T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASINDA ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN NEUTRAL DİNAMİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK VE ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Orhan ÖZDEMİR

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Ercan TUNÇ
2018

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ZAMAN SKALASINDA ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN NEUTRAL DİNAMİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK VE ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Orhan ÖZDEMİR

TOKAT
2018

Orhan Özdemir tarafından hazırlanan "**Zaman Skalasında Üçüncü Mertebeden Neutral Dinamik Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılık ve Asimptotik Davranışı**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **14 Mayıs 2018** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / ~~Oy Çokluğu~~ ile Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **MATEMATİK ANA BİLİM DALI** 'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Ercan TUNÇ Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN Cumhuriyet Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ Cumhuriyet Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Ali YAKAR Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....

ONAY

Prof. Dr. Ebubekir ALTUNTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

28/06/2018

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

O. Özdemir

Orhan ÖZDEMİR
14/05/2018

ÖZET

Doktora Tezi

ZAMAN SKALASINDA ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN NEUTRAL DİNAMİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK VE ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Orhan ÖZDEMİR

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ercan TUNÇ

Bu tez çalışmasında, ilk olarak üçüncü mertebeden adi ve fonksiyonel diferensiyel denklemler ve zaman skalası analizi ile ilgili temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde duruldu. Ayrıca bu denklemlerin çeşitli bilim dallarındaki uygulamalarından örnekler verildi. Daha sonra, zaman skalası üzerinde üçüncü mertebeden lineer olmayan neutral bir dinamik denklem sınıfı ve dağılımlı sapma argümentli üçüncü mertebeden lineer olmayan neutral bir dinamik denklem sınıfı göz önüne alınarak bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışı ile ilgili yeni sonuçlar verildi. Elde edilen sonuçların önemi ve uygulanabilirliği farklı zaman skalaları üzerinde verilen örneklerle açıklandı.

2018, 101 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Salınımlılık, asimptotik davranış, üçüncü mertebe, neutral dinamik denklemler, zaman skalası.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

OSCILLATORY AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS
OF THIRD ORDER NEUTRAL DYNAMIC EQUATIONS
ON TIME SCALES

Orhan ÖZDEMİR

Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Ercan TUNÇ

In this thesis study, firstly the basic definitions, theorems and results related to third order ordinary and functional differential equations and time scale calculus have been dwelled on. In addition, applications of these equations in various branches of science have given. Next, a class of nonlinear neutral dynamic equations and a class of nonlinear neutral dynamic equations with distributed deviating arguments on time scales have been considered and new results concerning the oscillation and asymptotic behavior of the solutions of these equations have been established. Significance and applicability of the results obtained are explained by examples built on different time scales.

2018, 101 pages

KEYWORDS: Oscillation, asymptotic behavior, third order, neutral dynamic equations, time scales.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgiyle yaparak tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Prof. Dr. Ercan TUNÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesi toplantıları boyunca değerli tavsiyeleri ve yol gösterici katkılarıyla destek olan Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN ve Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN'a, doktora eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan başta ailem olmak üzere herkese sonsuz teşekkür ederim.

Orhan ÖZDEMİR
Mayıs 2018

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
Δ	Delta türev
∇	Nabla türev
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	İleri graininess fonksiyonu
ν	Geri graininess fonksiyonu
$\max \mathbb{T}$	$\mathbb{T}$ zaman skalasının maksimum elemanı
$\min \mathbb{T}$	$\mathbb{T}$ zaman skalasının minimum elemanı
$\mathbb{T}^\kappa$	$\Delta -$ türevlenebilirlik bölgesi
C_{rd}	Sağ yoğun sürekli fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Son yıllarda, zaman skalasında dinamik denklemlerin çözümlerinin araştırılması üzerine literatürde çok sayıda çalışma yapılmış, pür ve uygulamalı matematikte önemli bir alan haline gelmiştir. Bu fikir, 1988 yılında yayınladığı doktora teziyle sürekli ve ayrık analizi birleştirmeyi amaçlayan ve zaman skalasında dinamik denklemler teorisi çalışmalarını başlatan Stefan Hilger'e (Hilger, 1988, 1990) aittir. Bu yaklaşım diferensiyel denklemler ve fark denklemleri teorilerini zaman skalasında dinamik denklemler teorisi altında genelleştirmekte ve sonuçların bir kez diferensiyel denklemler için ve bir kez de fark denklemleri için ispatlanmasına gerek duyulmadan tek seferde her iki durum için de sonuçlar elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Bununla birlikte, daha sonraki yıllarda yapılan çalışmalarda dinamik denklemler teorisinin sadece diferensiyel ve fark denklemleri için değil, zaman skalasının seçimine bağlı olarak, örneğin q-fark denklemleri gibi pek çok özel durum için de eşdeğer sonuçlar verdiği görülmüştür. Ayrıca belirtilmelidir ki, zaman skalasında dinamik denklemlerin kuantum mekaniği, elektrik mühendisliği, sinir ağları, kombinatorikler, ısı transferi, ekonomi ve popülasyon dinamiğine kadar birçok uygulaması vardır (Agarwal ve ark., 2016).

Bu yeni teorinin gelişmesiyle birlikte, hem pür hem de uygulamalı matematik farklı türden dinamik denklemlerin çözümlerinin farklı özelliklerini inceleyerek geniş bir literatür oluşturmuştur. Pür matematik dinamik denklemlerin çözümlerinin varlık-teklik teoremleri üzerinde çalışırken, uygulamalı matematik ise çözümlerin kalitatif davranışları, yani çözümlerin salınımı, asimptotik davranışları, kararlılığı, periyodik yörüngeleri gibi özelliklerini incelemiştir. Kalitatif teorinin bir konusu olan salınım teorisi de, uygulamalı matematiğin üzerinde en çok çalışma yapılan ve hızla gelişen konularından birisidir (Saker, 2010). Bununla birlikte, ikinci mertebeden dinamik denklemlerle karşılaştırıldığında, üçüncü mertebeden dinamik denklemler hakkında, özellikle de gecikmeli veya neutral tipten üçüncü mertebede dinamik denklemler üzerine, ilgili literatürde daha az sayıda çalışma olduğu görülmektedir. Üçüncü mertebeden denklemlerin fizikî ve biyolojik süreçlerin matematiksel modellenmesindeki rolü ve üçüncü mertebeden diferensiyel denklemlerle ilgili bazı kesin sonuçların çok uzun zamandır bilindiği düşünülürse, bu tür denklemlerin ilerleyen yıllarda daha fazla dikkat çekeceği söylenebilir.

Tezin Yapısı

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır ve birinci bölümde kısa olarak tezde işlenecek konulardan bahsedilerek tezin yapısı ve işleyişi anlatılmıştır. İkinci bölümde ilk olarak üçüncü mertebeden diferensiyel denklemler, fark denklemleri ve q-fark denklemlerinin farklı bilim dallarındaki çeşitli uygulamalarından bahsedilmiştir. Daha sonra fonksiyonel diferensiyel denklemler ve uygulamaları hakkında genel bilgi verilerek, bu denklemlerin sınıflandırılmasıyla ilgili tanımlar ve örnekler üzerinde durulmuştur. Bununla birlikte, fonksiyonel diferensiyel denklemlerde görülen sapma argümentinin, denklemin çözümlerinin salınımına yaptığı etki farklı mertebeden örneklerle açıklanmıştır. Ardından zaman skalası teorisi genel hatlarıyla tanıtılmış, zaman skalasında Δ-türev, Δ-integral ve genelleştirilmiş integraller konularının, temel tanım, teorem ve özellikleri üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde, α pozitif tek tam sayıların bir oranı ve $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere, üçüncü mertebeden lineer olmayan neutral

$$\left(r(t)\left(\left(x(t)+p(t)x(g(t))\right)^{\Delta\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}+f\left(t,x(h(t))\right)=0$$

dinamik denkleminin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışı için, belirli şartlar altında yeni sonuçlar elde edilmiş, ve bu sonuçların uygulanabilirliği örneklerle açıklanmıştır. Dördüncü bölümde ise $z(t)=x(t)+p(t)x(g(t))$, $i=1,2$ için α_i'ler pozitif tek tam sayıların oranları ve $0<a<b$ olacak şekilde $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere, üçüncü mertebeden dağılımlı sapma argümentli non-lineer neutral

$$\left[r_2(t)\left(\left(r_1(t)\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha_1}\right)^{\Delta}\right)^{\alpha_2}\right]^{\Delta}+\int_a^b q(t,\xi)f\left(x\left(\phi(t,\xi)\right)\right)\Delta\xi=0$$

dinamik denkleminin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışı üzerinde durulmuştur. Sonuç kısmında ise elde edilen sonuçların öneminden bahsedilmiş ve uygulanabileceği farklı denklem türlerinin bir kaçından örnekler verilerek çalışma tamamlanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Üçüncü Mertebeden Diferensiyel Denklemler, Fark Denklemleri ve q-Fark Denklemleri

Bu bölümde, zaman skalasında üçüncü mertebeden dinamik denklemlerin en iyi bilinen özel durumları olan üçüncü mertebeden diferensiyel denklemler, fark denklemleri ve q-fark denklemlerinin, çeşitli bilim dallarında ortaya çıkan problemlerin matematiksel modellemesinde oynadıkları rollerden örnekler verilmiştir. İlgili literatür incelendiğinde, farklı yapıdaki üçüncü mertebeden diferensiyel, fark ve q-fark denklemlerinin çözümleriyle ifade edilebilecek çok sayıda farklı problemin mevcut olduğu açıktır. Konunun geniş uygulama alanını ayrıntılı olarak incelemek isteyenler için, kaynaklar kısmında verilen ilgili referanslar yol gösterici olabilir.

Fizik, biyoloji ve mühendislikte büyük ilgiyle çalışılan birçok konunun matematiksel modellemesine üçüncü mertebeden diferensiyel denklemler karşılık gelir. Mühendislik dallarının birçoğunda kayda değer bir önemi olan hidrodinamik problemlerinden giriş-akış fenomeni çalışmalarında

$$x''' (t) + a (t) x'' (t) + b (t) x' (t) + c (t) x (t) = f (t) \tag{2.1.1}$$

diferensiyel denklemi ortaya çıkar (Padhi ve Pati, 2014).

$$x''' (t) - \lambda x' (t) - 2x (t) x' (t) = \mu_1 (Dx') (t) + \mu_2 \sin t, \tag{2.1.2}$$

$$x (t + 2\pi) = x (t), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x (t) \, dt = 0 \tag{2.1.3}$$

denklemi uzun dikdörtgen bir tank içinde yatay bir rezonans frekansında salınım yapan suyun sabit akışını açıklar (Padhi ve Pati, 2014). Jackiewicz ve ark. λ, γ, μ ve υ reel parametreler ve $\upsilon + \mu \neq 0$ olmak üzere

$$x' (t) = \gamma x (t) + \int_0^1 (\lambda + \mu t + \upsilon s) x (s) \, ds, \qquad t \geq 0 \tag{2.1.4}$$

$$x (0) = 1 \tag{2.1.5}$$

formundaki Volterra integro diferensiyel denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını

$$x'''(t) = \gamma x''(t) + (\lambda + (\mu + \upsilon)\,t)\,x'(t) + (2\mu + \upsilon)\,x(t) \tag{2.1.6}$$

diferensiyel denklemi yardımıyla incelemiştir (Padhi ve Pati, 2014). Tiroid-pituitar etkileşimin matematiksel teorisinin oluşturulmasında, $\theta = \theta(t)$ tiroid hormonunun t anındaki konsantrasyonu ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k$ ve c reel sabitler olmak üzere Danziger ve Elemergreen'in

$$\alpha_3\theta''' + \alpha_2\theta'' + \alpha_1\theta' + (1+k)\,\theta = kc, \qquad \theta < c \tag{2.1.7}$$

ve

$$\alpha_3\theta''' + \alpha_2\theta'' + \alpha_1\theta' + \theta = 0, \qquad \theta > c \tag{2.1.8}$$

üçüncü mertebeden lineer diferensiyel denklemlerini elde ettikleri görülmektedir. Bu denklemler tiroid hormonunun zamana göre değişimini göstermektedir (Padhi ve Pati, 2014). 1950lerin ilk yıllarında, Alan Lloyd Hodgkin ve Andrew Huxley, bir kalamar sinirinde elektrik darbelerinin yayılımı için matematiksel bir model geliştirdi. Hodgkin-Huxley modeli, nöronlar ve kardiyak miyosit gibi uyarılabilir hücrelerin elektriksel özelliklerini yaklaşık olarak veren lineer olmayan bir diferensiyel denklemler sistemidir. Model, biyofizik ve nöronal modellemede çok önemli bir rol oynamıştır. Daha sonra Hodgkin-Huxley modelinin indirgenmiş bir versiyonu Nagumo tarafından ortaya konuldu. Nagumo, Hodgkin-Huxley denklemlerinin birçok özelliğini taşıyan bir model olarak

$$x''' - cx'' + f'(x)\,x' - \frac{b}{c}x = 0 \tag{2.1.9}$$

formundaki üçüncü mertebeden diferensiyel denklemi önermiştir (Padhi ve Pati, 2014). Fiziksel uygulamalara örnek olarak, Vreeke and Sandquist, iki sıcaklık geri beslemeli nükleer reaktör problemini modellemek için, bir üçüncü mertebe diferensiyel denklem sistemine eşdeğer olan

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1\left(\gamma_1\left(1-x_2\right)+\gamma_2\left(1-x_3\right)\right), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \gamma_3\left(x_1-x_2\right), \\ \frac{dx_3}{dt} &= \gamma_4\left(x_1-x_3\right) \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

diferensiyel denklem sistemini öne sürdü. Bu denklem sisteminde x_1 normalleştirilmiş nötron yoğunluğu, x_2 yakıt ile ilgili ve x_3 moderatör ya da soğutucu ile ilgili olmak üzere normalleştirilmiş sıcaklıklar, γ_3 ve γ_4 pozitif ısı transfer katsayıları, γ_1 ve γ_2 sıcaklık geri beslemesi ile ilişkili normalleştirilmiş etkin nötron ömrü parametreleridir ve birinci denklemdeki reaktivite olarak adlandırılan $\gamma_1\left(1-x_2\right)+\gamma_2\left(1-x_3\right)$ ifadesi füzyon reaktöründeki nötronların çarpım faktörünün bir ölçümüdür (Padhi ve Pati, 2014). Kuramoto-Sivashinsky denklemi

$$u_t+u_{xxxx}+u_{xx}+\frac{1}{2}u^2=0 \tag{2.1.11}$$

bir çok fiziksel problemin matematiksel modeli olarak karşımıza çıkar. Örneğin, Kuramoto-Sivashinsky denklemi, reaksiyon difüzyon sistemlerinde model formülasyonunu tanımlamak için sunulmuştur. Bu kısmi diferensiyel denklemin hareketli dalga çözümlerini bulmak için c periyot olmak üzere $u(x,ct)=u(x-ct)$ dönüşümü kullanılırsa, λ bir parametre ve f bir çift fonksiyon olmak üzere, üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$\lambda u'''\left(x\right)+u'\left(x\right)+f\left(u\right)=0 \tag{2.1.12}$$

diferensiyel denklemi ile karşılaşılır. Diğer yandan, (2.1.12) diferensiyel denkleminin kalitatif davranışı yardımıyla, (2.1.11) kısmi diferensiyel denkleminin kalitatif davranışı öngörülebilir (Padhi ve Pati, 2014).

Fark denklemleri teorisi, doğa bilimlerinin birçok dalında uygulamaları olması açısından zengin bir literatür birikimine sahiptir. Kesikli ve sürekli argümanlara sahip fark denklemleri, doğrusal olmayan olguların ve farklı sistemlerde meydana gelen süreçlerin anlaşılmasında temel bir rol oynamaktadır (Sharkovsky ve ark., 1993). $a, b, c, d \geq 0$ ve $c + d > 0$ olmak üzere üçüncü mertebeden

$$x_{n+3} = ax_{n+2} + bx_n e^{-(cx_{n+2}+dx_n)} \tag{2.1.13}$$

fark denklemi bir böcek türünün popülasyon modeline karşılık gelir (Stević, 2003). Ayrıca ekonomi, matematiksel biyoloji ve ayrık modellerin kullanıldığı birçok matematiksel çalışmada üçüncü mertebeden fark denklemleri ortaya çıkar (Graef ve Thandapani, 1999).

XIX. yüzyılın ilk yıllarında çalışılmaya başlanan q-fark denklemleri teorisi, fark denklemlerinin çok ilgi çeken bir alanıdır ve XX. yüzyılın başından itibaren disiplinler arası çalışılan bir konu haline gelmiştir. q-fark denklemleri, kozmik sicimler ve karadelikler, konformal kuantum mekaniği, nükleer fizik ve yüksek enerji fiziği gibi çeşitli alanlarda önemli bir rol oynamaktadır (Ahmad ve Nieto, 2013; Yu ve Wang, 2014).

2.2. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları

Uygulamalarda, birçok olgunun gelecekteki davranışlarının bir adi diferensiyel denklemin çözümleri ile tanımlandığı varsayılmaktadır ve bir adi diferensiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri aynı t anında değerlendirilir. Bu yaklaşımda, sistemin davranışının geçmişten bağımsız olarak belirlendiği açıktır. Ancak uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan problemlerden anlaşılacağı üzere, bazı olaylar sadece şuan ki zamana değil, geçmiş ya da gelecek zamana da bağlı olabilir. Bu nedenle, incelenen birçok model, adi diferensiyel denklemler yerine fonksiyonel diferensiyel denklemler ile daha iyi temsil edilmektedir (Hale, 1971).

Eğer bir diferensiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri, bağımsız değişkenin (argüment) farklı değerlerine bağlı olarak ortaya çıkıyorsa bu tür denklemlere fonksiyonel diferensiyel denklemler (functional differential equations) veya sapma argümentli diferensiyel denklemler (differential equations with deviating arguments) adı verilir (Zafer, 1992).

Fonksiyonel diferensiyel denklemlerle ilgili ilk çalışmalar, XVIII. yüzyılda Johann Bernoulli'nin titreşen kablolarla bağlantılı spesifik bir yayılım problemini incelerken

$$y'(t) = y(t-1) \tag{2.2.14}$$

denklemini göz önüne almasıyla başlamıştır (Răsvan, 2006). Bununla birlikte, XIX. yüzyılda ve XX. yüzyılın başlarında konu ile ilgili çok az çalışmanın olduğu görülmektedir. Modern zamanlarda fonksiyonel diferensiyel denklemleri inceleyen ilk araştırmacılardan Minorsky,

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t-r)) \tag{2.2.15}$$

denkleminin iletişim süresinin ihmal edilemeyeceği basit geri beslemeli kontrol sistemleri üzerindeki etkisi üzerine çalışmıştır (Hale, 1971). Lord Cherwell, asalların dağılımı üzerine yaptığı çalışmada

$$x'(t) = -\alpha x(t-1)(1+x(t)) \tag{2.2.16}$$

denklemi ile karşılaşmış, ayrıca bu denklemin değişik formları belirli bir türün gelişme teorisinde matematiksel model olarak kullanılmıştır (Hale, 1971). Volterra, av-avcı modelleri üzerine çalışırken, N_1 ve N_2 sırasıyla avcı ve av sayılarını göstermek üzere

$$N_1'(t) = \left[\varepsilon_1 - r_1 N_2(t) - \int_{-r}^{0} F_1(-\theta) N_2(t+\theta) d\theta\right] N_1(t), \tag{2.2.17}$$

$$N_2'(t) = \left[-\varepsilon_2 + r_2 N_1(t) + \int_{-r}^{0} F_2(-\theta) N_1(t+\theta) d\theta\right] N_2(t) \tag{2.2.18}$$

integro-diferensiyel denklemlerini incelemiştir (Hale, 1971). Kayıpsız iletim hatları teorisinde, Miranker ve Brayton α, β, γ reel sabitler olmak üzere

$$v'(t) = \alpha v'(t-r) - \beta v(t) - \alpha\gamma v(t-r) + F(v(t), v(t-r)) \tag{2.2.19}$$

fonksiyonel diferensiyel denklemi ile karşılaşmıştır (Hale, 1971). Elektrodinamikte çarpışma probleminin incelenmesinde, Driver, $g(t) \leq t$ olmak üzere

$$x'(t) = f_1(t, x(t), x(g(t))) + f_2(t, x(t), x(g(t)))\, x'(g(t)) \tag{2.2.20}$$

denklemini göz önüne almıştır (Hale, 1971).

$$x''(t) = f(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), x''(t-r)) \tag{2.2.21}$$

formundaki Euler denklemi bazı varyasyon problemlerinde ortaya çıkmaktadır (Hale, 1971). Bir nükleer reaktörde nötronların yavaşlaması probleminde

$$x'(t) = k(t+1)x(t+1) - k(t)x(t) \tag{2.2.22}$$

denkleminin önemli rol oynadığı görülmektedir (Hale, 1971). Fonksiyonel diferensiyel denklemlerin uygulamalı bilimlerdeki geniş kullanım alanını ayrıntılı olarak incelemek isteyenler için Hale (Hale, 1971), Kolmanovskii ve Myshkis (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999) ve Ladde, Lakshmikantham ve Zhang'in (Ladde ve ark., 1987) konu ile ilgili eserleri referans olabilir.

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi, uygulamalarda ortaya çıkan birçok fonksiyonel diferensiyel denklem türü bulunmaktadır. Bu denklemlerden bazıları sistemin sadece geçmiş durumuna bağlı, bazıları geçmiş duruma ve geçmiş durumun değişim oranına bağlı, bazıları da gelecek duruma bağlıdır. Çözümler, bu denklem türlerinin her biri için farklı davranışlar göstermektedir.

Bir gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklem (delay functional differential equation), bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı olduğu ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argümentin, bilinmeyen fonksiyonun ve türevlerinin denklemde görülen tüm argümentlerinden daha küçük olmadığı bir diferensiyel denklemdir (Zafer, 1992).

Örneğin, (2.2.14), (2.2.15) ve

$$x'(t) = 2x(t-1) + tx(t/3) + 1 \tag{2.2.23}$$

denklemleri gecikmeli diferensiyel denklemdir.

Bir ileri fonksiyonel diferensiyel denklem (advanced functional differential equation), bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin bağımsız değişkenin sadece bir değerine bağlı olduğu ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argümentin, bilinmeyen fonksiyonun ve türevlerinin denklemde görülen tüm argümentlerinden daha büyük olmadığı bir diferensiyel denklemdir (Zafer, 1992). Örneğin, (2.2.22) ve

$$x'(t) = -x(t+2) + tx(t+\sqrt{t}) + t \tag{2.2.24}$$

denklemleri ileri tipten diferensiyel denklemdir.

Bir karma fonksiyonel diferensiyel denklem (mixed functional differential equation), bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin bağımsız değişkenin sadece bir değerine bağlı olduğu ve denklemde en yüksek mertebeden türevde görülen bu argümentten, daha küçük ve daha büyük argümentlerin bulunduğu bir diferensiyel denklemdir (Zafer, 1992). Örneğin,

$$x'(t) = 2x(t-3) - 2x(t+2) + 1, \tag{2.2.25}$$

$$x''(t) = x'(t+1)x(t) + tx(t-1) \tag{2.2.26}$$

denklemleri karma diferensiyel denklemdir.

Bir neutral fonksiyonel diferensiyel denklem (neutral functional differential equation), bilinmeyen fonksiyonun denklemde görülen en yüksek mertebeden türevinin hem sapma argümentine bağlı hem de sapma argümentine bağlı olmadan görüldüğü bir diferensiyel denklemdir (Zafer, 1992). Örneğin, (2.2.20), (2.2.21) ve

$$x'(t) + \frac{t}{t+1}x'(t/2) = x(t-2) + \cos t \tag{2.2.27}$$

denklemleri neutral diferensiyel denklemdir.

Bir diferensiyel denklemin t'nin bazı değerleri için yukarıda belirtilen denklem türlerinden birisine, t'nin farklı bazı değerleri için farklı bir türe ait olması da mümkündür. Örneğin,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t + \sin t)) \tag{2.2.28}$$

denklemi, $\sin t \leq 0$ şartının sağlandığı aralıklarda gecikmeli, $\sin t \geq 0$ şartının sağlandığı aralıklarda ileri tipten diferensiyel denklemdir.

2.3. Sapma Argümentinin Salınıma Etkisi

Belirli formdaki denklemler hariç, genelde diferensiyel denklemlerin açık çözümlerinin elde edilememesi yani çözümler için analitik ifade bulunamaması durumu, araştırmacıları diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmeden çözümlerin davranışlarını araştırmaya yöneltmiştir. Bu yaklaşım diferensiyel denklemlerde kalitatif (nitel) teori olarak bilinmektedir. Kalitatif teorinin önemli bir konusu da salınım teorisidir. Salınım teorisinin temeli Jacques Charles François Sturm tarafından yayınlanan (Sturm, 1836), kendine eşlenik ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin sıfırlarıyla ilgili iyi bilinen sonuçlara dayanmaktadır. O zamandan beri farklı sınıftaki lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınım davranışı farklı yöntemlerle araştırılmış ve araştırılmaya devam edilmektedir.

Genel olarak, bir diferensiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümü, keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahipse (yani sıfırlarının kümesi üstten sınırlı değilse) bu çözüme salınımldır, aksi takdirde salınımsızdır denir (Erbe ve ark., 1995; Ladde ve ark., 1987). Adi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı hakkında yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu ikinci ya da daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemleri kapsamaktadır. Çünkü birinci mertebeden lineer homojen adi diferensiyel denklemlerin çözümleri salınımlı değildir. Ancak birinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemler için durum oldukça farklıdır. Zira bu denklemler salınımlı çözümlere sahip olabilir. Örneğin

$$x'(t) + x(t) = 0$$

birinci mertebeden adi diferensiyel denklemi salınımlı çözümlere sahip değildir. Ancak

$$x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ve

$$x'(t) - x\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

birinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemleri $x_1 = \sin t$ ve $x_2 = \cos t$ salınımlı çözümlere sahiptir (Ladde ve ark., 1987). Diğer yandan,

$$x'(t) + \frac{3\pi}{2} x(t+1) = 0$$

ileri tipten diferensiyel denklemi $x_1(t) = \cos\frac{3\pi t}{2} + \sin\frac{3\pi t}{2}$ salınımlı çözümüne ve A bir sabit ve $s + (3/2)\pi e^s = 0$ denkleminin bir kökü s olmak üzere $x_2(t) = Ae^{st}$ salınımsız çözümüne sahiptir (Ladde ve ark., 1987).

İkinci mertebeden lineer homojen diferensiyel denklemlerin bütün çözümlerinin ya salınımlı ya da salınımsız olduğu Sturm Ayırma Teoreminden bilinmektedir. Örneğin,

$$x''(t) + x(t) = 0$$

denkleminin bütün çözümleri salınımlı,

$$x''(t) - x(t) = 0 \tag{2.3.29}$$

denkleminin bütün çözümleri salınımsızdır. Ancak (2.3.29) denklemi salınımsız olmasına rağmen,

$$x''(t) - x(t - \pi) = 0$$

fonksiyonel diferensiyel denkleminin $x_1 = \sin t$ ve $x_2 = \cos t$ salınımlı çözümleri vardır. Ayrıca,

$$x''(t) + x(\pi - t) = 0$$

denklemi hem $x_1 = \sin t$ şeklinde bir salınımlı çözüme hem de $x_2 = e^t - e^{\pi - t}$ şeklinde bir salınımsız çözüme sahiptir (Ladde ve ark., 1987). Bir diferensiyel denklemde neutral terimin varlığı salınıma neden olabileceği gibi, denklemin salınım özelliklerini yok da edebilir. Örneğin,

$$\left(e^{2t}x'(t)\right)' + \left(e^{2t} + \frac{e^{2t+2}}{2}\right) x(t) = 0$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemi ve

$$\left(e^{2t}\left(x(t) + \frac{1}{2e^4}x(t-2)\right)'\right)' + \left(e^{2t} + \frac{e^{2t+2}}{2}\right) x(t) = 0$$

ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklemi salınımlıdır. Ancak,

$$\left(e^{2t}\left(x(t) + \frac{1}{2}x(t-2)\right)'\right)' + \left(e^{2t} + \frac{e^{2t+2}}{2}\right) x(t) = 0$$

denkleminin salınımlı olmayan $x(t) = e^{-t}$ çözümü vardır. Bu durum, neutral terimin farklı seçimlerinden kaynaklanmaktadır (Agarwal ve ark., 2014c). Ayrıca,

$$x'(t) + x\left(t - \frac{1}{e}\right) = 0$$

diferensiyel denklemi salınımsız çözümlere sahip olmasına rağmen, $p \in (0, 1)$ reel bir sabit olmak üzere olmak üzere

$$(x(t) + px(t-1))' + x\left(t - \frac{1}{e}\right) = 0$$

denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Erbe ve ark., 1995).

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned}$$

diferensiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Bu denkleme ait karakteristik denklemin analizinden, her $(x(t), y(t))$ çözümünün salınımlı olduğu bilinmektedir. Ancak

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) - y\left(t - \frac{1}{3}\ln 4\right) \\ y'(t) &= x\left(t - \frac{1}{3}\ln 4\right) + y(t) \end{aligned}$$

gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklem sistemi, salınımsız $x(t) = \exp((3/2)t)$, $y(t) = \exp((3/2)t)$ çözümüne sahiptir (Erbe ve ark., 1995).

Üçüncü mertebeden diferensiyel denklemlerde ise çözümlerin salınımlı ya da salınımsız olduğunun incelenmesi, birinci ve ikinci mertebeden denklemlerden daha kompleks problemler ortaya çıkarmaktadır. Örneğin en basit olarak, a, b ve c reel sabitler olmak üzere, üçüncü mertebeden sabit katsayılı lineer homojen

$$x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0 \tag{2.3.30}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.3.30) denklemine karşılık gelen karakteristik denklem en az bir reel köke sahip olacağından bu denklemin en az bir $x_3 = e^{r_3 t}$ şeklinde salınımsız bir çözümü vardır. Yani ikinci mertebeden lineer homojen diferensiyel denklemler için geçerli olan çözümlerin tamamının salınımlı ya da tamamının salınımsız olması durumu üçüncü mertebeden denklemler için geçerli değildir. Ancak bütün çözümleri salınmlı olan ve hem salınımlı hem de salınımsız çözümlere sahip olan üçüncü mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemler mevcuttur. Örneğin,

$$x'''(t) + x(t - \tau) = 0 \tag{2.3.31}$$

denkleminin bütün çözümleri, $\tau > 3/e$ gerek ve yeter şartı altında salınımlıdır (Ladas ve ark., 1984). Ancak (2.3.31) denklemine karşılık gelen

$$x'''(t) + x(t) = 0$$

adi diferensiyel denklemi $x_1 = e^{-t}$ şeklinde bir salınımsız çözüme, $x_2 = e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$ ve $x_3 = e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$ şeklinde salınımlı çözümlere sahiptir. Diğer yandan,

$$x'''(t) + 2x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

denklemi, $x_1 = \sin t$ salınımlı çözümüne ve λ karakteristik denklemin sıfırdan farklı bir kökü olmak üzere $x_2 = e^{\lambda t}$ salınımsız çözümüne sahiptir (Padhi ve Pati, 2014).

2.4. Zaman Skalası ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.4.1. Reel sayıların boştan farklı herhangi bir kapalı alt kümesine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ sembolü ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{N}_0$$

yani reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve negatif olmayan tam sayılar kümeleri, ayrıca $h \in \mathbb{R}$ ve $q > 1$ olmak üzere

$$[0,1] \cup [2,3], \quad [0,1] \cup \mathbb{N}, \quad h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \overline{q^{\mathbb{Z}}} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

kümeleri birer zaman skalasıdır. Ancak,

$$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \quad \mathbb{C}, \quad (0,1)$$

yani rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, kompleks sayılar kümeleri ve $(0,1)$ açık aralığı birer zaman skalası değildir (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

Herhangi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası, $t, s \in \mathbb{T}$ için $d(t, s) = |t - s|$ metriğine göre bir tam metrik uzaydır. Sonuç olarak, metrik uzaylar teorisine göre açık aralık, bir noktanın komşuluğu, açık küme, kapalı küme, kompakt küme vb. gibi temel tanım ve kavramlar zaman skalası analizi için geçerlidir. Ayrıca tam metrik uzayların genel teorisine göre, verilen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ fonksiyonları için limit, süreklilik gibi temel kavramlara ve sürekli fonksiyonların özelliklerine de sahip bulunuyoruz (Bohner ve Guseinov, 2010).

Tanım 2.4.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} \quad \text{ve} \quad \rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

ile tanımlanan $\sigma, \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörlerine sırasıyla ileri sıçrama (forward jump) ve geri sıçrama (backward jump) operatörleri denir. Belirtilmelidir ki, bu tanımda uygunluk açısından $\inf \emptyset := \sup \mathbb{T}$ (yani $\mathbb{T}$ bir $\max \mathbb{T}$ noktasına sahipse $\sigma(\max \mathbb{T}) = \max \mathbb{T}$) ve $\sup \emptyset := \inf \mathbb{T}$ (yani $\mathbb{T}$ bir $\min \mathbb{T}$ noktasına sahipse $\rho(\min \mathbb{T}) = \min \mathbb{T}$) olarak tanımlanmıştır. $\mathbb{T}$ reel sayıların kapalı bir alt kümesi olduğundan her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ ve $\rho(t) \in \mathbb{T}$'dir ve her iki sıçrama operatörü de iyi tanımlıdır. Ayrıca her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \geq t$ ve $\rho(t) \leq t$ olduğu kolaylıkla görülebilir. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

Tanım 2.4.3. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olsun.

i. $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ-saçılmış (right-scattered) nokta denir.

ii. $\sigma(t) = t$ ve $t < \sup \mathbb{T}$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ-yoğun (right-dense) nokta denir.

iii. $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sol-saçılmış (left-scattered) nokta denir.

iv. $\rho(t) = t$ ve $t > \inf \mathbb{T}$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sol-yoğun (left-dense) nokta denir.

v. t hem sağ-yoğun hem de sol-yoğun nokta ise $t \in \mathbb{T}$ ye yoğun (dense) nokta denir.

vi. $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye izole (isolated) nokta denir (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

Tanım 2.4.4. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\mu(t) := \sigma(t) - t \quad \text{ve} \quad \nu(t) := t - \rho(t)$$

ile tanımlanan $\mu, \nu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonlarına sırasıyla ileri graininess (forward graininess) ve geri graininess (backward graininess) fonksiyonları denir (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

Örnek 2.4.5.

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ seçilirse $\sigma(t) = t$, $\rho(t) = t$ olduğu görülür. Ayrıca her $t \in \mathbb{R}$ için $\mu(t) = \nu(t) = 0$'dır.

ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ seçilirse $\sigma(t) = t+1$, $\rho(t) = t-1$ olduğu görülür. Ayrıca her $t \in \mathbb{Z}$ için $\mu(t) = \nu(t) = 1$'dir.

iii. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ve $h > 0$ seçilirse $\sigma(t) = t + h$, $\rho(t) = t - h$ olduğu görülür. Ayrıca her $t \in h\mathbb{Z}, h > 0$ için $\mu(t) = \nu(t) = h$'dir.

iv. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ve $h < 0$ seçilirse $\sigma(t) = t - h$, $\rho(t) = t + h$ olduğu görülür. Ayrıca her $t \in h\mathbb{Z}, h < 0$ için $\mu(t) = \nu(t) = -h$'dir.

v. Eğer $q > 1$ için $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ seçilirse $\sigma(t) = qt$, $\rho(t) = t/q$ olduğu görülür. Ayrıca her $t \in \overline{q^{\mathbb{Z}}}, q > 1$ için $\mu(t) = (q-1)t$'dir.

Zaman skalasında Δ-türevi tanımlayabilmek için $\mathbb{T}$'den elde edilen Δ-türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}^\kappa$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.4.6. (Bohner ve Peterson, 2001) Eğer $\mathbb{T}$ zaman skalası sol-saçılmış bir maksimum M elemanına sahipse $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{M\}$, diğer durumlarda $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ olarak tanımlanır. Yani

$$\mathbb{T}^\kappa := \begin{cases} \mathbb{T} \backslash \left(\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}\right], & \sup \mathbb{T} < \infty \text{ ise ;} \\ \mathbb{T}, & \sup \mathbb{T} = \infty \text{ ise.} \end{cases}$$

Tanım 2.4.7. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) = (f \circ \sigma)(t)$$

ve $f^\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^\rho(t) = f(\rho(t)) = (f \circ \rho)(t)$$

ile tanımlanır. Yani $f^\sigma = f \circ \sigma$ ve $f^\rho = f \circ \rho$ 'dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.4.8. i. $U \subset \mathbb{T}$ olmak üzere, her $\delta > 0$ için $U_\delta(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \delta\}$ kümesine t nin δ komşuluğu denir. t nin sol ve sağ komşulukları sırasıyla

$$U_\delta^-(t) = \{s \in \mathbb{T} : t - \delta < s < t\} \quad \text{ve} \quad U_\delta^+(t) = \{s \in \mathbb{T} : t < s < t + \delta\}$$

ile tanımlanır.

ii. Eğer her $\delta > 0$ için $U_\delta^-(t) \neq \emptyset$ ise, t ye U için sol limit noktası ve $U_\delta^+(t) \neq \emptyset$ ise, t ye U için sağ limit noktası denir.

iii. Eğer her $\delta > 0$ için $U_\delta^-(t) = \emptyset$ ise, t ye U için soldan ayrılmış nokta ve $U_\delta^+(t) = \emptyset$ ise, t ye U için sağdan ayrılmış nokta denir (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

Tanım 2.4.9. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon, \quad \text{her } t \in U(t_0) \text{ için}$$

olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna $t_0 \in \mathbb{T}$ noktasında süreklidir denir (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

2.5. Zaman Skalasında Delta Türev

Tanım 2.5.1. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için t nin bir U komşuluğu varsa (yani $\delta > 0$ olmak üzere $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ varsa) öyle ki her $s \in U$ için,

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|$$

şartı sağlanıyorsa, bu eşitsizlikteki $f^{\Delta}(t)$ sayısına f nin t noktasındaki delta türevi veya Hilger türevi denir. Her bir $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ mevcutsa, f fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde delta türevlenebilirdir veya kısaca türevlenebilirdir denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.5.2. Delta türev iyi tanımlıdır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Örnek 2.5.3. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha \in \mathbb{R}$ ile tanımlansın. Bu takdirde, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ ve $s \in (t-1, t+1) \cap \mathbb{T}$ için

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - 0[\sigma(t) - s]\right| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|$$

sağlandığından $f^{\Delta}(t) = 0$ dır.

Örnek 2.5.4. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ ile tanımlansın. Bu takdirde, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ ve $s \in (t-1, t+1) \cap \mathbb{T}$ için

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - 1[\sigma(t) - s]\right| = |\sigma(t) - s - \sigma(t) + s| = 0 \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|$$

sağlandığından $f^{\Delta}(t) = 1$ dir.

Uyarı 2.5.5. $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ $(t \neq \min \mathbb{T})$ ve $\rho(t) = t < \sigma(t)$ olsun. Bu takdirde σ sıçrama operatörü, $t \in \mathbb{T}$ noktasında Δ-türevlenebilir değildir.

Teorem 2.5.6. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Bu takdirde,

(i) f fonksiyonu t noktasında Δ-türevlenebilirse, f fonksiyonu t de süreklidir.

(ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağ-saçılmış ise, f fonksiyonu t noktasında Δ-türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

dir.

(iii) t sağ-yoğun nokta ise, f fonksiyonunun t de Δ-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin sonlu olarak mevcut olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

(iv) f fonksiyonu t noktasında Δ-türevlenebilir ise,

$$f(\sigma(t)) = f(t) + f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

eşitliği geçerlidir (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.5.7. Bazı zaman skalası örnekleri için $f^{\Delta}(t)$ türevini inceleyelim.

1. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t \in \mathbb{R}$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart, $\lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limitinin sonlu olarak var olmasıdır ve bu türev $f'(t)$ ile gösterilir. O halde Teorem 2.5.6 dan dolayı

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

dir.

2. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ noktasında Δ-türevlenebilir olsun. Bu takdirde Teorem 2.5.6 dan, Δ bilinen ileri fark operatörü olmak üzere

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

olduğu görülür.

3. $q > 1$ için $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ zaman skalasını göz önüne alalım. Bu takdirde, $t = q^m \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{q^n : n \in [m+1, \infty)\} = q^{m+1} = qt$$

olduğu görülür ve $t = 0$ için $\sigma(0) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = qt$ ve $\mu(t) = \sigma(t) - t = (q-1)t$ elde edilir. 0 noktası bir sağ-yoğun minimum noktadır ve $\mathbb{T}$ nin diğer bütün noktaları izole noktalardır. Bu durumda bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ-türevi, her $t \in \mathbb{T}\backslash\{0\}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}$$

ve $t = 0$ için

$$f^{\Delta}(0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s} = \lim_{s \to 0} \frac{f(s) - f(0)}{s}, \quad \text{(limit mevcut ise)}$$

dir.

Teorem 2.5.8. $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında Δ-türevlenebilir fonksiyonlar ve $\alpha \in \mathbb{R}$ herhangi bir sabit olsun. Bu takdirde,

(i) $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

dir.

(ii) $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

dir.

(iii) $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))$$

dir.

(iv) $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere $1/f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

dir.

(iv) $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere $f/g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.5.9. $f, g, h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Δ-türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
(fgh)^\Delta(t) &= (fg)^\Delta(t)h(t) + (fg)(\sigma(t))h^\Delta(t) \\
&= \left(f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)\right)h(t) + f(\sigma(t))g(\sigma(t))h^\Delta(t) \\
&= f^\Delta(t)g(t)h(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)h(t) + f(\sigma(t))g(\sigma(t))h^\Delta(t)
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.5.10. α bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde,

(i) $f(t) = (t-\alpha)^m$ ile tanımlanan f fonksiyonu için,

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^v (t-\alpha)^{m-1-v},$$

(ii) $g(t)=\frac{1}{(t-\alpha)^m}$ ile tanımlanan g fonksiyonu için, $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha)\neq 0$ olmak üzere,

$$g^{\Delta}(t)=-\sum_{v=0}^{m-1}\frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-v}(t-\alpha)^{v+1}}$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.5.11. a. $f(t)=t^2$ için,

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \sum_{v=0}^{1}(\sigma(t))^{v}\,t^{1-v}=t+\sigma(t) \\ &= \begin{cases} 2t, & \mathbb{T}=\mathbb{R} \text{ ise;} \\ 2t+1, & \mathbb{T}=\mathbb{Z} \text{ ise;} \\ (q+1)t, & \mathbb{T}=\overline{q^{\mathbb{Z}}},\ q>1 \text{ ise.} \end{cases} \end{aligned}$$

b. $g(t)=1/t$ için,

$$g^{\Delta}(t)=-\frac{1}{t\sigma(t)}=\begin{cases} -1/t^2, & \mathbb{T}=\mathbb{R} \text{ ise;} \\ -\frac{1}{t^2+t}, & \mathbb{T}=\mathbb{Z} \text{ ise;} \\ -1/qt^2, & \mathbb{T}=\overline{q^{\mathbb{Z}}},\ q>1 \text{ ise.} \end{cases}$$

c. $h(t)=(t-2)^3$ için,

$$\begin{aligned} h^{\Delta}(t) &= \sum_{v=0}^{2}(\sigma(t)-2)^{v}(t-2)^{2-v}=(t-2)^2+(\sigma(t)-2)(t-2)+(\sigma(t)-2)^2 \\ &= \begin{cases} 3(t-2)^2, & \mathbb{T}=\mathbb{R} \text{ ise;} \\ 3t^2-9t+7, & \mathbb{T}=\mathbb{Z} \text{ ise;} \\ 7t^2-18t+12, & \mathbb{T}=\overline{2^{\mathbb{Z}}} \text{ ise.} \end{cases} \end{aligned}$$

d. $p(t) = 1/t^2$ için,

$$\begin{aligned} p^{\Delta}(t) &= -\sum_{v=0}^{1} \frac{1}{(\sigma(t))^{2-v} t^{v+1}} = -\frac{t+\sigma(t)}{(t\sigma(t))^2} \\ &= \begin{cases} -2/t^3, & \mathbb{T} = \mathbb{R} \text{ ise;} \\ -\frac{2t+1}{t^2(t+1)^2}, & \mathbb{T} = \mathbb{Z} \text{ ise;} \\ -4/9t^3, & \mathbb{T} = \overline{3^{\mathbb{Z}}} \text{ ise.} \end{cases} \end{aligned}$$

Teorem 2.5.12. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde Δ-türevlenebilir ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu takdirde,

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = f'(g(\zeta))\, g^{\Delta}(t)$$

olacak şekilde $\zeta \in [t, \sigma(t)]$ vardır (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

Örnek 2.5.13. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = t^3 + 1$ ve $g(t) = t^2$ olsun. Açıkça görülmektedir ki $\sigma(t) = t + 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde Δ-türevlenebilir ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilirdir. Bu takdirde, $\zeta \in [1, \sigma(1)] = [1, 2]$ olmak üzere $g^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t$ ve

$$(f \circ g)^{\Delta}(1) = f'(g(\zeta))\, g^{\Delta}(1) = 3g^2(\zeta)(\sigma(1) + 1) = 9\zeta^4$$

dir. Ayrıca,

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = g^3(t) + 1 = t^6 + 1$$

olduğundan

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = (\sigma(t))^5 + t(\sigma(t))^4 + t^2(\sigma(t))^3 + t^3(\sigma(t))^2 + t^4(\sigma(t))^2 + t^5$$

ve

$$(f \circ g)^{\Delta}(1) = (\sigma(1))^5 + (\sigma(1))^4 + (\sigma(1))^3 + (\sigma(1))^2 + (\sigma(1))^2 + 1 = 63$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$63 = 9\zeta^4 \quad \text{ve} \qquad \zeta = \sqrt[4]{7} \in [1,2]$$

dir.

Teorem 2.5.14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ-türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu takdirde $f \circ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ-türevlenebilirdir ve

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} g^{\Delta}(t)$$

formülü geçerlidir (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.5.15. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} := f(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $g : \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ ve $g^{\tilde{\Delta}}(f(t))$ varsa, bu takdirde

$$(g \circ f)^{\Delta} = \left(g^{\tilde{\Delta}} \circ f\right) f^{\Delta}$$

dır. Burada $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\mathbb{T}}$'da tanımlı Hilger türevidir (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

Sonuç 2.5.16. Teorem 2.5.15 de özel olarak $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}$ alınırsa, bu takdirde

$$(g \circ f)^{\Delta} = \left(g^{\Delta} \circ f\right) f^{\Delta}$$

dır (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.5.17. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} := f(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Bu takdirde, f^{Δ} nın sıfırdan farklı olduğu noktalarda

$$\frac{1}{f^{\Delta}} = \left(f^{-1}\right)^{\tilde{\Delta}} \circ f$$

dır. Burada $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\mathbb{T}}$'da tanımlı Hilger türevidir (Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Bohner ve Georgiev, 2016).

2.6. Zaman Skalasında Delta İntegral

Zaman skalasında integrasyon kavramını tanımlayabilmek için, önce anti-türevlere sahip fonksiyonların uygun bir sınıfı elde edilmelidir. Bu amaçla aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır.

Tanım 2.6.1. Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun tüm sağ-yoğun noktalardaki sağdan limitleri sonlu olarak var ve tüm sol-yoğun noktalardaki soldan limitleri sonlu olarak varsa f fonksiyonuna düzenli (regulated) fonksiyon denir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Tanım 2.6.2. Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm sağ-yoğun noktalarda sürekli ve tüm sol-yoğun noktalarda soldan sonlu limitlere sahipse f fonksiyonuna rd-sürekli (right-dense continuous) denir ve rd-sürekli tüm $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesi $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ veya $C_{rd}(\mathbb{T})$ ile gösterilir. Türevlenebilir ve türevi rd-sürekli olan $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesi de $C^1_{rd}(\mathbb{T})$ ile gösterilir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Örnek 2.6.3. $\mathbb{T} = [0, 1] \cup \mathbb{N}$ olması durumunda $\mu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu rd-süreklidir. Ancak $t = 1$ noktasında sürekli değildir.

Teorem 2.6.4. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

(i) f sürekli ise, rd-süreklidir.

(ii) f rd-sürekli ise, düzenlidir.

(iii) σ operatörü rd-süreklidir.

(iv) f düzenli veya rd-sürekli ise, f^σ fonksiyonu da aynı özelliğe sahiptir.

(v) f sürekli olmak üzere, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli veya rd-sürekli ise, $f \circ g$ fonksiyonu da aynı özelliğe sahiptir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Tanım 2.6.5. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun ve bir $D \subset \mathbb{T}^\kappa$ bölgesi için aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) f fonksiyonu D bölgesindeki tüm noktalarda türevlenebilirdir.

(ii) $\mathbb{T}^\kappa \backslash D$ bölgesi sağ-saçılmış nokta içermeyen sayılabilir bir kümedir.

Bu takdirde, f fonksiyonuna D bölgesinde ön-türevlenebilirdir (pre-differentiable) denir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.6. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $t \in D$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ sağlanacak şekilde D türevlenebilirlik bölgesinde ön-türevlenebilir bir F fonksiyonu vardır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Tanım 2.6.7. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, Teorem 2.6.6 de belirtilen şartları sağlayan F fonksiyonuna f fonksiyonunun ön-antitürevi (pre-antiderivative) denir. c keyfi bir sabit olmak üzere,

$$\int f(\eta)\,\Delta\eta = F(t) + c$$

ifadesine düzenli f fonksiyonunun belirsiz integrali (indefinite integral) denir. f fonksiyonunun Cauchy integrali ise, $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\int_a^b f(\eta)\,\Delta\eta = F(b) - F(a)$$

ile tanımlıdır. Ayrıca, her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ sağlanıyorsa, $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun antitürevi olarak adlandırılır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Örnek 2.6.8. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = 3t^2 + 5t + 2$ alalım. $g(t) = t^3 + t^2$ fonsiyonu için,

$$g^{\Delta}(t) = (\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2 + \sigma(t) + t = 3t^2 + 5t + 2$$

olduğundan

$$\int \left(3t^2 + 5t + 2\right)\Delta t = t^3 + t^2 + c.$$

Örnek 2.6.9. $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}}$ ve $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}$ alalım. $g(t) = \sin t$ fonsiyonu için,

$$g^{\Delta}(t) = \frac{\sin\sigma(t) - \sin t}{\sigma(t) - t} = \frac{\sin(2t) - \sin t}{t} = \frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}$$

olduğundan

$$\int \frac{2}{t} \sin \frac{t}{2} \cos \frac{3t}{2} \Delta t = \sin t + c.$$

Teorem 2.6.10. Her rd-sürekli fonksiyonun antitürevi vardır. Özel olarak sabit bir $a \in \mathbb{T}$ ve $t \in \mathbb{T}$ için

$$F(t) := \int_a^t f(\eta) \Delta\eta$$

ile tanımlı F fonksiyonu, f fonksiyonunun antitürevidir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.11. Kabul edelim ki $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Bu takdirde,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\eta) \Delta\eta = \mu(t) f(t)$$

dir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.12. $f^{\Delta}(t) \geq 0$ ise, bu takdirde f azalmayandır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Tanım 2.6.13. Kabul edelim ki f fonksiyonu $[a, b)$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon ve $[a, b)$ aralığının bir parçalanması

$$P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$$

olsun. $i \in \{1, ..., b\}$ olmak üzere her bir $[t_{i-1}, t_i)$ aralığının içinde keyfi bir ξ_i noktası seçelim ve

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

formundaki toplamı göz önüne alalım. Bu takdirde S ye f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen bir Riemann Δ-toplamı denir. Ayrıca, aşağıdaki özelliği sağlayan bir I sayısı varsa, f fonksiyonuna a dan b ye (ya da $[a, b)$ üzerinde) Riemann Δ-integrallenebilirdir denir:
"Her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki f fonksiyonunun bir $P \in \mathcal{P}_{\delta}([a, b))$ parçalanmasına karşılık gelen her Riemann Δ-toplamı için, $i \in \{1, ..., n\}$ olmak üzere $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i)$ nin seçiliş yolundan bağımsız olarak, $\mid S - I \mid < \varepsilon$ kalır."

Kolaylıkla görülebilir ki bu özelliği sağlayan bir I sayısı tektir. Buradaki I sayısı, f fonksiyonunun a dan b ye Riemann Δ-integrali olarak adlandırılır (Bohner ve Georgiev, 2016; Guseinov, 2003).

Teorem 2.6.14. Eğer f fonksiyonu $[a, b)$ üzerinde Δ-integrallenebilirse, bu takdirde keyfi bir α pozitif sabiti için $|f|^{\alpha}$ fonksiyonu da $[a, b)$ üzerinde Δ-integrallenebilirdir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.15. f fonksiyonu, $[a, b)$ üzerinde Δ-integrallenebilen sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $[a, b)$ aralığının her $[c, d)$ alt aralığı üzerinde Δ-integrallenebilirdir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.16. f ve g fonksiyonları, $[a, b)$ üzerinde Δ-integrallenebilir olsun. Bu takdirde fg fonksiyonu da $[a, b)$ üzerinde Δ-integrallenebilirdir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.17. f, $[a, b)$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $a < c < b$ olacak şekilde $c \in \mathbb{T}$ olsun. Eğer f, a dan c ye ve c den b ye Δ-integrallenebilirse, bu takdirde f fonksiyonu $[a, b)$ üzerinde Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(\eta)\,\Delta\eta = \int_a^c f(\eta)\,\Delta\eta + \int_c^b f(\eta)\,\Delta\eta$$

dir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.18. f ve g fonksiyonları, $[a, b)$ üzerinde Δ-integrallenebilir ve her $t \in [a, b)$ için $f(t) \leq g(t)$ olsun. Bu takdirde,

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t$$

dir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.19. Eğer f fonksiyonu $[a, b)$ üzerinde Δ-integrallenebilirse, bu takdirde $|f|$ fonksiyonu da $[a, b)$ üzerinde Δ-integrallenebilirdir ve

$$\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\Delta t$$

dir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.20. f ve g fonksiyonları, $[a,b)$ üzerinde Δ-integrallenebilir ise bu takdirde,

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b |f(t)\,g(t)|\Delta t \leq \left(\sup_{\tau\in[a,b)} |f(t)|\right)\int_a^b |g(t)|\Delta t$$

dir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.21. Kabul edelim ki $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $[a,b)$ üzerinde Δ-integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi olsun ve f, $[a,b)$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $[a,b)$ üzerinde $f_n \to f$ düzgün olarak yakınsasın. Bu takdirde f fonksiyonu $[a,b)$ üzerinde Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,\Delta t$$

dir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.22. Kabul edelim ki $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$, $[a,b)$ üzerinde Δ-integrallenebilir g_k fonksiyonlarının bir serisi olsun ve g, $[a,b)$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $g_k \to g$ düzgün olarak yakınsasın. Bu takdirde g fonksiyonu $[a,b)$ üzerinde Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b g(t)\,\Delta t = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b g_k(t)\,\Delta t$$

dir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.23. f fonksiyonu $[a,b)$ üzerinde Δ-integrallenebilir olsun. Eğer f fonksiyonu $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ile tanımlı antitüreve sahipse, bu takdirde

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = F(b) - F(a)$$

dır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Örnek 2.6.24. $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası ve $a,b\in\mathbb{T}$, $a<b$ olsun. Bu takdirde,

$$f(t) = c, \qquad t\in\mathbb{T}$$

şeklindeki her sabit fonksiyon, a dan b ye Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b c\Delta t = c\,(b-a)$$

dır.

Örnek 2.6.25. $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası ve $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{\Delta} = -\frac{1}{t\sigma(t)}$$

olduğundan

$$\int_a^b \frac{1}{t\sigma(t)}\Delta t = -\frac{1}{t}\bigg|_a^b = -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{b-a}{ab}$$

dir.

Teorem 2.6.26. $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T})$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\,\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$;

(ii) $\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$;

(iii) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$;

(iv) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$;

(v) $\int_a^b f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t) g(t)\Delta t$;

(vi) $\int_a^b f(t) g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t) g(\sigma(t))\,\Delta t$;

(vii) $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$;

(viii) $[a, b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise, bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t;$$

(ix) Her $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise, bu takdirde $\int_a^b f(t)\,\Delta t \geq 0$ dır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.26 da verilen (v) ve (vi) formülleri kısmi integrasyon formülleri olarak adlandırılır. Ayrıca, bu teoremde verilen bütün formüllerin, f ve g nin düzenli fonksiyon olması durumunda da geçerli olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 2.6.27. (Bohner ve Georgiev, 2016) $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ olsun.

a. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise, bu takdirde

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt$$

dir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki integral, klasik analizden bilinen Riemann integralidir.

b. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise, bu takdirde

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \text{ ise;} \\ 0, & a = b \text{ ise;} \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b \text{ ise.} \end{cases}$$

c. $[a, b]$ aralığı sadece izole noktaları içeriyorsa, bu takdirde

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t), & a < b \text{ ise;} \\ 0, & a = b \text{ ise;} \\ -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t) f(t), & a > b \text{ ise.} \end{cases}$$

Örnek 2.6.28. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için

$$I = \int_{-2}^{3} \left(t^2 + t + 1\right) \Delta s$$

integralini hesaplayalım. $f(t) = t^2 + t + 1$ ve $F(t) = \frac{t^3+2t}{3}$ için,

$$F^{\Delta}(t) = \frac{1}{3}\left((t+1)^2 + t(t+1) + t^2\right) + \frac{2}{3} = t^2 + t + 1 = f(t)$$

olduğundan

$$I = \int_{-2}^{3} \left(t^2 + t + 1\right) \Delta s = F(3) - F(-2) = 15$$

elde edilir.

Örnek 2.6.29. $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$ için

$$I = \int_{1}^{4} \frac{1}{t} \left(\sin \frac{t}{2} \sin \frac{3t}{2} + t^3\right) \Delta s$$

integralini hesaplayalım. $\mathbb{T}$ nin tüm noktaları izole nokta ve $\sigma(t) = 2t$ olduğundan,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{t \in \{1,2\}} \mu(t) \left(\frac{\sin \frac{t}{2} \sin \frac{3t}{2}}{t} + t^2 \right) = \sin \frac{1}{2} \sin \frac{3}{2} + 1 + 2 \left(\frac{\sin 1 \sin 3}{2} + 4 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 1 - \cos 2 + \cos 2 - \cos 4) + 9 = \sin \frac{3}{2} \sin \frac{5}{2} + 9 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.6.30. Eğer f ve f^{Δ} fonksiyonları sürekli ise,

$$\left(\int_{a}^{t} f(t,s) \Delta s \right)^{\Delta} = f(\sigma(t), t) + \int_{a}^{t} f^{\Delta}(t,s) \Delta s$$

dir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.6.31. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} := f(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Bu takdirde, $g \in C_{rd}(\mathbb{T})$ ve $f \in C_{rd}^{1}(\mathbb{T})$ olmak üzere, $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_{a}^{b} g(\eta) f^{\Delta}(\eta) \Delta\eta = \int_{f(a)}^{f(b)} \left(g \circ f^{-1}\right)(\zeta) \tilde{\Delta}\zeta$$

veya diğer bir ifadeyle

$$\int_{a}^{b} g(f(\eta)) f^{\Delta}(\eta) \Delta\eta = \int_{f(a)}^{f(b)} g(\zeta) \tilde{\Delta}\zeta$$

dir. Burada $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\mathbb{T}}$'da tanımlı Hilger türevidir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Sonuç 2.6.32. Teorem 2.6.31 deki şartlar altında özel olarak $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}$ alınırsa, bu takdirde

$$\int_a^b g(f(\eta))f^{\Delta}(\eta)\Delta\eta = \int_{f(a)}^{f(b)} g(\eta)\Delta\eta$$

dir.

2.7. Zaman Skalasında Genelleştirilmiş İntegraller

Bu bölüm boyunca, $\mathbb{T}$ zaman skalasının üstten sınırsız olduğu kabul edilecektir.

Tanım 2.7.1. Kabul edelim ki $f : [a, \infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a dan bir $A \in \mathbb{T}$, $A \geq a$ noktasına kadar integrallenebilir olsun. Ayrıca kabul edelim ki

$$F(A) = \int_a^A f(t)\Delta t$$

integrali, $A \to \infty$ iken sonlu bir limite yakınsasın. Bu takdirde bu limit, birinci tipten genelleştirilmiş integral olarak adlandırılır ve

$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t = \lim_{A\to\infty} \left\{ \int_a^A f(t)\Delta t \right\} \tag{2.7.32}$$

yazılır. Bu durumda

$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t \tag{2.7.33}$$

genelleştirilmiş integrali yakınsaktır denir. Eğer (2.7.32) limiti mevcut değilse, bu integral ıraksaktır denir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Örnek 2.7.2. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun.

$$I = \int_1^{\infty} \frac{3t^2 + 3t + 1}{t^3(t+1)^3}\Delta t$$

integralini göz önüne alalım. $\sigma(t) = t + 1$ olduğundan $F(t) = 1/t^3$ fonksiyonu için,

$$F^{\Delta}(t) = -\frac{(\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2}{t^3(\sigma(t))^3} = -\frac{3t^2 + 3t + 1}{t^3(t+1)^3}$$

bulunur. Bu yüzden de

$$I = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{3t^2+3t+1}{t^3(t+1)^3}\Delta t = -\lim_{A\to\infty}(F(A)-F(1)) = -\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{A^3}-1\right) = 1$$

elde edilir.

Örnek 2.7.3. $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$ olsun.

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{t^3}\Delta t$$

integralini göz önüne alalım. $\sigma(t) = 2t$ olduğundan $F(t) = 1/t^2$ fonksiyonu için,

$$F^\Delta(t) = -\frac{\sigma(t)+t}{t^2\left(\sigma(t)\right)^2} = -\frac{3}{4t^3}$$

bulunur. Bu yüzden de

$$I = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{t^3}\Delta t = -\frac{4}{3}\lim_{A\to\infty}(F(A)-F(1)) = -\frac{4}{3}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{A^2}-1\right) = \frac{4}{3}$$

elde edilir.

Örnek 2.7.4. $\mathbb{T} = 3^{\mathbb{N}_0}$ olsun.

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\Delta t$$

integralini göz önüne alalım. $\sigma(t) = 3t$ olduğundan $F(t) = \sqrt{t}$ fonksiyonu için,

$$F^\Delta(t) = \frac{\sqrt{\sigma(t)}-\sqrt{t}}{\sigma(t)-t} = \frac{1}{\sqrt{3t}+\sqrt{t}}$$

bulunur. Bu yüzden de

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{\sqrt{t}}\Delta t = (\sqrt{3}+1)\lim_{A\to\infty}(F(A)-F(1)) == (\sqrt{3}+1)\lim_{A\to\infty}\left(\sqrt{A}-1\right) = \infty$$

elde edilir. Yani bu integral ıraksaktır.

Teorem 2.7.5. Her $t \geq a$ için $f(t) \geq 0$ olmak üzere (2.7.33) integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart, $A \geq a$ için

$$\int_a^A f(t)\Delta t \le M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin var olmasıdır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.7.6. (Bohner ve Georgiev, 2016) Her $t \in [a, \infty)$ için $0 \le f(t) \le g(t)$ olsun. Bu takdirde,

(i)

$$\int_a^\infty g(t)\Delta t \tag{2.7.34}$$

genelleştirilmiş integrali yakınsaksa, (2.7.33) yakınsaktır.

(ii) (2.7.33) genelleştirilmiş integrali ıraksaksa, (2.7.34) ıraksaktır.

Örnek 2.7.7. $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$ olsun.

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{t^3(t^2+5)(t^2+7t+1)}\Delta t \tag{2.7.35}$$

integralini göz önüne alalım. Örnek 2.7.3 den görülmektedir ki $\int_1^\infty t^{-3}\Delta t$ integrali yakınsaktır. Ayrıca her $t \in [1, \infty)$ için,

$$\frac{1}{t^3(t^2+5)(t^2+7t+1)} \le \frac{1}{t^3}$$

olduğundan, (2.7.35) yakınsaktır.

Teorem 2.7.8. $t \ge a$ olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için $|f(t)| \le g(t)$ olsun. Bu takdirde, (2.7.34) genelleştirilmiş integrali yakınsaksa, (2.7.33) yakınsaktır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.7.9. $t \ge a$ olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) > 0$ ve $g(t) > 0$ olsun. Ayrıca,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = L$$

limiti mevcut (sonlu) ve sıfırdan farklı olsun. Bu takdirde, (2.7.33) ve (2.7.34) birinci tipten genelleştirilmiş integrallerinin yakınsaklık ve ıraksaklık durumları aynıdır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Teorem 2.7.10. f fonksiyonu a dan bir $A \in \mathbb{T}$, $A \geq a$ noktasına kadar integrallenebilir ve

$$F(A) = \int_a^A f(t)\Delta t$$

integrali, her $A \geq a$ için sınırlı olsun. Ayrıca kabul edelim ki g fonksiyonu $[a, \infty)$ üzerinde monoton ve $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\int_a^\infty f(t)g(t)\Delta t$$

birinci tipten genelleştirilmiş integrali yakınsaktır (Bohner ve Georgiev, 2016).

Tanım 2.7.11. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a < b$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. b noktası sol-yoğun olmak üzere f fonksiyonu $[a, b)$ üzerinde tanımlı, ayrıca f fonksiyonu $c < b$ olmak üzere her [a,c] aralığı üzerinde integrallenebilir ve $[a, b)$ üzerinde sınırsız olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b f(t)\Delta t \tag{2.7.36}$$

ifadesi ikinci tipten genelleştirilmiş integral olarak adlandırılır ve f fonksiyonu $t = b$ de singülerdir denir. Eğer

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(t)\Delta t \tag{2.7.37}$$

sol-taraflı limiti sonlu olarak mevcutsa, (2.7.36) integrali yakınsaktır denir ve

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(t)\Delta t \tag{2.7.38}$$

yazılır. Eğer (2.7.37) limiti mevcut değilse, (2.7.36) integrali ıraksaktır denir (Bohner ve Georgiev, 2016).

Örnek 2.7.12. $\mathbb{T} = [0,1] \cup 2^{\mathbb{N}}$ olsun. f fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2}, & t \in [0,1] \text{ ise;} \\ t^4, & t \in 2^{\mathbb{N}} \text{ ise;} \end{cases}$$

ile tanımlı olmak üzere

$$I = \int_0^8 \frac{1}{f(t)} \Delta t \tag{2.7.39}$$

integralini göz önüne alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{f(t)} \Delta t + \int_2^8 \frac{1}{f(t)} \Delta t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_2^8 \frac{1}{t^4} \Delta t \\ &= \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1}{t^4}\mu(t)\Big|_{t=2} + \frac{1}{t^4}\mu(t)\Big|_{t=4} \\ &= \lim_{c \to 1^-} \arcsin t \Big|_{t=0}^{t=c} + \frac{2}{16} + \frac{4}{256} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{9}{64} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2.7.39) yakınsaktır.

Lemma 2.7.13. Eğer U ve V negatif değilse ve $\lambda > 1$ ise, bu takdirde

$$\lambda U V^{\lambda-1} - U^{\lambda} \leq (\lambda - 1) V^{\lambda}$$

dir. Burada eşitlik ancak ve ancak $U = V$ olması durumunda sağlanır (Hardy ve ark., 1988).

Lemma 2.7.14. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun. Bu takdirde rd-sürekli $f, g : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için, $p > 1$ ve $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere

$$\int_a^b |f(s)\, g(s)| \, \Delta s \leq \left(\int_a^b |f(s)|^p \Delta s \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(s)|^q \Delta s \right)^{1/q}$$

dir. (Bohner ve Peterson, 2001, s. 259, Teorem 6.13)

3. BULGULAR

3.1. Üçüncü Mertebeden Neutral Dinamik Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılık ve Asimptotik Davranışı

Bu bölümde, α pozitif tek tam sayıların bir oranı ve $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere, üçüncü mertebeden lineer olmayan neutral

$$\left(r(t)\left(\left(x(t)+p(t)x(g(t))\right)^{\Delta\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}+f\left(t,x(h(t))\right)=0, \tag{3.1.1}$$

dinamik denkleminin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışı üzerinde durulacaktır. $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalası aralığı $t_0\in\mathbb{T}$ için

$$[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}:=[t_0,\infty)\cap\mathbb{T}$$

ile tanımlı olmak üzere, $t\geq t_n$ yazıldığında kastedilen $t\in[t_n,\infty)\cap\mathbb{T}$ olacaktır. Ayrıca, yeterince büyük $t\in\mathbb{T}$ ler için çözümlerin salınım ve asimptotik davranışı incelendiğinden, $\sup\mathbb{T}=\infty$ kabul edilecek ve bölüm boyunca aşağıdaki şartların sağlandığı kabul edilecektir.

(C1) $r:[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli rd-sürekli bir fonksiyon ve $\int\limits_{t_0}^{\infty}r^{-1/\alpha}(s)\Delta s=\infty$;

(C2) $p:[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ rd-sürekli bir fonksiyon, $p(t)\geq 1$, ve yeterince büyük t ler için $p(t)\not\equiv 1$;

(C3) $g,h:[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}\to\mathbb{T}$ fonksiyonları her $t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $g(t)<t$, g kesin artan ve

$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}h(t)=\infty$$

olacak şekilde rd-sürekli fonksiyonlar;

(C4) $f(t,u):[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, her $u\neq 0$ için $uf(t,u)>0$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ve $f(t,u)/u^{\alpha}\geq q(t)$ sağlanacak şekilde bir $q:[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ pozitif rd-sürekli fonksiyon vardır.

(3.1.1) denkleminde görülen sapma argümentleri için muhtemel

$$g(\sigma(t)) \geq h(t) \tag{3.1.2}$$

ve

$$g(\sigma(t)) \leq h(t) \tag{3.1.3}$$

durumlarının her ikisi de ayrı ayrı göz önüne alınacaktır. $z(t)$ fonksiyonu,

$$z(t) = x(t) + p(t)x(g(t)) \tag{3.1.4}$$

ile tanımlanırsa, (3.1.1) denklemi

$$\left(r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} + f\left(t, x(h(t))\right) = 0 \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılabilir.

$t_x \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere $z \in C^3_{rd}\left([t_x, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ ve $r\left(z^{\Delta\Delta}\right)^{\alpha} \in C^1_{rd}\left([t_x, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ özelliklerine sahip olan ve $[t_x, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde (3.1.1) denklemini sağlayan bir $x \in C_{rd}\left([t_x, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ fonksiyonuna (3.1.1) denkleminin bir çözümü denir. Bu çalışma boyunca, (3.1.1) denkleminin herhangi bir $t_x \geq t_0$ için $[t_x, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı ve her $T_1 \geq t_x$ için $\sup\{|x(t)| : t \geq T_1\} > 0$ özelliğine sahip çözümleri üzerinde durulacaktır. Üstelik, (3.1.1) denkleminin böyle çözümlere sahip olduğu da kabul edilmiştir. Böyle bir çözüm belli bir noktadan sonra işaretini koruyan fonksiyon değilse, yani sıfırlarının kümesi üstten sınırlı değilse, bu çözüme salınımlıdır denir, aksi takdirde salınımsızdır denir.

Son yıllarda, çeşitli yapıdaki fonksiyonel diferensiyel denklemlerin ve zaman skalasında fonksiyonel dinamik denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. İlgili literatür incelendiğinde, açıkça görülmektedir ki zaman skalasında üçüncü mertebeden neutral dinamik denklemlerin çözümlerinin salınım ve asimptotik davranışı üzerine verilen sonuçlar nispeten azdır ve mevcut sonuçların bir çoğu $0 \leq p(t) < p_0 < 1$, $-1 \leq p(t) < 0$, ve/veya $0 \leq \int_a^b p(t,\mu)\Delta\mu \leq p_0 < 1$ olması durumunda geçerlidir, örneğin bkz. (Chen ve Liu, 2008; Grace ve ark., 2012, 2016; Han ve ark., 2010; Hassan ve Grace, 2014; Huang, 2016; Şenel ve Utku, 2014).

Ancak, bildiğimiz kadarıyla, $p(t) \geq 1$ olması durumunda zaman skalasında üçüncü mertebeden neutral dinamik denklemlerin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışı ile ilgili bir sonuç görünmemektedir. Bu bölümde, $p(t) \geq 1$ için (3.1.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışı ile ilgili edilen yeni sonuçlar verilmiştir. Mevcut sonuçlar göz önüne alındığında, bu bölümde sunulan sonuçların $\alpha = 1$, $r(t) = 1$, $f(t, x(h(t))) = q(t)x^{\alpha}(h(t))$ için ve $b > 0$ ve $c > 0$ olmak üzere $g(t) = t - b$ ve $h(t) = t - c$ şeklinde gecikme argümentinin sabit olması durumlarında da yeni olduğu açıktır. Ayrıca, bu sonuçlar (3.1.1) denkleminden daha genel üçüncü mertebeden dinamik denklemlere kolaylıkla genişletilebilir.

Yazımda kolaylık olması açısından, temel sonuçlar verilirken aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

$$\beta_+^{\Delta}(t) := \max\left\{0, \beta^{\Delta}(t)\right\},$$

$$t \geq t_1 \ \text{ için } \ R_1(t, t_1) := \int_{t_1}^{t} \frac{\Delta s}{r^{1/\alpha}(s)}, \quad t \geq t_2 > t_1 \ \text{ için } \ R_2(t, t_2) := \int_{t_2}^{t} R_1(s, t_1)\Delta s,$$

$$\psi(t) := \begin{cases} \theta(t), & 0 < \alpha \leq 1 \\ \theta^{\alpha}(t), & \alpha > 1 \end{cases}, \quad \theta(t) := \frac{R_1(t, t_1)}{R_1(\sigma(t), t_1)},$$

Ayrıca belirtilmelidir ki, bu bölüm boyunca g^{-1} fonksiyonu, g nin ters fonksiyonu olmak üzere, yeterince büyük t ler için

$$\xi_1(t) := \frac{1}{p(g^{-1}(t))}\left(1 - \frac{1}{p(g^{-1}(g^{-1}(t)))}\right) > 0 \tag{3.1.6}$$

ve

$$\xi_2(t) := \frac{1}{p(g^{-1}(t))}\left(1 - \frac{1}{p(g^{-1}(g^{-1}(t)))}\frac{R_2(g^{-1}(g^{-1}(t)), t_2)}{R_2(g^{-1}(t), t_2)}\right) > 0 \tag{3.1.7}$$

olduğu kabul edilecektir.

$$\Psi_1(t) := \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2(g^{-1}(h(t)), t_2)}{R_1(\sigma(t), t_1)}\right)^{\alpha}$$

ve

$$\Psi_2(t) := \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(\sigma(t),t_2\right)}{R_1\left(\sigma(t),t_1\right)}\right)^{\alpha}.$$

3.2. Bazı Yardımcı Lemmalar

Lemma 3.2.1. Kabul edelim ki (C1)-(C4) şartları sağlansın ve $x(t)$, (3.1.1) denkleminin bir noktadan sonra (neticede) pozitif bir çözümü olsun. Bu takdirde $z(t)$, (3.1.4) deki gibi tanımlanmak üzere, yeterince büyük $t \in \mathbb{T}$ ler için, ya

(I) $z(t) > 0$, $z^{\Delta}(t) > 0$, $z^{\Delta\Delta}(t) > 0$ ve $\left(r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} < 0$

ya da

(II) $z(t) > 0$, $z^{\Delta}(t) < 0$, $z^{\Delta\Delta}(t) > 0$ ve $\left(r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} < 0$

dır.

İspat. İspat (Baculíková ve Džurina, 2010a, sf. 2, Lemma 1) kullanılarak kolaylıkla elde edilebileceğinden ayrıntılara yer verilmemiştir.

Lemma 3.2.2. Kabul edelim ki (C1)-(C4) şartları ve (3.1.6) sağlansın. Ayrıca $z(t)$ fonksiyonu Lemma 3.2.1 de belirtilen Durum (II)'yi sağlamak üzere $x(t)$, (3.1.1) denkleminin bir noktadan sonra pozitif olan bir çözümü olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{v}^{\infty}\frac{1}{r^{1/\alpha}(u)}\left(\int_{u}^{\infty}q(s)\left(\xi_1(h(s))\right)^{\alpha}\Delta s\right)^{1/\alpha}\Delta u\Delta v = \infty \tag{3.2.8}$$

ise, bu takdirde $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

İspat. $x(t)$, (3.1.1) denkleminin bir noktadan sonra pozitif olan bir çözümü olsun. Bu takdirde, $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $x(h(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. (C4) şartı göz önüne alınırsa, (3.1.1) ya da (3.1.5) denklemi

$$\left(r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} + q(t)x^{\alpha}(h(t)) \leq 0, \quad t \geq t_1 \text{ için} \tag{3.2.9}$$

formunda yazılabilir. (3.1.4) den (ayrıca bkz. (Agarwal ve ark., 2003))

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{p(g^{-1}(t))}\left(z(g^{-1}(t)) - x(g^{-1}(t))\right) \\ &= \frac{z(g^{-1}(t))}{p(g^{-1}(t))} - \frac{1}{p(g^{-1}(t))p(g^{-1}(g^{-1}(t)))}\left(z(g^{-1}(g^{-1}(t))) - x(g^{-1}(g^{-1}(t)))\right) \\ &\geq \frac{z(g^{-1}(t))}{p(g^{-1}(t))} - \frac{1}{p(g^{-1}(t))p(g^{-1}(g^{-1}(t)))} z(g^{-1}(g^{-1}(t))). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

olduğu görülür. $z(t)$ azalan fonksiyon ve $g(t) < t$ olduğundan

$$z\left(g^{-1}(t)\right) \geq z\left(g^{-1}(g^{-1}(t))\right)$$

dir. Buradan $t \geq t_1$ için (3.2.10) eşitsizliği

$$x(t) \geq \xi_1(t) z\left(g^{-1}(t)\right), \tag{3.2.11}$$

şeklinde yazılabilir. $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$ olduğundan, her $t \geq t_2$ için $h(t) \geq t_1$ olacak şekilde $t_2 \geq t_1$ seçilebilir. Bu nedenle (3.2.11) eşitsizliğinden, $t \geq t_2$ için

$$x(h(t)) \geq \xi_1(h(t)) z\left(g^{-1}(h(t))\right) \tag{3.2.12}$$

eşitsizliğine varılır. (3.2.12) göz önüne alınarak, $t \geq t_2$ için (3.2.9) denklemi

$$\left(r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} + q(t)\left(\xi_1(h(t))\right)^{\alpha} z^{\alpha}\left(g^{-1}(h(t))\right) \leq 0 \tag{3.2.13}$$

şeklinde yazılabilir. $z(t) > 0$ ve $z^{\Delta}(t) < 0$ olduğundan, $M \geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = M < \infty$$

olacak şekilde bir M sabiti vardır. Eğer $M > 0$ ise, bu takdirde $g^{-1}(h(t)) > t_2$ ve

$$z(t) \geq M, \quad t \geq t_3 \text{ için} \tag{3.2.14}$$

olacak şekilde $t_3 \geq t_2$ vardır. (3.2.13) eşitsizliği t den ∞ a kadar iki defa integrallenirse

$$-z^{\Delta}(t) \geq M \int_t^{\infty} \frac{1}{r^{1/\alpha}(u)} \left(\int_u^{\infty} q(s) \left(\xi_1(h(s))\right)^{\alpha} \Delta s \right)^{1/\alpha} \Delta u$$

elde edilir. Bu eşitsizlik t_3 den t ye kadar bir defa daha integrallenerek

$$z(t_3) \geq M \int_{t_3}^{t} \int_v^{\infty} \frac{1}{r^{1/\alpha}(u)} \left(\int_u^{\infty} q(s) \left(\xi_1(h(s))\right)^{\alpha} \Delta s \right)^{1/\alpha} \Delta u \Delta v$$

sonucuna varılır ki bu da (3.2.8) ile çelişir. O halde $M = 0$, yani $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ dır. $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $0 < x(t) \leq z(t)$ olduğundan $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ bulunur ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.3. Kabul edelim ki (C1)-(C4) şartları ve (3.1.7) sağlansın. Ayrıca $z(t)$ fonksiyonu Lemma 3.2.1 de belirtilen Durum (I)'i sağlamak üzere $x(t)$, (3.1.1) denkleminin bir noktadan sonra pozitif olan bir çözümü olsun. Bu takdirde yeterince büyük $t \in \mathbb{T}$ ler için

$$\left(r(t) \left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} + q(t) \left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha} z^{\alpha} \left(g^{-1}(h(t))\right) \leq 0 \qquad (3.2.15)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $x(t)$, (3.1.1) denkleminin bir noktadan sonra pozitif olan bir çözümü olsun. Bu takdirde, $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$, $x(h(t)) > 0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu (I) durumunu sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Lemma 3.2.2 nin ispatında izlenen yol takip edilirse, tekrar (3.2.9) ve (3.2.10) elde edilir. $r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}$ azalan olduğundan $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &= z^{\Delta}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{\left(r(s)\left(z^{\Delta\Delta}(s)\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}}{r^{1/\alpha}(s)} \Delta s \\ &\geq \left(r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} R_1(t, t_1) \qquad (3.2.16) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu yüzden de

$$\left(\frac{z^{\Delta}(t)}{R_1(t,t_1)}\right)^{\Delta} \leq 0 \tag{3.2.17}$$

dır. Dolayısıyla, $t \geq t_2$ için

$$\begin{aligned} z(t) &= z(t_2) + \int\limits_{t_2}^{t} \frac{z^{\Delta}(s)}{R_1(s,t_1)} R_1(s,t_1)\Delta s \\ &\geq \frac{R_2(t,t_2)}{R_1(t,t_1)} z^{\Delta}(t) \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

olacak şekilde $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve buradan

$$\left(\frac{z(t)}{R_2(t,t_2)}\right)^{\Delta} \leq 0, \quad t \geq t_2 \text{ için} \tag{3.2.19}$$

bulunur. $g^{-1}(t) \leq g^{-1}(g^{-1}(t))$ olduğu göz önüne alınarak, (3.2.19)'dan

$$\frac{R_2(g^{-1}(g^{-1}(t)),t_2) z(g^{-1}(t))}{R_2(g^{-1}(t),t_2)} \geq z(g^{-1}(g^{-1}(t))) \tag{3.2.20}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik (3.2.10) ifadesinde kullanılırsa $t \geq t_2$ için

$$x(t) \geq \xi_2(t) z\left(g^{-1}(t)\right) \tag{3.2.21}$$

elde edilir. $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$ olduğundan, her $t \geq t_3$ için $h(t) \geq t_2$ olacak şekilde $t_3 \geq t_2$ seçilebilir. Bu yüzden de (3.2.21) den, $t \geq t_3$ için

$$x(h(t)) \geq \xi_2(h(t)) z\left(g^{-1}(h(t))\right) \tag{3.2.22}$$

sonucuna ulaşılır. (3.2.22) ifadesi (3.2.9) eşitsizliğinde kullanılırsa (3.2.15) elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.3. Temel Sonuçlar

Teorem 3.3.1. Kabul edelim ki (C1)-(C4), (3.1.2), (3.1.6), (3.1.7), (3.2.8) şartları sağlansın, yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, ve $T > t_2 > t_1$ için

$$\limsup_{t\to\infty} \int_T^t \left[\Psi_1(s) - \frac{\beta_+^{\Delta}(s)}{(R_1(s,t_1))^{\alpha}}\right] \Delta s = \infty \tag{3.3.23}$$

olacak şekilde pozitif bir $\beta \in C_{rd}^1([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Bu takdirde (3.1.1) denkleminin bir $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır, ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ şartını sağlar.

İspat. (3.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü $x(t)$ olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$, $x(h(t)) > 0$ olacak, (3.1.6)-(3.1.7) sağlanacak ve $z(t)$ fonksiyonu, Lemma 3.2.1 de belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $x(t)$ bir noktadan sonra negatif olan bir çözüm olduğunda ispat benzer olacağından, sadece bu durum göz önüne alınacaktır.

Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 3.2.2 den, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

Şimdi kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Bu takdirde Lemma 3.2.3 ün ispatında izlenen yol takip edilirse tekrar (3.2.15), (3.2.16), (3.2.17), (3.2.18) ve (3.2.19) ifadelerine ulaşılır. $t \geq t_1$ için,

$$w(t) = \beta(t) \frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}} \tag{3.3.24}$$

şeklinde Riccati-tipi dönüşümü tanımlayalım. $w(t) > 0$ olduğu açıktır, ayrıca (3.3.24) ve (3.2.15) ifadelerinden $t \geq t_3$ için,

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) \;\; \leq \;\; & \beta_+^{\Delta}(t) \frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}} - \beta(\sigma(t)) q(t) \left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha} \frac{z^{\alpha}\left(g^{-1}(h(t))\right)}{\left(z(\sigma(t))\right)^{\alpha}} \frac{\left(z(\sigma(t))\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(\sigma(t))\right)^{\alpha}} \\ & - \beta(\sigma(t)) \frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\left(\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}\left(z^{\Delta}(\sigma(t))\right)^{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

olduğu görülür. (3.2.19) ifadesinde $g^{-1}(h(t)) \leq \sigma(t)$ olduğu kullanılırsa,

$$\frac{z\left(g^{-1}(h(t))\right)}{z(\sigma(t))} \geq \frac{R_2\left(g^{-1}(h(t)), t_2\right)}{R_2(\sigma(t), t_2)} \tag{3.3.26}$$

elde edilir. (3.2.18) eşitsizliği ve $t \leq \sigma(t)$ olduğu gerçeğinden,

$$\frac{z(\sigma(t))}{z^{\Delta}(\sigma(t))} \geq \frac{R_2(\sigma(t), t_2)}{R_1(\sigma(t), t_1)} \tag{3.3.27}$$

bulunur. (3.3.26) ve (3.3.27) eşitsizlikleri (3.3.25) ifadesinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) \quad &\leq \quad \beta_{+}^{\Delta}(t)\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}} - \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(g^{-1}(h(t)), t_2\right)}{R_1(\sigma(t), t_1)}\right)^{\alpha} \\ &\quad -\beta(\sigma(t))\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\left(\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}\left(z^{\Delta}(\sigma(t))\right)^{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

sonucuna varılır. Teorem 2.5.14 den elde edilen

$$\left(\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} \geq \begin{cases} \alpha\left(z^{\Delta}\right)^{\alpha-1}(\sigma(t))z^{\Delta\Delta}(t), & 0 < \alpha \leq 1 \text{ ise}, \\ \alpha\left(z^{\Delta}\right)^{\alpha-1}(t)z^{\Delta\Delta}(t), & \alpha > 1 \text{ ise}, \end{cases} \tag{3.3.29}$$

kullanılırsa, (3.3.28) eşitsizliği $0 < \alpha \leq 1$ ise

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) \quad &\leq \quad \beta_{+}^{\Delta}(t)\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}} - \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(g^{-1}(h(t)), t_2\right)}{R_1(\sigma(t), t_1)}\right)^{\alpha} \\ &\quad -\alpha\beta(\sigma(t))\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha+1}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha+1}}\frac{z^{\Delta}(t)}{z^{\Delta}(\sigma(t))}. \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

şeklinde, ve $\alpha > 1$ ise

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) \quad &\leq \quad \beta_{+}^{\Delta}(t)\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}} - \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(g^{-1}(h(t)), t_2\right)}{R_1(\sigma(t), t_1)}\right)^{\alpha} \\ &\quad -\alpha\beta(\sigma(t))\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha+1}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha+1}}\frac{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(\sigma(t))\right)^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, $t \leq \sigma(t)$ olduğundan, (3.2.17) kullanılarak

$$\frac{z^{\Delta}(t)}{z^{\Delta}(\sigma(t))} \geq \frac{R_1(t, t_1)}{R_1(\sigma(t), t_1)}. \tag{3.3.32}$$

elde edilir. (3.3.32) göz önüne alınarak, (3.3.30) ve (3.3.31) eşitsizlikleri birleştirilirse, $t \geq t_3$ olmak üzere $\alpha > 0$ için,

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) \quad &\leq \quad \beta_{+}^{\Delta}(t)\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}} - \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(g^{-1}\left(h(t)\right),t_2\right)}{R_1\left(\sigma(t),t_1\right)}\right)^{\alpha} \\ &\quad -\alpha\beta(\sigma(t))\psi(t)\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha+1}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha+1}} \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer yandan, (3.2.16) ifadesinden

$$\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}} \leq \frac{1}{\left(R_1(t,t_1)\right)^{\alpha}} \tag{3.3.34}$$

yazılabilir. (3.3.34), $z^{\Delta}(t) > 0$ ve $z^{\Delta\Delta}(t) > 0$ kullanılırsa, (3.3.33) eşitsizliğinden

$$w^{\Delta}(t) \leq \frac{\beta_{+}^{\Delta}(t)}{R_1^{\alpha}(t,t_1)} - \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(g^{-1}\left(h(t)\right),t_2\right)}{R_1\left(\sigma(t),t_1\right)}\right)^{\alpha} \tag{3.3.35}$$

olduğu görülür. (3.3.35) ifadesi t_3 den t ye kadar integrallenirse,

$$\int_{t_3}^{t}\left[\beta(\sigma(s))q(s)\left(\xi_2(h(s))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(g^{-1}\left(h(s)\right),t_2\right)}{R_1\left(\sigma(s),t_1\right)}\right)^{\alpha} - \frac{\beta_{+}^{\Delta}(s)}{R_1^{\alpha}(s,t_1)}\right]\Delta s \leq w(t_3)$$

sonucuna ulaşılır ki bu (3.3.23) ile çelişir. Dolayısıyla (3.1.1) denkleminin herhangi bir $x(t)$ çözümü bu şartlar altında ya salınımlıdır, ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

Teorem 3.3.2. Kabul edelim ki (C1)-(C4), (3.1.2), (3.1.6), (3.1.7), (3.2.8) şartları sağlansın. Eğer yeterince büyük her $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, ve $T > t_2 > t_1$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{T}^{t}\left[\Psi_1(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(s)\left(\beta_{+}^{\Delta}(s)\right)^{\alpha+1}}{\left[\beta(\sigma(s))\psi(s)\right]^{\alpha}}\right]\Delta s = \infty \tag{3.3.36}$$

olacak şekilde pozitif bir $\beta \in C_{rd}^{1}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (3.1.1) denkleminin bir $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır, ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. (3.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü $x(t)$ olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$, $x(h(t)) > 0$ olacak, (3.1.6)-(3.1.7) sağlanacak ve $z(t)$ fonksiyonu, Lemma 3.2.1 de belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $x(t)$ bir noktadan sonra negatif olan bir çözüm olduğunda ispat benzer olacağından, sadece bu durum göz önüne alınacaktır.

Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 3.2.2 den, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

Şimdi kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Teorem 3.3.1'in ispatında izlenen yol aynen takip edilirse tekrar (3.3.33) elde edilir. (3.3.24) dönüşümü göz önüne alınarak, (3.3.33) eşitsizliği, $t \geq t_3$ için

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) \quad &\leq \quad \frac{\beta_{+}^{\Delta}(t)}{\beta(t)} w(t) - \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(g^{-1}\left(h(t)\right), t_2\right)}{R_1\left(\sigma(t), t_1\right)}\right)^{\alpha} \\ &\quad -\alpha\beta(\sigma(t))\psi(t)\frac{1}{\beta^{(\alpha+1)/\alpha}(t) r^{1/\alpha}(t)} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \end{aligned} \tag{3.3.37}$$

formunda yazılabilir.

$$U = \frac{\left[\alpha\beta(\sigma(t))\psi(t)\right]^{1/\lambda}}{\left[\beta^{\lambda}(t) r^{1/\alpha}(t)\right]^{1/\lambda}} w(t), \quad \lambda = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

ve

$$V = \left[\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\left[\beta^{\lambda}(t) r^{1/\alpha}(t)\right]^{1/\lambda}}{\left[\alpha\beta(\sigma(t))\psi(t)\right]^{1/\lambda}}\frac{\beta_{+}^{\Delta}(t)}{\beta(t)}\right]^{\alpha}$$

olmak üzere, Lemma 2.7.13 uygulanırsa,

$$\frac{\beta_{+}^{\Delta}(t)}{\beta(t)} w(t) - \alpha\beta(\sigma(t))\psi(t)\frac{1}{\beta^{(\alpha+1)/\alpha}(t) r^{1/\alpha}(t)} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \leq \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(t)\left(\beta_{+}^{\Delta}(t)\right)^{\alpha+1}}{\left(\beta(\sigma(t))\psi(t)\right)^{\alpha}}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlik (3.3.37) ifadesinde kullanılırsa,

$$w^{\Delta}(t) \leq \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(t)\left(\beta_{+}^{\Delta}(t)\right)^{\alpha+1}}{\left(\beta(\sigma(t))\psi(t)\right)^{\alpha}} - \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(g^{-1}\left(h(t)\right), t_2\right)}{R_1\left(\sigma(t), t_1\right)}\right)^{\alpha}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin t_3 den t ye kadar integrallenmesi,

$$\int_{t_3}^{t}\left[\Psi_1(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(s)\left(\beta_{+}^{\Delta}(s)\right)^{\alpha+1}}{\left[\beta(\sigma(s))\psi(s)\right]^{\alpha}}\right]\Delta s \leq w(t_3)$$

sonucunu verir ki bu da (3.3.36) ile çelişir ve ispatı tamamlar. Dolayısıyla (3.1.1) denkleminin herhangi bir $x(t)$ çözümü bu şartlar altında ya salınımlıdır, ya da sıfıra asimptotik olarak yakınsar.

Teorem 3.3.3. Kabul edelim ki $\alpha \geq 1$ olsun ve (C1)-(C4), (3.1.2), (3.1.6), (3.1.7), (3.2.8) sağlansın. Eğer yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, ve $T > t_2 > t_1$ için

$$\limsup_{t\to\infty} \int_T^t \left[\Psi_1(s) - \frac{r^{1/\alpha}(s) \left(\beta_+^\Delta(s)\right)^2}{4\alpha\beta(\sigma(s))\psi(s) \left[R_1(s,t_1)\right]^{\alpha-1}} \right] \Delta s = \infty \tag{3.3.38}$$

olacak şekilde pozitif bir $\beta \in C_{rd}^1([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (3.1.1) denkleminin bir $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır, ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. (3.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü $x(t)$ olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$, $x(h(t)) > 0$ olacak, (3.1.6)-(3.1.7) sağlanacak ve $z(t)$ fonksiyonu, Lemma 3.2.1 de belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $x(t)$ bir noktadan sonra negatif olan bir çözüm olduğunda ispat benzer olacağından, sadece bu durum göz önüne alınacaktır.

Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 3.2.2 den, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

Şimdi kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Teorem 3.3.2'nin ispatında izlenen yol aynen takip edilirse tekrar (3.3.37) elde edilir ki bu eşitsizlik $t \geq t_3$ için

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &\leq \frac{\beta_+^\Delta(t)}{\beta(t)} w(t) - \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^\alpha \left(\frac{R_2\left(g^{-1}\left(h(t)\right), t_2\right)}{R_1\left(\sigma(t), t_1\right)} \right)^\alpha \\ &\quad -\alpha\beta(\sigma(t))\psi(t) \frac{w^{\frac{1}{\alpha}-1}(t)}{\beta^{(\alpha+1)/\alpha}(t) r^{1/\alpha}(t)} w^2(t) \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

formunda yazılabilir. Ayrıca (3.2.16) ve (3.3.24) ifadelerinden

$$\begin{aligned} w^{\frac{1}{\alpha}-1}(t) &= \left(\beta(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\frac{\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^\alpha}{\left(z^\Delta(t)\right)^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \\ &\geq \left(\beta(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \left[r^{1/\alpha}(t) R_1(t,t_1) \right]^{\alpha-1} \\ &= \beta^{\frac{1}{\alpha}-1}(t) \left[R_1(t,t_1)\right]^{\alpha-1} \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

yazılabilir. (3.3.40) ifadesi (3.3.39)'da kullanlırsa, $t \geq t_3$ için

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &\leq \frac{\beta_+^{\Delta}(t)}{\beta(t)} w(t) - \beta(\sigma(t)) q(t) \left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha} \left(\frac{R_2\left(g^{-1}\left(h(t)\right), t_2\right)}{R_1\left(\sigma(t), t_1\right)} \right)^{\alpha} \\ &\quad - \frac{\alpha \beta(\sigma(t)) \psi(t) \left[R_1(t, t_1)\right]^{\alpha-1}}{\beta^2(t) r^{1/\alpha}(t)} w^2(t) \qquad (3.3.41) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. (3.3.40) eşitsizliği w'ye göre kareye tamamlanırsa,

$$w^{\Delta}(t) \leq -\beta(\sigma(t)) q(t) \left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha} \left(\frac{R_2\left(g^{-1}\left(h(t)\right), t_2\right)}{R_1\left(\sigma(t), t_1\right)} \right)^{\alpha} + \frac{r^{1/\alpha}(t) \left(\beta_+^{\Delta}(t)\right)^2}{4\alpha \beta(\sigma(t)) \psi(t) \left[R_1(t, t_1)\right]^{\alpha-1}}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin t_3 den t ye kadar integrallenmesiyle

$$\int_{t_3}^{t} \left[\Psi_1(s) - \frac{r^{1/\alpha}(s) \left(\beta_+^{\Delta}(s)\right)^2}{4\alpha \beta(\sigma(s)) \psi(s) \left[R_1(s, t_1)\right]^{\alpha-1}} \right] \Delta s \leq w(t_3),$$

sonucuna varılır ki bu sonuç (3.3.38) ile çelişkilidir. Dolayısıyla (3.1.1) denkleminin herhangi bir $x(t)$ çözümü bu şartlar altında ya salınımlıdır, ya da sıfıra asimptotik olarak yakınsar. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.3.4. Kabul edelim ki (C1)-(C4), (3.1.3), (3.1.6), (3.1.7), (3.2.8) şartları sağlansın. Eğer yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, ve $T > t_2 > t_1$ için

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{T}^{t} \left[\Psi_2(s) - \frac{\beta_+^{\Delta}(s)}{\left(R_1(s, t_1)\right)^{\alpha}} \right] \Delta s = \infty, \qquad (3.3.42)$$

olacak şekilde pozitif bir $\beta \in C_{rd}^1\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (3.1.1) denkleminin bir $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır, ya da $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ şartını sağlar.

İspat. (3.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü $x(t)$ olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$, $x(h(t)) > 0$ olacak, (3.1.6)-(3.1.7) sağlanacak ve $z(t)$ fonksiyonu, Lemma 3.2.1 de belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $x(t)$ bir noktadan sonra negatif olan bir çözüm olduğunda ispat benzer olacağından, sadece bu durum göz önüne alınacaktır.

Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 3.2.2 den, $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ dır.

Şimdi kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Bu takdirde Teorem 3.3.1'in ispatında takip edilen süreç aynı şekilde uygulanırsa, tekrar (3.3.25) ve (3.3.27) elde edilir. Ayrıca,

$$\sigma(t) \leq g^{-1}(h(t)) \tag{3.3.43}$$

olduğundan

$$\frac{z\left(g^{-1}(h(t))\right)}{z(\sigma(t))} \geq 1 \tag{3.3.44}$$

olduğu görülür. (3.3.44) ve (3.3.27) ifadeleri, (3.3.25)'de kullanılırsa, $t \geq t_3$ için

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) \;\; \leq \;\; & \beta_{+}^{\Delta}(t)\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}} - \beta(\sigma(t))q(t)\left(\xi_2(h(t))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2\left(\sigma(t),t_2\right)}{R_1\left(\sigma(t),t_1\right)}\right)^{\alpha} \\ & -\beta(\sigma(t))\frac{r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\left(\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}}{\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha}\left(z^{\Delta}(\sigma(t))\right)^{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.3.45}$$

elde edilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.3.1 ile benzerdir ve bu yüzden detaylar ihmal edilmiştir.

Teorem 3.3.5. Kabul edelim ki (C1)-(C4), (3.1.3), (3.1.6), (3.1.7), (3.2.8) şartları sağlansın. Eğer yeterince büyük her $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, ve $T > t_2 > t_1$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t \left[\Psi_2(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(s)\left(\beta_{+}^{\Delta}(s)\right)^{\alpha+1}}{\left[\beta(\sigma(s))\psi(s)\right]^{\alpha}}\right]\Delta s = \infty \tag{3.3.46}$$

olacak şekilde pozitif bir $\beta \in C_{rd}^1\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (3.1.1) denkleminin bir $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır, ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ şartını sağlar.

İspat. İspat, (3.3.44) ve Teorem 3.3.2'den kolayca elde edilebilir.

Teorem 3.3.6. Kabul edelim ki $\alpha \geq 1$ olsun ve (C1)-(C4), (3.1.3), (3.1.6), (3.1.7), (3.2.8) sağlansın. Eğer yeterince büyük her $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, ve $T > t_2 > t_1$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t \left[\Psi_2(s) - \frac{r^{1/\alpha}(s)\left(\beta_{+}^{\Delta}(s)\right)^{2}}{4\alpha\beta(\sigma(s))\psi(s)\left[R_1(s,t_1)\right]^{\alpha-1}}\right]\Delta s = \infty, \tag{3.3.47}$$

olacak şekilde pozitif bir $\beta \in C_{rd}^1\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (3.1.1) denkleminin bir $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır, ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ şartını sağlar.

İspat. İspat, (3.3.44) ve Teorem 3.3.3'den kolayca elde edilebilir.

3.4. Uygulamalar

Örnek 3.4.1. $\mathbb{T} := \overline{q^{\mathbb{Z}}}=\{q^k : k \in \mathbb{Z}, q > 1\} \cup \{0\}$ olsun. $\alpha = 3$, $g(t) = h(t) = t/2$, $q(t) = t(t-1)^3$, $r(t) = 1$, $f(t,u) = q(t)u^{\alpha}$ ve $p(t) = 8$ olmak üzere

$$\left[\left((x(t) + 5x(t/2))^{\Delta\Delta}\right)^3\right]^{\Delta} + t\,(t-1)^3\, x^3(t/2) = 0, \quad t \in \overline{2^{\mathbb{Z}}}, \quad t \geq t_0 := 2. \quad (3.4.48)$$

üçüncü mertebeden neutral dinamik denklemi göz önüne alalım. Açıkça görülmektedir ki (C1)-(C4) şartları ve (3.1.2) sağlanır, ayrıca

$$\xi_1(t) = 7/64 > 0 \quad (3.4.49)$$

dir. Diğer taraftan

$$1 - \frac{1}{p\left(g^{-1}\left(g^{-1}(t)\right)\right)} \frac{R_2(g^{-1}(g^{-1}(t)), t_2)}{R_2(g^{-1}(t), t_2)} = \frac{2t-7}{4t-8}$$

olduğundan,

$$\xi_2(t) \geq \frac{1}{64}, \quad t \geq t_2 = 4 \text{ için} \quad (3.4.50)$$

bulunur. (3.4.49)'dan ve $u \geq 2$ için $\int_u^{\infty} s\,(s-1)^3\,\Delta s = \infty$ olduğundan,

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\int_{v}^{\infty} \frac{1}{r^{1/\alpha}(u)} \left(\int_u^{\infty} q(s)\left(\xi_1(h(s))\right)^{\alpha} \Delta s\right)^{1/\alpha} \Delta u \Delta v \\ &= \int_2^{t}\int_v^{\infty} \left(\int_u^{\infty} s\,(s-1)^3\,(7/64)^3\,\Delta s\right)^{1/3} \Delta u\Delta v = \infty\end{aligned}$$

elde edilir, dolayısıyla (3.2.8) şartı sağlanır. Ayrıca $\beta(t) = t$ seçilir ve (3.4.50) göz önüne alınırsa, $\int_8^t \frac{1}{(s-2)^3}\Delta s < \infty$ ve $\int_8^t s^2\left(s^2-6s+8\right)^3 \Delta s = \infty$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\int_T^t \left[\beta(\sigma(s))q(s)\left(\xi_2(h(s))\right)^\alpha \left(\frac{R_2(g^{-1}(h(s)),t_2)}{R_1(\sigma(s),t_1)}\right)^\alpha - \frac{\beta_+^\Delta(s)}{(R_1(s,t_1))^\alpha}\right]\Delta s \\
\geq\ & \int_8^t \left[2s^2(s-1)^3(1/64)^3\left(\frac{s^2-6s+8}{6s-6}\right)^3 - \frac{1}{(s-2)^3}\right]\Delta s \\
=\ & \int_8^t \left[2(1/384)^3 s^2\left(s^2-6s+8\right)^3 - \frac{1}{(s-2)^3}\right]\Delta s = \infty
\end{aligned}$$

sonucuna varılır, yani (3.3.23) sağlanır. Bu yüzden de, Teorem 3.3.1'in bütün şartları sağlandığından dolayı, (3.4.48) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

Örnek 3.4.2. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\alpha = 1/3$, $g(t) = t/2$, $h(t) = t-1$, $q(t) = t^2+5$, $r(t) = 1/t^{1/3}$, $f(t,u) = q(t)u^\alpha$ ve $p(t) = (16t+17)/(t+1)$ olmak üzere

$$\left(\frac{1}{t^{1/3}}\left(\left(x(t)+\frac{16t+17}{t+1}x(\frac{t}{2})\right)''\right)^{1/3}\right)' + (t^2+5)x^{1/3}(t-1) = 0, \quad t \geq 2 \quad (3.4.51)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu durumda (C1)-(C4) ve (3.1.3) şartlarının sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Ayrıca,

$$16 \leq p(t) < 17$$

olduğundan

$$\xi_1(t) \geq \frac{15}{272} > 0 \quad (3.4.52)$$

elde edilir. Diğer yandan, $t \geq t_2 = 3$ için

$$\frac{1}{p\left(g^{-1}(g^{-1}(t))\right)}\frac{R_2(g^{-1}(g^{-1}(t)),t_2)}{R_2(g^{-1}(t),t_2)} \leq \frac{64t^3-48t+9}{128t^3-384t+144} \leq \frac{177}{272}$$

bulunur ve buradan da

$$\xi_2(t) \geq \frac{95}{4624} \quad (3.4.53)$$

elde edilir. (3.4.52)'den ve $u \geq 2$ için $\int\limits_u^\infty (s^2+5)\,\Delta s = \infty$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{v}^{\infty}\frac{1}{r^{1/\alpha}(u)}\left(\int\limits_{u}^{\infty}q(s)\left(\xi_1(h(s))\right)^{\alpha}\Delta s\right)^{1/\alpha}\Delta u\Delta v\\
&\geq (15/272)\int\limits_{2}^{t}\int\limits_{v}^{\infty}u\left(\int\limits_{u}^{\infty}\left(s^2+5\right)\Delta s\right)^{3}\Delta u\Delta v=\infty
\end{aligned}$$

olduğu görülür, dolayısıyla (3.2.8) şartı sağlanır. Son olarak, $\beta(t) = c > 0$ seçilir ve (3.4.53) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{T}^{t}\left[\beta(s)q(s)\left(\xi_2(h(s))\right)^{\alpha}\left(\frac{R_2(s,3)}{R_1(s,2)}\right)^{\alpha}-\frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(s)\left(\beta'_+(s)\right)^{\alpha+1}}{\left(\beta(s)\psi(s)\right)^{\alpha}}\right]ds\\
\geq\ &\int\limits_{4}^{t}c\left(s^2+5\right)(95/4624)^{1/3}\left(\frac{s^3-12s+9}{3\left(s^2-4\right)}\right)^{1/3}ds\\
\geq\ &c\,(95/13872)^{1/3}\int\limits_{4}^{t}s^{4/3}\left(s^3-12s+9\right)^{1/3}ds=\infty
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır, yani (3.3.46) sağlanır. Bu yüzden de, Teorem 3.3.5'den dolayı (3.4.51) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da asimptotik olarak sıfıra yakınsar.

Not 3.4.3. Bu bölümde verilen sonuçlar "Advances in Difference Equations" dergisinde bilimsel araştırma makalesi olarak yayınlanmıştır (Tunç ve Özdemir, 2017).

4. BULGULAR - II

4.1. Üçüncü Mertebeden Dağılımlı Sapma Argümentli Neutral Dinamik Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılık ve Asimptotik Davranışı

Bu bölümde, $\mathbb{T}$ üstten sınırsız bir zaman skalası, $t_0 \in \mathbb{T}$, $z(t) = x(t) + p(t)x(g(t))$, $i = 1, 2$ için α_i'ler pozitif tek tam sayıların oranları ve $0 < a < b$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, üçüncü mertebeden dağılımlı sapma argümentli non-lineer neutral

$$\left[r_2(t)\left(\left(r_1(t)\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha_1}\right)^{\Delta}\right)^{\alpha_2}\right]^{\Delta} + \int_a^b q(t,\xi) f\left(x\left(\phi(t,\xi)\right)\right) \Delta\xi = 0,\ t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \tag{4.1.1}$$

dinamik denkleminin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışı üzerinde durulacaktır. $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalası aralığı $t_0 \in \mathbb{T}$ için

$$[t_0, \infty)_{\mathbb{T}} := [t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$$

ile tanımlı olmak üzere, $t \geq t_n$ yazıldığında kastedilen $t \in [t_n, \infty) \cap \mathbb{T}$ olmasıdır ve ayrıca bölüm boyunca tekrar belirtilmeye ihtiyaç duyulmaksızın, aşağıdaki şartların sağlandığı kabul edilecektir.

(D1) $r_i \in C_{rd}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+\right)$ ve $i = 1, 2$ için,

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{(r_i(t))^{1/\alpha_i}} \Delta t = \infty;$$

(D2) $p : [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ rd-sürekli bir fonksiyon, $p(t) \geq 1$, ve yeterince büyük t ler için $p(t) \not\equiv 1$;

(D3) $g \in C_{rd}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{T}\right)$ kesin artan bir fonksiyon, $g(t) < t$, ve $\lim_{t \to \infty} g(t) = \infty$;

(D4) $q(t,\xi) \in C_{rd}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times [a, b]_{\mathbb{T}}, [0, \infty)\right)$, $\phi(t,\xi) \in C_{rd}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times [a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{T}\right)$ fonksiyonu ξ'ye göre artmayan fonksiyon, ve

$$\lim_{t \to \infty} \min_{\xi \in [a,b]} \phi(t,\xi) = \infty;$$

(D5) $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fonksiyonu, $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ şartını sağlar ve $u \neq 0$ için $f(u)/u^{\beta} \geq \kappa$ olacak şekilde $\kappa > 0$ ve $\beta = \alpha_1\alpha_2$ vardır.

(4.1.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışları sırasıyla

$$g(\sigma(t)) \geq \phi(t,\xi), \quad \xi \in [a,b] \tag{4.1.2}$$

ve

$$g(\sigma(t)) \leq \phi(t,\xi), \quad \xi \in [a,b] \tag{4.1.3}$$

durumları için incelenecektir. Notasyonel kolaylık için,

$$z^{[1]}(t) := r_1(t)\left[z^{\Delta}(t)\right]^{\alpha_1} \quad \text{ve } z^{[2]}(t) := r_2(t)\left[\left(z^{[1]}(t)\right)^{\Delta}\right]^{\alpha_2}$$

ile tanımlansın.

$t_x \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere, $z \in C^1_{rd}\left([t_x,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$, $z^{[1]} \in C^1_{rd}\left([t_x,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$ ve $z^{[2]} \in C^1_{rd}\left([t_x,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$ özelliklerine sahip olan ve $[t_x,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde (4.1.1) denklemini sağlayan aşikar olmayan reel değerli bir $x \in C^1_{rd}\left([t_x,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$ fonksiyonuna (4.1.1) denkleminin bir çözümü denir. Bu bölüm boyunca, (4.1.1) denkleminin $[t_x,\infty)_{\mathbb{T}}$ yarı-ekseninde tanımlı ve her $T_1 \in [t_x,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $\sup\{|x(t)| : t \geq T_1\} > 0$ özelliğine sahip çözümleri üzerinde durulacaktır. Üstelik, (4.1.1) denkleminin böyle çözümlere sahip olduğu da kabul edilmiştir. Böyle bir çözüm belli bir noktadan sonra işaretini koruyan fonksiyon değilse, yani sıfırlarının kümesi üstten sınırlı değilse, bu çözüme salınımlıdır denir, aksi takdirde salınımsızdır denir.

Farklı yapılardaki neutral diferensiyel denklemler ve zaman skalasında neutral dinamik denklemler için çözümlerin salınım ve asimptotik davranışının incelenmesi aktif ve önemli bir araştırma alanıdır ve bu konudaki son sonuçlara örnek olarak kaynaklar kısmında verilen neutral denklemlerle ilgili çalışmalar okuyucuya referans olarak verilebilir. Bununla birlikte, üçüncü mertebeden dağılımlı sapma argümentli neutral dinamik denklemler için çözümlerin salınım ve asimptotik davranışının incelenmesi, literatürde çok yaygın çalışılan bir konu değildir. Ayrıca, (4.1.1) tipindeki dinamik denklemler için literatürde verilen sonuçların çoğu, $0 \leq p(t) \leq p_0 < 1$

ve/veya $0 \leq p(t) \equiv \int_a^b p\left(t,\eta\right)\Delta\eta \leq p_0 < 1$ durumları ile ilgilidir, bkz. (Chen ve Liu, 2008; Grace ve ark., 2016; Huang, 2016).

Bildiğimiz kadarıyla, $p(t) \geq 1$ olması durumunda (4.1.1) tipindeki üçüncü mertebeden dağılımlı sapma argümentli neutral dinamik denklemlerle ilgili çok az sayıda sonuç vardır, bkz. (Jiang ve Li, 2016; Tunç, 2017), ve elde edilen bu sonuçlar $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ özel durumu için geçerlidir. Bu bölümde, yukarıda sözü edilen çalışmalardan (ayrıca bkz. (Agarwal ve ark., 2012, 2014a,b, 2015a,b; Gao ve ark., 2014; Hassan, 2009; Li ve ark., 2011)) hareketle, (4.1.1) denkleminin herhangi bir $x(t)$ çözümünün salınımlılığını ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsamasını garanti eden sonuçlar verilecektir.

Yazımda kolaylık olması açısından, temel sonuçlar verilirken aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

$$\phi_1(t) := \phi(t,a), \qquad \phi_2(t) := \phi(t,b), \qquad d_+(t) := \max(0, d(t)),$$

$$\lambda = \frac{\alpha_2+1}{\alpha_2}, \qquad t \geq t_1 \ \text{ için} \qquad R_1(t,t_1) := \int_{t_1}^{t} \frac{\Delta s}{r_2^{1/\alpha_2}(s)},$$

$$t \geq t_2 \geq t_1 \ \text{ için} \qquad R_2(t,t_2) := \int_{t_2}^{t} \left(\frac{R_1(s,t_1)}{r_1(s)}\right)^{1/\alpha_1} \Delta s.$$

Ayrıca belirtilmelidir ki, bu bölüm boyunca g^{-1} fonksiyonu, g nin ters fonksiyonu olmak üzere, yeterince büyük t ler için

$$\varphi_1(t) := \frac{1}{p\left(g^{-1}(t)\right)}\left(1 - \frac{1}{p\left(g^{-1}\left(g^{-1}(t)\right)\right)}\right) > 0 \tag{4.1.4}$$

ve

$$\varphi_2(t) := \frac{1}{p\left(g^{-1}(t)\right)}\left(1 - \frac{1}{p\left(g^{-1}\left(g^{-1}(t)\right)\right)} \frac{R_2\left(g^{-1}\left(g^{-1}(t)\right), t_2\right)}{R_2\left(g^{-1}(t), t_2\right)}\right) > 0 \tag{4.1.5}$$

kabul edilecektir.

$$q_1(t) := \int_a^b q(t,\xi)\left(\varphi_1(\phi(t,\xi))\right)^{\beta} \Delta\xi, \qquad q_2(t) := \int_a^b q(t,\xi)\left(\varphi_2(\phi(t,\xi))\right)^{\beta} \Delta\xi,$$

$$\delta(t) = \frac{R_1(t,t_1)}{R_1(\sigma(t),t_1)} \quad \text{olmak üzere} \quad \psi(t) = \begin{cases} \delta(t), & 0 < \alpha_2 \leq 1 \text{ ise} \\ \delta^{\alpha_2}(t), & \alpha_2 > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

4.2. Bazı Yardımcı Lemmalar

Lemma 4.2.1. Kabul edelim ki (D1)-(D4) şartları sağlansın ve $x(t)$, (4.1.1) denkleminin bir noktadan sonra pozitif bir çözümü olsun. Bu takdirde, yeterince büyük $t \in \mathbb{T}$ ler için, ya

(I) $z(t) > 0$, $z^{\Delta}(t) > 0$, $\left(z^{[1]}(t)\right)^{\Delta} > 0$ ve $\left(z^{[2]}(t)\right)^{\Delta} < 0$

ya da

(II) $z(t) > 0$, $z^{\Delta}(t) < 0$, $\left(z^{[1]}(t)\right)^{\Delta} > 0$ ve $\left(z^{[2]}(t)\right)^{\Delta} < 0$

dır.

İspat. İspat (Baculíková ve Džurina, 2010a, sf. 2, Lemma 1) kullanılarak kolaylıkla elde edilebileceğinden ayrıntılara yer verilmemiştir.

Lemma 4.2.2. Kabul edelim ki (4.1.4) sağlansın ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 de belirtilen Durum (II)'yi sağlamak üzere $x(t)$, (4.1.1) denkleminin bir noktadan sonra pozitif olan bir çözümü olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r_1(v)} \int_{v}^{\infty} \left(\frac{1}{r_2(u)} \int_{u}^{\infty} q_1(s)\,\Delta s \right)^{1/\alpha_2} \Delta u \right)^{1/\alpha_1} \Delta v = \infty \tag{4.2.6}$$

ise, bu takdirde $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin bir noktadan sonra pozitif olan bir çözümü olsun. Bu takdirde, $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a,b]$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $x(\phi(t,\xi)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $z(t)$'nin tanımından,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{p(g^{-1}(t))} \left(z\left(g^{-1}(t)\right) - x\left(g^{-1}(t)\right) \right) \\ &= \frac{z(g^{-1}(t))}{p(g^{-1}(t))} - \frac{z(g^{-1}(g^{-1}(t))) - x(g^{-1}(g^{-1}(t)))}{p(g^{-1}(t))\,p(g^{-1}(g^{-1}(t)))} \\ &\geq \frac{z(g^{-1}(t))}{p(g^{-1}(t))} - \frac{z(g^{-1}(g^{-1}(t)))}{p(g^{-1}(t))\,p(g^{-1}(g^{-1}(t)))} \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

yazılabilir. $g(t) < t$ ve $z(t)$ azalan fonksiyon olduğundan,

$$z\left(g^{-1}(t)\right) \geq z\left(g^{-1}\left(g^{-1}(t)\right)\right)$$

dir ve bunun (4.2.7) içinde kullanılmasıyla, $t \geq t_1$ için

$$x(t) \geq \varphi_1(t)\, z\left(g^{-1}(t)\right) \tag{4.2.8}$$

bulunur. $(D4)$ şartından dolayı, her $t \geq t_2$ ve $\xi \in [a, b]$ için $\phi(t, \xi) \geq t_1$ olacak şekilde $t_2 \geq t_1$ seçilebilir. Bu nedenle (4.2.8)'den, $t \geq t_2$ için

$$x(\phi(t,\xi)) \geq \varphi_1(\phi(t,\xi))\, z\left(g^{-1}(\phi(t,\xi))\right) \tag{4.2.9}$$

elde edilir. Bu yüzden de (4.2.9), (D4)-(D5) şartları ve $z(t)$ azalan olduğu kullanılarak (4.1.1) denklemi, $t \geq t_2$ için

$$\left(z^{[2]}(t)\right)^{\Delta} + \kappa q_1(t)\, z^{\beta}\left(g^{-1}(\phi_1(t))\right) \leq 0 \tag{4.2.10}$$

formunda yazılabilir. $z(t) > 0$ ve $z^{\Delta}(t) < 0$ olduğundan,

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = L < \infty$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ sabiti vardır. Eğer $L > 0$ ise, bu takdirde $t \geq t_3$ için $g^{-1}(\phi_1(t)) > t_2$ ve

$$z(t) \geq L$$

olacak şekilde bir $t_3 \geq t_2$ vardır. (4.2.10) ifadesi t den ∞ a kadar iki defa integrallenirse, $\gamma > 0$ bir sabit olmak üzere

$$-z^{\Delta}(t) \geq \gamma \left(\frac{1}{r_1(t)} \int_t^{\infty} \left(\frac{1}{r_2(u)} \int_u^{\infty} q_1(s)\, \Delta s \right)^{1/\alpha_2} \Delta u \right)^{1/\alpha_1}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin t den ∞ a kadar tekrar integrallenmesi,

$$z(t_3) \geq \gamma \int_{t_3}^{\infty} \left(\frac{1}{r_1(v)} \int_v^{\infty} \left(\frac{1}{r_2(u)} \int_u^{\infty} q_1(s) \Delta s \right)^{1/\alpha_2} \Delta u \right)^{1/\alpha_1} \Delta v$$

sonucunu verir ki bu da (4.2.6) ile çelişir. O halde $L = 0$ dır. $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $0 < x(t) \leq z(t)$ olduğundan dolayı da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ sonucuna varılır ve ispat tamamlanır.

Lemma 4.2.3. Kabul edelim ki (4.1.5) sağlansın ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 de belirtilen Durum (I)'i sağlamak üzere $x(t)$, (4.1.1) denkleminin bir noktadan sonra pozitif olan bir çözümü olsun. Bu takdirde $z(t)$, yeterince büyük t değerleri için

$$\left(z^{[2]}(t)\right)^{\Delta} + \kappa q_2(t) z^{\beta}\left(g^{-1}(\phi_2(t))\right) \leq 0 \tag{4.2.11}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin bir noktadan sonra pozitif olan bir çözümü olsun. Bu takdirde, $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a, b]$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $x(\phi(t, \xi)) > 0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu Durum (I)'i sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Lemma 4.2.2'nin ispatında izlenen yol takip edilirse, tekrar (4.2.7) elde edilir. Bununla birlikte, $t \geq t_1$ için

$$z^{[1]}(t) = z^{[1]}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{\left(z^{[2]}(s)\right)^{1/\alpha_2}}{r_2^{1/\alpha_2}(s)} \Delta s \tag{4.2.12}$$

ve $z^{[2]}(t)$ azalan olduğundan

$$z^{[1]}(t) \geq \left(z^{[2]}(t)\right)^{1/\alpha_2} \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r_2^{1/\alpha_2}(s)} \Delta s \tag{4.2.13}$$

veya

$$z^{[1]}(t) \geq \left(z^{[2]}(t)\right)^{1/\alpha_2} R_1(t, t_1) \tag{4.2.14}$$

olduğu görülür. Bu yüzden de,

$$\left(\frac{z^{[1]}(t)}{R_1(t,t_1)}\right)^{\Delta} \leq 0 \tag{4.2.15}$$

dır. Dolayısıyla, $t \geq t_2$ için,

$$\begin{aligned} z(t) &= z(t_2) + \int_{t_2}^{t} \left(\frac{z^{[1]}(s)}{R_1(s,t_1)}\right)^{1/\alpha_1} \left(\frac{R_1(s,t_1)}{r_1(s)}\right)^{1/\alpha_1} \Delta s \\ &\geq \frac{R_2(t,t_2)}{R_1^{1/\alpha_1}(t,t_1)} \left(z^{[1]}(t)\right)^{1/\alpha_1} \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

olacak şekilde $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve buradan da

$$\left(\frac{z(t)}{R_2(t,t_2)}\right)^{\Delta} \leq 0, \quad t \geq t_2 \text{ için} \tag{4.2.17}$$

bulunur. $g^{-1}(t) < g^{-1}(g^{-1}(t))$ olduğu göz önüne alınırsa, (4.2.17)'den

$$\frac{R_2(g^{-1}(g^{-1}(t)), t_2)}{R_2(g^{-1}(t), t_2)} z\left(g^{-1}(t)\right) \geq z\left(g^{-1}\left(g^{-1}(t)\right)\right) \tag{4.2.18}$$

elde edilir. (4.2.18)'in (4.2.7) içinde kullanılmasıyla, $t \geq t_2$ için

$$x(t) \geq \varphi_2(t)\, z\left(g^{-1}(t)\right) \tag{4.2.19}$$

eşitsizliğine varılır. Diğer yandan $\lim_{t\to\infty} \min_{\xi\in[a,b]} \phi(t,\xi) = \infty$ olduğundan, her $t \geq t_3$ için $\phi(t,\xi) \geq t_2$ olacak şekilde $t_3 \geq t_2$ seçilebilir buradan da (4.2.19) eşitsizliğinden

$$x(\phi(t,\xi)) \geq \varphi_2(\phi(t,\xi))\, z\left(g^{-1}(\phi(t,\xi))\right), \quad t \geq t_3 \text{ için} \tag{4.2.20}$$

elde edilir. (4.2.20) ifadesi (4.1.1) içinde yazılırsa (4.2.11) elde edilir ve ispat biter.

4.3. Temel Sonuçlar

Teorem 4.3.1. Kabul edelim ki (4.1.2) ve (4.1.4)-(4.2.6) sağlansın. Eğer her yeterince büyük $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için,

$$\chi_1(t) = \kappa\eta(\sigma(t))\, q_2(t) \frac{R_2^{\beta}(g^{-1}(\phi_2(t)), t_2)}{R_1^{\alpha_2}(\sigma(t), t_1)},$$

ve $T > t_2 \geq t_1$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty} \int_T^t \left(\chi_1(s) - \frac{\eta_+^{\Delta}(s)}{R_1^{\alpha_2}(s, t_1)}\right) \Delta s = \infty \tag{4.3.21}$$

olacak şekilde pozitif bir $\eta \in C_{rd}^1([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ şartını sağlar.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a, b]$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $x(\phi(t, \xi)) > 0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 ile belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 4.2.2 den, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

Kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Lemma 4.2.3'ün ispatında izlenen yol takip edilirse tekrar (4.2.11)-(4.2.17) elde edilir. $t \geq t_1$ için, Riccati-tipi dönüşümü

$$\omega(t) = \eta(t) \frac{z^{[2]}(t)}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2}} \tag{4.3.22}$$

ile tanımlayalım. $\omega(t) > 0$ olduğu açıktır, ayrıca (4.2.11) ve (4.3.22)'den

$$\begin{aligned}
\omega^{\Delta}(t) \quad &\leq \quad \eta_+^{\Delta}(t) \frac{z^{[2]}(t)}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2}} - \kappa\eta(\sigma(t))\, q_2(t) \frac{z^{\beta}(g^{-1}(\phi_2(t)))}{z^{\beta}(\sigma(t))} \frac{z^{\beta}(\sigma(t))}{(z^{[1]}(\sigma(t)))^{\alpha_2}} \\
&\quad -\eta(\sigma(t)) \frac{\left((z^{[1]}(t))^{\alpha_2}\right)^{\Delta} z^{[2]}(t)}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2} (z^{[1]}(\sigma(t)))^{\alpha_2}}
\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

elde edilir. $(D3), (D4)$ şartları ve (4.1.2)'den görülebilecek

$$g^{-1}(\phi_2(t)) \leq \sigma(t)$$

ile, (4.2.17) birlikte düşünülürse

$$\frac{z(g^{-1}(\phi_2(t)))}{z(\sigma(t))} \geq \frac{R_2(g^{-1}(\phi_2(t)), t_2)}{R_2(\sigma(t), t_2)} \tag{4.3.24}$$

bulunur. Ayrıca $t \leq \sigma(t)$ olduğu, (4.2.16) içinde kullanılırsa

$$\frac{(z(\sigma(t)))^{\beta}}{(z^{[1]}(\sigma(t)))^{\alpha_2}} \geq \frac{R_2^{\beta}(\sigma(t), t_2)}{R_1^{\alpha_2}(\sigma(t), t_1)} \tag{4.3.25}$$

olduğu görülür. (4.3.24) ve (4.3.25) ifadeleri, (4.3.23) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \eta_{+}^{\Delta}(t)\frac{z^{[2]}(t)}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2}} - \chi_1(t) - \eta(\sigma(t))\frac{\left((z^{[1]}(t))^{\alpha_2}\right)^{\Delta} z^{[2]}(t)}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2}(z^{[1]}(\sigma(t)))^{\alpha_2}} \tag{4.3.26}$$

elde edilir. Eğer $0 < \alpha_2 \leq 1$ ise, (3.3.29) ve (4.3.26)'dan

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \eta_{+}^{\Delta}(t)\frac{z^{[2]}(t)}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2}} - \chi_1(t) - \frac{\alpha_2\eta(\sigma(t))}{r_2^{1/\alpha_2}(t)}\frac{\left(z^{[2]}(t)\right)^{\lambda}}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2+1}}\frac{z^{[1]}(t)}{z^{[1]}(\sigma(t))}, \tag{4.3.27}$$

eğer $\alpha_2 > 1$ ise, (3.3.29) ve (4.3.26)'dan

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \eta_{+}^{\Delta}(t)\frac{z^{[2]}(t)}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2}} - \chi_1(t) - \frac{\alpha_2\eta(\sigma(t))}{r_2^{1/\alpha_2}(t)}\frac{\left(z^{[2]}(t)\right)^{\lambda}}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2+1}}\frac{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}}{(z^{[1]}(\sigma(t)))^{\alpha_2}} \tag{4.3.28}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan, $t \leq \sigma(t)$ olduğu, (4.2.15) içinde kullanılırsa

$$\frac{z^{[1]}(t)}{z^{[1]}(\sigma(t))} \geq \frac{R_1(t, t_1)}{R_1(\sigma(t), t_1)} \tag{4.3.29}$$

bulunur. (4.3.29) göz önüne alınarak, (4.3.27) ve (4.3.28) eşitsizlikleri birleştirilirse, $\alpha_2 > 0$ ve $t \geq t_3$ için,

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \eta_{+}^{\Delta}(t)\frac{z^{[2]}(t)}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}} - \chi_1(t) - \frac{\alpha_2 \eta(\sigma(t))\psi(t)}{r_2^{1/\alpha_2}(t)}\frac{\left(z^{[2]}(t)\right)^{\lambda}}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2+1}} \quad (4.3.30)$$

elde edilir. (4.2.14) ifadesinden,

$$\frac{z^{[2]}(t)}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}} \leq \frac{1}{R_1^{\alpha_2}(t,t_1)} \quad (4.3.31)$$

olduğu görülür. Bu nedenle (4.3.31), $z^{[1]}(t) > 0$ ve $z^{[2]}(t) > 0$ kullanılarak, (4.3.30) eşitsizliği

$$\omega^{\Delta}(t) \leq -\chi_1(t) + \frac{\eta_{+}^{\Delta}(t)}{R_1^{\alpha_2}(t,t_1)} \quad (4.3.32)$$

formunda yazılabilir. (4.3.32) ifadesi t_3 den t ye kadar integrallenirse

$$\int_{t_3}^{t}\left(\chi_1(s) - \frac{\eta_{+}^{\Delta}(s)}{R_1^{\alpha_2}(s,t_1)}\right)\Delta s \leq \omega(t_3) \quad (4.3.33)$$

sonucuna varılır ki bu, (4.3.21) ile çelişir ve ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.2. Kabul edelim ki (4.1.2), (4.1.4)-(4.2.6) sağlansın ve $\chi_1(t)$ fonksiyonu Teorem 4.3.1'deki gibi tanımlansın. Eğer her yeterince büyük $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için, $T > t_2 \geq t_1$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{T}^{t}\left(\chi_1(s) - \frac{1}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}}\frac{r_2(s)\left(\eta_{+}^{\Delta}(s)\right)^{\alpha_2+1}}{\left(\eta(\sigma(s))\psi(s)\right)^{\alpha_2}}\right)\Delta s = \infty \quad (4.3.34)$$

olacak şekilde pozitif bir $\eta \in C_{rd}^{1}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a,b]$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $x(\phi(t,\xi)) > 0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 ile belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 4.2.2 den, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

Kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Teorem 4.3.1'in ispatında izlenen yol takip edilirse tekrar (4.3.30) elde edilir. (4.3.22) göz önüne alınırsa, (4.3.30) eşitsizliği

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \frac{\eta_{+}^{\Delta}(t)}{\eta(t)}\omega(t) - \chi_1(t) - \frac{\alpha_2\eta(\sigma(t))\psi(t)}{\eta^{\lambda}(t)\, r_2^{1/\alpha_2}(t)}\omega^{\lambda}(t) \tag{4.3.35}$$

formunda yazılabilir.

$$U = \frac{[\alpha_2\eta(\sigma(t))\psi(t)]^{1/\lambda}}{\left[r_2^{1/\alpha_2}(t)\,\eta^{\lambda}(t)\right]^{1/\lambda}}\omega(t) \quad \text{ve} \quad V = \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2+1}\frac{\left[r_2^{1/\alpha_2}(t)\,\eta^{\lambda}(t)\right]^{1/\lambda}}{[\alpha_2\eta(\sigma(t))\psi(t)]^{1/\lambda}}\frac{\eta_{+}^{\Delta}(t)}{\eta(t)}\right]^{\alpha_2}$$

olmak üzere, Lemma 2.7.13 uygulanırsa,

$$\frac{\eta_{+}^{\Delta}(t)}{\eta(t)}\omega(t) - \frac{\alpha_2\eta(\sigma(t))\psi(t)}{\eta^{\lambda}(t)\, r_2^{1/\alpha_2}(t)}\omega^{\lambda}(t) \leq \frac{1}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}}\frac{r_2(t)\left(\eta_{+}^{\Delta}(t)\right)^{\alpha_2+1}}{[\eta(\sigma(t))\psi(t)]^{\alpha_2}} \tag{4.3.36}$$

bulunur. (4.3.36), (4.3.35) içinde kullanılırsa,

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \frac{1}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}}\frac{r_2(t)\left(\eta_{+}^{\Delta}(t)\right)^{\alpha_2+1}}{[\eta(\sigma(t))\psi(t)]^{\alpha_2}} - \kappa\eta(\sigma(t))\,q_2(t)\,\frac{R_2^{\beta}\left(g^{-1}(\phi_2(t)), t_2\right)}{R_1^{\alpha_2}(\sigma(t), t_1)}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin t_3 den t ye kadar integrallenmesi,

$$\int_{t_3}^{t}\left(\chi_1(s) - \frac{1}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}}\frac{r_2(s)\left(\eta_{+}^{\Delta}(s)\right)^{\alpha_2+1}}{[\eta(\sigma(s))\psi(s)]^{\alpha_2}}\right)\Delta s \leq \omega(t_3)$$

sonucunu verir ki bu da (4.3.34) ile çelişkilidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3. Kabul edelim ki $\alpha_2 \geq 1$ olsun, (4.1.2) ve (4.1.4)-(4.2.6) sağlansın, ayrıca $\chi_1(t)$ fonksiyonu Teorem 4.3.1'deki gibi tamlansın. Eğer her yeterince büyük $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için, $T > t_2 \geq t_1$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{T}^{t}\left(\chi_1(s) - \frac{r_2^{1/\alpha_2}(s)\left(\eta_{+}^{\Delta}(s)\right)^{2}}{4\alpha_2\eta(\sigma(s))\psi(s)\,[R_1(s,t_1)]^{\alpha_2-1}}\right)\Delta s = \infty \tag{4.3.37}$$

olacak şekilde pozitif bir $\eta \in C_{rd}^{1}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a,b]$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $x(\phi(t,\xi)) > 0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 ile belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 4.2.2 den, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

Kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Teorem 4.3.2'nin ispatında izlenen yol takip edilirse tekrar (4.3.35) eşitsizliğine varılır ki bu eşitsizlik, $t \geq t_3$ için

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \frac{\eta_+^{\Delta}(t)}{\eta(t)}\omega(t) - \chi_1(t) - \frac{\alpha_2 \eta(\sigma(t))\psi(t)(\omega(t))^{\frac{1}{\alpha_2}-1}}{\eta^{\lambda}(t)\, r_2^{1/\alpha_2}(t)}\omega^2(t) \tag{4.3.38}$$

formunda yazılabilir. (4.3.22) ve (4.2.14) birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned} (\omega(t))^{\frac{1}{\alpha_2}-1} &= (\eta(t))^{\frac{1}{\alpha_2}-1}\frac{\left(z^{[2]}(t)\right)^{\frac{1}{\alpha_2}-1}}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{1-\alpha_2}} \\ &= (\eta(t))^{\frac{1}{\alpha_2}-1}\left(\frac{z^{[1]}(t)}{\left(z^{[2]}(t)\right)^{1/\alpha_2}}\right)^{\alpha_2-1} \\ &\geq (\eta(t))^{\frac{1}{\alpha_2}-1}\left(R_1(t,t_1)\right)^{\alpha_2-1} \end{aligned} \tag{4.3.39}$$

yazılabilir. (4.3.39) ifadesi (4.3.38) içinde kullanılırsa, $t \geq t_3$ için

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \frac{\eta_+^{\Delta}(t)}{\eta(t)}\omega(t) - \chi_1(t) - \frac{\alpha_2 \eta(\sigma(t))\psi(t)(R_1(t,t_1))^{\alpha_2-1}}{\eta^{2}(t)\, r_2^{1/\alpha_2}(t)}\omega^2(t) \tag{4.3.40}$$

sonucuna ulaşılır. (4.3.40) ifadesi ω'ya göre kareye tamamlanırsa,

$$\omega^{\Delta}(t) \leq -\chi_1(t) + \frac{r_2^{1/\alpha_2}(t)\left(\eta_+^{\Delta}(t)\right)^2}{4\alpha_2 \eta(\sigma(t))\psi(t)\left[R_1(t,t_1)\right]^{\alpha_2-1}}. \tag{4.3.41}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik t_3 den t ye kadar integrallenirse,

$$\int_{t_3}^{t}\left(\chi_1(s) - \frac{r_2^{1/\alpha_2}(s)\left(\eta_+^{\Delta}(s)\right)^2}{4\alpha_2 \eta(\sigma(s))\psi(s)\left[R_1(s,t_1)\right]^{\alpha_2-1}}\right)\Delta s \leq \omega(t_3)$$

sonucuna varılır. Bu sonuç (4.3.37) ile çelişkilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.4. Kabul edelim ki (4.1.3)-(4.2.6) sağlansın. Eğer her yeterince büyük $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için,

$$\chi_2(t) = \kappa \eta(\sigma(t)) q_2(t) \frac{R_2^{\beta}(\sigma(t), t_2)}{R_1^{\alpha_2}(\sigma(t), t_1)},$$

ve $T > t_2 \geq t_1$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty} \int_T^t \left(\chi_2(s) - \frac{\eta_+^{\Delta}(s)}{R_1^{\alpha_2}(s, t_1)} \right) \Delta s = \infty \tag{4.3.42}$$

olacak şekilde pozitif bir $\eta \in C_{rd}^1([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ şartını sağlar.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a, b]$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $x(\phi(t, \xi)) > 0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 ile belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 4.2.2 den, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

Eğer Durum (I) sağlanırsa, Teorem 4.3.1'in ispatındaki süreç aynen takip edilerek tekrar (4.3.23) ve (4.3.25) elde edilir. Ayrıca,

$$\sigma(t) \leq g^{-1}(\phi_2(t)) \tag{4.3.43}$$

olduğundan, $z^{\Delta}(t) > 0$ kullanılarak

$$\frac{z(g^{-1}(\phi_2(t)))}{z(\sigma(t))} \geq 1 \tag{4.3.44}$$

olduğu görülür. (4.3.44) ve (4.3.25) ifadeleri, (4.3.23) içinde kullanılırsa,

$$\omega^{\Delta}(t) \leq \eta_+^{\Delta}(t) \frac{z^{[2]}(t)}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2}} - \chi_2(t) - \eta(\sigma(t)) \frac{\left((z^{[1]}(t))^{\alpha_2}\right)^{\Delta} z^{[2]}(t)}{(z^{[1]}(t))^{\alpha_2} (z^{[1]}(\sigma(t)))^{\alpha_2}} \tag{4.3.45}$$

elde edilir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.3.1 ile benzer olduğundan, detaylara yer verilmemiştir.

Teorem 4.3.5. Kabul edelim ki (4.1.3)-(4.2.6) sağlansın ve $\chi_2(t)$ fonksiyonu Teorem 4.3.4'deki gibi tanımlansın. Eğer her yeterince büyük $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için, $T > t_2 \geq t_1$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty} \int_T^t \left(\chi_2(s) - \frac{1}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}} \frac{r_2(s)\left(\eta_+^{\Delta}(s)\right)^{\alpha_2+1}}{\left(\eta(\sigma(s))\,\psi(s)\right)^{\alpha_2}} \right) \Delta s = \infty \tag{4.3.46}$$

olacak şekilde pozitif bir $\eta \in C_{rd}^1([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t\to\infty$ iken sıfıra yakınsar.

Teorem 4.3.6. Kabul edelim ki $\alpha_2 \geq 1$ olsun, (4.1.3)-(4.2.6) sağlansın ve $\chi_2(t)$ fonksiyonu Teorem 4.3.4'deki gibi tanımlansın. Eğer her yeterince büyük $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için, $T > t_2 \geq t_1$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty} \int_T^t \left(\chi_2(s) - \frac{r_2^{1/\alpha_2}(s)\left(\eta_+^{\Delta}(s)\right)^2}{4\alpha_2\eta(\sigma(s))\,\psi(s)\left[R_1(s,t_1)\right]^{\alpha_2-1}} \right) \Delta s = \infty \tag{4.3.47}$$

olacak şekilde pozitif bir $\eta \in C_{rd}^1([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t\to\infty$ iken sıfıra yakınsar.

Yukarıdaki iki teoremin ispatı (4.3.44), Teorem 4.3.2 ve Teorem 4.3.3 kullanılarak kolaylıkla elde edilebileceğinden, burada detaylara yer verilmemiştir.

4.4. Philos-Tipi Salınım Sonuçları

Bu bölümde (4.1.1) denklemi için Philos-tipi salınım sonuçları verilecektir. Bunun için öncelikle, bölüm boyunca kullanılacak olan $\mathcal{P}$ fonksiyonlar sınıfının tanıtılmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

$D_0 \equiv \{(t,s) \in \mathbb{T}^2 : t > s \geq t_0\}$, $D \equiv \{(t,s) \in \mathbb{T}^2 : t \geq s \geq t_0\}$ ve $H, h \in C_{rd}(D,\mathbb{R})$ olsun. η fonksiyonu Teorem 4.3.1'deki gibi tanımlı olmak üzere, eğer

(i) $t \geq t_0$ için $H(t,t) = 0$ ve D_0 üzerinde $H(t,s) > 0$,

(ii) H fonksiyonu D_0 üzerinde ikinci değişkene göre pozitif olmayan rd-sürekli $H^{\Delta_s}(t,s)$, Δ-kısmi türeve sahiptir ve

$$H^{\Delta_s}(t,s) + H(t,s)\frac{\eta^{\Delta}(s)}{\eta(\sigma(s))} = \frac{h(t,s)}{\eta(\sigma(s))}H^{1/\lambda}(t,s)$$

şartlarını sağlıyorsa, $H \in C_{rd}(D,\mathbb{R})$ fonksiyonuna $\mathcal{P}$ sınıfına aittir denir ve $H \in \mathcal{P}$ ile ifade edilir.

Teorem 4.4.1. Kabul edelim ki (4.1.2) ve (4.1.4)-(4.2.6) sağlansın, ayrıca

$$\chi_3(t) = \kappa\eta(t)\, q_2(t)\, \frac{R_2^{\beta}\left(g^{-1}\left(\phi_2(t)\right), t_2\right)}{R_1^{\alpha_2}\left(\sigma(t), t_1\right)}$$

ve $t_* > t_2 \geq t_1$ olmak üzere, yeterince büyük her $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_*)} \int_{t_*}^{t} \left[H(t,s)\,\chi_3(s) - \frac{r_2(s)\left(h_+(t,s)\right)^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}\left(\eta(s)\,\psi(s)\right)^{\alpha_2}} \right] \Delta s = \infty \quad (4.4.48)$$

olacak şekilde $\eta \in C_{rd}^1([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ ve $H, h \in C_{rd}(D,\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{P}$ fonksiyonları var olsun. Bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a,b]$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $x(\phi(t,\xi)) > 0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 ile belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 4.2.2 den, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

Kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Bu takdirde, (3.3.29), (4.2.11), (4.3.24), (4.3.25) ve (4.3.29) ifadeleri tekrar sağlanır. $\omega(t)$ fonksiyonu (4.3.22)'deki gibi tanımlanmak üzere, (4.2.11), (4.3.24) ve (4.3.25) kullanılarak, $t \geq t_3$ için

$$\begin{aligned}\omega^{\Delta}(t) &= \frac{\eta(t)}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}}\left(z^{[2]}(t)\right)^{\Delta} + \left(\frac{\eta(t)}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}}\right)^{\Delta} z^{[2]}(\sigma(t)) \\ &\le -\kappa\eta(t)\,q_2(t)\,\frac{R_2^{\beta}\left(g^{-1}(\phi_2(t)),t_2\right)}{R_1^{\alpha_2}(\sigma(t),t_1)} + \frac{\eta^{\Delta}(t)\,\omega(\sigma(t))}{\eta(\sigma(t))} \\ &\quad -\eta(t)\,\frac{z^{[2]}(\sigma(t))\left(\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}\right)^{\Delta}}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}\left(z^{[1]}(\sigma(t))\right)^{\alpha_2}} \end{aligned} \tag{4.4.49}$$

elde edilir. Eğer $0 < \alpha_2 \le 1$ ise, (3.3.29) ve (4.4.49)'dan

$$\omega^{\Delta}(t) \le -\chi_3(t) + \frac{\eta^{\Delta}(t)\,\omega(\sigma(t))}{\eta(\sigma(t))} - \alpha_2\eta(t)\,\frac{z^{[2]}(\sigma(t))\left(z^{[1]}(t)\right)^{\Delta}}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2} z^{[1]}(\sigma(t))}, \tag{4.4.50}$$

eğer $\alpha_2 > 1$ ise, (3.3.29) ve (4.4.49)'dan

$$\omega^{\Delta}(t) \le -\chi_3(t) + \frac{\eta^{\Delta}(t)\,\omega(\sigma(t))}{\eta(\sigma(t))} - \alpha_2\eta(t)\,\frac{z^{[2]}(\sigma(t))\left(z^{[1]}(t)\right)^{\Delta}}{z^{[1]}(t)\left(z^{[1]}(\sigma(t))\right)^{\alpha_2}} \tag{4.4.51}$$

sonucuna varılır. $z^{[1]}(t)$ artan ve $z^{[2]}(t)$ azalan fonksiyonlar olduğu kullanılarak, sırasıyla $z^{[1]}(t) \le z^{[1]}(\sigma(t))$ ve $\left(z^{[1]}(t)\right)^{\Delta} \ge \left(z^{[2]}(\sigma(t))\right)^{1/\alpha_2} / \left(r_2(t)\right)^{1/\alpha_2}$ bulunur. Buradan da (4.4.50) ve (4.4.51), sırasıyla

$$\omega^{\Delta}(t) \le -\chi_3(t) + \frac{\eta^{\Delta}(t)\,\omega(\sigma(t))}{\eta(\sigma(t))} - \frac{\alpha_2\eta(t)\left(z^{[2]}(\sigma(t))\right)^{\lambda}}{r_2^{1/\alpha_2}(t)\left(z^{[1]}(\sigma(t))\right)^{\alpha_2+1}}\,\frac{z^{[1]}(t)}{z^{[1]}(\sigma(t))} \tag{4.4.52}$$

ve

$$\omega^{\Delta}(t) \le -\chi_3(t) + \frac{\eta^{\Delta}(t)\,\omega(\sigma(t))}{\eta(\sigma(t))} - \frac{\alpha_2\eta(t)\left(z^{[2]}(\sigma(t))\right)^{\lambda}}{r_2^{1/\alpha_2}(t)\left(z^{[1]}(\sigma(t))\right)^{\alpha_2+1}}\,\frac{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}}{\left(z^{[1]}(\sigma(t))\right)^{\alpha_2}} \tag{4.4.53}$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.29) göz önüne alınarak (4.4.52) ve (4.4.53) birleştirilirse, $\alpha_2 > 0$ ve $t \ge t_3$ için

$$\omega^{\Delta}(t) \le -\chi_3(t) + \frac{\eta^{\Delta}(t)\,\omega(\sigma(t))}{\eta(\sigma(t))} - \frac{\alpha_2\eta(t)\,\psi(t)}{r_2^{1/\alpha_2}(t)}\,\frac{\omega^{\lambda}(\sigma(t))}{\eta^{\lambda}(\sigma(t))} \tag{4.4.54}$$

olduğu görülür ve buradan hareketle, $t \geq T \geq t_3$ için

$$\begin{aligned}\int_T^t H(t,s)\chi_3(s)\Delta s &\leq -\int_T^t H(t,s)\omega^{\Delta}(s)\Delta s + \int_T^t H(t,s)\frac{\eta^{\Delta}(s)}{\eta(\sigma(s))}\omega(\sigma(s))\Delta s \\ &\quad -\int_T^t H(t,s)\frac{\alpha_2\eta(s)\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)}\frac{\omega^{\lambda}(\sigma(s))}{\eta^{\lambda}(\sigma(s))}\Delta s \qquad (4.4.55)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.4.55)'e kısmi integrasyon formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\int_T^t H(t,s)\chi_3(s)\Delta s \leq H(t,T)\omega(T) + \int_T^t H^{\Delta_s}(t,s)\omega(\sigma(s))\Delta s \\ &+\int_T^t H(t,s)\frac{\eta^{\Delta}(s)\omega(\sigma(s))}{\eta(\sigma(s))}\Delta s - \int_T^t H(t,s)\frac{\alpha_2\eta(s)\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)}\frac{\omega^{\lambda}(\sigma(s))}{\eta^{\lambda}(\sigma(s))}\Delta s \\ &\leq H(t,T)\omega(T) + \int_T^t \frac{h_+(t,s)}{\eta(\sigma(s))}H^{1/\lambda}(t,s)\omega(\sigma(s))\Delta s \\ &-\int_T^t H(t,s)\frac{\alpha_2\eta(s)\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)}\frac{\omega^{\lambda}(\sigma(s))}{\eta^{\lambda}(\sigma(s))}\Delta s \qquad (4.4.56)\end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$$U = \frac{\left[\alpha_2\eta(s)\psi(s)H(t,s)\right]^{1/\lambda}\omega(\sigma(s))}{\left[r_2^{1/\alpha_2}(s)\eta^{\lambda}(\sigma(s))\right]^{1/\lambda}} \text{ ve } V = \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2+1}\frac{\left[r_2^{1/\alpha_2}(s)\eta^{\lambda}(\sigma(s))\right]^{1/\lambda}}{\left[\alpha_2\eta(s)\psi(s)\right]^{1/\lambda}}\frac{h_+(t,s)}{\eta(\sigma(s))}\right]^{\alpha_2}$$

olmak üzere, Lemma 2.7.13 uygulanırsa

$$\begin{aligned}&\frac{h_+(t,s)}{\eta(\sigma(s))}H^{1/\lambda}(t,s)\omega(\sigma(s)) - H(t,s)\alpha_2\eta(s)\psi(s)\frac{1}{r_2^{1/\alpha_2}(s)}\frac{\omega^{\lambda}(\sigma(s))}{\eta^{\lambda}(\sigma(s))} \\ &\qquad\leq \frac{1}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}}\frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}, \qquad (4.4.57)\end{aligned}$$

ve (4.4.57) ifadesi (4.4.56) içinde kullanılırsa,

$$\int_T^t \left[H(t,s)\chi_3(s) - \frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\right]\Delta s \leq H(t,T)\omega(T), \qquad (4.4.58)$$

yani, her $t \geq t_3$ için

$$\int_{t_3}^{t}\left[H(t,s)\chi_3(s)-\frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\right]\Delta s\leq H(t,t_3)\omega(t_3)$$

sonucuna varılır. Bu ise (4.4.48) ile çelişir. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 4.4.2. Kabul edelim ki $H,h\in C_{rd}(D,\mathbb{R})$ ve $\chi_3(t)$ fonksiyonları Teorem 4.4.1'deki gibi tanımlansın, (4.1.2) ve (4.1.4)-(4.2.6) şartları sağlansın ve

$$0<\inf_{s\geq t_0}\left\{\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\right\}\leq\infty \tag{4.4.59}$$

olsun. Ayrıca $t_*>t_2\geq t_1$ olmak üzere, yeterince büyük her $t_1\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_*)}\int_{t_*}^{t}\frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\Delta s<\infty, \tag{4.4.60}$$

$T\geq t_*$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_{T}^{t}\left[H(t,s)\chi_3(s)-\frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\right]\Delta s\geq\Psi(T) \tag{4.4.61}$$

ve

$$\int_{t_*}^{\infty}\frac{\eta(s)\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)\eta^{\lambda}(\sigma(s))}\Psi_+^{\lambda}(\sigma(s))\Delta s=\infty, \tag{4.4.62}$$

olacak şekilde $\eta\in C_{rd}^1([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ ve $\Psi(t)\in C_{rd}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ fonksiyonları var olsun. Bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t\to\infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t\geq t_1$ ve $\xi\in[a,b]$ için $x(t)>0$, $x(g(t))>0$ ve $x(\phi(t,\xi))>0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 ile belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 4.2.2 den, $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ olduğu görülür.

Kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Bu takdirde, Teorem 4.4.1'nin ispatındaki süreç işletilirse, tekrar (4.4.56) ve (4.4.58) ifadelerine ulaşılır. (4.4.58) ve (4.4.61) göz önüne alınırsa, $t > T \geq t_3$ için

$$\Psi(T) \leq \omega(T) \tag{4.4.63}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t H(t,s)\,\chi_3(s)\,\Delta s \geq \Psi(T) \tag{4.4.64}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$A(t) = \frac{1}{H(t,t_3)} \int_{t_3}^t \frac{h_+(t,s)}{\eta(\sigma(s))} H^{1/\lambda}(t,s)\,\omega(\sigma(s))\,\Delta s, \quad t > t_3 \text{ için}$$

ve

$$B(t) = \frac{1}{H(t,t_3)} \int_{t_3}^t H(t,s) \frac{\alpha_2 \eta(s)\,\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)} \frac{\omega^\lambda(\sigma(s))}{\eta^\lambda(\sigma(s))} \Delta s, \quad t > t_3 \text{ için },$$

ile tanımlanırsa, (4.4.56)'dan

$$\begin{aligned} \liminf_{t\to\infty} [B(t) - A(t)] &\leq \omega(t_3) - \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_3)} \int_{t_3}^t H(t,s)\,\chi_3(s)\,\Delta s \\ &\leq \omega(t_3) - \Psi(t_3) < \infty \end{aligned} \tag{4.4.65}$$

bulunur. Şimdi iddia ediyoruz ki,

$$\int_{t_3}^\infty \frac{\eta(s)\,\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)} \frac{\omega^\lambda(\sigma(s))}{\eta^\lambda(\sigma(s))} \Delta s < \infty \tag{4.4.66}$$

dır. Bunu ispatlamak için, aksine kabul edelim ki

$$\int_{t_3}^\infty \frac{\eta(s)\,\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)} \frac{\omega^\lambda(\sigma(s))}{\eta^\lambda(\sigma(s))} \Delta s = \infty \tag{4.4.67}$$

olsun. (4.4.59)'dan

$$\inf_{s\geq t_0} \left\{ \liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right\} > \varepsilon_1 > 0 \tag{4.4.68}$$

olacak şekilde bir sabit $\varepsilon_1 > 0$ vardır. $K_1 > 0$ keyfi bir sayı olsun. Bu takdirde, (4.4.67)'den $t \geq t_4$ için

$$\int_{t_3}^{t} \frac{\eta(s)\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)} \frac{\omega^\lambda(\sigma(s))}{\eta^\lambda(\sigma(s))} \Delta s \geq \frac{K_1}{\alpha_2 \varepsilon_1}$$

olacak şekilde bir $t_4 > t_3$ vardır. Bununla birlikte, her $t \geq t_4 > t_3$ için

$$\begin{aligned}
B(t) &= \frac{1}{H(t,t_3)} \int_{t_3}^{t} \alpha_2 H(t,s) \frac{\eta(s)\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)} \frac{\omega^\lambda(\sigma(s))}{\eta^\lambda(\sigma(s))} \Delta s \\
&= \frac{1}{H(t,t_3)} \int_{t_3}^{t} \alpha_2 H(t,s) \left(\int_{t_3}^{s} \frac{\eta(u)\psi(u)}{r_2^{1/\alpha_2}(u)} \frac{\omega^\lambda(\sigma(u))}{\eta^\lambda(\sigma(u))} \Delta u \right)^{\Delta_s} \Delta s \\
&= \frac{1}{H(t,t_3)} \int_{t_3}^{t} \left[-\alpha_2 H^{\Delta_s}(t,s) \int_{t_3}^{\sigma(s)} \frac{\eta(u)\psi(u)}{r_2^{1/\alpha_2}(u)} \frac{\omega^\lambda(\sigma(u))}{\eta^\lambda(\sigma(u))} \Delta u \right] \Delta s \\
&\geq \frac{1}{H(t,t_3)} \int_{t_4}^{t} \left[-\alpha_2 H^{\Delta_s}(t,s) \int_{t_3}^{s} \frac{\eta(u)\psi(u)}{r_2^{1/\alpha_2}(u)} \frac{\omega^\lambda(\sigma(u))}{\eta^\lambda(\sigma(u))} \Delta u \right] \Delta s \\
&\geq \frac{1}{H(t,t_3)} \int_{t_4}^{t} \left[-\alpha_2 H^{\Delta_s}(t,s) \frac{K_1}{\alpha_2 \varepsilon_1} \right] \Delta s = \frac{K_1}{\varepsilon_1} \frac{H(t,t_4)}{H(t,t_3)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (4.4.68)'den dolayı $\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,t_4)}{H(t,t_0)} > \varepsilon_1$ olduğundan, her $t \geq t_5$ için $\frac{H(t,t_4)}{H(t,t_3)} \geq \varepsilon_1$ olacak şekilde bir $t_5 \geq t_4$ seçilebilir. Bu yüzden de, her $t \geq t_5$ için $B(t) \geq K_1$ dir. K_1 keyfi olduğundan da,

$$\lim_{t\to\infty} B(t) = \infty \tag{4.4.69}$$

sonucuna varılır. Şimdi, $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ ve

$$\lim_{n\to\infty} [B(T_n) - A(T_n)] = \liminf_{t\to\infty} [B(t) - A(t)]$$

olacak şekilde $(t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde bir $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda (4.4.65)'den, yeterince büyük her n tamsayısı için

$$B(T_n) - A(T_n) \leq K_2 \tag{4.4.70}$$

olacak şekilde bir K_2 sabiti vardır. (4.4.69) ifadesi

$$\lim_{n\to\infty} B\left(T_n\right) = \infty \tag{4.4.71}$$

olmasını garanti ettiğinden, (4.4.70) ifadesi

$$\lim_{n\to\infty} A\left(T_n\right) = \infty \tag{4.4.72}$$

anlamına gelir. Ayrıca (4.4.70) ve (4.4.71)'den, yeterince büyük pozitif n tamsayıları için

$$\frac{A\left(T_n\right)}{B\left(T_n\right)} - 1 \geq \frac{-K_2}{B\left(T_n\right)} > \frac{-K_2}{2K_2} = \frac{-1}{2},$$

yani

$$\frac{A\left(T_n\right)}{B\left(T_n\right)} > \frac{1}{2},$$

ve buradan (4.4.72) ile birlikte,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[A\left(T_n\right)\right]^{\alpha_2+1}}{\left[B\left(T_n\right)\right]^{\alpha_2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{A\left(T_n\right)}{B\left(T_n\right)}\right]^{\alpha_2} A\left(T_n\right) = \infty \tag{4.4.73}$$

elde edilir. Diğer yandan, Lemma 2.7.14 kullanılarak,

$$\begin{aligned} A\left(T_n\right) &= \frac{1}{H\left(T_n, t_3\right)} \int_{t_3}^{T_n} \frac{h_+\left(T_n, s\right)}{\eta\left(\sigma\left(s\right)\right)} H^{1/\lambda}\left(T_n, s\right) \omega\left(\sigma\left(s\right)\right) \Delta s \\ &= \int_{t_3}^{T_n} \left\{ \left[\frac{\alpha_2 H(T_n, s)\eta\left(s\right)\psi\left(s\right)}{H\left(T_n, t_3\right)}\right]^{1/\lambda} \times \frac{\omega\left(\sigma\left(s\right)\right)}{\left[r_2^{1/\alpha_2}\left(s\right)\eta^{\lambda}\left(\sigma\left(s\right)\right)\right]^{1/\lambda}} \right\} \\ &\quad \times \frac{h_+(T_n, s) H^{1/\lambda}(T_n, s)\left(r_2\left(s\right)\right)^{1/(\alpha_2+1)}}{H\left(T_n, t_3\right)} \times \left[\frac{\alpha_2 H(T_n, s)\eta\left(s\right)\psi\left(s\right)}{H\left(T_n, t_3\right)}\right]^{-1/\lambda} \Delta s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[\int_{t_3}^{T_n} \frac{\alpha_2 H(T_n,s)\eta(s)\psi(s)}{H(T_n,t_3)\, r_2^{1/\alpha_2}(s)\,\eta^{\lambda}(\sigma(s))}\omega^{\lambda}(\sigma(s))\,\Delta s\right]^{1/\lambda} \\
&\quad\times \left[\int_{t_3}^{T_n} \left(\frac{h_+(T_n,s)H^{1/\lambda}(T_n,s)\,(r_2(s))^{1/(\alpha_2+1)}}{H(T_n,t_3)}\right)^{\alpha_2+1}\right. \\
&\quad\times \left.\left(\frac{\alpha_2 H(T_n,s)\eta(s)\psi(s)}{H(T_n,t_3)}\right)^{-\alpha_2}\Delta s\right]^{\frac{1}{\alpha_2+1}} \\
&= B^{1/\lambda}(T_n)\left[\frac{\alpha_2^{-\alpha_2}}{H(T_n,t_3)}\int_{t_3}^{T_n}\frac{r_2(s)\,(h_+(T_n,s))^{\alpha_2+1}}{(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\Delta s\right]^{\frac{1}{\alpha_2+1}} \qquad (4.4.74)
\end{aligned}
$$

ve buradan da

$$
\frac{[A(T_n)]^{\alpha_2+1}}{[B(T_n)]^{\alpha_2}} \leq \frac{\alpha_2^{-\alpha_2}}{H(T_n,t_3)}\int_{t_3}^{T_n}\frac{r_2(s)\,(h_+(T_n,s))^{\alpha_2+1}}{(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\Delta s \qquad (4.4.75)
$$

sonucuna varılır. (4.4.73) ve (4.4.75) birlikte düşünülürse,

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H(T_n,t_3)}\int_{t_3}^{T_n}\frac{r_2(s)\,(h_+(T_n,s))^{\alpha_2+1}}{(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\Delta s = \infty, \qquad (4.4.76)
$$

ve buradan da

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_3)}\int_{t_3}^{t}\frac{r_2(s)\,(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\Delta s = \infty
$$

elde edilir ki bu ifade (4.4.60) ile çelişir. O halde (4.4.66) sağlanır. Bu yüzden de, (4.4.63) ve (4.4.66) ifadelerinden,

$$
\int_{t_3}^{\infty}\frac{\eta(s)\psi(s)}{r_2^{1/\alpha_2}(s)\,\eta^{\lambda}(\sigma(s))}\Psi_+^{\lambda}(\sigma(s))\,\Delta s \leq \int_{t_3}^{\infty}\frac{\eta(s)\psi(s)\,\omega^{\lambda}(\sigma(s))}{r_2^{1/\alpha_2}(s)\,\eta^{\lambda}(\sigma(s))}\Delta s < \infty \qquad (4.4.77)
$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç (4.4.62) ile çelişkilidir ve ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.3. Kabul edelim ki $H, h \in C_{rd}(D,\mathbb{R})$ ve $\chi_3(t)$ fonksiyonları Teorem 4.4.1'deki gibi tanımlansın, (4.1.2), (4.1.4)-(4.2.6) şartları ve (4.4.59) sağlansın. Ayrıca $t_* > t_2 \geq t_1$ olmak üzere, $T \geq t_*$ için (4.4.62) sağlanacak,

$$
\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_*)}\int_{t_*}^{t} H(t,s)\chi_3(s)\,\Delta s < \infty \qquad (4.4.78)
$$

ve

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\left[H(t,s)\chi_3(s)-\frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\right]\Delta s\geq\Psi(T) \tag{4.4.79}$$

olacak şekilde $\eta\in C_{rd}^1([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ ve $\Psi(t)\in C_{rd}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ fonksiyonları var olsun. Bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t\to\infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t\geq t_1$ ve $\xi\in[a,b]$ için $x(t)>0$, $x(g(t))>0$ ve $x(\phi(t,\xi))>0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 ile belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 4.2.2 den, $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ dır.

Kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Bu takdirde, Teorem 4.4.1'nin ispatındaki süreç işletilirse, tekrar (4.4.56) ve (4.4.58) ifadelerine ulaşılır. (4.4.58) and (4.4.79) birlikte düşünülürse, $T\geq t_3$ için

$$\Psi(T)\leq\omega(T) \tag{4.4.80}$$

ve

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t H(t,s)\chi_3(s)\,\Delta s\geq\Psi(T) \tag{4.4.81}$$

elde edilir. $A(t)$ ve $B(t)$ fonksiyonları Teorem 4.4.2'deki gibi tanımlanırsa, (4.4.56)'dan

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}[B(t)-A(t)] &\leq \omega(t_3)-\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_3)}\int_{t_3}^t H(t,s)\chi_3(s)\,\Delta s\\ &\leq \omega(t_3)-\Psi(t_3)<\infty\end{aligned} \tag{4.4.82}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, (4.4.79) ve (4.4.81) ifadelerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\Psi(t_3) &\leq \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_3)}\int_{t_3}^{t}\left[H(t,s)\chi_3(s)-\frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\right]\Delta s \\ &\leq \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_3)}\int_{t_3}^{t}H(t,s)\chi_3(s)\Delta s \\ &\quad -\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_3)}\int_{t_3}^{t}\frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\Delta s \end{aligned} \tag{4.4.83}$$

bulunur. Bununla birlikte, (4.4.78) ve (4.4.83)'den

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_3)}\int_{t_3}^{t}\frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\Delta s<\infty \tag{4.4.84}$$

sonucuna varılır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H(T_n,t_3)}\int_{t_3}^{T_n}\frac{r_2(s)(h_+(T_n,s))^{\alpha_2+1}}{(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\Delta s<\infty \tag{4.4.85}$$

ve $\lim_{n\to\infty}T_n=\infty$ olacak şekilde $(t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında bir $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Teorem 4.4.2'nin ispatındaki prosedür takip edilirse, görülür ki (4.4.76) sağlanır, bu da (4.4.85) ile çelişir. Bu çelişki, (4.4.67)'nin sağlanmadığını ispatlar. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.4.2'nin ispatı gibidir.

Teorem 4.4.4. Kabul edelim ki (4.1.3)-(4.2.6) sağlansın, η, H ve h fonksiyonları Teorem 4.4.1'de olduğu gibi tanımlansın. Eğer

$$\chi_4(t)=\kappa\eta(t)q_2(t)\frac{R_2^{\beta}(\sigma(t),t_2)}{R_1^{\alpha_2}(\sigma(t),t_1)}$$

ve yeterince büyük her $t_1\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $t_*>t_2\geq t_1$ olmak üzere,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_*)}\int_{t_*}^{t}\left[H(t,s)\chi_4(s)-\frac{r_2(s)(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}(\eta(s)\psi(s))^{\alpha_2}}\right]\Delta s=\infty \tag{4.4.86}$$

ise, bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t\to\infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. $x(t)$, (4.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a,b]$ için $x(t) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $x(\phi(t,\xi)) > 0$ olacak ve $z(t)$ fonksiyonu Lemma 4.2.1 ile belirtilen durumlardan birisini sağlayacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, Lemma 4.2.2 den, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

Kabul edelim ki Durum (I) sağlansın. Bı takdirde, (4.2.11), (4.3.25), (4.3.29), (4.3.43) ve (4.3.44) yine sağlanır. ω fonksiyonu (4.3.22)'de olduğu gibi tanımlanır ve (4.2.11), (4.3.25), (4.3.43) ve (4.3.44) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\omega^{\Delta}(t) &= \frac{\eta(t)}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}}\left(z^{[2]}(t)\right)^{\Delta} + \left(\frac{\eta(t)}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}}\right)^{\Delta} z^{[2]}(\sigma(t)) \\ &\leq -\kappa\eta(t)\, q_2(t)\, \frac{R_2^{\beta}(\sigma(t), t_2)}{R_1^{\alpha_2}(\sigma(t), t_1)} + \frac{\eta^{\Delta}(t)\,\omega(\sigma(t))}{\eta(\sigma(t))} \\ &\quad -\eta(t)\, \frac{z^{[2]}(\sigma(t))\left(\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}\right)^{\Delta}}{\left(z^{[1]}(t)\right)^{\alpha_2}\left(z^{[1]}(\sigma(t))\right)^{\alpha_2}} \end{aligned} \tag{4.4.87}$$

elde edilir. İspatın kalan kısmı Teorem 4.4.1'nin ispatı ile benzerdir, bu yüzden detaylara yer verilmemiştir.

Aşağıda verilen iki teoremin ispatı, Teorem 4.4.1-4.4.4 kullanılarak kolayca elde edilebileceğinden, detaylara yer verilmemiştir.

Teorem 4.4.5. Kabul edelim ki (4.1.3)-(4.2.6) sağlansın, χ_4 fonksiyonu Teorem 4.4.4'deki gibi tanımlansın, η, H ve h fonksiyonları da (4.4.59) ve (4.4.60) sağlanacak şekilde Teorem 4.4.2'de olduğu gibi tanımlansın. Eğer $t_* > t_2 \geq t_1$ olmak üzere, $T \geq t_*$ için

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t \left[H(t,s)\,\chi_4(s) - \frac{r_2(s)\left(h_+(t,s)\right)^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}\left(\eta(s)\,\psi(s)\right)^{\alpha_2}} \right] \Delta s \geq \Psi(T) \tag{4.4.88}$$

ve (4.4.62) sağlanacak şekilde bir $\Psi(t) \in C_{rd}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ fonksiyonu varsa, bu takdirde (4.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

Teorem 4.4.6. Kabul edelim ki (4.1.3)-(4.2.6) sağlansın, χ_4 fonksiyonu Teorem 4.4.4'deki gibi tanımlansın, H ve h fonksiyonları da (4.4.59) sağlanacak şekilde Teorem 4.4.3'de olduğu gibi tanımlansın. Eğer $t_* > t_2 \geq t_1$ olmak üzere, $T \geq t_*$ için

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_*)} \int_{t_*}^{t} H(t,s)\chi_4(s)\,\Delta s < \infty, \tag{4.4.89}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[H(t,s)\,\chi_4(s) - \frac{r_2(s)\,(h_+(t,s))^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1}\,(\eta(s)\,\psi(s))^{\alpha_2}} \right] \Delta s \geq \Psi(T) \tag{4.4.90}$$

ve (4.4.62) sağlanacak şekilde bir $\eta \in C^1_{rd}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ ve $\Psi(t) \in C_{rd}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonları varsa, bu takdirde (4.1.1) denkleminin bir $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır, ya da asimptotik olarak sıfıra yakınsar.

4.5. Uygulamalar

Örnek 4.5.1. $\mathbb{T} := \overline{q^{\mathbb{Z}}}=\{q^k : k \in \mathbb{Z}, q > 1\} \cup \{0\}$ olsun. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $g(t) = t/2$, $q(t,\xi) = t^2 + \xi$, $r_1(t) = r_2(t) = 1$, $\phi(t,\xi) = t/2 - \xi$, $f(u) = u^\beta$ ve $p(t) = 8$ olmak üzere $t \in \overline{2^{\mathbb{Z}}}$ ve $t \geq t_0 := 2$ için,

$$\left[\left((x(t) + 8x(t/2))^{\Delta\Delta} \right)^3 \right]^{\Delta} + \int_a^b \left(t^2+\xi\right) x^3(t/2-\xi)\Delta\xi = 0, \tag{4.5.91}$$

üçüncü mertebeden neutral dinamik denklemi göz önüne alalım. Açıkça görülmektedir ki $\kappa = 1$, $\beta = 3$ için (D1)-(D5) şartları ve (4.1.2) sağlanır, ayrıca

$$\varphi_1(t) = 7/64 > 0. \tag{4.5.92}$$

dir.

$$1 - \frac{1}{p\left(g^{-1}\left(g^{-1}(t)\right)\right)} \frac{R_2(g^{-1}(g^{-1}(t)), t_2)}{R_2(g^{-1}(t), t_2)} = \frac{2t-7}{4t-8}$$

olduğundan, $t \geq t_2 = 4$ için

$$\varphi_2(t) \geq \frac{1}{64} \tag{4.5.93}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan (4.5.92) and (4.5.93) göz önüne alınırsa,

$$q_1(t) = \int_a^b (t^2+\xi)(\frac{7}{64})^3 \Delta\xi = (b-a)(\frac{7}{64})^3(t^2+\frac{b+a}{3}), \tag{4.5.94}$$

$$q_2(t) \geq \int_a^b (t^2+\xi)(\frac{1}{64})^3 \Delta\xi = (b-a)(\frac{1}{64})^3(t^2+\frac{b+a}{3}), \quad t \geq t_2 = 4 \quad \text{için} \tag{4.5.95}$$

bulunur. (4.5.94) kullanılırsa, $u \geq 2$ için $\int\limits_u^\infty \left(s^2+\frac{b+a}{3}\right)\Delta s = \infty$ olduğundan,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^\infty \left(\frac{1}{r_1(v)}\int_v^\infty \left(\frac{1}{r_2(u)}\int_u^\infty q_1(s)\,\Delta s\right)^{1/\alpha_2} \Delta u\right)^{1/\alpha_1} \Delta v \\ &= \int_2^\infty \int_v^\infty \left(\int_u^\infty (7/64)^3 (b-a)\left(s^2+\frac{b+a}{3}\right)\Delta s\right)^{1/3} \Delta u \Delta v = \infty \end{aligned}$$

sonucuna varılır, yani (4.2.6) sağlanır.

Ayrıca $\eta(t) = t$ seçilir ve (4.5.95) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} &\limsup_{t\to\infty} \int_T^t \chi_1(s)\Delta s \\ \geq\ &\limsup_{t\to\infty} \int_4^t \frac{(b-a)2s}{(64)^3}\left(s^2+\frac{b+a}{3}\right)\left(\frac{s^2-(4b+6)s+4b^2+12b+8}{6s-6}\right)^3 \Delta s \\ \geq\ &\limsup_{t\to\infty} \frac{2(b-a)}{(384)^3} \int_4^t \left(s^2-(4b+6)s+4b^2+12b+8\right)^3 \Delta s = \infty \end{aligned}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} \int_T^t \frac{\eta_+^\Delta(s)}{R_1^{\alpha_2}(s,t_1)}\Delta s = \limsup_{t\to\infty} \int_4^t \frac{1}{(s-2)^3}\Delta s < \infty,$$

elde edilir, yani (4.3.21) sağlanır. Bu yüzden de, Teorem 4.3.1'in bütün şartları sağlandığından dolayı, (4.5.91) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da asimptotik olarak sıfıra yakınsar.

Örnek 4.5.2. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 5$, $g(t) = t - 2$, $q(t,\xi) = t + \xi$, $r_1(t) = (t+2)/2$, $r_2(t) = 1/t^5$, $\phi(t,\xi) = t - 2 - \xi$, $f(u) = u^\beta$ ve $p(t) = (10t + 11)/(t+1)$ olmak üzere, $t \geq 2$ için

$$\left(\frac{1}{t^5}\left[\left(\frac{t+2}{2}\left[x(t) + \frac{10t+11}{t+1}x(t-2)\right]'\right)'\right]^5\right)' + \int_1^2 (t+\xi)\, x^5(t-2-\xi)d\xi = 0 \tag{4.5.96}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $\kappa = 1$ ve $\beta = 5$ için (D1)-(D5) ve (4.1.2) şartlarının sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Ayrıca,

$$10 \leq p(t) < 11$$

olduğundan

$$\varphi_1(t) \geq \frac{9}{110} > 0 \tag{4.5.97}$$

elde edilir. Diğer yandan, $t \geq t_2 = 3$ için

$$\frac{1}{p\left(g^{-1}(g^{-1}(t))\right)} \frac{R_2(g^{-1}(g^{-1}(t)), t_2)}{R_2(g^{-1}(t), t_2)} \leq \frac{1}{10}\frac{t+3}{t-1} \leq \frac{3}{10}$$

olur ve buradan da

$$\varphi_2(t) \geq \frac{7}{110} \tag{4.5.98}$$

elde edilir. (4.5.97) ve (4.5.98) kullanılarak

$$q_1(t) \geq \int_1^2 (t+\xi)(\frac{9}{110})^5 d\xi = (\frac{9}{110})^5(t + 3/2), \tag{4.5.99}$$

$$q_2(t) \geq \int_1^2 (t+\xi)(\frac{7}{110})^5 d\xi = (\frac{7}{110})^5(t + 3/2), \quad t \geq t_2 = 3 \quad \text{için} \tag{4.5.100}$$

bulunur. $u \geq 2$ için $\int\limits_{u}^{\infty} (s + 3/2)\, ds = \infty$ olduğundan (4.5.99) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r_1(v)} \int_{v}^{\infty} \left(\frac{1}{r_2(u)} \int_{u}^{\infty} q_1(s)\, \Delta s \right)^{1/\alpha_2} \Delta u \right)^{1/\alpha_1} \Delta v \\
&\geq \int\limits_{2}^{\infty} \left(\frac{2}{v+2} \int\limits_{v}^{\infty} \left(\frac{1}{1/u^5} \int\limits_{u}^{\infty} (9/110)^5 (s + 3/2)\, ds \right)^{1/5} du \right) dv = \infty
\end{aligned}$$

olduğu görülür, dolayısıyla (4.2.6) şartı sağlanır. $\eta(t) = t,\ \ H(t,s) = (t-s)^2$ için (4.5.100) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_*)} \int_{t_*}^{t} H(t,s)\, \kappa \eta(s)\, q_2(s)\, \frac{R_2^{\beta}\left(g^{-1}(\phi_2(s)), t_2\right)}{R_1^{\alpha_2}(\sigma(s), t_1)} \Delta s \\
&\geq \limsup_{t\to\infty} \left(\frac{7}{110} \right)^5 \frac{1}{(t-4)^2} \int\limits_{4}^{t} s (t-s)^2 (s + 3/2) \left(\frac{s^2 - 8s + 15}{s^2 - 4} \right)^5 ds = \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_*)} \int_{t_*}^{t} \frac{r_2(s) \left(h_+(t,s)\right)^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)^{\alpha_2+1} \left(\eta(s)\, \psi(s)\right)^{\alpha_2}} \Delta s \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{(t-4)^2} \int\limits_{4}^{t} \frac{(t-3s)^6}{6^6 s^{10} (t-s)^4} ds \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{(t-4)^2} \int\limits_{4}^{t} \frac{(t-s)^2}{6^6 s^{10}} ds < \infty
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır, yani (4.4.48) sağlanır. Bu yüzden de, Teorem 4.4.1'in bütün şartları sağlandığından, (4.5.96) denkleminin herhangi bir çözümü ya salınımlıdır, ya da asimptotik olarak sıfıra yakınsar.

Not 4.5.3. Bu bölümde verilen sonuçlar bilimsel araştırma makalesi olarak yayınlanmak üzere "Bulletin of Mathematical Analysis and Applications" dergisinde kabul edilmiştir (Özdemir ve Tunç, 2018).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, $z(t) = x(t) + p(t)x(g(t))$ olmak üzere, üstten sınırsız keyfi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde

$$\left(r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} + f\left(t, x(h(t))\right) = 0 \tag{5.0.1}$$

ve

$$\left[r_2(t)\left(\left(r_1(t)\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha_1}\right)^{\Delta}\right)^{\alpha_2}\right]^{\Delta} + \int_a^b q(t,\xi) f\left(x\left(\phi(t,\xi)\right)\right)\Delta\xi = 0 \tag{5.0.2}$$

dinamik denklemleri ayrı ayrı göz önüne alınmış, çözümlerin salınım ve asimptotik davranışları

(*) $p \in C_{rd}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$, $p(t) \geq 1$, ve yeterince büyük t ler için $p(t) \not\equiv 1$;

şartı altında incelenmiştir. (5.0.1) ve (5.0.2) denklemlerinde görülen diğer fonksiyonlar bazı standart şartları sağlamaktadır. Sonuçlar verilirken de belirtildiği gibi, bu tezde sunulan kriterler zaman skalasında daha genel dinamik denklemlere kolaylıkla genişletilebilir. Ayrıca,

i. $p \in C_{rd}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$, $p(t) \leq -1$ şartı altında yeni salınım sonuçları araştırılabilir.

ii. (C1) ve (D1) şartlarında, denklemlerde görülen $r(t)$ fonksiyonlarının

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1/\alpha}(s)\Delta s = \infty$$

şartını sağlaması istenmiştir. Buna göre,

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1/\alpha}(s)\Delta s < \infty$$

kanonik olmayan durumu için yeni salınım sonuçları elde edilebilir. Ayrıca her iki denklem için de Hille-Nehari tipi salınım sonuçları üzerinde çalışılabilir.

iii. Bu tezdeki sonuçlar kullanılarak, (5.0.1) ve (5.0.2) denklemlerine birinci mertebeden türev içeren sönüm terimi eklenerek elde edilen, sırasıyla

$$\left(r(t)\left(z^{\Delta\Delta}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}+a(t)z^{\Delta}(t)+f\left(t,x(h(t))\right)=0 \tag{5.0.3}$$

ve

$$\left[r_2(t)\left(\left(r_1(t)\left(z^{\Delta}(t)\right)^{\alpha_1}\right)^{\Delta}\right)^{\alpha_2}\right]^{\Delta}+a(t)z^{\Delta}(t)+\int_a^b q(t,\xi)f\left(x\left(\phi(t,\xi)\right)\right)\Delta\xi=0 \tag{5.0.4}$$

denklemleri için yeni salınım sonuçları verilebilir.

iv. (5.0.1) ve (5.0.2) denklemlerinden daha genel üçüncü mertebeden p-Laplacian tipi neutral denklemler, üçüncü mertebeden karma neutral terimli dinamik denklemler vb. için yeni salınım sonuçları verilebilir.

v. Genelleştirilmiş Riccati-tipi dönüşüm kullanılarak yukarıda sözü edilen denklem türlerinin tamamı için yeni sonuçlar elde edilebilir.

vi. $z(t)=x(t)+p(t)x(g(t))$ ile verilen neutral terimin sublineer olması durumu göz önüne alınarak yeni sonuçlar araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2002. Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve O'Regan, D., 2003. The oscillation of certain higher-order functional differential equations. Math. Comput. Modelling, **37**, 705–728.

Agarwal, R.P., Bohner, M. ve Li, W.-T., 2004. Nonoscillation and Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcel Dekker Inc., New York.

Agarwal, R.P., Bohner, M., Tang, S., Li, T. ve Zhang, C., 2012. Oscillation and asymptotic behavior of third-order nonlinear retarded dynamic equations. Appl. Math. Comput., **219**, 3600–3609.

Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T. ve Zhang, C., 2013. Hille and Nehari type criteria for third-order delay dynamic equations. J. Difference Equ. Appl., **19**, 1563-1579.

Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T. ve Zhang, C., 2014a. A Philos-type theorem for third-order nonlinear retarded dynamic equations. Appl. Math. Comput., **249**, 527–531.

Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T. ve Zhang, C., 2014b. Oscillation criteria for second-order dynamic equations on time scales. Appl. Math. Lett., **31**, 34–40.

Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T. ve Zhang, C., 2014c. Oscillation of second–order Emden–Fowler neutral delay differential equations. Ann. Math. Pur. Appl., **193**, 1861–1875.

Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve Hassan, T.S., 2015a. Oscillation criteria for higher order nonlinear functional dynamic equations with mixed nonlinearities. Commun. Appl. Anal., **19**, 369–402.

Agarwal, R.P., Bohner, M. ve Li, T., 2015b. Oscillatory behavior of second-order half-linear damped dynamic equations, Appl. Math. Comput., **254**, 408–418.

Agarwal, R.P., O'Regan D. ve Saker, S.H., 2016. Hardy Type Ineqaualities on Time Scales. Springer, Cham, Switzerland.

Ahmad, B. ve Nieto, J.J., 2013. Basic theory of nonlinear third-order q-difference equations and inclusions, Math. Model. Anal., **18(1)**, 122–135.

Baculíková, B. ve Džurina, J., 2010a. Oscillation of third-order neutral differential equations. Math. Comput. Modelling, **52**, 215–226.

Baculíková, B. ve Džurina, J., 2010b. On the asymptotic behavior of a class of third order nonlinear neutral differential equations. Cent. Eur. J. Math., **8(6)**, 1091–1103.

Bohner, M. ve Peterson, A., 2001. Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. Birkhäuser, Boston.

Bohner, M. ve Peterson, A., 2003. Advances in Dynamic Equations on Time Scales. Birkhäuser, Boston.

Bohner, M. ve Guseinov, G.Sh., 2010. The h-Laplace and q-Laplace transforms. J. Math. Anal. Appl., **365**, 75–92.

Bohner, M. ve Georgiev, S.G., 2016. Multivariable Dynamic Calculus on Time Scales. Springer, Cham, Switzerland.

Candan, T., 2014. Asymptotic properties of solutions of third-order nonlinear neutral dynamic equations. Adv. Difference Equ., **2014:35**, 10 pages.

Chen, Da-X. ve Liu, Jie-C., 2008. Asymptotic behavior and oscilation of solutions of third-order nonlinear neutral delay dynamic equations on time scales. Canad. Appl. Math. Quart., **16**, 19–43.

Elabbasy, E.M. ve Moaaz, O., 2015. New oscillation results for class of third order neutral delay differential equations with distributed deviating arguments. Global Journal of Science Frontier Research: F Mathematics and Decision Science, **15**, 1–9.

Erbe, L., Kong, Q. ve Zhang, B.G., 1995. Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcel Dekker Inc., New York.

Erbe, L., Hassan, T.S. ve Peterson, A., 2010. Oscillation of third order nonlinear functional dynamic equations on time scales. Differential Equations Dynam. Systems., **18**, 199–227.

Fu, Y., Tian, Y., Jiang, C. ve Li, T., 2016. On the asymptotic properties of nonlinear third-order neutral delay differential equations with distributed deviating arguments. Journal of Function Spaces, **2016**, Article ID 3954354, 5 pages.

Gao, L., Zhang, Q. ve Liu, S., 2014. New oscillatory behavior of third-order nonlinear delay dynamic equations on time scales. Abstr. Appl. Anal., **2014**, Article ID: 914264, 11 pages.

Grace, S.R., Graef, J.R. ve El-Beltagy, M.A., 2012. On the oscillation of third order neutral delay dynamic equations on time scales. Comput. Math. Appl., **63**, 775–782.

Grace, S.R., Graef, J.R. ve Tunç, E., 2016. Oscillatory behavior of a third-order neutral dynamic equation with distributed delays. Proc. 10th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ., (July 1-4, 2015, Szeged, Hungary) Electron. J. Qual. Theory. Differ. Equ., **2016**, No. 14, 1–14.

Graef, J.R. ve Thandapani, E., 1999. Oscillatory and asymptotic behavior of solutions of third order delay difference equations. Funkcialaj Ekvacioj, **42**, 355–369.

Graef, J.R. ve Saker, S.H., 2013. Oscillation theory of third-order nonlinear functional differential equations. Hiroshima Math. J., **43**, 49–72.

Graef, J.R., Savithri, R. ve Thandapani, E., 2002. Oscillatory properties of third order neutral delay differential equations. Proceedings of the fourth international conference on dynamical systems and differential equations, May 24–27, Wilmington, NC, USA. pp. 342–350.

Graef, J.R., Tunc, E. ve Grace, S.R., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of a third-order nonlinear neutral differential equation. Opuscula Math., **37(6)**, 839–852.

Guseinov, G.Sh., 2003. Integration on time scales. J. Math. Anal. Appl., **285(1)**, 107–127.

Györi, I. ve Ladas, G., 1991. Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. Clarendon Press, Oxford.

Hale, J.K., 1971. Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York.

Han, Z., Li, T., Sun, S. ve Zhang, C., 2010. Oscillation behavior of third-order neutral Emden-Fowler delay dynamic equations on time scales. Adv. Differ. Equ., **2010**, Article ID: 586312, 23 pages.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E. ve Polya, G., 1988. Inequalities. Reprint of the 1952 edition, Cambridge University Press, Cambridge.

Hassan, T.S., 2009. Oscillation of third order nonlinear delay dynamic equations on time scales. Math. Comput. Modelling, **49**, 1573–1586.

Hassan, T.S. ve Grace, S.R., 2014. Oscillation criteria for third order neutral nonlinear dynamic equations with distributed deviating arguments on time scales. Tatra Mt. Math. Publ., **61**, 141–161.

Hilger, S., 1988. Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. Ph.D. Thesis. Universtät Würzburg, Würzburg, Germany.

Hilger, S., 1990. Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus. Result. Math., **18**, 18–56.

Huang, X.Y., 2016. Oscillatory behavior of n-th-order neutral dynamic equations with mixed nonlinearities on time scales. Electron. J. Diff. Equ., **2016**, No. 16, 1–18.

Jiang, C., Jiang, Y. ve Li, T., 2016. Asymptotic behavior of third-order differential equations with nonpositive neutral coefficients and distributed deviating arguments. Adv. Difference Equ., **2016:105**, 14 pages.

Jiang, Y., Jiang, C. ve Li, T., 2016. Oscillatory behavior of third-order nonlinear neutral delay differential equations. Adv. Differ. Equ., **2016:171**, 12 pages.

Jiang, C. ve Li, T., 2016. Oscillation criteria for third-order nonlinear neutral differential equations with distributed deviating arguments. J. Nonlinear Sci. Appl., **9**, 6170–6182.

Kac, V. ve Cheung, P., 2002. Quantum Calculus. Springer-Verlag, New York.

Karpuz, B., 2013. Sufficient conditions for the oscillation and asymptotic beaviour of higher-order dynamic equations of neutral type. Appl. Math. Comput., **221**, 453–462.

Kelley, V.G. ve Peterson, A.C., 2004. The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative. Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.

Kolmanovskii, V. ve Myshkis, A., 1999. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Ladas, G., Sficas, Y.G. ve Stavroulakis, I.P., 1984. Necessary and sufficient conditions for oscillations of higher order delay differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., **285**, 81–90.

Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. ve Zhang, B.G., 1987. Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. Marcel Dekker Inc., New York.

Lakshmikantham, V., Sivasundaram, S. ve Kaymakçalan, B., 1996. Dynamic systems on measure chains. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Li, T., Agarwal, R.P. ve Bohner, M., 2012. Some oscillation results for second-order neutral dyanmic equations. Hacet. J. Math. Stat., **41**, 715–721.

Li, T., Han, Z., Sun, S. ve Zhao, Y., 2011. Oscillation results for third order nonlinear delay dynamic equations on time scales. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **34**, 639–648.

Li, T. ve Zhang, C., 2013. Properties of third-order half-linear dynamic equations with an unbounded neutral coefficient. Adv. Difference Equ., **2013:333**, 8 pages.

Li, T., Zhang, C. ve Xing, G., 2012. Oscillation of third-order neutral delay differential equations. Abstr. Appl. Anal., **2012**, Article ID 569201, 11 pages.

Liu, H. ve Ma, C., 2013. Oscillation criteria for second-order neutral delay dynamic equations with nonlinearities given by Riemann-Stieltjes integrals. Abstr. Appl. Anal., **2013**, Article ID 530457, 9 pages.

Özdemir, O. ve Tunç, E., 2018. Asymptotic behavior and oscillation of solutions of third order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. Bull. Math. Anal. Appl., to appear.

Padhi, S. ve Pati, S., 2014. Theory of Third-Order Differential Equations. Springer, New Delhi.

Panigrahi, S. ve Basu, R., 2012. Oscillation of nonlinear neutral differential equations of fourth order with several delays. Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl., **4**, 59–89.

Pinelas, S., 2014. Asymptotic behavior of solutions to mixed type differential equation. Electron. J. Diff. Equ., **2014**, No. 210, 1–9.

Philos, Ch.G., 1989. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. Arch. Math., **53**, 482–492.

Răsvan, V., 2006. Functional differential equations of lossless propagation and almost linear behavior. IFAC Proceedings Volumes, **39(10)**, 138–150.

Qin, G., Huang, C., Xie, Y. ve Wen, F., 2013. Asymptotic behavior for third-order quasi-linear differential equations. Adv. Difference Equ., **2013:305**, 8 pages.

Saker, S.H., 2006. Oscillation of second-order nonlinear neutral delay dynamic equations on time scales. J. Comput. Appl. Math., **187**, 123–141.

Saker, S.H., 2010. Oscillation Theory of Dynamic Equations on Time Scales: Second and Third Orders. Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, Germany.

Saker, S.H., 2011. Oscillation of third-order functional dynamic equations on time scales. Science China Mathematics, **54**, 2597–2614.

Saker, S.H. ve Graef, J.R., 2012. Oscillation of third-order nonlinear neutral functional dynamic equations on time scales. Dyn. Syst. Appl., **21**, 583–606.

Şenel, M.T. ve Utku, N., 2014. Oscillation behavior of third-order nonlinear neutral dynamic equations on time scales with distributed deviating arguments. Filomat, **28(6)**, 1211–1223.

Sharkovsky, A.N., Maistrenko Y.L. ve Romanenko, E.Y., 1993. Difference Equations and Their Applications. Springer Science+Business Media, Dordrecht.

Stević, S., 2003. A note on the recursive sequence $x_{n+1} = p_k x_n + p_{k-1} x_{n-1} + ... + p_1 x_{n-k+1}$. Ukrainian Mathematical Journal, **55(4)**, 691–697.

Sturm, C., 1836. Sur les équations différentielles linéaires du second ordré. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **1**, 106-186.

Tian, Y., Cai, Y., Fu, Y. ve Li, T., 2015. Oscillation and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. Adv. Difference Equ., **2015:267**, 14 pages.

Tunç, E. ve Graef, J.R., 2014. Oscillation results for second order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. Dynam. Systems Appl., **23**, 289–303.

Tunç, E., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. Electron. J. Differ. Eq., **2017**, No. 16, 1–12.

Tunç, E. ve Özdemir, O., 2017. On the asymptotic and oscillatory behavior of solutions of third-order neutral dynamic equations on time scales. Adv. Difference Equ., **2017:127**, 13 pages.

Wang, H., Chen, G., Jiang, Y., Jiang, C. ve Li, T., 2017. Asymptotic behavior of third order neutral differential equations with distributed deviating arguments. J. Math. Computer Sci., **17**, 194–199.

Xiang, H., 2016. Oscillation of third-order nonlinear neutral differential equations with distributed time dalay. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, **36**, 769–782.

Yang, J., 2013. Oscillation criteria for certain third-order variable delay functional dynamic equations on time scales. J. Appl. Math. Comput., **43**, 445–466.

Yu, C. ve Wang, J., 2014. Eigenvalue of boundary value problem for nonlinear singular third-order q-difference equations. Adv. Difference Equ., **2017:21**, 8 pages.

Zafer, A., 1992. Oscillatory and nonoscillatory properties of solutions of functional differential equations and difference equations. Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.

Zhang, Q., Gao, L. ve Yu, Y., 2012. Oscillation criteria for third-order neutral differential equations with continuously distributed delay. Appl. Math. Lett., **25**, 1514–1519.

Zhang, Q. ve Liu, S., 2014. Oscillation theorems for second-order half-linear neutral delay dynamic equations with damping on time scales. Abstr. Appl. Anal., **2014**, Article ID 615374, 12 pages.

ÖZGEÇMİŞ - CURRICULUM VITAE

Orhan Özdemir

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
60240, Tokat, TÜRKİYE

Email: `orhanozdemir37@yahoo.com`
`orhan.ozdemir@gop.edu.tr`

Öğrenim Bilgileri

Doktora,

Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2014 - 2018.

Tez Adı: Zaman Skalasında Üçüncü Mertebeden Neutral Dinamik Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılık ve Asimptotik Davranışı. Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ercan Tunç.

Yüksek Lisans,

Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2010 - 2013.

Tez Adı: İkinci Basamaktan Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılığı. Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ercan Tunç.

Lisans,

Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2005 - 2009.

Lise,

Mustafa Kaya Anadolu Lisesi, Kastamonu, 2001 - 2005.

Akademik Görevler

Araştırma Görevlisi,

Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, 2011 - devam ediyor.

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Özdemir, O. and Tunç, E., 2018. Asymptotic behavior and oscillation of solutions of third order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. Bull. Math. Anal. Appl., to appear. [ESCI: Emerging Sources Citation Index]

2. Tunç, E. and Özdemir, O., 2017. On the asymptotic and oscillatory behavior of solutions of third-order neutral dynamic equations on time scales. Adv. Difference Equ., **2017:127**, 13 pages. [SCI-Expanded]

3. Tunç, E., Çoraklık, L. and Özdemir, O., 2015. Oscillation results for second order functional differential equations. J. Comput. Anal. Appl., **18(1)**, 61–70. [SCI-Expanded]

4. Tunç, E. and Özdemir, O., 2014. Oscillatory and asymptotic behavior of the second order nonlinear differential equations with damping. Proc. Jangjeon Math. Soc., **17(4)**, 539–555. [Alan endeksleri]

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında Basılan Bildiriler

1. Özdemir, O., Avcı, H. and Tunç, E., New oscillation results for second order nonlinear differential equations with mixed neutral term. 1st International Symposium on Multidisciplinary Studies and Innovative Technologies, (Özet Bidiri/Sözlü Sunum). 02-04.11.2017, Tokat.

2. Tunç, E., Avcı, H. and Özdemir, O., Oscillation theorems for second-order nonlinear differential equations with nonlinear damping. 1st International Symposium on Multidisciplinary Studies and Innovative Technologies, (Özet Bidiri/Sözlü Sunum). 02-04.11.2017, Tokat.

3. Tunç, E. and Özdemir, O., Philos-type oscillation criteria for third-order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. Caucasian Mathematics Conference, CMC II, (Özet Bidiri/Sözlü Sunum). 22-24.08.2017, Van.

4. Özdemir, O. and Tunç, E., Oscillatory behavior of third order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. International Conference on Mathematics and Engineering, (Özet Bidiri/Sözlü Sunum). 10-12.05.2017, İstanbul.

Ulusal Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında Basılan Bildiriler

1. Tunç, E. ve Özdemir, O., İkinci mertebeden yarı-lineer neutral diferansiyel denklemler için salınım sonuçları. 13. Ankara Matematik Günleri - AMG 2018, (Özet Bidiri/Sözlü Sunum). 27-28.04.2018, Ankara.

2. Tunç, E. ve Özdemir, O., İkinci basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışı. XXVI. Ulusal Matematik Sempozyumu, (Özet Bidiri/ Sözlü Sunum). 04-07.09.2013, Diyarbakır.

Projelerde Yaptığı Görevler

1. İkinci Basamaktan Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılığı. Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Yükseköğretim Kurumları tarafından destekli bilimsel araştırma projesi, Proje No: 2011/110. Yürütücü: Doç. Dr. Ercan Tunç, Araştırmacı: Orhan Özdemir, 2011-2013.

Last updated: June 7, 2018