji fonksiyonu  $V(r)$ 'ye maruz kalan bir parçacığın 'durumunu' yani  $r$  parçacığın uzamsal konumunu temsil eder. Kartezyen koordinatlarda tek boyutlu sistemde tek parçacık için  $\Psi(r, t) = \Psi(x, t)$  ve  $V(r) = V(x)$ , küresel koordinatlarda üç boyutlu sistemde tek parçacık için  $\Psi(r, t) = \Psi(r, \theta, \phi, t)$  ve  $V(r) = V(r, \theta, \phi)$  şeklinde ifade edilir. Parçacık halinin zamanla nasıl değiştiğini bilmek istersek, ilk durum bilgisinden  $\Psi(r, t = 0)$ , kuantum mekanik sistemin gelecekteki durumu  $\Psi(r, t)$ 'yi elde ederiz. Avusturyalı Fizikçi Erwin Schrödinger (1887-1961) tarafından elde edilen denklem;

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi(r, t) + V(r) \Psi(r, t) \quad (35)$$

sabit  $\hbar$ ,  $\hbar \equiv h/2\pi$  olarak tanımlandığında,  $\mu$  parçacık kütlesidir ve  $\nabla^2$  herhangi bir koordinat sisteminde açıklanabilen bir operatördür. Denklem 35. zamana bağlı Schrödinger denklemi olarak bilinir ve sabit  $E$  durumuna karşılık gelen uygun  $\Psi(r, t) = e^{-iEt/\hbar} \Psi(r)$  bir dalga fonksiyonunu kullanılarak zamandan bağımsız ifadesi elde

edilebilir.  $\Psi(r, t) = e^{-iEt/\hbar}\Psi(r)$ , formundaki durumlar için olasılık yoğunluğu  $|\Psi(r, t)|^2$ ,  $|\Psi(r)|^2$  ile belirlenir ve zamanla değişmez. Bu dalga fonksiyonu Denklem 35.'te yerine yazıldığında zamandan bağımsız Schrödinger denklemi;

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi(r) + V(r)\Psi(r) = E\Psi(r) \quad (36)$$

elde edilir.

Schrödinger denkleminin çözümü sadece potansiyel enerji  $V(r)$  fonksiyonuna değil aynı zamanda koordinat sistemine de bağlıdır. Pek çok kuantum mekaniksel sistem kartezyen koordinatlarda tek parçacık, tek boyutlu Schrödinger denklemi yazılarak çözülebile de, burada küresel koordinatlarda tek parçacık, üç boyutlu Schrödinger denklemini ele alınacaktır. Bu nedenle, herhangi bir parçacık problemini küresel simetrik potansiyel enerji fonksiyonu  $V(r)$  ile ele alacağız ki burada  $V(r)$  sadece küresel koordinatların radyal değişkenine, yani  $r$ 'ye bağlı olduğunu varsayarak  $V(r) = V(r, \theta, \phi) \equiv V(r)$  olarak alırız. Diğer taraftan, durağan durum dalga fonksiyonu  $\Psi(r)$ ,  $R(r)$ 'nin bilinmeyen radyal dalga fonksiyonu olduğu ve  $Y(\theta, \phi)$  'nin küresel harmonikler olarak adlandırıldığı  $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$  formunda olacaktır.

Schrödinger denkleminin doğru bir çözümünü elde etmek, sadece Coulomb potansiyeli, Kratzer potansiyeli, vb. gibi birkaç potansiyel için mümkündür. Bu potansiyeller için, bilinmeyen radyal dalga fonksiyonu  $R(r)$  için Schrödinger denklemini çözmeye çalışabilir ve bir parçacığın davranışı hakkında dolaylı olarak tüm ilgili bilgileri sağlanabilir. Değişken katsayılı bir denklemin çözümü için standart analitik yöntem, bağımsız değişken  $r$ 'nin bir kuvvet serisinde çözümün genişletilmesi ve daha sonra tüm genişleme katsayıları için yineleme ilişkilerinin bulunmasıdır (Flügge, 1971). Ancak, kuvvet serileri yöntemi, çözüme ulaşmak için daha fazla ayrıntıya sahiptir. Lie cebirine dayanan cebirsel yöntemler (Adams, 1994; Iachello ve Levine, 1995; Iachello ve Oss, 1996; Iachello ve Ibrahim, 1998), kuantum mekaniği çerçevesinde Schrödinger denklemini çözmek için başka bir araçtır. Uygun bir Lie cebiri oluşturmak için, tam bir çözüm bulmaya çalıştığımız kuantum sistemi dinamik bir simetri göstermelidir. Eğer

öyleyse, bazı potansiyeller için kuantum sisteminin basamak operatörleri faktörizasyon yöntemi veya süpersimetrik kuantum mekaniği yaklaşımı ile oluşturulur. Faktörizasyon yönteminin avantajı, Schrödinger denklemi faktörleştirilebilir olması durumunda, bir kuantum sisteminin enerji spektrumunun ve dalga fonksiyonunun cebirsel olarak elde edilmesidir (Frank ve Isacker, 1994; Infeld ve Hull, 1951).

Schrödinger denkleminin çözümü, kuantum mekaniğinin ilk günlerinden beri bir parçacığın enerji spektrumunu anlamak için temeldir (Flügge, 1971). Sıklıkla bazı kuantum mekaniksel problemlerde, Schrödinger denkleminin potansiyel  $V(r)$  ile çözümü doğru olarak bilinmemektedir (örneğin, küresel koordinatta Schrödinger denkleminin radyal kısmından gelen  $\ell(\ell + 1)/r$  merkezci terimiyle birlikte Morse potansiyeline sahip bir parçacığın hareketini göz önüne alırsak). Bu nedenle, bu gibi durumlarda, Schrödinger denkleminin kesin bir çözümüne gerek yoktur ve çözüm için verimli yaklaşık yöntemler aranmalıdır. Bu açıdan bakıldığında eğer Schrödinger denklemi verilen bir potansiyel için tam olarak çözülebilir ise dalga fonksiyonu böyle bir sistemi tam olarak açıklayabilir, aksi takdirde sistem yaklaşık bir çözümle hemen hemen açıklanabilir.  $V(r)$  potansiyelinde ki bir parçacık için  $\ell(\ell + 1)/r$  merkezci terim içeren veya merkezci terim içermeyen Schrödinger denkleminin tam ve yaklaşık bir çözümün bulunmasında sayısal ve analitik yöntemler tamamlayıcıdır. Ancak, basit "el-gücü yöntemleri" yani analitik yöntemler genellikle daha açıklayıcıdır çünkü problemin çözüm aşamalarını görmemizi sağlar. Böylece sayısal çözümden daha anlamlı kılar.

Schrödinger denklemini "el-gücü" ile çözenin alternatif bir yöntemi, hipergeometrik tipte ikinci mertebeden diferansiyel denklemler açısından tarif edilebilecek Nikiforov-Uvarov (NU) yöntemini kullanmaktır. Bize tam bir özdeğer ve özfonksiyon çözümü sağlar. Nikiforov-Uvarov yöntemi, Schrödinger denkleminin çözümünü standart ders kitaplarında verilen yöntemlerin yanı sıra daha doğrudan, kolay ve zarif bir şekilde uygulayabilmektedir.

Denklemler 36.'da verilen ana denklem kullanılarak, Schrödinger denklemi kütle  $\mu$ 'nin tek bir parçacığı için küresel koordinatlardan ayrılarak çözülebilir. Schrödinger denklemini ayırdıktan sonra özdeğer denklemleri Nikiforov-Uvarov yöntemi kullanılarak çözülür ve



tek bir parçacık için ayrı spektrumun enerji seviyeleri elde edilir. Küresel koordinatlarda, Schrödinger denklemi;

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \right\} \Psi(r, \theta, \phi) \quad (37)$$

$$+ V(\mathbf{r})\Psi(r, \theta, \phi) = E\Psi(r, \theta, \phi)$$

Denklem 37.'deki E enerji değerleri reeldir.  $E < 0$  bağlı durumlara karşılık gelirken,  $E > 0$  sürekli saçılma durumlarını ifade eder. Sonuç olarak bu denklem; Harmonik osilatör, Coulomb potansiyeli, Kratzer potansiyeli, Morse potansiyeli, Hulthen potansiyeli gibi birçok potansiyel için ayrılabilir.

Nikiforov-Uvarov (NU) yöntemi, özel ortogonal fonksiyonlar aracılığıyla hipergeometrik tip ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözülmesine dayanmaktadır (Szego, 1939). Belirli bir potansiyel için, küresel koordinatlarda Schrödinger veya Schrödinger benzeri denklemler, uygun bir koordinat dönüşümü  $r \rightarrow s$  ile genel bir hipergeometrik tip denkleme indirgenir ve daha sonra kesin veya belirli çözümleri bulmak için sistematik olarak çözülebilir. Metot ile yakından ilişkili olan ana denklem aşağıdaki formda (Nikiforov ve Uvarov, 1988).

$$\Psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi(s) = 0 \quad (38)$$

ifade edilir. Burada  $\sigma(s)$  ve  $\tilde{\sigma}(s)$ 'nin en fazla ikinci dereceden polinomları,  $\tilde{\tau}(s)$ 'nin birinci dereceden bir polinom ve  $\Psi(s)$  olduğu hipergeometrik tip bir fonksiyondur.  $\Psi(s) = \phi(s)y(s)$  olarak ve uygun bir  $\phi(s)$  fonksiyonunu seçerek Denklem 38. anlaşılır bir forma indirgenir;

$$y''(s) + \left( 2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \right) y'(s) \quad (39)$$

$$+ \left( \frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \right) y(s) = 0$$

$y'(s)$  katsayısı  $\tau(s)/\sigma(s)$  biçiminde alınır, burada  $\tau(s)$  en çok birinci dereceden polinomdur, yani;

$$2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \quad (40)$$

bu nedenle en düzenli form aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \quad (41)$$

$$\pi(s) = \frac{1}{2} [\tau(s) - \tilde{\tau}(s)] \quad (42)$$

Denklem 42.'nin en kullanışlı gösterimi;

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s). \quad (43)$$

Yeni parametre  $\pi(s)$ , en fazla birinci dereceden polinomudur. Ek olarak, Denklem 39.'daki  $y(s)$  katsayısında görünen  $\phi''(s)/\phi(s)$  terimi aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir:

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = \left( \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \right)' + \left( \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \right)^2 = \left( \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)' + \left( \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)^2 \quad (44)$$

Bu durumda,  $y(s)$  katsayısı, Denklem 41.'de verilen eşitliği alarak daha uygun bir forma dönüştürülür;

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} = \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \quad (45)$$

$$\tilde{\sigma}(s) = \tilde{\sigma}(s) + \pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \pi'(s) \sigma(s) \quad (46)$$

Denklem 40. ve Denklem 44., Denklem 39.'da yerine yazıldığında;

$$y''(s) + \left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}\right)y'(s) + \left(\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\right)y(s) = 0 \quad (47)$$

Yukarıda belirtilen cebirsel dönüşümlerin bir sonucu olarak, Denklem 38.'in fonksiyonel formu sistematik bir şekilde korunmaktadır. Denklem 47.'deki polinom  $\tilde{\sigma}(s)$ ,  $\sigma(s)$  ile bölünebilir,

$$\tilde{\sigma}(s) = \lambda\sigma(s) \quad (48)$$

burada  $\lambda$  sabittir, Denklem 47. hipergeometrik bir denkleme indirgenir,

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0 \quad (49)$$

ve hipergeometrik tipte bir çözüm elde edilir.

Polinom  $\pi(s)$ 'yi belirlemek için, Denklem 46 ile Denklem 48. karşılaştırılmış ve  $\pi(s)$  için ikinci dereceden bir denklem aşağıdaki gibi

$$\pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \tilde{\sigma}(s) - k\sigma(s) = 0 \quad (50)$$

$$k = \lambda - \pi'(s) \quad (51)$$

elde edilmiştir.  $\pi(s)$  için bu ikinci dereceden denklemin çözümü,

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \sigma'(s) + k\sigma(s)} \quad (52)$$

eşitliğini verir.

Denklem 52.'nin artı ve eksi işaretlerine göre olası çözümleri elde etmek için, karekök işareti içindeki  $k$  parametresi açıkça bilinmelidir. Bu koşulu sağlamak için, karekök işaretin altındaki ifade polinomun karesi olmalıdır, çünkü  $\pi(s)$  polinomu en fazla birinci dereceden polinomdur.  $k$  belirlendikten sonra, polinom  $\pi(s)$ , Denklem 52.'den elde edilir ve daha sonra  $\tau(s)$  ve  $\lambda$  da sırasıyla Denklem 42. ve Denklem 51.'de kullanılarak bulunur. Bu amaçla,  $v_1(s) = y'(s)$  ifadesi kullanılarak Denklem 49.'un diferansiyeli alınır,

$$\sigma(s)v_n''(s) + \tau_1(s)v_n'(s) + \mu_1v_1(s) = 0 \quad (53)$$

$\tau_1(s) = \tau(s) + \sigma'(s)$  ve  $\mu_1 = \lambda + \tau'(s)$  ile ifade edilir.  $\tau_1(s)$ , birinci dereceden polinomudur ve  $\mu_1$ ,  $s$  değişkeninden bağımsız bir parametredir. Denklem 53.'un bir hipergeometrik tipte bir denklem olduğu açıktır. Yeni bir temsil olarak  $v_2(s) = y''(s)$  alarak, Denklem 49.'un ikinci türevi;

$$\sigma(s)v_n''(s) + \tau_2(s)v_n'(s) + \mu_2v_2(s) = 0 \quad (54)$$

$$\tau_2(s) = \tau_1(s) + \sigma'(s) = \tau(s) + 2\sigma'(s) \quad (55)$$

$$\mu_2 = \mu_1 + \tau'(s) = \lambda + 2\tau'(s) + \sigma''(s) \quad (56)$$

Benzer bir yolla, Denklem 49.'un özel bir çözümlerin bir ailesi olacak biçimde hipergeometrik tipte bir denklem  $v_n(s) = y^n(s)$  olarak oluşturulabilir;

$$\sigma(s)v_n''(s) + \tau_n(s)v_n'(s) + \mu_nv_n(s) = 0 \quad (57)$$

ve burada  $\tau_n(s)$  ve  $\mu_n$  için genel tekrarlılama bağıntıları sırasıyla,

$$\tau_n(s) = \tau(s) + n\sigma'(s) \quad (58)$$

$$\mu_n = \lambda + n\tau'(s) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad (59)$$

$\mu_n = 0$  olduğunda, Denklem 59. aşağıdaki gibi olur.

$$\lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad (n = 0,1,2, \dots) \quad (60)$$

Denklem 57.,  $n$ . dereceden bir polinomu olan  $y(s) = y_n(s)$  formunun özel bir çözümüne sahiptir. Nikiforov-Uvarov yöntemi ile bir özdeğer çözümü elde etmek için  $\lambda$  ve  $\lambda_n$  arasındaki ilişki Denklem 51. ve Denklem 60. ile belirlenmelidir.  $y_n(s)$  polinom çözümlerini Rodrigues ilişkisi ile verilen hipergeometrik tipte bir fonksiyondur.

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)] \quad (61)$$

Burada  $B_n$  normalizasyon sabiti ve  $\rho(s)$  ağırlık fonksiyonu aşağıdaki koşulu karşılamalıdır (Bekdemir, 2009).

$$(\sigma(s)\rho(s))' = \tau(s)\rho(s) \quad (62)$$

Diğer bir eşitlik ise,

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \quad (63)$$

Aşağıdaki denklem, farklı potansiyeller ile elde edilebilen Schrödinger denkleminin genel bir şeklidir.

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \right] \Psi = 0 \quad (64)$$

Denklem 64., Denklem 43. ile karşılaştırıldığında,

$$\tilde{\tau} = \alpha_1 - \alpha_2 s \quad (65)$$

$$\sigma = s(1 - \alpha_3 s) \quad (66)$$

$$\tilde{\sigma} = -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \quad (67)$$

Denklem 65-67. Denklem 52.'de yerine yazılırsa,

$$\pi = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm \sqrt{(\alpha_6 - k\alpha_3)s^2 + (\alpha_7 + k)s + \alpha_8} \quad (68)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) & \alpha_6 &= \alpha_5^2 + \xi_1 \\ \alpha_5 &= \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3) & \alpha_7 &= 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2 \\ & & \alpha_8 &= \alpha_4^2 + \xi_3 \end{aligned} \quad (69)$$

Denklem 68.'de, karekök altındaki fonksiyon Nikiforov-Uvarov yöntemine göre bir polinomun karesi olmalıdır.

$$k_{1,2} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \pm \sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad (70)$$

Her bir  $k$  için;

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) - \sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad (71)$$

$\pi$  için,

$$\pi = \alpha_4 + \alpha_5 s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}] \quad (72)$$

Aynı  $k$  için, Denklem 43., Denklem 65. ve Denklem 68.'den dolayı,

$$\tau = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - 2[(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}] \quad (73)$$

$$\tau' = -(\alpha_2 - 2\alpha_5) - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad (74)$$

$$\tau' = -2\alpha_3 - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) < 0 \quad (75)$$

elde edilir. Denklem 51.'de Denklem 73-75. kullanıldığında;

$$\begin{aligned} \alpha_2 n - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 \\ + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

Denklem 76., belirli bir problemin enerji spektrumunu verir. Denklem 62. eşitliği,

$$\rho(s) = s^{\alpha_{10}-1} (1 - \alpha_3 s)^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10} - 1} \quad (77)$$

şeklinde düzenlenir. Denklem 77., Denklem 61.'de yerine yazıldığında,

$$y_n = P_n^{\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10} - 1} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (78)$$

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \quad (79)$$

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad (80)$$

elde edilir ve  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  Jacobi polinomlarıdır. Denklem 63.'den,

$$\phi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \quad (81)$$

bulunur ve genel çözüm;

$$\Psi(s) = \phi(s)y(s) \quad (82)$$

$$\Psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (83)$$

Burada alfa fonksiyonları şöyle verilir:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8} \\ \alpha_{13} &= \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) \end{aligned} \quad (84)$$

Bazı problemlerde  $\alpha_3 = 0$ 'dır. Bu tür sorunlar için;

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} P_n^{\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1} (1 - 2\alpha_3 s) = L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} s) \quad (85)$$

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - 2\alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} = e^{\alpha_{13} s} \quad (86)$$

Denklemler 83.'te verilen çözüm şöyle olur (Tezcan ve Sever, 2009):

$$\Psi(s) = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13} s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} s) \quad (87)$$

ifadesiyle dalga fonksiyonu elde edilir.



### 3.2 Kratzer Potansiyel

Kollektif Bohr hamiltoniyen'in  $\beta$  değişkeninde bir kare kuyu potansiyeli seçilerek elde edilen analitik çözümü büyük ilgi uyandırmıştır (Iachello, 2000). Bu durum, küresel ve  $\gamma$  -kararsız çekirdekler arasındaki şekil faz geçişini açıklar ve E(5) grubu ile ilişkilendirilir. Benzer şekilde, X(5) olarak adlandırılan küresel ve eksensel olarak deforme olmuş şekiller arasındaki geçiş için bir çözüm olarak değişkenlerin yaklaşık olarak ayrılması önerilmiştir (Fortunato ve Vitturi, 2003). Bu gibi durumların deneysel olarak doğrulanması, örneğin E(5) için  $^{134}\text{Ba}$ , X(5) (Casten ve Zamfir, 2000; Casten ve Zamfir, 2001; Bizzeti ve ark, 2002) için ise  $^{152}\text{Sm}$ 'nin seviye şemaları ile ortaya konmuştur.

Dinamik simetrilerin oluşumu, Hamiltoniyen'in sadece bir alt cebir zinciri olan Casimir operatörleri açısından yazılmış olduğu sistemlerle ilişkilidir. Bu zincirin daha geniş cebiri problemin doğasını çözen ve sistemin genel biçimindeki tüm bilgileri taşıyan özelliktedir. Cebirin, alt cebir zincirlerine ayrıldığı eşsiz bir yöntem, analitik sonuçlara yol açan, sistemin deneysel bulgularını ve veri trendlerini aydınlatmaya yardımcı olabilecek bazı özgün özellikleri sergiler. Genel SU(6) Hamiltonyenin özel seçimleri ile analitik olarak çözülebilir (O(6), U(5) ve SU(3) durumları) sınırlayıcı durumlar elde edilir. Nükleer grafikte ya da bir izotop zincirinde ilerlerken, çekirdekler bir dinamik simetriden diğerine faz geçişlerine girebilir. E(5) ve X(5)'in ilgisi, kritik faz geçiş noktalarına tam olarak karşılık gelen yeni analitik olarak çözülebilir durumlarla ilişkili olmaları gerçeğidir.

Küreselden  $\gamma$  -kararsız çekirdeğe geçişin çok özel durumunda, E(5) açıklaması,  $\beta$  değişkenindeki geçiş potansiyeli için, sonsuz bir kare-kuyu potansiyeli (Iachello, 2000) sonlu bir kare kuyusunun tanıtımı ile Caprio tarafından genelleştirilen bir durumun varsayımını ele alır (Caprio, 2002). Elliott (1986) ve daha sonra Rowe (2002-2003; Rowe ve Bahri, 1998) tarafından incelenen Davidson potansiyeli gibi analitik bir titreşim rotasyon spektrumu oluşturan diğer seçenekler de mümkündür.

Başlangıç noktamız olarak Bohr Hamiltonyen (Bohr, 1952; Bohr ve Mottelson, 1953):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{\kappa=1,2,3} \frac{Q_\kappa^2}{\sin^2 \left( \gamma - \frac{2}{3} \pi \kappa \right)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (88)$$

Standart prosedürün ardından, potansiyel sadece  $\beta$ , yani  $V(\beta, \gamma) = U(\beta)$  'ye bağlı olduğunda, Wilets ve Jean (1956)'da olduğu gibi değişkenleri ayırabilir, biri gama değişkenli ve üç Euler açıları, diğeri sadece  $\beta$  değişkenini içeren iki diferansiyel denklemden oluşan bir sistem elde edebilir.

Spektrumun, sonraki kesin çözümü;

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\widehat{\Lambda}^2}{\beta^2} \right] + U(\beta) \right\} f(\beta) = E f(\beta) \quad (89)$$

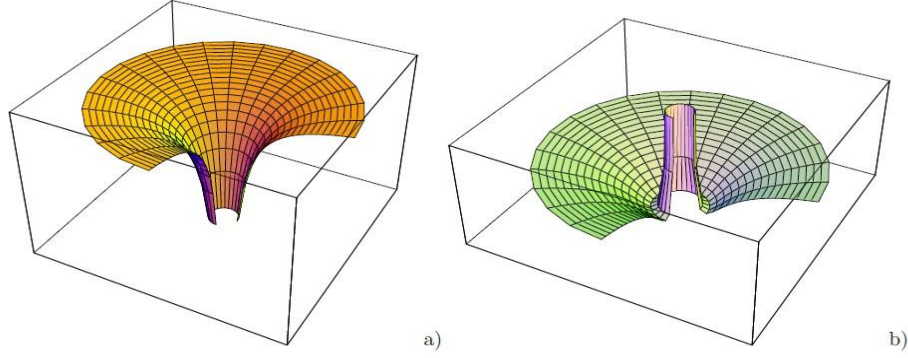
Burada  $\widehat{\Lambda}^2$ , SO(5) (Elliott, 1986)'nın Casimir operatörüdür ( $\tau$  ilişkili kuantum sayısıdır) ve burada ikinci sıradaki standart formdaki  $\beta$  değişkenindeki diferansiyel denklemi yeniden yazarsak;

$$\chi''(\beta) + \left\{ \epsilon - u(\beta) - \frac{(\tau + 3/2)^2}{\beta^2} + \frac{1}{4\beta^2} \right\} \chi(\beta) = 0 \quad (90)$$

elde edilir. Burada  $\chi(\beta) = \beta^2 f(\beta)$ 'dir.

$\epsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$  ve  $u = \frac{2B}{\hbar^2} U$  ise indirgenmiş enerjiler ve potansiyellerdir. Bu denklemin, kuadrupol deformasyon parametresi  $\beta$ 'nin Coulomb ve Kratzer potansiyellerinin seçimi ile analitik çözümleri sergilediğini göstereceğiz. Coulomb potansiyeli (Şekil 3.1.a), sıfırdan uzaklaşan çok basit bir forma sahipken, Kratzer (Şekil 3.1.b) potansiyeli kuantum teorisinin erken evre konfigürasyon alanındaki iyonlar arasındaki etkileşimleri tanımlamak için kullanılır ve sonlu bir  $\beta$  değeri için minimumdur. Aslında her iki

durumda da basit bir matematiksel adımla, Denklem 90. için iyi bilinen Whittaker standart formu ve dolayısıyla analitik çözümlerin yeniden elde edilme olasılığı vardır.



Şekil 3.1. Fortunato ve Vitturi tarafından  $0 < \gamma < 3\pi/2$  için ele alınan Coulomb (a) ve Kratzer (b)  $V(\beta, \gamma)$  potansiyelleri (Fortunato ve Vitturi, 2003)

Coulomb potansiyeli;

$$u_c(\beta) = -\frac{A}{\beta} \quad A > 0 \quad (91)$$

şeklinde ifade edilir.

$\varepsilon = -\epsilon$ ,  $x = 2\sqrt{\varepsilon}\beta$ ,  $k = A/(2\sqrt{\varepsilon})$  ve  $\mu = \tau + 3/2$  Denklem 90.'da yerine yazıldığında, Whittaker standart form:

$$\chi''(x) + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{(1/4 - \mu^2)^2}{x^2} + \frac{1}{4\beta^2} \right\} \chi(x) = 0 \quad (92)$$

ve negatif enerjilere yönelik düzenli çözümü (Erdelyi, 1955; Flügge, 1974)'de olduğu gibi Whittaker'in  $\chi_{k,\mu}(x)$  fonksiyonu:

$$\chi_{k,\mu}(x) = \mathcal{N}_{\tau,\xi} x^{\frac{(2\mu+1)}{2}} e^{-x/2} F_1(\mu + 1/2 - k, 2\mu + 1; x) \quad (93)$$

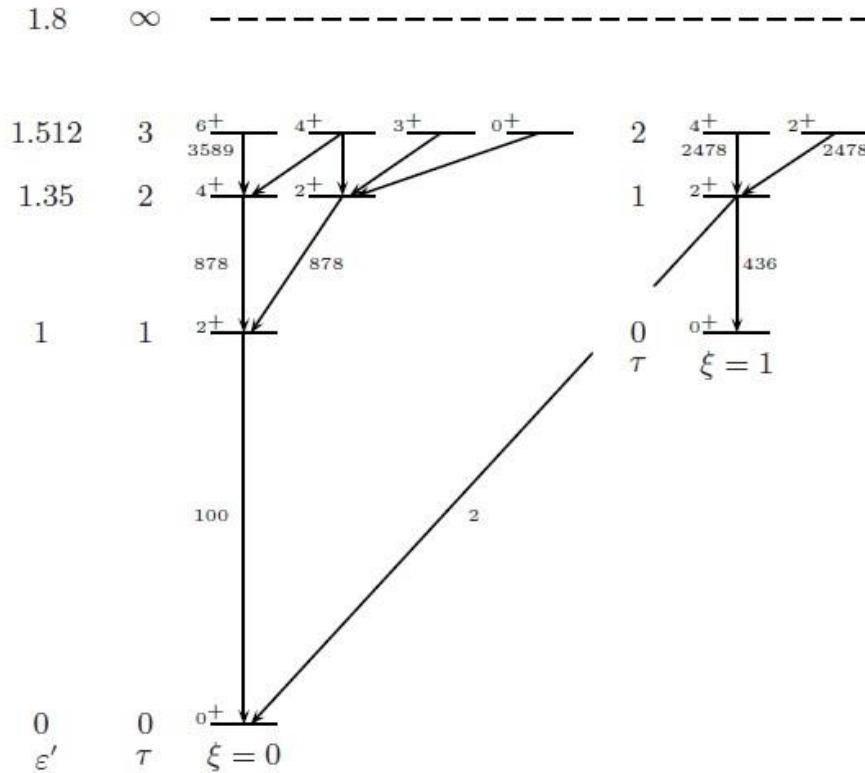
şeklinde yazılır.

$\mu + \frac{1}{2} - k = \tau + 2 - A/(2\sqrt{\varepsilon})$  ilk parametresi  $-\xi$  olarak adlandırdığımız negatif bir tamsayı olduğunda, Whittaker fonksiyonu ile ilişkili bir Laguerre polinomuna indirgenir ve dalga fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$\chi_{k,\mu}(x) = N_{\tau,\xi} x^{\frac{(2\mu+1)}{2}} e^{-x/2} \frac{\xi!}{(2\mu+1)\xi} L_{\xi}^{(2\mu)}(x) \quad (94)$$

Burada payda Pochhammer sembolüdür. Denklem 94.'de verilen koşul, spektrumun analitik olarak düzeltilmesine imkân verir.

$$\varepsilon_{\tau,\xi} = \frac{A^2/4}{(\tau + \xi + 2)^2} \quad (95)$$



Şekil 3.2. Coulomb potansiyelin spektrumu (Fortunato, 2005)

$\tau + \xi$ , enerjiler için tek bir n kuantum sayısı gibi çalışır, ama dalga fonksiyonlarının şekli  $\tau$  ve  $\xi$ 'ye bağlıdır. Bu spektrum, Şekil 3.2'de gösterilmekte olup, ilk iki durumun

enerjileri, sırasıyla 0 ve 1'e sabitlenmiştir ve bu enerji ölçeği  $\epsilon$ 'yi çözmek için yeterlidir.  $n = 2$ 'ye karşılık gelen  $4^+, 2^+$  dubleti 1.35 enerji değerine sahiptir ve bu değer daha iyi bilinen diğer durumlardan daha küçüktür. Bu spektrumun sonsuz kuantum sayısına bağlı 1.8 eşik değerli ilginç bir özelliği vardır. Yine de bu değer vibratörün iki fononlu halinin enerjisinden daha küçüktür.

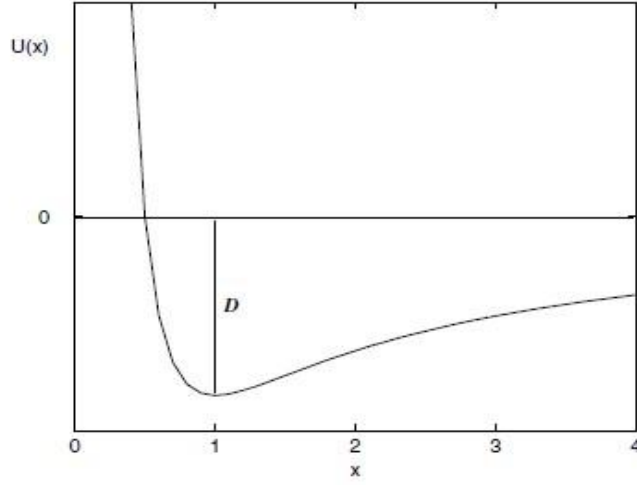
B. Adolf Kratzer'in onuruna verilen Kratzer potansiyeli (Kratzer, 1920), moleküler fizik ve kimyada yaygın olarak kullanılan potansiyel modellerden biridir. Model potansiyeli, analitik ve hesaplama yöntemlerini kullanarak moleküler yapıları ve etkileşimleri tanımlayabileceğimiz anlamına gelir. Hesaplama ve malzeme bilimi alanında kullanılan bu yöntem, büyük malzeme bileşenlerinin küçük moleküller arasında değişen moleküler sistemleri çalışmak için geliştirilmektedir. Ancak, çalışmaların ilerlemesi sadece günümüz bilimindeki süper-bilgisayarlara bağlı olmakla kalmaz, aynı zamanda tamamlayıcı avantajlar sunan ab initio ve yarı-deneysel yöntemler gibi hesaplama yöntemlerine de ihtiyaç duyar (Herzberg, 1950).

En basit hesaplamalar elle gerçekleştirilebilir, ancak kaçınılmaz olarak bilgisayarların makul boyutlardaki herhangi bir sistemin moleküler modellemesini gerçekleştirmesi gerekir. Moleküler modellemenin yararı, sistemin karmaşıklığını azaltarak, simülasyonlar sırasında daha fazla parçacığın (atomların) dikkate alınmasını sağlamasıdır.

Kratzer potansiyeli;

$$u_K(\beta) = -\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} = -2\mathcal{D} \left( \frac{\beta_0}{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \right) \quad (96)$$

şeklinde ifade edilir. Bu potansiyeli parametrelemek için iki olası yolla kullanabiliriz. Birincisi, spektrumun formülünden açıkça anlaşılacağı üzere, kullanımı en kolay olanıdır; ikincisi ise potansiyelin geometrik şekli ile ilgilidir:  $\beta_0$  minimum konumunda iken  $\mathcal{D}$ , kare kuyunun derinliğini ifade eder (bkz. Şekil 3.3). Bu iki parametre kümesi, yukarıdaki denklemden çıkarılabilecek basit ilişkiler ile bağlanır.



Şekil 3.3. Kratzer potansiyel (yatay eksen:  $\beta_0/\beta$ , düşey eksen: sonsuz kare kuyu potansiyelin derinliğini) (Fortunato ve Vitturi, 2003)

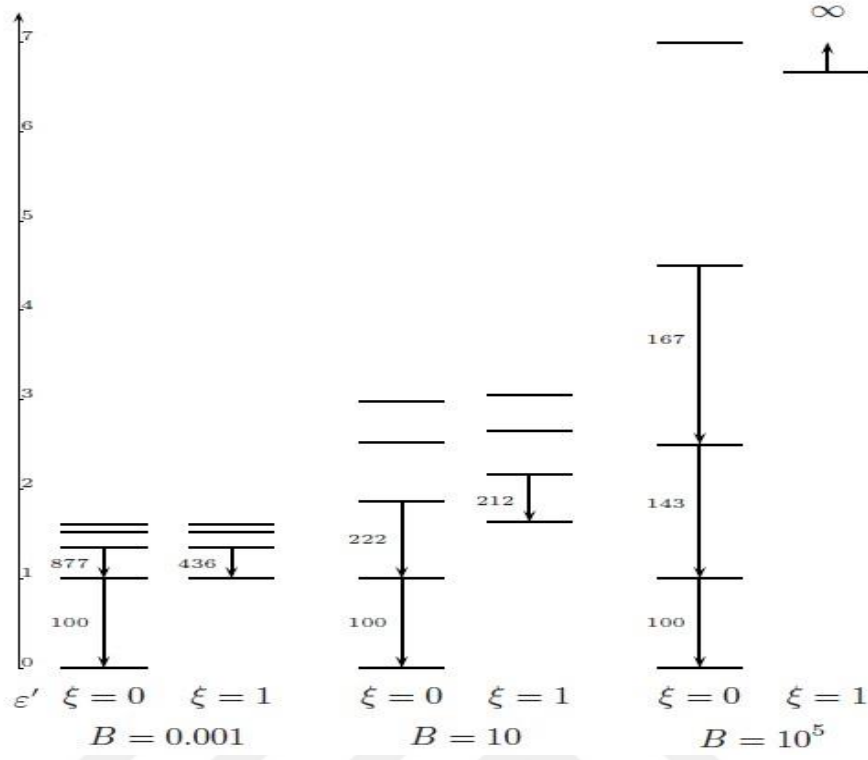
Kratzer potansiyeli ve  $\epsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$ ,  $x = 2\sqrt{\epsilon}\beta$ ,  $k = A/(2\sqrt{\epsilon})$  ve  $\mu^2 = (\tau + 3/2)^2 + B$  ifadelerini Denklem 93.'te yerine yazdığımızda tekrar Whittaker'in standart formunu alır.

$\mu + \frac{1}{2} - k = \sqrt{(\tau + \frac{3}{2})^2 + B} + \frac{1}{2} - A/(2\sqrt{\epsilon})$  negatif bir tam sayı olmalı ve  $-\xi$  ile gösterilir. Bu durumda spektrum:

$$\epsilon_{\tau,\xi} = \frac{A^2/4}{\left(\sqrt{(\tau + 3/2)^2 + B} + \frac{1}{2} + \xi\right)^2} \quad (97)$$

farklı durumlar için;  $\xi = 0,1,2,3, \dots$

Fortunato ve Vitturi (2003)'de, spektrumun:  $\beta_0$  ve  $\mathcal{D}$ , potansiyel ve spektrumun şekli arasında bir bağlantı kurmak için ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bununla birlikte, A ve B parametresini kullanırsak, A'nın ölçeklenmiş özdeğerleri belirlemede herhangi bir rol oynamadığı ve bu nedenle birçok spektrumun Coulomb limitinden ( $B = 0$ ),  $O(6)$  limitine ( $B \rightarrow \infty$ ) kadar uzanan aralıkta yalnız B'ye bağlı olduğunu fark ederiz. Bu durum Şekil 3.4'te gösterilmektedir. Eşik 1.8'den sonsuza B ile değişir ve  $4^+$  seviyesinin pozisyonu 1.35 ile 3.33 arasında değer alır. Bu Kratzer çözümü esnek hale getirir. B parametresi sadece  $4_0^+$ 'ın konumunu değil, aynı zamanda tüm  $\beta$  bandları da dahil olmak üzere diğer tüm uyarılmış durumları da sağlamaktadır.



Şekil 3.4. Sabit  $A = 20$  ile spektrumların evrimi ve iki sınırlayıcı durum için  $B$  artışı  $B = 0$ , Coulomb ve  $B \rightarrow \infty$ ,  $O(6)$  (Fortunato, 2005)

### 3.3 X(3) Modeli İçin Kratzer Potansiyeli Uygulanması

X(3) modelinin  $\beta$  ve  $\gamma$  'nın kollektif değişkenlerini içeren nükleer kollektif model çerçevesinde ilginç bir özel durumu, gama değişkeninin bir değere “sabitlenmesi” ile elde edilir. Bu çalışmada, X(5) durumunda olduğu gibi, harmonik osilatör potansiyeli içinde  $\gamma = 0^\circ$  değeri etrafında değişmek yerine,  $\gamma$  değişkenin  $\gamma = 0^\circ$  de sabitlenmesiyle X(5) modelinin başka bir  $\gamma$ -bağımsız ( $\gamma = 0^\circ$ ) versiyonu oluşturulmuştur. Model X(3) olarak isimlendirilmiştir çünkü bu durumda sadece üç değişkenin ortaya çıktığı, değişkenlerin ayrışmasının kesin olduğu, X(5) durumunda ise orada meydana gelen beş değişkenin yaklaşık olarak ayrılmasının gerçekleştirildiği ispatlanmıştır.

X(3) modelinde  $\gamma = 0^\circ$ , X(5) modelinde ise  $\gamma \simeq 0^\circ$  kabul edilir. Aralarındaki diğer fark ise X(3) modelinde  $\gamma$  bir parametre olarak kabul edilirken, X(5) modelinde ise değişken olarak kabul edilir. Sonuç olarak, X(3) modelinde ki değişkenlerin ayrımı kesinken ( $\gamma$ -değişkeninin olmaması nedeniyle), X(5) modelinde ise yaklaşık değerdedir.

Ayrıca X(3) ve E(5) modellerinde sadece  $\beta$  'ya bağlı bir potansiyel göz önünde bulundurulur ve değişkenlerin tam olarak ayrılması sağlanır. Aralarında ki fark ise E(5) modelinde  $\gamma$  değişkeni aktifken, X(3) modelinde sabitlenmiştir. Sonuç olarak; E(5) durumunda, açılırları içeren denklem, Bessel tarafından verilen çözümlerle sonuçlanırken X(3) durumunda ise olağan küresel harmonikler ortaya çıkar.

$\gamma = 0^\circ$  için  $\gamma$ -katı Bohr Hamiltonyenin bir çözümü Kratzer Potansiyeli ile elde edildi. Bu çözüm X(3)-Kratzer olarak adlandırıldı.

X(3) modeline ait Hamiltonyen operatörü;

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \Delta + U(\beta) \quad (98)$$
$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{3\beta^2} \Delta_\Omega \right] + U(\beta)$$



Burada  $\Delta_\Omega$ , Laplace operatörünün açısal kısmıdır.

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (99)$$

Denklem 99., Denklem 98.'de yerine yazıldığında;

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{3\beta^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{3\beta^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + U(\beta) \quad (100)$$

ifadesi elde edilir. Schrödinger denklemi, faktörizasyon ile çözülebilir.

$$\Psi(\beta, \theta, \phi) = F(\beta) Y_{LM}(\theta, \phi) \quad (101)$$

$Y_{LM}(\theta, \phi)$ , küresel harmoniktir. Açısal kısım ise;

$$-\Delta_\Omega Y_{LM}(\theta, \phi) = L(L+1) Y_{LM}(\theta, \phi) \quad (102)$$

Burada L açısal momentum kuantum sayısıdır. F( $\beta$ ) radyal kısmı için ise;

$$\left[ \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{L(L+1)}{3\beta^2} + \frac{2B}{\hbar^2} (E - U(\beta)) \right] F(\beta) = 0 \quad (103)$$

İndirgenmiş enerjileri ( $\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$ ) ve potansiyelleri ( $u = \frac{2B}{\hbar^2} U$ ) Denklem 103.'te yerine yazıldığında  $\beta$  değişkenine bağlı denklem elde edilir.

$$\left[ \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{L(L+1)}{3\beta^2} + \varepsilon - u(\beta) \right] F(\beta) = 0 \quad (104)$$

Kratzer potansiyeli;

$$u(\beta) = -\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} \quad (105)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem 105., Denklem 104.'te yerine yazıldığında Denklem 106. elde edilir.

$$\left[ \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{L(L+1)}{3\beta^2} + \varepsilon - \left( -\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} \right) \right] F(\beta) = 0 \quad (106)$$

Denklem 106.'yı düzenlediğimiz de;

$$\left[ \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} + \left( \varepsilon - \frac{L(L+1)}{3\beta^2} + \frac{A}{\beta} - \frac{B}{\beta^2} \right) \right] F(\beta) = 0 \quad (107)$$

şeklinde yazılır.

Diferansiyel kısmının çözümü;

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta^2} \left( 2\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) = \frac{2}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (108)$$

Denklem 108., Denklem 107.'de yerine yazılır.

$$\left[ \frac{\partial^2 F(\beta)}{\partial \beta^2} + \frac{2}{\beta} \frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \left( \varepsilon \beta^2 + A\beta - \left( \frac{L(L+1)}{3} + B \right) \right) F(\beta) \right] = 0 \quad (109)$$

şeklinde ifade edilir. İşlem kolaylığı için;

$$\frac{L(L+1)}{3} + B = \mathcal{X} \quad (110)$$

Denklem 110., Denklem 109.'da yerine yazdığımızda Denklem 111.'i elde ederiz.

$$\left[ \frac{\partial^2 F(\beta)}{\partial \beta^2} + \frac{2}{\beta} \frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} (\varepsilon \beta^2 + A\beta - \mathcal{X}) F(\beta) \right] = 0 \quad (111)$$

$\beta = s$  dönüşümü yapılırsa,

$$\left[ \frac{\partial^2 F(s)}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial F(s)}{\partial s} + \frac{1}{s^2} (\varepsilon s^2 + As - \mathcal{X}) F(s) \right] = 0 \quad (112)$$

Nikiforov-Uvarov metoduna göre;

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \phi = 0 \quad (113)$$

Denklem 112. ile Denklem 113.'ü karşılaştırdığımızda aşağıdaki değerleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 & \xi_1 &= -\varepsilon \\ \alpha_2 &= 0 & \xi_2 &= A \\ \alpha_3 &= 0 & \xi_3 &= \mathcal{X} \end{aligned} \quad (114)$$

Enerji özdeğer denklemi;

$$\begin{aligned} \alpha_2 n - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 \\ + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0 \end{aligned} \quad (115)$$

Dalga fonksiyonu,

$$\psi = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13}s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s) \quad (116)$$

şeklinde verilir.

Nikiforov-Uvarov metodunda verilen eşitlikler Denklem 117. ifadeler sayesinde bulunup denklemlerde yerine koyarak çözüme ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) & \alpha_9 &= \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6 \\
\alpha_5 &= \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3) & \alpha_{10} &= \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \\
\alpha_6 &= \alpha_5^2 + \xi_1 & \alpha_{11} &= \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \\
\alpha_7 &= 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2 & \alpha_{12} &= \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8} \\
\alpha_8 &= \alpha_4^2 + \xi_3 & \alpha_{13} &= \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})
\end{aligned} \tag{117}$$

İfadelerini kullanarak Denklem 118.'deki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= -\frac{1}{2} & \alpha_{10} &= 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}} \\
\alpha_5 &= 0 & \alpha_{11} &= 2\sqrt{-\varepsilon} \\
\alpha_6 &= -\varepsilon & \alpha_{12} &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}} \\
\alpha_7 &= -A & \alpha_{13} &= -\sqrt{-\varepsilon} \\
\alpha_8 &= \left(\frac{1}{4} + \mathcal{X}\right) & & \\
\alpha_9 &= -\varepsilon & & 
\end{aligned} \tag{118}$$

Denklem 114. ve Denklem 118.'de bulunan değerler Denklem 115.'te yazılırsa;

$$(2n + 1)(\sqrt{-\varepsilon}) + 2\sqrt{(-\varepsilon)\left(\frac{1}{4} + \mathcal{X}\right)} = A \tag{119}$$

Eşitliğin her iki tarafının karesi alındığında;

$$-\varepsilon \left[ (2n + 1)^2 + 4\left(\frac{1}{4} + \mathcal{X}\right) + 4(2n + 1)\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \mathcal{X}\right)} \right] = A^2 \tag{120}$$

ifadesi elde edilir. İndirgenmiş enerji değeri,

$$\varepsilon = \frac{-A^2}{\left[ (2n+1) + 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \mathcal{X}\right)} \right]^2} \quad (121)$$

$\left(\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E\right)$  ve Denklem 110., Denklem 121.'de yerine yazıldığında X(3)-K modeli için enerji özdeğeri;

$$E = \frac{-A^2 \hbar^2}{2B \left[ (2n+1) + 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{L(L+1)}{3} + \mathcal{B}\right)} \right]^2} \quad (122)$$

elde edilir. Denklem 118.'de bulunan değerler Denklem 116.'da yerine yazılırsa;

$$\psi = s^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}}} e^{-s\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}}} (2s\sqrt{-\varepsilon}) \quad (123)$$

Daha sonra  $s = \beta$  dönüşümü yapılır.

$$\psi = \beta^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}}} e^{-\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}}} (2\beta\sqrt{-\varepsilon}) \quad (124)$$

Normalizasyon denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$[C_N]^2 \int_0^\infty F_{SL}^2(\beta) \beta^2 d\beta = 1 \quad (125)$$

$$[C_N]^2 \int_0^\infty \beta^{-1+2\sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}}} e^{-2\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}}} (2\beta\sqrt{-\varepsilon}) L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}}} (2\beta\sqrt{-\varepsilon}) \beta^2 = 1 \quad (126)$$

$2\beta\sqrt{-\varepsilon} = s$  dönüşümü yapılırsa;  $\beta = \frac{s}{2\sqrt{-\varepsilon}}$  ve  $d\beta = \frac{ds}{2\sqrt{-\varepsilon}}$  olur.  $2\sqrt{\frac{1}{4} + \mathcal{X}} = \mathcal{Y}$  olsun

$$[C_N]^2 \int_0^{\infty} \left( \frac{s}{2\sqrt{-\varepsilon}} \right)^{-1+\mathbb{Y}} e^{-s} L_n^{\mathbb{Y}}(s) L_n^{\mathbb{Y}}(s) \left( \frac{s}{2\sqrt{-\varepsilon}} \right)^2 \frac{ds}{2\sqrt{-\varepsilon}} = 1 \quad (127)$$

$$[C_N]^2 \left( \frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}} \right)^{2+\mathbb{Y}} \int_0^{\infty} s^{1+\mathbb{Y}} e^{-s} L_n^{\mathbb{Y}}(s) L_n^{\mathbb{Y}}(s) ds = 1 \quad (128)$$

Laguerre polinomu (Arfken,1985);

$$\int_0^{\infty} x^{1+k} e^{-x} L_n^k(x) L_n^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} (2n+k+1) \quad (129)$$

dikkate alınarak Denklem 128. çözümü yapılır.

$$[C_N] = \left[ 2^{2+\mathbb{Y}} (-\varepsilon)^{\frac{2+\mathbb{Y}}{2}} \frac{n!}{(n+\mathbb{Y})!} \frac{1}{(2n+\mathbb{Y}+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (130)$$

ifade edilir.

X(3)-K modeli için dalga fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\psi_{(\beta)} = \left[ 2^{2+\mathbb{Y}} (-\varepsilon)^{\frac{2+\mathbb{Y}}{2}} \frac{n!}{(n+\mathbb{Y})!} \frac{1}{(2n+\mathbb{Y}+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \beta^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x}} e^{-\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4} + x}} (2\beta\sqrt{-\varepsilon}) \quad (131)$$

### 3.4 X(5) Modeli İçin Kratzer Potansiyeli Uygulanması

$U(5) \leftrightarrow SU(3)$  yani küresel ve eksensel deforme olmuş şekiller arasındaki faz geçiş bölgesinde yer alan X(5) kritik nokta dinamik simetrisini temsil etmektedir.

X(5) ve ilgili modellerde değişkenler yaklaşık olarak ayrılır. Özellikle,  $u(\beta) + u(\gamma)$  biçimindeki bir potansiyel kullanılır, burada  $\beta$  ve  $\gamma$  olağan kollektif değişkenlerdir (Bohr, 1952). X(5) modelinde (Iachello, 2001), sonsuz bir kare kuyu potansiyeli  $u(\beta)$  olarak kullanılırken,  $\gamma = 0^\circ$  merkezli bir harmonik osilatör potansiyeli  $u(\gamma)$  olarak kullanılır. X(5)-  $\beta^2$  modelinde,  $u(\beta)$  olarak bir harmonik osilatör potansiyeli,  $\beta^2/2$  olarak kullanılır. Değişkenlerine tam olarak ayrılabilen bir çözüm potansiyelin  $u(\beta) + u(\gamma)/\beta^2$  biçiminde kullanılmasıyla elde edilir (Wilets ve Jean, 1956; Fortunato ve ark, 2006).

$\gamma \simeq 0^\circ$  için Bohr Hamiltonyeninin yaklaşık bir çözümü Kratzer potansiyeli ile elde edildi. Bu çözüm X(5)-Kratzer olarak adlandırıldı.

Bohr hamiltonyeni,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{\kappa=1,2,3} \frac{Q_\kappa^2}{\sin^2 \left( \gamma - \frac{2}{3}\pi\kappa \right)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (132)$$

Burada  $\beta$  ve  $\gamma$  olağan kollektif koordinatlar,  $Q_\kappa$  ( $\kappa = 1,2,3$ ) ise açıl momentum bileşenleridir.

$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \varphi_\kappa^L(\beta, \gamma) \mathcal{D}_{M,K}^L(\theta_i)$  formuna sahip olan ilgili Schrödinger denkleminde;  $\theta_i$  ( $i = 1,2,3$ ) Euler açıları,  $\mathcal{D}$  Wigner fonksiyonları, L açıl momentumun özdeğerleri, M ve K ise açıl momentumun izdüşümlerinin özdeğerleridir.

Iachello (2001)'nin çalışmasında belirtildiği gibi potansiyelin  $\gamma = 0^\circ$  minimum olduğu durumda, Denklem 132.'nin açısal momentum terimi;

$$\sum_{\kappa=1,2,3} \frac{Q_\kappa^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\kappa\right)} \simeq \frac{4}{3}(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{4}{3}\right) \quad (133)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu sonucu, Denklem 132. Hamiltonyenine karşılık gelen Schrödinger denkleminde indirgenmiş enerjileri  $\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$  ve potansiyelleri  $u = \frac{2B}{\hbar^2} V$  şeklinde yazıldığında, Referans (Iachello, 2006; Wilets ve Jean, 1956)'de olduğu gibi,  $u(\beta) + u(\gamma)/\beta^2$  formunun iki terimiyle ayrılabilceğini varsayarak, Schrödinger denklemi radyal ve açısal olmak üzere iki denkleme ayrılabilir.

$$\left[ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{L(L+1)}{3\beta^2} + u(\beta) + \frac{\lambda}{\beta^2} \right] \xi_L(\beta) = \varepsilon \xi_L(\beta) \quad (134)$$

$$\left[ -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4} \left( \frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{4}{3} \right) + u(\gamma) \right] \eta_\kappa(\gamma) = \lambda \eta_\kappa(\gamma) \quad (135)$$

Denklem 135. çözümlendiğinde;

$$\lambda = L(L+1) - \frac{3}{4}\alpha^2 \quad (136)$$

elde edilir ve Denklem 134.'te yerine yazdığımızda;

$$\left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \varepsilon - \frac{4L(L+1)}{3\beta^2} - u(\beta) - \frac{3\alpha^2}{4\beta^2} \right] \xi(\beta) = 0 \quad (137)$$

elde edilir.



Kratzer potansiyeli;

$$u(\beta) = -\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} \quad (138)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem 138, Denklem 137’de yerine yazıldığında Denklem 139. elde edilir.

$$\left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \varepsilon - \frac{4L(L+1)}{3\beta^2} + \frac{A}{\beta} - \frac{B}{\beta^2} - \frac{3\alpha^2}{4\beta^2} \right] \xi(\beta) = 0 \quad (139)$$

Nikiforov-Uvarov metoduna göre;

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \phi = 0 \quad (140)$$

formunda yazıp  $\beta = s$  dönüşümü yapılırsa,

$$\left[ \frac{\partial^2 \xi(s)}{\partial s^2} + \frac{4}{s} \frac{\partial \xi(s)}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \left( \varepsilon s^2 + As - \frac{4L(L+1)}{3} - \frac{3\alpha^2}{4\beta^2} - B \right) \xi(s) \right] = 0 \quad (141)$$

$$\frac{4L(L+1)}{3} + \frac{3\alpha^2}{4} + B = \varsigma \quad (142)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \xi(s)}{\partial s^2} + \frac{4}{s} \frac{\partial \xi(s)}{\partial s} + \frac{1}{s^2} (\varepsilon s^2 + As - \varsigma) \xi(s) \right] = 0 \quad (143)$$

Denklem 143. ile Denklem 140.’ı karşılaştırdığımızda Denklem 144.’teki değerleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 4 & \xi_1 &= -\varepsilon \\ \alpha_2 &= 0 & \xi_2 &= A \\ \alpha_3 &= 0 & \xi_3 &= \varsigma \end{aligned} \quad (144)$$

Enerji özdeğer denklemi;

$$\begin{aligned} \alpha_2 n - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 \\ + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0 \end{aligned} \quad (145)$$

Dalga fonksiyonu ise;

$$\psi = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13}s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s) \quad (146)$$

şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) & \alpha_9 &= \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6 \\ \alpha_5 &= \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3) & \alpha_{10} &= \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \\ \alpha_6 &= \alpha_5^2 + \xi_1 & \alpha_{11} &= \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \\ \alpha_7 &= 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2 & \alpha_{12} &= \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8} \\ \alpha_8 &= \alpha_4^2 + \xi_3 & \alpha_{13} &= \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \end{aligned} \quad (147)$$

İfadelerini kullanarak da Denklem 148'deki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= -\frac{3}{2} & \alpha_{10} &= 1 + 2\sqrt{\frac{9}{4} + \varsigma} \\ \alpha_5 &= 0 & \alpha_{11} &= 2\sqrt{-\varepsilon} \\ \alpha_6 &= -\varepsilon & \alpha_{12} &= -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \varsigma} \\ \alpha_7 &= -A & \alpha_{13} &= -\sqrt{-\varepsilon} \\ \alpha_8 &= \left(\frac{9}{4} + \varsigma\right) & & \\ \alpha_9 &= -\varepsilon & & \end{aligned} \quad (148)$$

Denklem 144. ve Denklem 148.'de bulunan değerler Denklem 145.'te yerine yazıldığında Denklem 149. elde edilir.

$$(2n + 1)(\sqrt{-\varepsilon}) + 2 \sqrt{(-\varepsilon)\left(\frac{9}{4} + \varsigma\right)} = A \quad (149)$$

Eşitliğin her iki tarafının karesi alındığımızda;

$$-\varepsilon \left[ (2n + 1)^2 + 4 \left(\frac{9}{4} + \varsigma\right) + 4(2n + 1) \sqrt{\left(\frac{9}{4} + \varsigma\right)} \right] = A^2 \quad (150)$$

ifadesi elde edilir. İndirgenmiş enerji değeri,

$$\varepsilon = \frac{-A^2}{\left[ (2n + 1) + 2 \sqrt{\left(\frac{9}{4} + \varsigma\right)} \right]^2} \quad (151)$$

$\left(\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E\right)$ , Denklem 151.'de yerine yazıldığında X(5)-K modeli için enerji özdeğeri;

$$E = \frac{-A^2 \hbar^2}{2B \left[ (2n + 1) + 2 \sqrt{\left(\frac{9}{4} + \varsigma\right)} \right]^2} \quad (152)$$

elde edilir.

Denklem 148.'de bulunan değerler Denklem 146.'da yerine yazılırsa;

$$\psi = s^{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \varsigma}} e^{-s\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{\frac{9}{4} + \varsigma}} (2s\sqrt{-\varepsilon}) \quad (153)$$

$s = \beta$  dönüşümü yapılır.

$$\psi = \beta^{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \varsigma}} e^{-\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{\frac{9}{4} + \varsigma}} (2\beta\sqrt{-\varepsilon}) \quad (154)$$

Normalizasyon denklemi;

$$\xi_{s,L}(\beta) = C_{s,L}\beta^{-3/2}J_\nu(k_{s,L}\beta) \quad (155)$$

$$\int_0^\infty \beta^4 \xi_{s,L}^2(\beta) d\beta = 1 \quad (156)$$

$$[C_{s,L}]^2 \int_0^\infty \beta^{-3+2\sqrt{\frac{9}{4}+\zeta}} e^{-2\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{\frac{9}{4}+\zeta}}(2\beta\sqrt{-\varepsilon}) L_n^{2\sqrt{\frac{9}{4}+\zeta}}(2\beta\sqrt{-\varepsilon}) \beta^4 = 1 \quad (157)$$

$2\beta\sqrt{-\varepsilon} = s$  dönüşümü yapılırsa;  $\beta = \frac{s}{2\sqrt{-\varepsilon}}$  ve  $d\beta = \frac{ds}{2\sqrt{-\varepsilon}}$  olur.  $2\sqrt{\frac{9}{4}+\zeta} = \epsilon$  olsun.

Denklem 157.'yi düzenlediğimizde;

$$[C_{s,L}]^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}}\right)^{2+\epsilon} \int_0^\infty s^{1+\epsilon} e^{-s} L_n^\epsilon(s) L_n^\epsilon(s) ds = 1 \quad (158)$$

şeklinde yazılır.

Laguerre polinomu (Arfken,1985);

$$\int_0^\infty x^{1+k} e^{-x} L_n^k(x) L_n^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} (2n+k+1) \quad (159)$$

$$[C_{s,L}]^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}}\right)^{2+\epsilon} \frac{(n+\epsilon)!}{n!} (2n+\epsilon+1) = 1 \quad (160)$$

$$[C_{s,L}] = \left[ 2^{2+\epsilon} (-\varepsilon)^{\frac{2+\epsilon}{2}} \frac{n!}{(n+\epsilon)!} \frac{1}{(2n+\epsilon+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (161)$$

Gerekli düzenlemeleri yaptığımızda X(5)-K modeli için dalga fonksiyonu elde edilir.

$$\psi_{(\beta)} = \left[ 2^{2+\epsilon} (-\epsilon)^{\frac{2+\epsilon}{2}} \frac{n!}{(n+\epsilon)! (2n+\epsilon+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \beta^{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \epsilon}} e^{-\beta\sqrt{-\epsilon}} L_n^{2\sqrt{\frac{9}{4} + \epsilon}} (2\beta\sqrt{-\epsilon}) \quad (162)$$



## 4. BULGULAR

### 4.1 X(3) - K Modeli Tahminleri

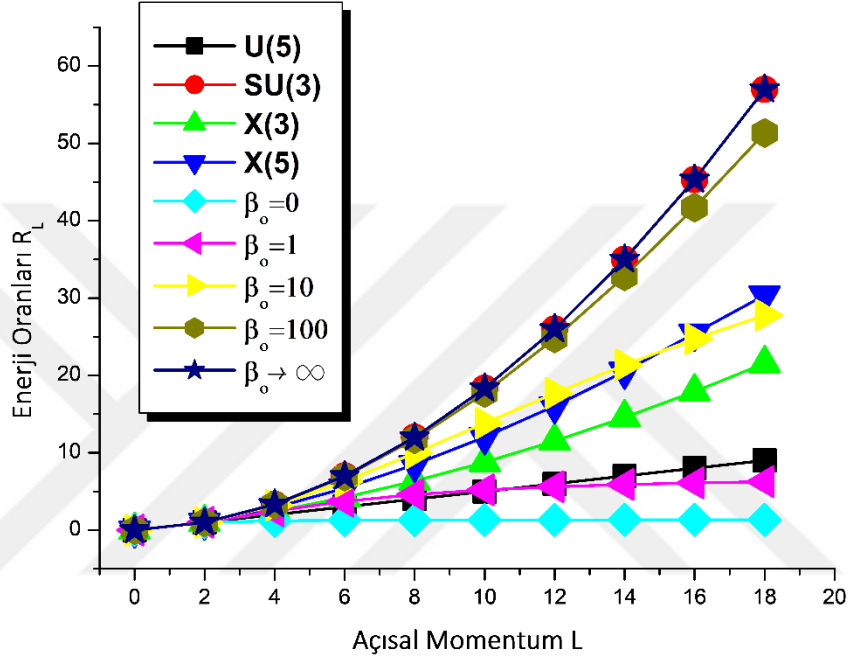
X(3)-K modeli için en düşük enerjili bandlar, Tablo 4.1'deki  $\beta_0$  parametresinin çeşitli değerleri görülmektedir.

Tablo 4.1. X(3) modeli, X(5) modeli ve SU(3) (eksensel deforme) modeli ile farklı  $\beta_0$  değerleri için X(3)-K modelinin  $L_{s,n}$  enerji oranlarının karşılaştırması

gsb	$\beta_0$ $L_{s,n}$	0	1	10	100	$\infty$	X(3)	X(5)	SU(3)
	$0_{1,0}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	$2_{1,0}$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$4_{1,0}$	1.20	2.48	3.19	3.32	3.33	2.44	2.91	3.33
	$6_{1,0}$	1.26	3.72	6.29	6.92	7.00	4.23	5.45	7.00
	$8_{1,0}$	1.29	4.60	9.94	11.75	12.00	6.35	8.51	12.00
	$10_{1,0}$	1.30	5.20	13.82	17.73	18.33	8.78	12.07	18.33
	$12_{1,0}$	1.31	5.61	17.68	24.78	26.00	11.52	16.04	26.00
	$14_{1,0}$	1.32	5.90	21.34	32.81	35.00	14.57	20.51	35.00
	$16_{1,0}$	1.32	6.10	24.72	41.70	45.33	17.91	25.44	45.33
	$18_{1,0}$	1.32	6.26	27.77	51.34	56.99	21.56	30.38	57.00
$\beta_1$	$\beta_0$ $L_{s,n}$	0	1	10	100	$\infty$	X(3)	X(5)	
	$0_{2,1}$	1.00	2.65	8.91	30.27		2.87	5.67	
	$2_{2,1}$	1.19	3.15	9.68	31.19		4.83	7.48	
	$4_{2,1}$	1.26	3.93	11.35	33.30		7.37	10.72	
	$6_{2,1}$	1.29	4.65	13.74	36.59		10.29	14.80	
	$8_{2,1}$	1.30	5.20	16.58	41.00		13.57	19.44	
	$10_{2,1}$	1.31	5.59	19.62	46.46		17.18	26.69	
$\beta_2$	$\beta_0$ $L_{s,n}$	0	1	10	100	$\infty$	X(3)	X(5)	
	$0_{3,2}$	1.19	4.03	15.78	57.93		7.65	14.17	
	$2_{3,2}$	1.25	4.31	16.37	58.76		10.56	16.78	
	$4_{3,2}$	1.28	4.78	17.68	60.70		14.19	21.34	
	$6_{3,2}$	1.30	5.23	19.56	63.70		18.22	26.83	
	$8_{3,2}$	1.31	5.59	21.81	67.74		22.62	33.10	

Temel seviye bandı (gsb) ( $n=0, s=1$ ),  $\beta_1$  bandı ( $n = 1, s = 2$ ) ve  $\beta_2$  bandı ise ( $n = 2, s = 3$ ) karakterize edilir (Bonatson ve ark., 2005). X(3), X(5) ve X(3)-K spektrumları  $n=s-1$  ile ifade edilir. Tüm bandların enerji seviyeleri, en düşük  $2_{1,0}$  seviyesi olan enerjiye

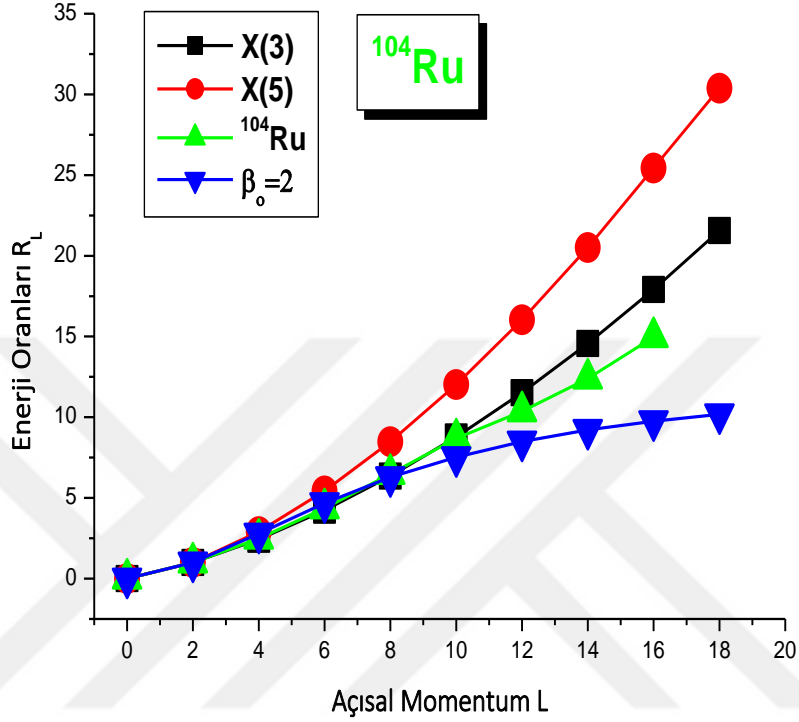
normalize edilir. Temel seviye bandı enerjileri ise farklı modeller için Şekil 4.1'de gösterilmektedir. Tablo 4.1 ve Şekil 4.1'den de görüldüğü üzere X(3)-K modeli için  $\beta_0 = 0$  veri değerleri serbest parçacığa karşılık gelirken,  $\beta_0 \rightarrow \infty$  ise eksensel deforme yani SU(3) modeli ile uyumlu olduğu gözlenmektedir.



Şekil 4.1.  $R_L$  enerji oranları ve  $L$  açısal momentum, farklı  $\beta_0$  değerleriyle gösterilmiştir. U(5), SU(3), X(5) ve X(3) tahminleri ile karşılaştırılmıştır. Tüm enerji seviyeleri en düşük enerjili uyarılmış duruma  $2_{1,0}$  normalize edilmiştir

Farklı  $\beta_0$  değerleri için elde edilen X(3)-K modelinin temel seviye bandı enerji tahminleri  $^{104}\text{Ru}$ ,  $^{112}\text{Cd}$ ,  $^{120}\text{Xe}$ ,  $^{122}\text{Xe}$ ,  $^{126}\text{Xe}$ ,  $^{142}\text{Sm}$ ,  $^{148}\text{Nd}$ ,  $^{156}\text{Gd}$  ve  $^{172}\text{Os}$  çekirdeklerinin deneysel verileriyle karşılaştırılmıştır. X(3) ve X(5) model tahminleri de karşılaştırma için gösterilmiştir.

X(3)-K modelin  $\beta_0 = 2$  değeri için temel seviye bandı (gsb) tahmini  $^{104}\text{Ru}$  çekirdeğinin deneysel verisi, X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.2’de verilmektedir.

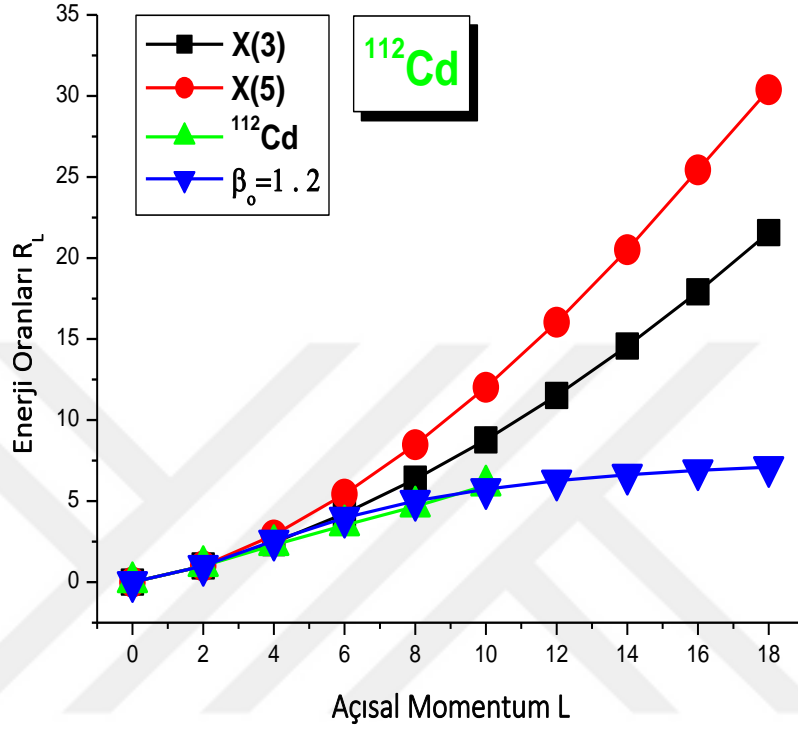


Şekil 4.2. X(3)-K modeli ( $\beta_0 = 2$  değeri için),  $^{104}\text{Ru}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyeleri ile karşılaştırılması

Şekil 4.2’de görüldüğü üzere,  $\beta_0 = 2$  değeri için X(3)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{104}\text{Ru}$  çekirdeği deneysel verileri ile  $L=8$  açısal momentumuna kadar uyumluyken üst spinlerde ise sapma olduğu gözlenmektedir. Çekirdeğe ait gsb verileri literatürde  $L=16$  açısal momentumuna kadar mevcuttur.



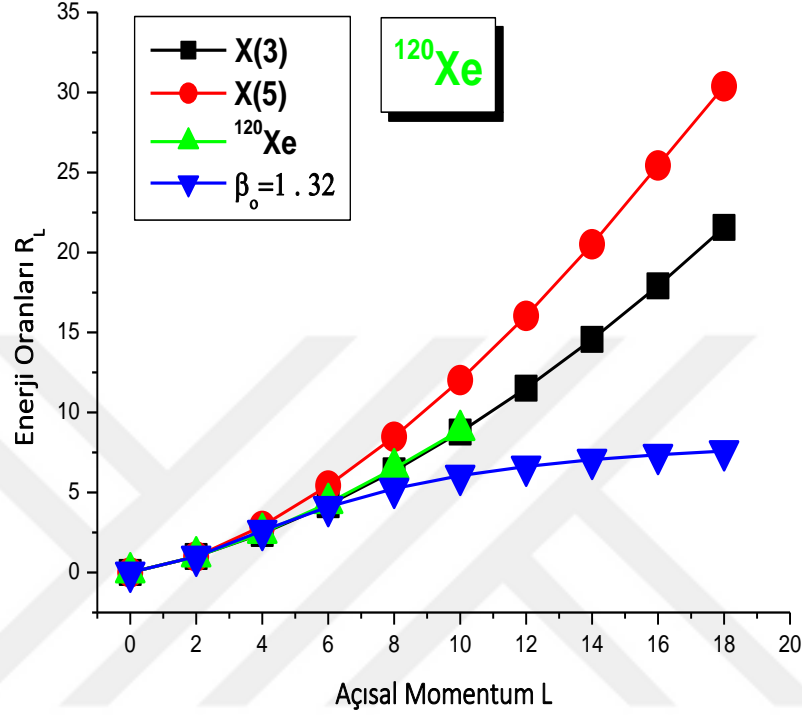
X(3)-K modelin  $\beta_0 = 1.2$  değeri için gsb tahmini  $^{112}\text{Cd}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.3'te verilmektedir.



Şekil 4.3.  $\beta_0 = 1.2$  değeri için X(3)-K modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri,  $^{112}\text{Cd}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

$\beta_0 = 1.2$  değeri için X(3)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{112}\text{Cd}$  çekirdeğinin deneysel verilerinin  $L=10$  açısal momentumuna kadar X(3)-K modeliyle örtüşmektedir. Çekirdeğe ait  $L>10$  açısal momentumları için deneysel veri literatürde bulunmamaktadır.

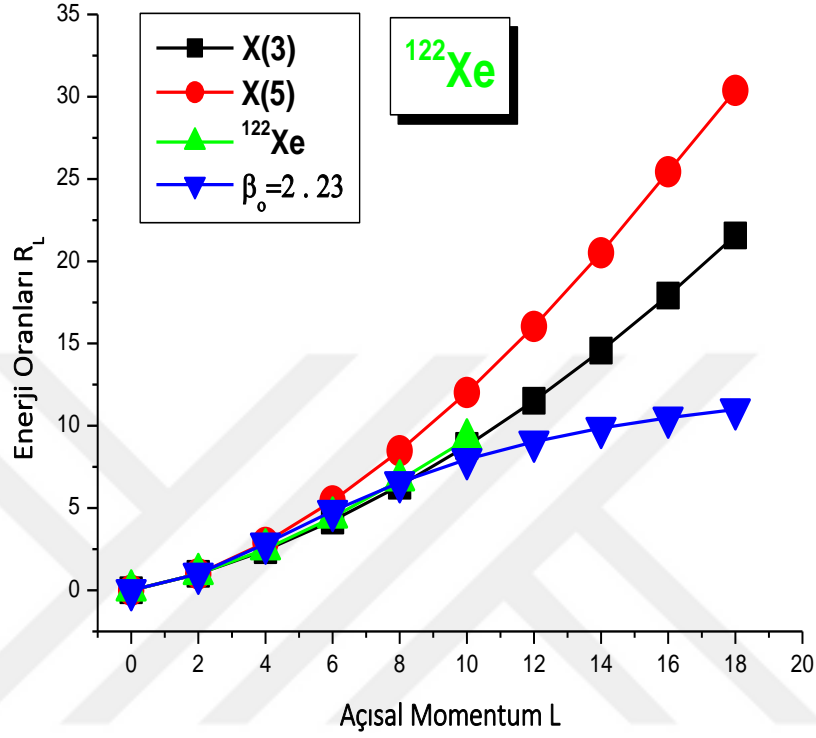
X(3)-K modelin  $\beta_0 = 1.32$  değeri için gsb tahmini  $^{120}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.4'te verilmektedir.



Şekil 4.4.  $\beta_0 = 1.32$  değeri için X(3)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{120}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

Yukarıdaki şekil incelendiğinde;  $\beta_0 = 1.32$  değeri için X(3)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{120}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verilerininin L=6 açısal momentumuna kadar uyumlu olduğu ancak X(3) modeliyle ise birebir örtüştüğü görülmüştür. Bu nedenle;  $^{120}\text{Xe}$  izotopu X(3) model çekirdeği olarak isimlendirilebilir. Üst spinlere ait çekirdeğin deneysel verilerine literatürde rastlanılmamıştır.

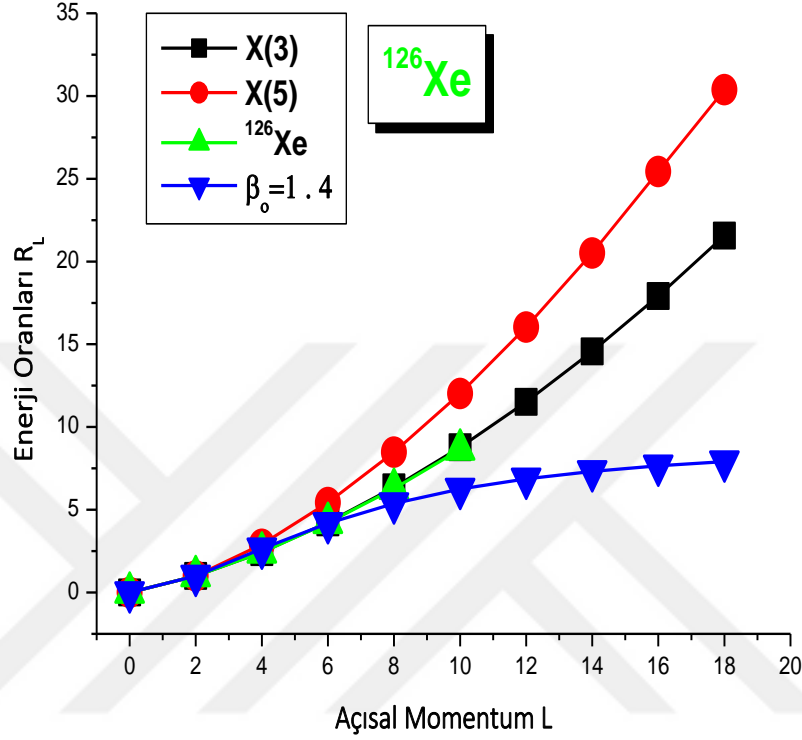
X(3)-K modelin  $\beta_0 = 2.23$  değeri için gsb tahmini  $^{122}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.5'te verilmektedir.



Şekil 4.5. X(3)-K ( $\beta_0 = 2.23$ ) modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri,  $^{122}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

$\beta_0 = 2.23$  değeri için X(3)-K modelinin gsb enerji seviyeleri  $^{122}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri L=8'e kadar uyumlu olduğu üst spinlerde ise sapma olduğu Şekil 4.5'te görülür.  $^{122}\text{Xe}$  çekirdeği X(3) modeli ile daha uyumludur.

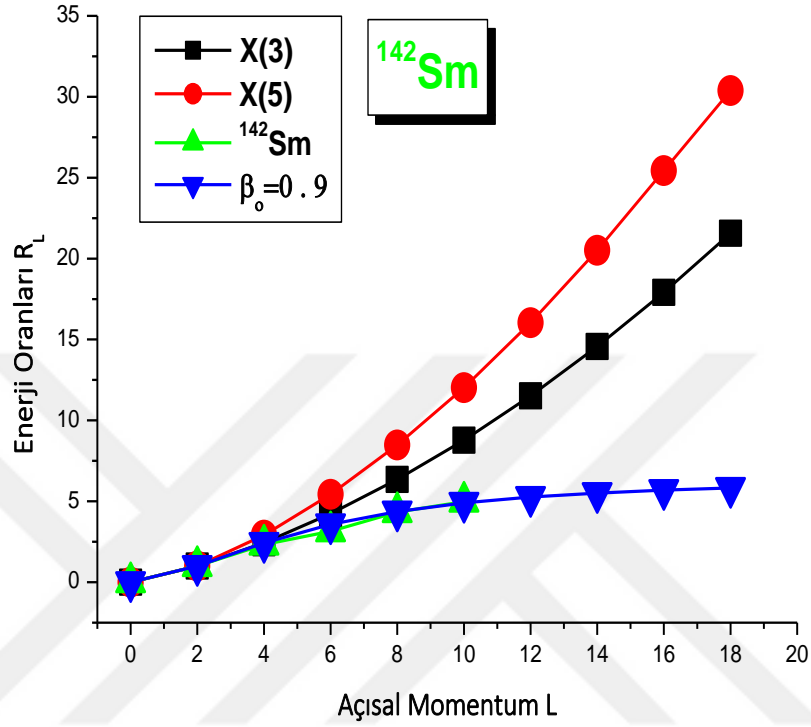
X(3)-K modelin  $\beta_0 = 1.4$  değeri için gsb tahmini  $^{126}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.6’da verilmektedir.



Şekil 4.6.  $\beta_0 = 1.4$  değeri için X(3)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{126}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

Şekil 4.6’da;  $\beta_0 = 1.4$  değeri için X(3)-K modelinin gsb enerji seviyeleri  $^{126}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri L=6’ya kadar uyumlu olduğu ondan sonra sapma olduğu görülmüştür.  $^{126}\text{Xe}$  çekirdeği X(3) modeli ile daha uyumludur.

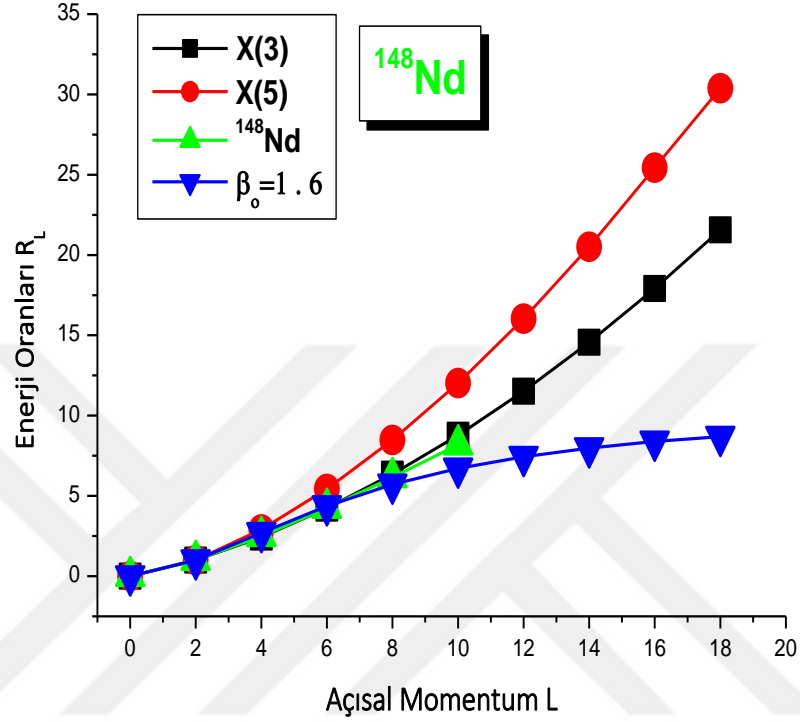
X(3)-K modelin  $\beta_0 = 0.9$  değeri için gsb tahmini çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.7’de verilmektedir.



Şekil 4.7.  $\beta_0 = 0.9$  değeri için X(3)-K modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri <sup>142</sup>Sm çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

$\beta_0 = 0.9$  değeri için X(3)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri <sup>142</sup>Sm çekirdeğinin deneysel verileri L=10 spinine kadar örtüşmekte olup üst spinler için literatürde deneysel veri bulunmamaktadır (Şekil 4.7).

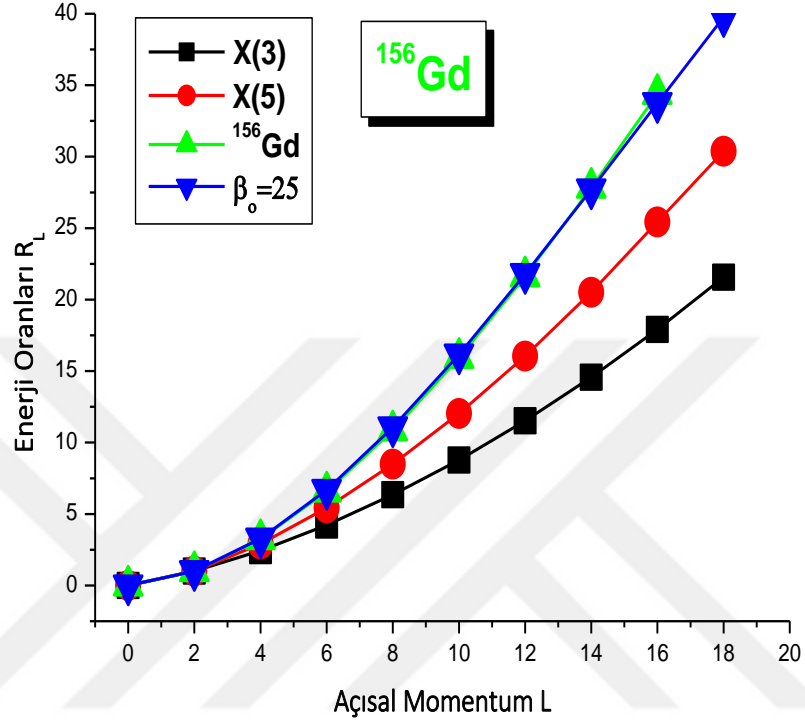
X(3)-K modelin  $\beta_0 = 1.6$  değeri için gsb tahmini  $^{148}\text{Nd}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.8’de karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.8. X(3)-K ( $\beta_0 = 1.6$ ) modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{148}\text{Nd}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

$\beta_0 = 1.6$  değeri için X(3)-K modelinin gsb enerji seviyeleri  $^{148}\text{Nd}$  çekirdeğinin deneysel verileri  $L=8$ 'e kadar uyumlu olduğu görölmektedir. Üst spin seviyelerine çıkıldığında sapma olduğu görölmektedir. Çekirdek X(3) modeli ile daha uyumludur.  $L=10$ 'dan sonraki spinler için literatürde deneysel veri bulunmamaktadır.

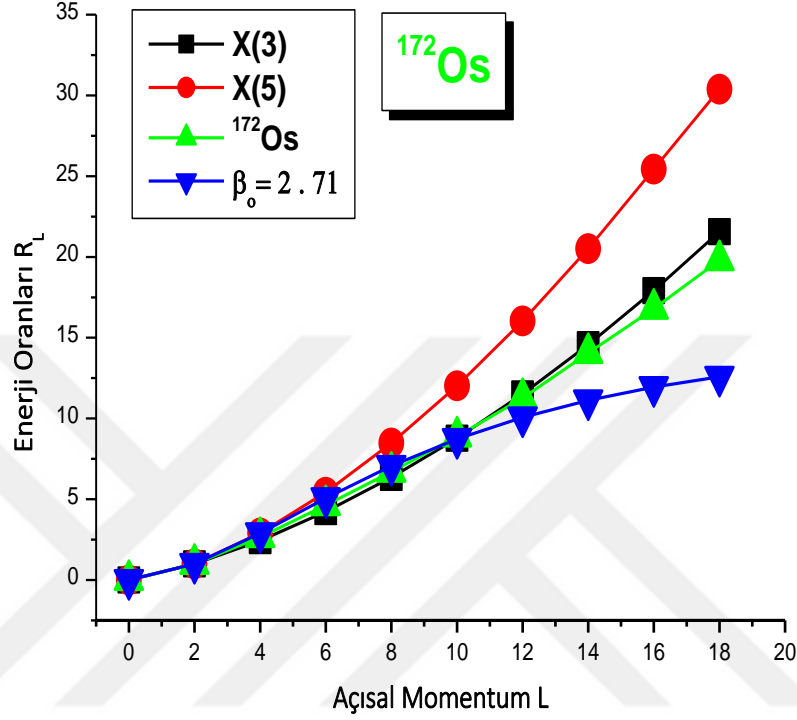
X(3)-K modelin  $\beta_0 = 25$  değeri için gsb tahmini  $^{156}\text{Gd}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.9’da verilmektedir.



Şekil 4.9.  $\beta_0 = 25$  değeri için X(3)-K modeli temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{156}\text{Gd}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

Şekil 4.9. incelendiğinde  $\beta_0 = 25$  değeri için X(3)-K modelinin temel seviye bandına ait enerji seviyeleri ile  $^{156}\text{Gd}$  çekirdeğinin deneysel verileri L=16 açılal momentumuna kadar birebir örtüştüğü görülür. L=16 açılal momentumdan sonra çekirdeğe ait literatürde deneysel verisi yoktur.

X(3)-K modelin  $\beta_0 = 2.71$  değeri için gsb tahmini  $^{172}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.10'da verilmektedir.

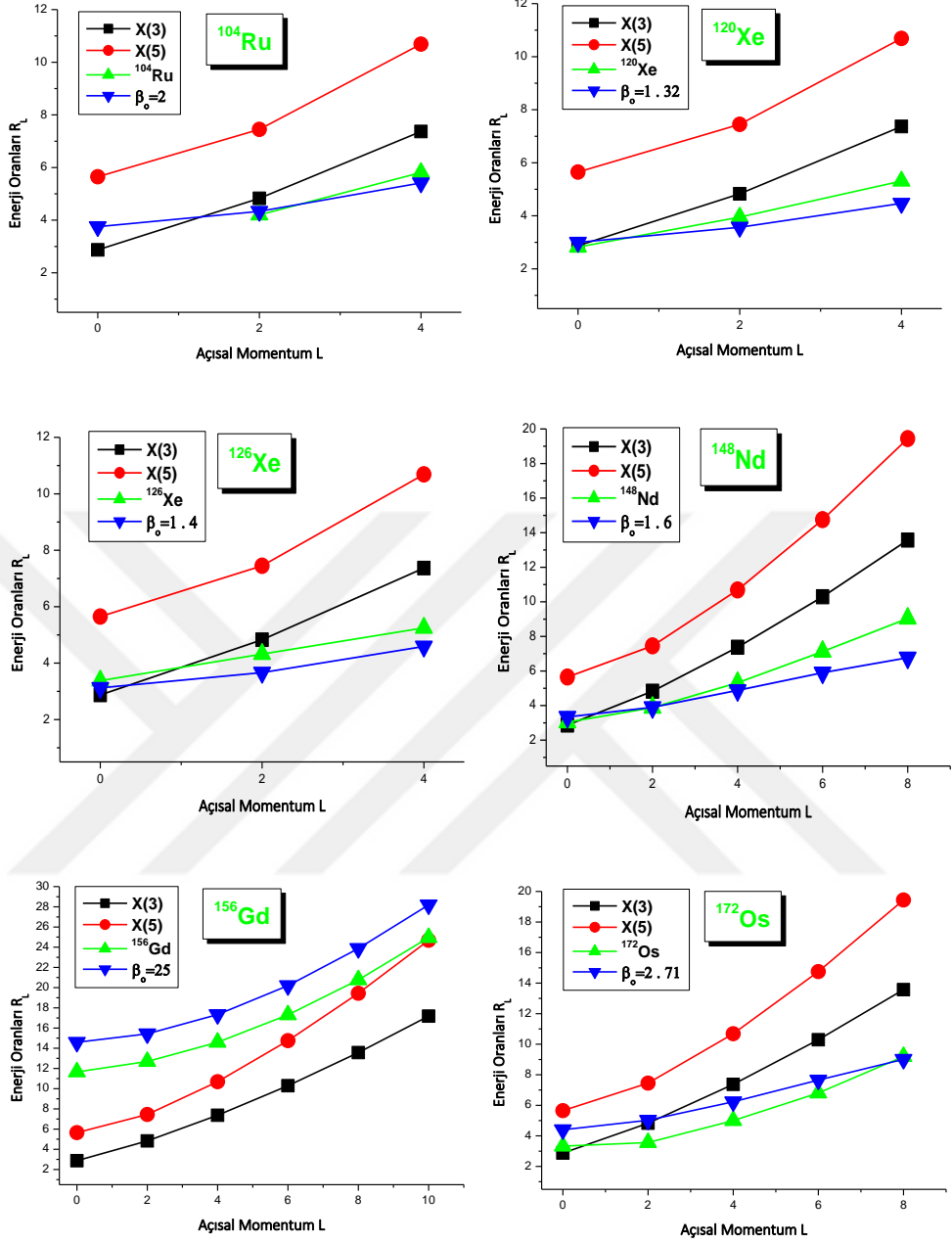


Şekil 4.10. X(3)-K  $\beta_0 = 2.71$  modeli temel seviye bandın enerji seviyelerinin  $^{172}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

Şekil 4.10 incelendiğinde;  $^{172}\text{Os}$  çekirdeğine ait deneysel verilerinin  $L=10$  açısal momentum seviyesine kadar  $\beta_0 = 2.71$  değeri için X(3)-K modeli ile uyumludur.  $L=14$  açısal momentum seviyesine kadar ise X(3) modeliyle daha uyumlu olduğu görülür.

Farklı  $\beta_0$  değerleri için elde edilen  $\beta_1$  bandı enerjileri,  $^{104}\text{Ru}$ ,  $^{120}\text{Xe}$ ,  $^{126}\text{Xe}$ ,  $^{148}\text{Nd}$ ,  $^{156}\text{Gd}$  ve  $^{172}\text{Os}$  çekirdeklerinin mevcut deneysel verileri ile karşılaştırılmıştır. X(3) ve X(5) model tahminleri de karşılaştırma amacıyla yer almaktadır (Şekil 4.11).





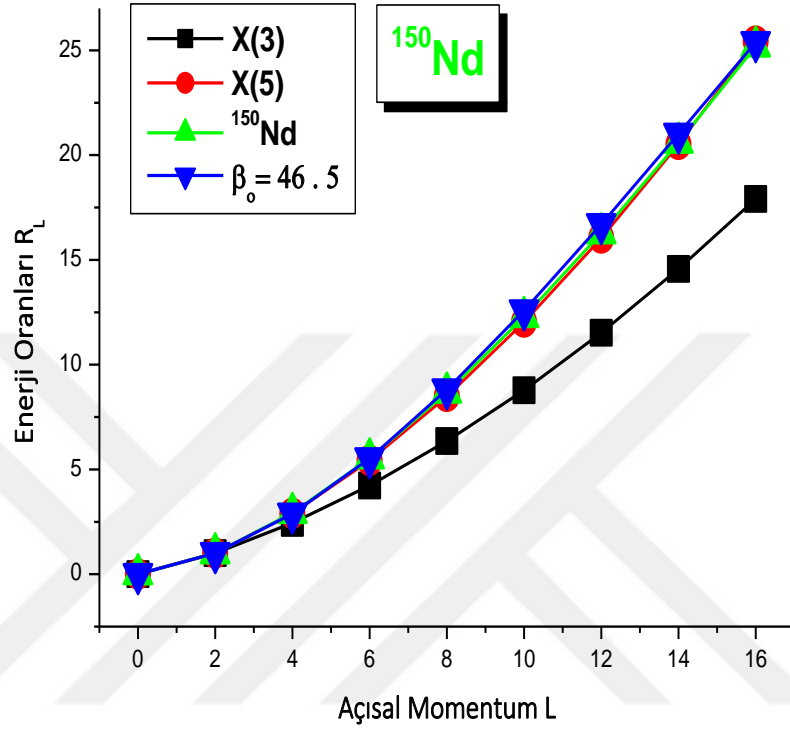
Şekil 4.11. Farklı  $\beta_0$  değerleri için elde edilen  $\beta_1$  band enerjilerin, çekirdeklere ait mevcut deneysel verileri ile karşılaştırılması

## 4.2 X(5) - K Modeli Tahminleri

Temel seviye bandı ( $s = 1, n_{\omega} = 0 (n = 0)$ ),  $\beta_1$  bandı ( $s = 2, n_{\omega} = 0, (n = 1)$ ) ve  $\gamma$  bandı ise tek L seviyeleri için ( $s = 1, n_{\omega} = 1, (n = 0)$ ), çift L seviyeleri için ( $s = 1, n_{\omega} = 2, (n = 0)$ ) ile karakterize edilir (Bonatsos ve ark., 2007). X(3), X(5) ve X(5)-K spektrumları  $n=s-1$  ve  $n_{\omega} = L - \alpha$  ile ifade edilir. Tüm bandların enerji seviyeleri, en düşük  $Z_{1,0}$  seviyesi olan enerjiye normalize edilir.

Farklı  $\beta_0$  değerleri için elde edilen X(5)-K modelinin temel seviye bandı enerji tahminleri  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{176}\text{Os}$  ve  $^{178}\text{Os}$  çekirdeklerinin deneysel verileriyle karşılaştırılmıştır. X(5) ve X(3) model tahminleri ise karşılaştırma amacıyla şekillerde gösterilmiştir.

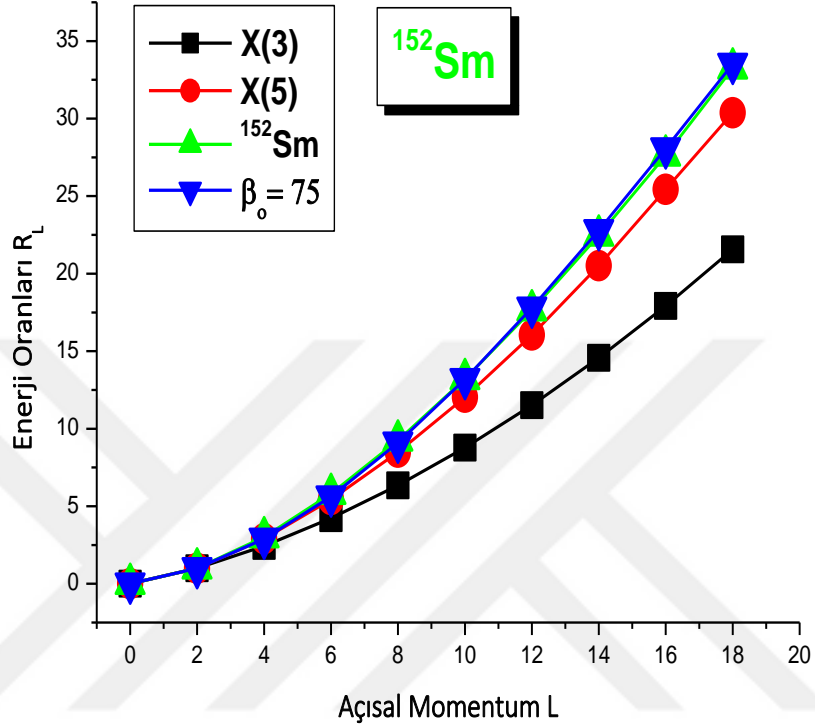
X(5)-K modelin  $\beta_0 = 46.5$  değeri için temel seviye bandı (gsb) tahmini  $^{150}\text{Nd}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.12’de verilmektedir.



Şekil 4.12. X(5)-K ( $\beta_0 = 46.5$ ) modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{150}\text{Nd}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

Şekil 4.12’de;  $^{150}\text{Nd}$  çekirdeğinin temel seviye bandı enerjileri, hem X(5) modeli hem de X(5)-K modeli ( $\beta_0 = 46.5$  değeri için) tahminleri ile  $L=16$  spinine kadar örtüşmektedir.

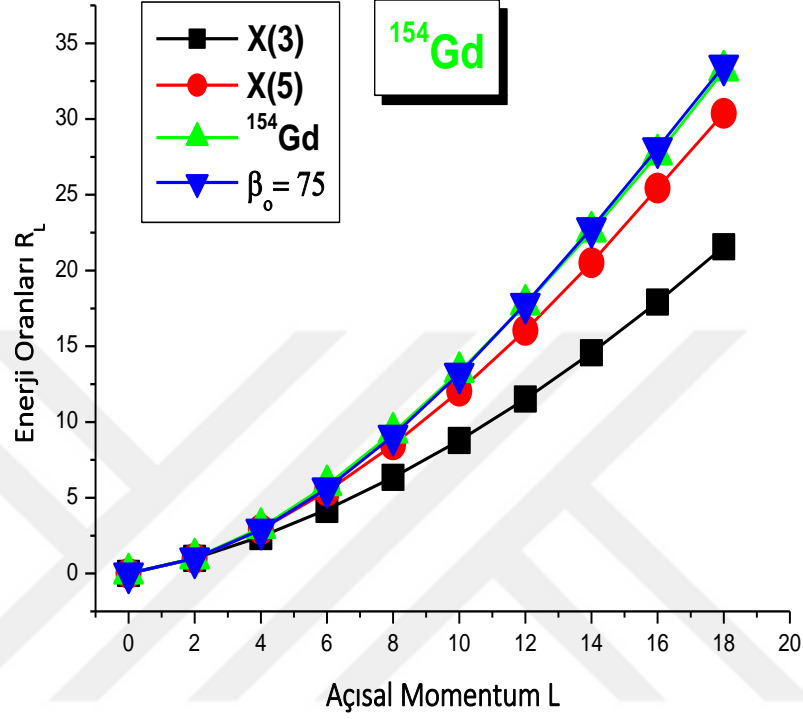
X(5)-K modelin  $\beta_0 = 75$  değeri için gsb tahmini  $^{152}\text{Sm}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.13’de verilmektedir.



Şekil 4.13.  $\beta_0 = 75$  değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{152}\text{Sm}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

$\beta_0 = 75$  değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{152}\text{Sm}$  çekirdeğinin deneysel verileri L=18'e kadar birebir örtüştüğü ayrıca X(5) modeli ile de L=8'e kadar uyumlu olduğu gözlenmektedir.

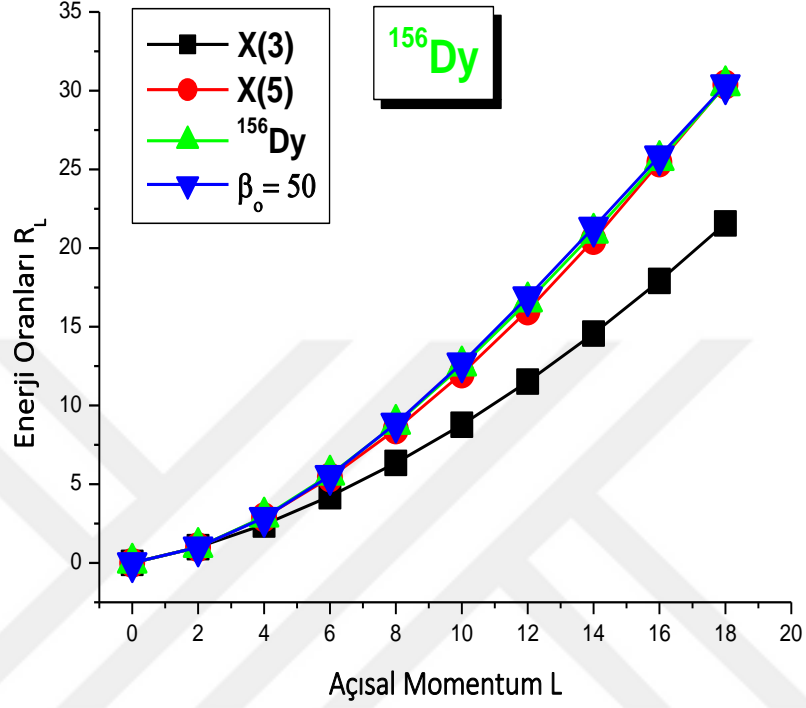
X(5)-K modelin  $\beta_0 = 75$  değeri için gsb tahmini  $^{154}\text{Gd}$  çekirdeğinin deneysel verisi, X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.14’de verilmektedir.



Şekil 4.14. X(5)-K ( $\beta_0 = 75$ ) modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{154}\text{Gd}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

Şekil 4.14’te görüldüğü üzere;  $\beta_0 = 75$  değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{154}\text{Gd}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile  $L=18$ ’e kadar örtüşmektedir.

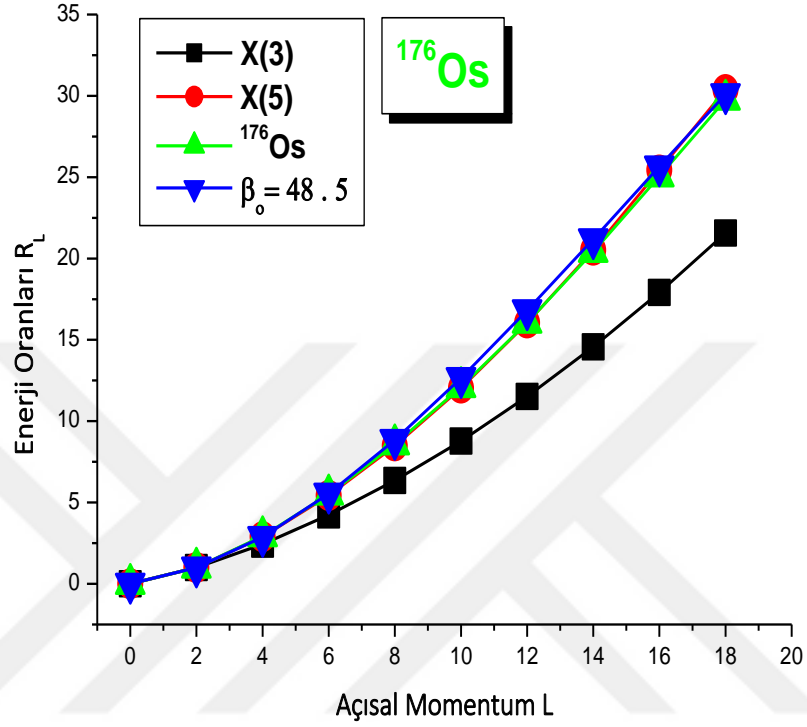
X(5)-K modelin  $\beta_0 = 50$  değeri için gsb tahmini  $^{156}\text{Dy}$  çekirdeğinin deneysel verisi, X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.15’de verilmektedir.



Şekil 4.15.  $\beta_0 = 50$  değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{156}\text{Dy}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

$^{156}\text{Dy}$  çekirdeğinin deneysel verileri, hem X(5) modeli ile hem de X(5)-K modeli ( $\beta_0 = 50$  değeri için) temel seviye bandının enerji seviyeleri  $L=18$  spinine kadar örtüştüğü Şekil 4.15’de görülmektedir.

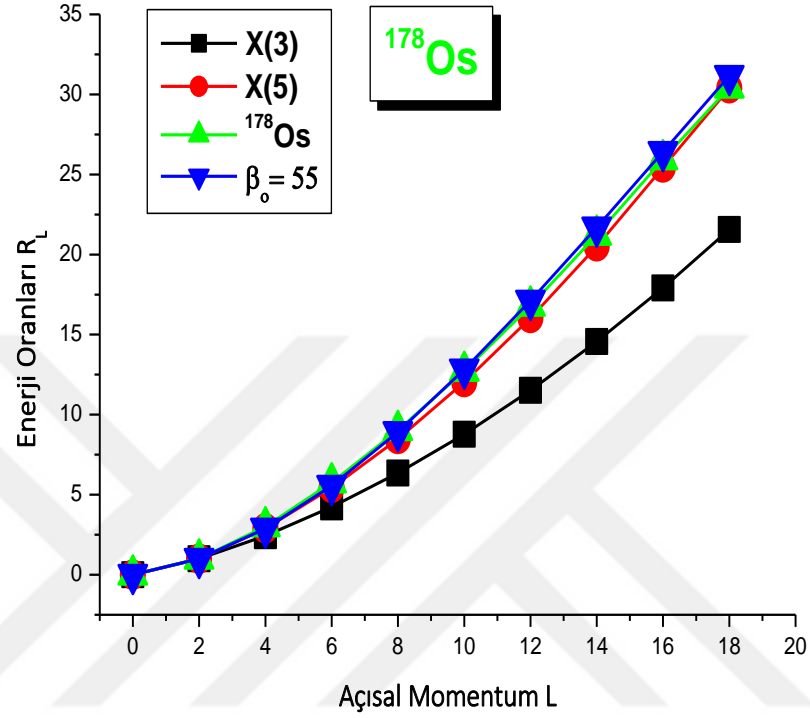
X(5)-K modelin  $\beta_0 = 48.5$  değeri için gsb tahmini  $^{176}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.16’da verilmektedir.



Şekil 4.16.  $\beta_0 = 48.5$  değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{176}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verileri, X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

Şekil 4.16’da görüldüğü üzere;  $\beta_0 = 48.5$  değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{176}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verileri L=18 spinine kadar örtüşmektedir.

X(5)-K modelin  $\beta_0 = 55$  değeri için gsb tahmini  $^{178}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verisi X(3) ve X(5) gsb tahminleri Şekil 4.17’de verilmektedir.



Şekil 4.17.  $\beta_0 = 55$  değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{178}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verileri X(3) ve X(5) modelleri ile karşılaştırılması

Şekil 4.17’de;  $\beta_0 = 55$  değeri için X(5)-K modelinin temel seviye bandının enerji seviyeleri  $^{178}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verileri L=18 spinine kadar örtüştüğü görülmektedir.



Farklı  $\beta_0$  değerleri için elde edilen  $\beta_1$  ve  $\gamma$ -bandı enerjileri,  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{176}\text{Os}$  ve  $^{178}\text{Os}$  çekirdeklerinin mevcut deneysel verileri ile sırasıyla Tablo 4.2 ve Tablo 4.3'te karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.2.  $\beta_1$  band enerji oranları  $R_{n,L}^{n_w}$  X(5)-K çözümü, X(3), X(5)model tahminleri ve  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{176,178}\text{Os}$  çekirdeklerin mevcut deneysel verileri

	$R_{1,0}^0$	$R_{1,2}^0$	$R_{1,4}^0$	$R_{1,6}^0$	$R_{1,8}^0$
$^{150}\text{Nd}$	5.19	6.53	8.74	11.83	---
<b>X(5)-K</b>	8.18	9.05	10.70	13.03	15.92
$^{152}\text{Sm}$	5.62	6.65	8.4	10.76	13.68
<b>X(5)-K</b>	10.48	11.38	13.09	15.54	18.67
$^{154}\text{Gd}$	5.53	6.63	8.51	11.1	14.27
<b>X(5)-K</b>	10.48	11.38	13.08	15.54	18.67
$^{156}\text{Dy}$	4.90	6.01	7.90	10.43	13.49
<b>X(5)-K</b>	8.49	9.37	11.03	13.38	16.31
$^{176}\text{Os}$	4.45	5.50	7.59	10.60	---
<b>X(5)-K</b>	8.36	9.24	10.89	13.23	16.14
$^{178}\text{Os}$	4.92	5.80	7.74	10.56	---
<b>X(5)-K</b>	8.92	9.81	11.48	13.85	16.84

Tablo 4.2'de gösterilen  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{176}\text{Os}$  ve  $^{178}\text{Os}$  çekirdeklerine ait enerji seviyelerinin, X(5)-K modeli tahminleriyle karşılaştırıldığında temel seviye bandındaki uyumun  $\beta_1$  bandında gözlenmediği görülmektedir.

Tablo 4.3.  $\gamma$ -band enerji oranları  $R_{n,L}^{n_w}$  X(5)-K çözümleri, X(3), X(5) model tahminleri ve  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{176}\text{Os}$  ve  $^{178}\text{Os}$  çekirdeklerin mevcut deneysel verileri

	$R_{0,2}^2$	$R_{0,3}^1$	$R_{0,4}^2$	$R_{0,5}^1$	$R_{0,6}^2$	$R_{0,7}^1$	$R_{0,8}^2$	$R_{0,9}^1$
$^{150}\text{Nd}$	8.16	9.22	10.39	---	---	---	---	---
<b>X(5)-K</b>	4.12	6.63	11.81	13.85	21.10	22.69	31.56	32.76
$^{152}\text{Sm}$	8.91	10.13	11.26	12.81	14.19	15.98	17.58	19.51
<b>X(5)-K</b>	4.14	6.69	12.01	14.13	21.76	23.47	33.10	34.41
$^{154}\text{Gd}$	7.36	9.16	10.27	11.64	13.05	14.71	---	---
<b>X(5)-K</b>	4.14	6.69	12.01	14.13	21.76	23.47	33.10	34.41
$^{156}\text{Dy}$	6.46	7.42	8.48	9.69	11.07	12.55	14.22	15.91
<b>X(5)-K</b>	4.12	6.64	11.85	13.90	21.22	22.83	31.83	33.05
$^{176}\text{Os}$	6.39	7.68	9.06	10.43	---	---	---	---
<b>X(5)-K</b>	4.12	6.63	11.83	13.88	21.17	22.78	31.72	32.92
$^{178}\text{Os}$	6.54	7.81	9.18	10.71	10.71	---	---	---
<b>X(5)-K</b>	4.13	6.65	11.89	13.96	21.36	23.00	32.17	33.41

## 5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, Bohr Hamiltonyeni  $\gamma = 0^\circ$  ve  $\gamma \simeq 0^\circ$  alınarak Schrödinger denkleminin  $\beta$  değişkenine bağlı kısmı bir Kratzer potansiyeli için çözülmüş ve iki analitik çözüm elde edilmiştir. Bu çözümler sırasıyla X(3)-K ve X(5)-K modeli olarak adlandırıldı. Enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonları Nikiforov ve Uvarov tarafından geliştirilen bir analitik yöntem kullanılarak elde edildi.

X(3) modeli sadece üç değişkene bağlı ve değişkenlerine tam olarak ayrılabilirdiği, X(5) modeli ise beş değişkene bağlı olduğu ve değişkenlerine yaklaşık olarak ayrılabilirdiği bilinmektedir.

Bu çalışmayı iki bölüme ayırdığımızda, birinci bölümü X(3) modelinin Kratzer potansiyeli için çözümü oluşturmaktadır. Şekil 4.1'den de görüldüğü üzere X(3)-K modeli için  $\beta_0 = 0$  değeri serbest parçacığa karşılık gelirken,  $\beta_0 \rightarrow \infty$  ise eksensel deforme yani SU(3) modeli ile uyumlu olduğu gözlenmektedir.

X(3)-K model tahminlerimiz  $^{104}\text{Ru}$ ,  $^{112}\text{Cd}$ ,  $^{120}\text{Xe}$ ,  $^{122}\text{Xe}$ ,  $^{126}\text{Xe}$ ,  $^{142}\text{Sm}$ ,  $^{148}\text{Nd}$ ,  $^{156}\text{Gd}$  ve  $^{172}\text{Os}$  çekirdeklerine ait mevcut deneysel verilerle karşılaştırılması Şekil 4.2-11 de görülmektedir.

Şekil 4.2 ve Şekil 4.10 incelendiğinde;  $^{104}\text{Ru}$  ve  $^{172}\text{Os}$  çekirdekleri ait deneysel verileriyle X(3)-K modeli ile uyumlu olduğu görülür.

$^{120}\text{Xe}$ ,  $^{122}\text{Xe}$ ,  $^{126}\text{Xe}$  ve  $^{148}\text{Nd}$  çekirdeklerinin deneysel verileri, X(3)-K model tahminleri ile uyumlu iken bu çekirdeklerin X(3) model tahminleri ile daha iyi açıklandığı Şekil 4.4-6 ve Şekil 4.8 incelendiğinde görülmektedir.

X(3)-K modeli ile  $^{112}\text{Cd}$ ,  $^{142}\text{Sm}$  ve  $^{156}\text{Gd}$  çekirdeklerinin örtüştüğü görülür. Bu çekirdekler X(3) modeli aday çekirdekleri olarak ifade edilebilir (bkz. Şekil 4.3, Şekil 4.7, Şekil 4.9).

Şekil 4.11’de görüldüğü üzere çekirdeklere ait mevcut deneysel verilerin temel seviye bandındaki uyum burada söz konusu değildir. Beta bandlarındaki bu uyumsuzluk ise X(3)-K modelinin  $\gamma$ -katı bir çözüm olmasına ithaf edilebilir.

Çalışmanın ikinci bölümünü ise X(5) modelinin Kratzer potansiyeli için çözümü oluşturmaktadır. Bu çalışmada elde edilen X(5)-K model tahminleri  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{176}\text{Os}$  ve  $^{178}\text{Os}$  çekirdeklerine ait deneysel verilerle karşılaştırıldı.

$^{150}\text{Nd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{176}\text{Os}$  ve  $^{178}\text{Os}$  izotopları X(5) modeli çekirdekleri olarak bilinir. X(5)-K modeli tahminleri ile örtüşmesi sürpriz bir sonuç değildir. Bununla birlikte X(5)-K modelinin üst spin seviyelerine kadar X(5) modeline göre daha hassas sonuçlar verdiği Şekil 4. 12 ve Şekil 4.15-17’de görülmektedir.

Şekil 4.13-14 incelendiğinde  $^{152}\text{Sm}$  ve  $^{154}\text{Gd}$  çekirdeklerine ait deneysel veriler, X(5)-K modeli ile üst spin seviyelerine kadar örtüşmekte ve X(5) modeline göre daha başarılı tahminler sunmaktadır.

X(5)-K modeli ile  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{176}\text{Os}$  ve  $^{178}\text{Os}$  çekirdeklerinin temel seviye bandlarında gözlenen uyum  $\beta_1$  ve  $\gamma$ -bandlarında görülmemiştir.

## 6. KAYNAKLAR

- Adams, B.G., 1994. Algebraic approach to simple quantum systems. With Applications to Perturbation Theory, Springer, New York.
- Arfken, G., 1985. Laguerre Functions, Mathematical Methods For Physicists. Orlando, Florida, 721-731
- Berkdemir, C., 2009. Application Of The Nikiforov-Uvarov Method In Quantum Mechanics. The Pennsylvania State University, USA.
- Bizzeti, P. G. ve Bizzeti-Sona, A. M., 2002. Physical Review. C 66 031301.
- Bohr, A., 1952. The coupling of nuclear surface oscillations to the motion of individual nucleons. Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Dan. Mat. Fys. Medd. 26, (14).
- Bohr, A. ve Mottelson, B. R., 1953. Collective and individual-particle aspects of nuclear structure. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 24.
- Bonatsos, D., Georgoudis, P. E. ve Minkov, N., 2013. Physical Review. C 88, 034316.
- Bonatsos, D., Lenis, D., Mccutchan, EA., Petrellis, D. ve Yigitoglu I., 2007. Exactly separable version of X(5) and related models. Physical Letters Sect B Nucl Elem Part High-Energy Phys. 649(5-6):394-9.
- Bonatsos, D., Lenis, D., Petrellis, D., Terziev, PA. ve Yigitoglu I. 2006. X(3) An exactly separable  $\gamma$ -rigid version of the X(5) critical point symmetry. AIP Conf Proc. 899:123-4.
- Boztosun, I., Bonatsos, D. ve İnci, I., 2008. Analytical solutions of the Bohr Hamiltonian with the Morse Potential. Physical Review C, 77,044302.
- Caprio, M. A., 2002. Finite well solution for the E(5) Hamiltonian. Physical Review. C 65 031304.
- Casten, R. F., 1990. Nuclear structure from a simple perspective. New York Oxford, Oxford University Press, 391p.
- Casten, R. F. ve Zamfir, N. V., 2000. Evidence for a Possible E(5) Symmetry in  $^{134}\text{Ba}$ . Physical Review. Letters. 85 3584.
- Casten, RF., 2006. Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei. Nature Physics. 2(12):811-20.
- Casten, RF. ve Zamfir, N. V., 2001. Empirical realization of a critical point description in atomic nuclei. Physical Review. Letters. 87(5):52503-1-52503-4.
- Chabab, M., El Batoul, A., Lahbas, A. ve Oulne, M., 2016. Nucl. Phys. A 953, 158.
- Elliott, J. P., Evans, JA. ve Park, P., 1986. Physical. Letters. B 169 309.
- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. ve Tricomi, FG., 1955. Higher transcendental functions. Vol1. New York. Mcgraw-Hill.
- Flügge, S., 1971. Practical quantum mechanics II. Springer, Berlin.
- Flügge, S., 1974. Practical quantum mechanics. Springer. Berlin.
- Fortunato, L., 2005. Solutions of the Bohr Hamiltonian a compendium. Eur Physical J A. 26(SUPPL. 1):1-30.
- Fortunato, L., De Baerdemacker, S. ve Heyde, K., 2006. Solution of the Bohr Hamiltonian for soft triaxial nuclei. Physical Review, C74, 014310.
- Fortunato, L. ve Vitturi, A., 2003. J.Phys.G:Nucl.Part.Phys. 29 1341-1349.
- Fortunato, L. ve Vitturi, A., 2004. New Analytic solutions of the collective Bohr Hamiltonian for a  $\beta$ -Soft,  $\gamma$ -Soft axial rotor. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, Volume 30, Number 5.

- Frank, A., Isacker, P. ve Van., 1994. Algebraic methods in molecular and nuclear structure physics, Wiley, New York.
- Herzberg, G., 1950. Molecular spectra and molecular structure: I. Spectra of Diatomic Molecules, New York, Van Nostrand-Reinhold.
- Iachello, F. ve Levine, R.D., 1995. Algebraic theory of molecules. Oxford University Press., Oxford, England.
- Iachello, F., 2000. Dynamic symmetries at the critical point. Physical Review Letters, 85 (17), 3580-3583
- Iachello, F., 2001. Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition. Physical Review Letters, 87 (5), 052502.
- Iachello, F. ve Arima, A., 1987. The interacting Boson Model, Cambridge University Press, Cambridge, England
- Iachello, F. ve Ibrahim, M., 1998. Analytic and Algebraic Evaluation of Franck–Condon Overlap Integrals The Journal of Physical Chemistry A. 102, 9427-9432.
- Iachello, F. ve Oss, S., 1996. Algebraic Approach to the Hulthen Potential. The Journal of Physical Chemistry. 104, 6954.
- Infeld, L. ve Hull, T.E., 1951. the factorization method American Physical Society. 23, 21.
- Jolie, J. Cejnar, P. Casten, R. F., Heinze, S., Linnemann, A ve Werner, V. 2002. triple point of nuclear deformations. Physical Review. Letters. 89, 182502.
- Kratzer, A., 1920. Z. Physik, 3, 289.
- Miller, W. ve Lie, Jr., 1968. Theory special functions. Academic Press, New York.
- Naderi, L. ve Hassanabadi, H., 2016. European Physical Journal Plus. 131, 5.
- Nikiforov, A.V. ve Uvarov, V.B., 1988. Special functions of mathematical physics, Birkhauser, Basel.
- Rowe, DJ. ve Bahri, C., 1998. Rotation-vibrational spectra of diatomic molecules and nuclei with davidson interactions. Journal Physics A Math Gen.31(21):4947–61.
- Rowe, D., J. 2002. ve 2003. Private Communications.
- Schrödinger, E., 1926. Die Naturwissenschaften, Volume 14, Issue 28, pp.664-666
- Sobhani, H. ve Hassanabadi, H., 2016. Study of davydov–chaban approach considering shifted killingbeck potential for any l-state. Modern Physics Letters A, 31, 1650152.
- Szego, G., 1939. Orthogonal polynomials. American Mathematical Society, New York.
- Tang, C.L., 2005. Fundamentals of quantum mechanics: for solid state electronics and optics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Tezcan, C., ve Sever, R., 2009. A general approach for the exact solution of the schrödinger equation. Int Journal Theor Physical, 48, 337–350.
- Warner, D., 2002. Nuclear physics: A triple point in nuclei. 420, 614.
- Willets, L. ve Jean, M., 1956. Physical Review. Letters. 102 788.
- Yigitoglu, I. ve Gokbulut, M., 2017. Bohr Hamiltonian for  $\gamma = 0^\circ$  with Davidson Potential. European Physical Journal Plus. 132(8).

## 7. ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Tuğba TURAN  
Doğum Yeri / Tarihi : TOKAT-MERKEZ / 02.02.1990  
Medeni Hali : Bekar  
Yabancı Dili : İngilizce - Almanca  
Adres : TOKAT / MERKEZ  
e-mail : tuba-turan@windowslive.com

### Eğitim

Lisans / Mezuniyet Tarihi : GAZİ ÜNİVERSİTESİ / 19.01.2015  
Lise/Mezuniyet Tarihi : TOKAT ANADOLU LİSESİ / 16.06.2008  
İlköğretim/Mezuniyet Tarihi : TOKAT PLEVNE İLKÖĞRETİM OKULU / 09.06.2004

### Bildiriler

Yiğitoglu, İ. ve Turan, T. 2017. Solution Of Bohr Hamiltonian with The Kratzer Potential Using Nikiforov-Uvarov Method For X(3) Critical Point Symmetry. 3<sup>rd</sup> International Conference on Theoretical and Experimental Studies in Nuclear Applications and Technology. Adana.

Yiğitoglu, İ. ve Turan, T. 2018. A Solution Of Bohr Hamiltonian for  $\gamma = 0^\circ$  With Kratzer Potential. 4<sup>th</sup> International Conference on Theoretical and Experimental Studies in Nuclear Applications and Technology. Antalya.

Yiğitoglu, İ. ve Turan, T. 2018. Bohr Hamiltonian for  $\gamma \simeq 0^\circ$  with Kratzer Potential. 4<sup>th</sup> International Conference on Theoretical and Experimental Studies in Nuclear Applications and Technology. Antalya.