NEUTROSOPHİC ESNEK GRUPLAR

ZEYNEP ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

Haziran-2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEUTROSOPHİC ESNEK GRUPLAR

ZEYNEP ÇELİK

TOKAT
Haziran-2019

ZEYNEP ÇELİK tarafından hazırlanan "**Neutrosophic Esnek Gruplar**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 17 Haziran 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI ' nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK	....
Üye Doç. Dr. Aslıhan SEZGİN Amasya Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Adem ŞAHİN Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....

ONAY

....

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü
19/06/2019

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

ZEYNEP ÇELİK
17 Haziran 2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEUTROSOPHİC ESNEK GRUPLAR

ZEYNEP ÇELİK

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ FİLİZ ÇITAK)

Bu tez çalışmasında ilk olarak esnek kümeler ve esnek kümeler üzerindeki işlemler ile ilgili kısaca bilgi verildi. Neutrosophic esnek kümeler tanıtıldı. Neutrosophic esnek kümeler yardımıyla tanımlanan neutrosophic esnek grup ve bu grubun bazı cebirsel özellikleri incelendi. Daha sonra neutrosophic esnek grupların kartezyen çarpımına yer verildi. Neutrosophic esnek alt gruplar ve neutrosophic normal esnek alt gruplar tanıltıldı. Son olarak neutrosophic esnek kosetler ve neutrosophic homomorfizma incelenerek bazı özelliklere yer verildi.

2019, 54 Sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Esnek küme, Neutrosophic küme, Neutrosophic esnek grup, Neutrosophic normal esnek grup.

ABSTRACT

MASTER THESIS

NEUTROSOPHİC SOFT GROUPS

ZEYNEP ÇELİK

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. FİLİZ ÇITAK)

In this thesis study, firstly information about soft sets and operations on soft sets are given. Neutrosophic soft sets are investigated. Neutrosophic soft group and its some algebraic properties are recearched by neutrusophic soft sets. Then, cartesian multiplication of neutrosophic soft groups is studied. Neutrosophic soft subgroups and neutrosophic normal soft subgroups are introduced. Finally, neutrosophic soft cosets and neutrosophic homomorphism are analized.

2019, 54 Pages

KEYWORDS: Soft sets, Neutrosophic sets, Neutrosophic soft groups, Neutrosophic normal soft groups.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan değerli danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca eğitimim boyunca emeği geçen tüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü borç bilirim.

ZEYNEP ÇELİK
Haziran 2019

1. GİRİŞ

Ekonomi, sosyoloji, tıp ve diğer birçok bilim dalındaki araştırmacılar, belirsiz verilerin modellenmesi ile ilgilenmektedir. Fakat klasik yöntemler her zaman başarılı olmamaktadır. Olasılık teorisi, bulanık küme teorisi, sezgisel bulanık kümeler, kaba kümeler gibi matematiksel araçlar belirsizliği tanımlamada tanınmış ve sıkça kullanılan yaklaşımlardır. Her bir matematiksel aracın güçlü olduğu yönleri bulunmasına rağmen, tüm bu araçlar farklı belirsizlik türleri içeren problemlerde istenilen etkiyi gösterememektedir. Bu ise sürekli olarak yeni teorilerin üretilmesini gerektirmektedir.

Bu teorilerden biri de Zadeh tarafından ortaya atılan bulanık (fuzzy) küme teorisidir (Zadeh, 1965). Zadeh, değer kümesini [0,1] kapalı aralığı alarak bir fonksiyon tanımlayıp bu fonksiyon yardımıyla bir bulanık küme oluşturarak belirsizliğe bir yaklaşımda bulunmuştur. Bulanık küme teorisi, bir elemanın bir kümeye kısmi üyeliğine olanak sağlamaktadır. Daha sonra Rosenfeld 1971 yılında bulanık kümelerin cebirsel yapısını oluşturmak amacıyla bulanık grup teorisini tanımlamıştır (Rosenfeld, 1971). Bulanık kümedeki belirsizlikler üzerinde çalışan Atanassov, 1986 yılında sezgisel bulanık küme kavramı üzerinde çalışmalar yapmıştır (Atanassov, 1986).

Diğer taraftan, Molodtsov tarafından 1999 yılında bulanık kümelerin zorluklarıyla başa çıkabilmek için esnek (soft) küme teorisi ortaya atıldı ve birçok alanda uygulamaları yapılmıştır (Molodtsov, 2006). Ardından Maji ve arkadaşları (2001a, 2001b, 2003, 2004) esnek kümeler bulanık esnek kümeler ve sezgisel bulanık esnek kümeler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Sonra, esnek kümeler kullanılarak esnek bağıntı, esnek fonksiyon, esnek dönüşüm gibi bir çok çalışma yapılmıştır (Chen ve ark., 2005; Majumdar ve Samanta, 2010; Sezgin ve Atagün, 2011). Esnek kümelerde karar verme problemleri üzerinde çeşitli araştırmacılar çalışmalar yapmışlardır. (Çağman ve ark., 2010, 2011; Çağman ve Enginoğlu, 2010a,2010b). Daha sonra Aktaş ve Çağman (2007) esnek küme üzerinde esnek grup kavramını tanımlamıştır. Çağman ve arkadaşları (2012) esnek kesişimsel grup kavramını ve cebirsel özelliklerini tanıtmıştır. Esnek kümelerin cebirsel yapısını birçok araştırmacı çalışmaya devam etti (Acar ve ark. 2010; Ali ve ark., 2009; Atagün ve Sezgin, 2011; Feng ve ark., 2008, 2010, 2011; Jun, 2008; Jun ve ark., 2009; Jun ve Park, 2008; Sezgin ve ark., 2011; Şahin ve ark., 2015; Varol ve ark., 2012; Zhan ve Jun, 2010; Zhang, 2012). Feng ve ark. (2010, 2011) bulanık kümelerin, kaba kümelerin ve esnek kümelerin ilişkilerini incelemiştir.

Bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorisinin genelleştirilmiş hali olan neutrosophic esnek küme teorisi nesnel dünyayı daha gerçekçi, pratik ve kullanışlı hale getirmektedir. Neutrosophic küme kavramı ilk kez Smarandache tarafından 2005 yılında tanıtıldı (Smarandache, 2005). Daha sonra Maji 2013 yılında neutrosophic kümeyi esnek küme teorisi ile birleştirdi (Maji, 2013). Sonuç olarak neutrosophic esnek küme teorisi ortaya çıktı. Sonrasında bu kavram Deli ve Broumi tarafından 2015 yılında yeniden tanımlandı (Deli ve Broumi, 2015). Sonrasında, neutrosophic esnek küme kullanılarak bir çok çalışma yapılmıştır. Bera ve Mahapatra (2016a, 2016b, 2017a, 2017b) neutrosophic esnek grup, neutrosophic normal esnek grup, neutrosophic esnek fonksiyon, neutrosophic esnek halka ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Broumi (2013) neutrosophic esnek kümelerin genelleştirilmesi üzerine çalışmıştır. Daha sonra Broumi ve Smarandache (2013) intuitionistic neutrosophic esnek kümeleri tanımlayarak bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasının amacı, neutrosophic esnek gruplar üzerine bir derleme çalışması yapmaktır. İlk olarak, Molodtsov tarafından tanımlanan esnek küme kavramı verilerek Maji tarafından ortaya atılan esnek küme üzerindeki işlemlere yer verildi. Daha sonra neutrosophic küme tanımı verilerek neutrosophic esnek kümeler üzerinde birleşim, kesişim, ve, veya işlemleri incelendi. Bera ve Mahapatra (2017a, 2017b) tarafından tanımlanan neutrosophic esnek gruplar kavramı incelenerek bazı cebirsel özelliklerine yer verildi. Neutrosophic esnek grupların kartezyen çarpımı ele alındı. Neutrosophic esnek altgrup, neutrosophic normal esnek grup kavramları detaylı şekilde anlatıldı. Son olarak neutrosophic esnek kosetler ve neutrosophic esnek homomorfizma hakkında incelemele yapıldı.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Esnek Kümeler

Bu bölüm boyunca U evrensel küme, E parametre kümesi, $P(U)$, U'nun kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun.

Tanım 2.1.1. $A \subseteq E$ için $f_A : A \longrightarrow P(U)$ bir fonksiyon olmak üzere f_A'ya U_E üzerinde esnek küme denir (Molodtsov, 1999).

Tanım 2.1.2. f_A ve f_B, U_E üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer;
(i) $A \subset B$
(ii) $\forall x \in A$ için $f_A(x)$ ve $f_B(x)$ özdeş yaklaşımlar ise
f_A esnek kümesine f_B esnek kümesinin esnek alt kümesi denir ve $f_A \widetilde{\subseteq} f_B$ ile gösterilir. Benzer şekilde f_B, f_A'nın esnek alt kümesi ise f_A'ya f_B'nin esnek süper kümesi denir ve $f_A \widetilde{\supseteq} f_B$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.1.3. f_A ve f_B, U_E üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer f_A, f_B'nin esnek alt kümesi ve f_B, f_A'nın esnek alt kümesi ise f_A ve f_B kümelerine esnek eşit kümeler denir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.1.4. f_A ve f_B, U_E üzerinde iki esnek küme olsun. $C = A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $f_C(x) = f_A(x)$ veya $f_C(x) = f_B(x)$ oluyorsa f_C esnek kümesine f_A ve f_B esnek kümelerinin kesişimi denir ve $f_A \widetilde{\cap} f_B = f_C$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.1.5. f_A ve f_B, U_E üzerinde iki esnek küme olsun. $C = A \cup B$ ve $\forall x \in C$ için

$$f_C(x) = \begin{cases} f_A(x) & \text{eğer } x \in A - B \text{ ise} \\ f_B(x) & \text{eğer } x \in B - A \text{ ise} \\ f_A(x) \cup f_B(x) & \text{eğer } x \in A \cap B \text{ ise} \end{cases}$$

oluyorsa f_C esnek kümesine f_A ve f_B esnek kümelerinin birleşimi denir ve $f_A \widetilde{\cup} f_B = f_C$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.1.6. f_A ve f_B, U_E üzerinde iki esnek küme olsun. $C = A \times B$ ve $\forall (x, y) \in C$ için $f_C(x, y) = f_A(x) \cap f_B(y)$ oluyorsa f_C esnek kümesine f_A ve f_B esnek kümelerinin 'VE' işlemi denir ve $f_A \wedge f_B = f_C$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.1.7. f_A ve f_B, U_E üzerinde iki esnek küme olsun. $C = A \times B$ ve $\forall (x, y) \in C$ için $f_C = f_A(x) \cup f_B(y)$ oluyorsa f_C esnek kümesine f_A ve f_B esnek kümelerinin 'VEYA' işlemi denir ve $f_A \vee f_B = f_C$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.1.8. f_A, U_E üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall x \in A$ için $f_A^c(x) = U - f_A(x)$ şeklinde tanımlanan f_A^c ye f_A esnek kümesinin tümleyeni denir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.1.9. f_A, U_E üzerinde bir esnek küme olsun.
(i) $\forall x \in A$ için $f_A(x) = \emptyset$ ise f_A esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ_A ile gösterilir.
(ii) $\forall x \in A$ için $f_A(x) = U$ ve $A = E$ oluyorsa f_A esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve f_E ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Önerme 2.1.10. f_A, U_E üzerinde esnek küme olsun.

1. $f_A \widetilde{\cup} f_A = f_A$, $f_A \widetilde{\cap} f_A = f_A$
2. $f_A \widetilde{\cup} \Phi_A = f_A$, $f_A \widetilde{\cap} \Phi_A = \Phi_A$
3. $f_A \widetilde{\cup} f_E = f_E$, $f_A \widetilde{\cap} f_E = f_A$
4. $f_A \widetilde{\cup} f_A^c = f_E$, $f_A \widetilde{\cap} f_A^c = \Phi_A$

(Maji ve ark., 2003).

Önerme 2.1.11. f_A, f_B, f_C, U_E üzerinde esnek kümeler olsun.

1. $f_A \widetilde{\cup} f_B = f_B \widetilde{\cup} f_A$, $f_A \widetilde{\cap} f_B = f_B \widetilde{\cap} f_A$
2. $(f_A \widetilde{\cup} f_B)^c = f_B^c \widetilde{\cap} f_A^c$, $(f_A \widetilde{\cap} f_B)^c = f_B^c \widetilde{\cup} f_A^c$
3. $(f_A \widetilde{\cup} f_B) \widetilde{\cup} f_C = f_A \widetilde{\cup} (f_B \widetilde{\cup} f_C)$, $(f_A \widetilde{\cap} f_B) \widetilde{\cap} f_C = f_A \widetilde{\cap} (f_B \widetilde{\cap} f_C)$
4. $f_A \widetilde{\cup} (f_B \widetilde{\cap} f_C) = (f_A \widetilde{\cup} f_B) \widetilde{\cap} (f_A \widetilde{\cup} f_C)$, $f_A \widetilde{\cap} (f_B \widetilde{\cup} f_C) = (f_A \widetilde{\cap} f_B) \widetilde{\cup} (f_A \widetilde{\cap} f_C)$

(Maji ve ark., 2003).

Önerme 2.1.12. f_A, f_B, f_C, U_E üzerinde esnek kümeler olsun.

1. $(f_A \widetilde{\wedge} f_B) \widetilde{\wedge} f_C = f_A \widetilde{\wedge} (f_B \widetilde{\wedge} f_C)$
2. $(f_A \widetilde{\vee} f_B) \widetilde{\vee} f_C = f_A \widetilde{\vee} (f_B \widetilde{\vee} f_C)$

(Maji ve ark., 2003).

3. BULGULAR

3.1. Neutrosophic Esnek Kümeler

Bu bölümde neutrosophic esnek kümelerle ilgili temel tanımlara yer verilecektir.

Tanım 3.1.1. $* : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ikili işlemi
(i) değişmeli ve birleşmeli,
(ii) sürekli,
(iii) $\forall x \in [0,1]$ için $x * 1 = 1 * x = x$,
(iv) $x, y, z, k \in [0,1]$ için $x \leq z$, $y \leq k$ ise $x * y \leq z * k$
şartlarını sağlıyorsa bu işleme sürekli t-norm denir.
Sürekli t-norma birkaç örnek verelim;
$x * y = xy$, $x * y = min(x, y)$, $x * y = max(x + y - 1, 0)$ (Schweizer ve Sklar, 1960).

Tanım 3.1.2. $\diamond : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ikili işlemi
(i) değişmeli ve birleşmeli,
(ii) sürekli,
(iii) $\forall x \in [0,1]$ için $x \diamond 0 = 0 \diamond x = x$,
(iv) $x, y, z, k \in [0,1]$ için $x \leq z$, $y \leq k$ ise $x \diamond y \leq z \diamond k$
şartlarını sağlıyorsa bu işleme sürekli s-norm denir.
Sürekli s-norma birkaç örnek verelim;
$x \diamond y = x + y - xy$, $x \diamond y = max(x, y)$, $x \diamond y = min(x + y, 1)$
$\forall x \in [0,1]$ için, $x * x = x$ ve $x \diamond x = x$ ise $*$ işlemine eşgüçlü t-norm ve $\diamond$ işlemine eşgüçlü s-norm denir (Schweizer ve Sklar, 1960).

Tanım 3.1.3. U evrensel kümesi üzerinde
$\theta, \vartheta, \chi : U \longrightarrow]^{-}0, 1^{+}[$ ve $^{-}0 \leq \theta_N(u) + \vartheta_N(u) + \chi_N(u) \leq 3^{+}$ olmak üzere

$$N = \{< u, \theta_N(u), \vartheta_N(u), \chi_N(u) >: u \in U\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye neutrosophic küme denir (Smarandache, 2005).

Tanım 3.1.4. U evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. $P_U(N)$, U'nun tüm neutrosophic kümelerinin kümesi olsun. $F : E \longrightarrow P_U(N)$ bir fonksiyon olmak üzere

(F, E) ikilisine U üzerinde neutrosophic esnek küme denir (Maji, 2013).
Bu tanım Deli ve Broumi tarafından yeniden verilmiştir.

Tanım 3.1.5. U evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. P_U, U'nun tüm neutrosophic kümelerinin kümesi olarak tanımlansın. U üzerindeki $\widetilde{N}$ neutrosophic esnek kümesi, $\widetilde{N} : E \longrightarrow P_U(N)$ şeklinde tanımlanan ve yaklaşım fonksiyonu olarak isimlendirilen fonksiyon yardımıyla tanımlanır. Başka bir deyişle, neutrosophic esnek küme, $P_U(N)$ kümesinin bazı elemanlarının parametrelendirilmiş bir ailesidir ve bu nedenle sıralı ikililer halinde yazılabilir. $\theta_{\widetilde{N}(x)}(u), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(u), \chi_{\widetilde{N}(x)}(u) \in [0, 1]$, sırasıyla $\widetilde{N}(x)$'in doğruluk-üyelik, belirsizlik-üyelik, yanlışlık-üyelik fonksiyonları olmak üzere

$$\widetilde{N} = \{(x, \{< u, \theta_{\widetilde{N}(x)}(u), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(u), \chi_{\widetilde{N}(x)}(u) >: u \in U\}) : x \in E\}$$

şeklinde ifade edilebilir. θ, ϑ, χ'nin her birinin supremumu 1 olduğundan
$0 \leq \theta_{\widetilde{N}(x)}(u) + \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(u) + \chi_{\widetilde{N}(x)}(u) \leq 3$ eşitsizliği sağlanır (Deli ve Broumi, 2015).

Örnek 3.1.6. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evlerin kümesi ve $E = \{x_1(\text{güzel}), x_2(\text{ahşap}), x_3(\text{pahalı})\}$ evlerin özelliklerinin tanımlandığı bir parametre kümesi olsun.
$\widetilde{N}(x_1) = \{< u_1, (0.5, 0.6, 0.3) >, < u_2, (0.4, 0.7, 0.6) >, < u_3, (0.6, 0.2, 0.3) >\}$
$\widetilde{N}(x_2) = \{< u_1, (0.6, 0.3, 0.5) >, < u_2, (0.7, 0.4, 0.3) >, < u_3, (0.8, 0.1, 0.2) >\}$
$\widetilde{N}(x_3) = \{< u_1, (0.7, 0.4, 0.3) >, < u_2, (0.6, 0.7, 0.2) >, < u_3, (0.7, 0.2, 0.5) >\}$
olarak tanımlansın. Buradan

$$\widetilde{N} = \{[x_1, \widetilde{N}(x_1)], [x_2, \widetilde{N}(x_2)], [x_3, \widetilde{N}(x_3)]\}$$

kümesi U_E, üzerinde bir neutrosophic esnek kümedir (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Tanım 3.1.7. $\widetilde{N}$, U_E üzerinde bir neutrosophic esnek küme olsun. $\widetilde{N}$'nin tümleyeni $\widetilde{N^c}$ ile gösterilir ve

$$\widetilde{N^c} = \{(x, \{< u, \theta_{\widetilde{N}(x)}(u), 1 - \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(u), \chi_{\widetilde{N}(x)}(u) >: u \in U\}) : x \in E\}$$

şekilde tanımlanır (Deli ve Broumi, 2015).

Tanım 3.1.8. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, U_E üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. $\forall x \in E$ ve $u \in U$ için

$$\theta_{\widetilde{N_1(x)}}(u) \leq \theta_{\widetilde{N_2(x)}}(u), \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(u) \geq \vartheta_{\widetilde{N_2(x)}}(u), \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(u) \geq \chi_{\widetilde{N_2(x)}}(u)$$

ise $\widetilde{N_1}$'e $\widetilde{N_2}$'nin neutrosophic esnek alt kümesi denir ve $\widetilde{N_1} \subseteq \widetilde{N_2}$ ile gösterilir. Ayrıca $\widetilde{N_2}$'ye $\widetilde{N_1}$'in neutrosophic esnek süper kümesi denir (Deli ve Broumi, 2015).

Tanım 3.1.9. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, U_E üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$'nin birleşimi $\widetilde{N_1} \cup \widetilde{N_2} = \widetilde{N_{1\cup 2}}$ ile gösterilir ve $\forall x \in E$ ve $u \in U$ için

$$\theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(x)}}(u) = \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(u) \diamond \theta_{\widetilde{N_2(x)}}(u)$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(x)}}(u) = \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(u) * \vartheta_{\widetilde{N_2(x)}}(u)$$

$$\chi_{\widetilde{N_{1\cup 2}(x)}}(u) = \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(u) * \chi_{\widetilde{N_2(x)}}(u)$$

olmak üzere

$$\widetilde{N_{1\cup 2}} = \{(x, \{< u, \theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(x)}}(u), \vartheta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(x)}}(u), \chi_{\widetilde{N_{1\cup 2}(x)}}(u) >: u \in U\}) : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır (Deli ve Broumi, 2015).

Tanım 3.1.10. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, U_E üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$'nin kesişimi $\widetilde{N_1} \cap \widetilde{N_2} = \widetilde{N_{1\cap 2}}$ ile gösterilir ve $\forall x \in E$ ve $u \in U$ için

$$\theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(u) = \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(u) * \theta_{\widetilde{N_2(x)}}(u)$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(u) = \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(u) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(x)}}(u)$$

$$\chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(u) = \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(u) \diamond \chi_{\widetilde{N_2(x)}}(u)$$

olmak üzere

$$\widetilde{N_{1\cap 2}} = \{(x, \{< u, \theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(u), \vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(u), \chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(u) >: u \in U\}) : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır (Deli ve Broumi, 2015).

Tanım 3.1.11. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, U_E üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$'nin 'VE' işlemi $\widetilde{N_1} \wedge \widetilde{N_2} = \widetilde{N_{1\wedge 2}}$ ile gösterilir ve $\forall x, y \in E$ ve $u \in U$ için

$$\theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(u) = \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(u) * \theta_{\widetilde{N_2}(y)}(u)$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(u) = \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(u) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(y)}(u)$$

$$\chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(u) = \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(u) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(u)$$

olmak üzere

$$\widetilde{N_{1\wedge 2}} = \{[(x,y), \{< u, \theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(u), \vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(u), \chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(u) >: u \in U\}] : (x,y) \in E \times E\}$$

şeklinde tanımlanır (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Tanım 3.1.12. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, U_E üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$'nin 'VEYA' işlemi $\widetilde{N_1} \vee \widetilde{N_2} = \widetilde{N_{1\vee 2}}$ ile gösterilir ve $\forall x, y \in E$ ve $u \in U$ için

$$\theta_{\widetilde{N_{1\vee 2}(x,y)}}(u) = \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(u) \diamond T_{f_{N_2}(y)}(u)$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_{1\vee 2}(x,y)}}(u) = \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(u) * \vartheta_{\widetilde{N_2}(y)}(u)$$

$$\chi_{\widetilde{N_{1\vee 2}(x,y)}}(u) = \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(u) * \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(u)$$

olmak üzere

$$\widetilde{N_{1\vee 2}} = \{[(x,y), \{< u, \theta_{\widetilde{N_{1\vee 2}(x,y)}}(u), \vartheta_{\widetilde{N_{1\vee 2}(x,y)}}(u), \chi_{\widetilde{N_{1\vee 2}(x,y)}}(u) >: u \in U\}] : (x,y) \in E \times E\}$$

şeklinde tanımlanır (Bera ve Mahapatra, 2016a).

3.2. Neutrosophic Esnek Gruplar

Bu bölümde, neutrosophic esnek grup ve bazı temel özelliklerini tanıtacağız. Aksi belirtilmedikçe bu tez boyunca E parametre kümesi, $x \in E$ keyfi parametre ve $(G, \circ)$ bir grup olarak alınacaktır.

Tanım 3.2.1. $N = \{< g_1, \theta_N(g_1), \vartheta_N(g_1), \chi_N(g_1) >: g_1 \in G\}$, G üzerinde bir neutrosophic esnek küme olsun.

1. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\theta_N(g_1 \circ g_2) \geq \theta_N(x) * \theta_N(g_2)$, $\vartheta_N(g_1 \circ g_2) \leq \vartheta_N(g_1) \diamond \vartheta_N(g_2)$, $\chi_N(g_1 \circ g_2) \leq \chi_N(g_1) \diamond \chi_N(g_2)$

2. $\forall g_1 \in G$ için $\theta_N(g_1^{-1}) \geq \theta_N(g_1)$, $\vartheta_N(g_1^{-1}) \leq \vartheta_N(g_1)$, $\chi_N(g_1^{-1}) \leq \chi_N(g_1)$

ise N'ye G üzerinde neutrosophic alt grup denir.
$\forall x \in E$ için $\widetilde{N}(x)$, G'nın neutrosophic alt grubu ise $\widetilde{N}$ neutrosophic esnek kümesine G üzerinde neutrosophic esnek grup denir (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Örnek 3.2.2. $V = \{e, a, b, c\}$ Klein-4 grubu ve $E = \{x, y, z, t\}$ parametre kümesi olsun. $\widetilde{N}(x), \widetilde{N}(y), \widetilde{N}(z), \widetilde{N}(t)$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

	$\widetilde{N}(x)$	$\widetilde{N}(y)$	$\widetilde{N}(z)$	$\widetilde{N}(t)$
e	(0.65, 0.34, 0.14)	(0.88, 0.12, 0.72)	(0.72, 0.21, 0.16)	(0.69, 0.31, 0.32)
a	(0.71, 0.22, 0.78)	(0.71, 0.19, 0.44)	(0.84, 0.16, 0.25)	(0.62, 0.32, 0.42)
b	(0.75, 0.25, 0.52)	(0.83, 0.11, 0.28)	(0.69, 0.31, 0.39)	(0.58, 0.41, 0.66)
c	(0.67, 0.32, 0.29)	(0.75, 0.21, 0.19)	(0.79, 0.19, 0.41)	(0.71, 0.27, 0.53)

Tablo 3.1. $\widetilde{N}$ neutrosophic esnek grubu

t-norm($*$) ve s-norm($\diamond$), $a * b = max(a + b - 1, 0)$ ve $a \diamond b = min(a + b, 1)$ şeklinde tanımlansın. Böylece $\widetilde{N}$, V_E üzerinde neutrosophic esnek grup olur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Örnek 3.2.3. $E = \mathbb{N}^+$(doğal sayılar kümesi) parametre kümesi ve $G = (\mathbb{Z}, +)$ tam sayılar grubu olsun. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ve $z \in \mathbb{Z}$ için

$$\theta_{\widetilde{M(n)}}(z) = \begin{cases} 0 & , \text{eğer } z \text{ tek ise} \\ \frac{1}{n} & , \text{eğer } z \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{M(n)}}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & , \text{eğer } z \text{ tek ise} \\ 0 & , \text{eğer } z \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{M}(n)}(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & , \text{eğer } z \text{ tek ise} \\ 0 & , \text{eğer } z \text{ çift ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\widetilde{M} : \mathbb{N}^+ \longrightarrow P_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}^+)$ fonksiyonu tanımlansın. t-norm($*$) ve s-norm($\diamond$), $x * y = min(x, y)$ ve $x \diamond y = max(x, y)$ şeklinde tanımlansın. Böylece $\widetilde{M}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{N}^+}$ üzerinde neutrosophic esnek grup olur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Önerme 3.2.4. $(G, \circ)$ bir grup olsun. $\widetilde{N}$, G_E grubu üzerinde neutrosophic esnek küme olsun. $\widetilde{N}$'nin neutrosophic esnek grup olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{N}$ nin $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in E$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2^{-1}) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2)$$
$$\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2^{-1}) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2)$$
$$\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2^{-1}) \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2)$$

şartlarını sağlamasıdır (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. İlk olarak $\widetilde{N}$, G_E üzerinde bir neutrosophic esnek grup olsun. Buradan, $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in E$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2^{-1}) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2)$$
$$\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2^{-1}) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2)$$
$$\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2^{-1}) \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}) \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2)$$

elde edilir. Tersine, G'nin birim elemanı e_G olmak üzere

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_1^{-1}) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1)$$
$$\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_1^{-1}) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1)$$
$$\chi_{\widetilde{N}(x)}(e_G) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_1^{-1}) \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1)$$

olur. Ayrıca $\forall g_1 \in G$ için

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G \circ g_1^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1), \\
\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G \circ g_1^{-1}) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1), \\
\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}(e_G \circ g_1^{-1}) \\
&\leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \\
&\leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ (g_2^{-1})^{-1}) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2), \\
\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ (g_2^{-1})^{-1}) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2), \\
\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ (g_2^{-1})^{-1}) \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}) \\
&\leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\widetilde{N}$, neutrosophic esnek grup olur.

Önerme 3.2.5. $\widetilde{N}$, G_E grubu üzerinde neutrosophic esnek grup olsun. θ, eşgüçlü t-norm, ϑ ve χ, eşgüçlü s-norm ise $\forall g \in G$ ve $\forall x \in E$ için

1. $\theta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1}) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g)$, $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1}) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g)$, $\chi_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1}) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g)$

2. $\theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g)$, $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g)$, $\chi_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g)$

dir (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. 1. $\forall g \in G$ ve $\forall x \in E$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1})^{-1} \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1})$$

$$\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1})^{-1} \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1})$$

$$\chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1})^{-1} \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1})$$

ve neutrosophic esnek grup tanımından

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1}) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1}) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1}) \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece eşitlikler elde edilir.

2. e_G, G'nin birim elemanı olmak üzere $\forall g \in G$ için

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g \circ g^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g), \\
\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g \circ g^{-1}) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1}) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g), \\
\chi_{\widetilde{N}(x)}(e_G) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g \circ g^{-1}) \\
&\leq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g^{-1}) \\
&\leq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g) \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.6. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek küme olsun. $\widetilde{N_1} \cap \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek grup olur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. $\widetilde{N_1} \cap \widetilde{N_2} = \widetilde{N_{1\cap 2}}$ olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1 \circ g_2) &= \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1 \circ g_2) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1 \circ g_2) \\
&\geq [\theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2)] * [\theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2)] \\
&= [\theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1)] * [\theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1)] \\
&= \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * [\theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2)] * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\
&= \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\
&= \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2) \\
&= \theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1^{-1}) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\
&= \theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1)
\end{aligned}$$

olur. Daha sonra,

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1 \circ g_2) &= \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1 \circ g_2) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1 \circ g_2) \\
&\leq [\vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2)] \diamond [\vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2)] \\
&= [\vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2)] \diamond [\vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1)] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond [\vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2)] \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1^{-1}) * \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1^{-1}) \\ &\leq \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\ &= \vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1)\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1 \circ g_2) &= \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1 \circ g_2) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1 \circ g_2) \\ &\leq [\chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2)] \diamond [\chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2)] \\ &= [\chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2)] \diamond [\chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1)] \\ &= \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond [\chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2)] \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\ &= \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\ &= \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2) \\ &= \chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1^{-1}) * \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1^{-1}) \\ &\leq \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\ &= \chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\widetilde{N_1} \cap \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde bir neutrosophic esnek gruptur.

Uyarı 3.2.7. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, G_E üzerindeki iki neutrosophic esnek grup olsun. $\widetilde{N_1} \cup \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde genellikle neutrosophic esnek grup değildir. Yalnızca biri diğerini kapsıyorsa mümkündür (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Örnek 3.2.8. $G = (\mathbb{Z}, +)$, $E = 2\mathbb{Z}$ olsun. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, G_E üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan iki neutrosophic esnek grup olsun. $\forall z, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\theta_{\widetilde{N_1(2n)}}(z) = \begin{cases} 1/2 & , z = 4kn, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 0 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_1(2n)}}(z) = \begin{cases} 0 & , z = 4kn, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 1/4 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N_1(2n)}}(z) = \begin{cases} 0 & , z = 4kn, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 1/10 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve

$$\theta_{\widetilde{N_2(2n)}}(z) = \begin{cases} 2/3 & , z = 6kn, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 0 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_2(2n)}}(z) = \begin{cases} 0 & , z = 6kn, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 1/5 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N_2(2n)}}(z) = \begin{cases} 1/6 & , z = 6kn, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 1 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

t-norm($*$) ve s-norm($\diamond$), $x * y = min(x, y)$ ve $x \diamond y = max(x, y)$ şeklinde tanımlansın. $\widetilde{N_1} \cup \widetilde{N_2} = \widetilde{N_{1\cup 2}}$ olsun. Buradan, $n = 3$, $z_1 = 12$, $z_2 = 18$ için

$$\begin{aligned} \theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(6)}}(12 - 18) &= \theta_{\widetilde{N_1}(6)}(-6) \diamond \theta_{\widetilde{N_2}(6)}(-6) \\ &= max(0, 0) = 0, \\ \theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(6)}}(12) * \theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(6)}}(18) &= \{\theta_{\widetilde{N_1}(6)}(12) \diamond \theta_{\widetilde{N_2}(6)}(12)\} * \{\theta_{\widetilde{N_1}(6)}(18) \diamond \theta_{\widetilde{N_2}(6)}(18)\} \\ &= min\{max(1/2, 0), max(0, 2/3)\} \\ &= min(1/2, 2/3) = 1/2 \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(6)}}(12 - 18) < \theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(6)}}(12) * \theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(6)}}(18)$ olur. Böylece $\widetilde{N_1} \cup \widetilde{N_2}$ neutrosophic esnek grup değildir.

Şimdi, G_E üzerindeki $\widetilde{N_2}$ neutrosophic esnek grubu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\theta_{\widetilde{N_2(2n)}}(z) = \begin{cases} 1/8 & , z = 8kn, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 0 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_2(2n)}}(z) = \begin{cases} 0 & , z = 8kn, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 2/5 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N_2(2n)}}(z) = \begin{cases} 1/6 & , z = 8kn, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 1/2 & , \text{aksi halde} \end{cases}$$

Burada $\widetilde{N_2} \subset \widetilde{N_1}$ olduğundan $\widetilde{N_1} \cup \widetilde{N_2}$, G üzerinde neutrosophic esnek grup olur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Teorem 3.2.9. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, G_E üzerinde iki neutrosohic esnek grup olsun. $\widetilde{N_1} \wedge \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek grup olur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. $\widetilde{N_1} \wedge \widetilde{N_2} = \widetilde{N_{1\wedge 2}}$ olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall (x,y) \in E \times E$ için

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1 \circ g_2) &= \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1 \circ g_2) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1 \circ g_2) \\
&\geq [\theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)] * [\theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2)] \\
&= [\theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)] * [\theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1)] \\
&= \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) * [\theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2)] * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \\
&= \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \\
&= \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2) \\
&= \theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1^{-1}) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \\
&= \theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1 \circ g_2) &= \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1 \circ g_2) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1 \circ g_2) \\
&\leq [\theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)] \diamond [\vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2)] \\
&= [\vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)] \diamond [\vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1)] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond [\vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2)] \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1^{-1}) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2^{-1}) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1 \circ g_2) &= \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1 \circ g_2) \diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1 \circ g_2) \\
&\leq [\chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)] \diamond [\chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2)] \\
&= [\chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)] \diamond [\chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2) \diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1)] \\
&= \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond [\chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2) \diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_2)] \diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \\
&= \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2) \diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \\
&= \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2) \\
&= \chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1^{-1}) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(g_1^{-1}) \\
&\leq \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(g_1) \\
&= \chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\widetilde{N_1} \wedge \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek gruptur.

Tanım 3.2.10. $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, sırasıyla A ve B üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. $\forall b \in B$ için

$$\theta_{f(\widetilde{N_1})(x)}(b) = \theta_{\widetilde{N_1}(x)}[f^{-1}(b)], \vartheta_{f(\widetilde{N_1})(x)}(b) = \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}[f^{-1}(b)], \chi_{f(\widetilde{N_1})(x)}(b) = \chi_{\widetilde{N_1}(x)}[f^{-1}(b)]$$

olmak üzere B üzerindeki $f(\widetilde{N_1}) = \{[x, f(\widetilde{N_1})(x)] : x \in E\}$ neutrosophic esnek kümesine f altında $\widetilde{N_1}$'nin görüntüsü denir. $\forall a \in A$ için

$$\theta_{f^{-1}(\widetilde{N_2})(x)}(a) = \theta_{\widetilde{N_2}(x)}[f(a)], \vartheta_{f^{-1}(\widetilde{N_2})(x)}(a) = \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}[f(a)], \chi_{f^{-1}(\widetilde{N_2})(x)}(a) = \chi_{\widetilde{N_2}(x)}[f(a)]$$

olmak üzere A üzerindeki $f^{-1}(\widetilde{N_2}) = \{[x, f^{-1}(\widetilde{N_2})(x)] : x \in E\}$ neutrosophic esnek kümesine f altında $\widetilde{N_2}$'nin ters görüntüsü denir (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Teorem 3.2.11. $f : G \longrightarrow H$ bir izomorfizma olsun. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek grup ise $f(\widetilde{N})$, H_E üzerinde neutrosophic esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. $h_1, h_2 \in H$ için $h_1 = f(g_1)$ ve $h_2 = f(g_2)$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in G$ vardır.

$$\begin{aligned}
\theta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1 \circ h_2) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1 \circ h_2)] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1) \circ f^{-1}(h_2)] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2) \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1)] * \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_2)] \\
&= \theta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1) * \theta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_2)
\end{aligned}$$

Daha sonra

$$\begin{aligned}
\vartheta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1 \circ h_2) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1 \circ h_2)] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1) \circ f^{-1}(h_2)] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1)] \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_2)] \\
&= \vartheta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1) \diamond \vartheta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_2)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\chi_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1 \circ h_2) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1 \circ h_2)] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1) \circ f^{-1}(h_2)] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 \circ g_2) \\
&\leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2) \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1)] \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_2)] \\
&= \chi_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1) \diamond \chi_{f(\widetilde{N})(x)}(h_2)
\end{aligned}$$

olur. Daha sonra

$$\begin{aligned}
\theta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1^{-1})] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[(f^{-1}(h_1))^{-1}] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1)] \\
&= \theta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1^{-1})] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[(f^{-1}(h_1))^{-1}] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1)] \\
&= \vartheta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\chi_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1^{-1})] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[(f^{-1}(h_1))^{-1}] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}) \\
&\leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1)] \\
&= \chi_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $f(\widetilde{N})$, H_E üzerinde neutrosophic esnek gruptur.

Teorem 3.2.12. $f : G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. $\widetilde{N}$, H_E üzerinde neutrosophic esnek grup ise $f^{-1}(\widetilde{N})$, G_E üzerinde neutrosophic esnek gruptur (f' nin tersi fonksiyon olmayabilir) (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $h_1 = f(g_1)$ ve $h_2 = f(g_2)$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in H$ vardır.

$$\begin{aligned}
\theta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1 \circ g_2) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1 \circ g_2)] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1) \circ f(g_2)] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1 \circ h_2) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_2) \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1)] * \theta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_2)] \\
&= \theta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1) * \theta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_2)
\end{aligned}$$

olur. Daha sonra

$$\begin{aligned}
\vartheta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1 \circ g_2) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1 \circ g_2)] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1) \circ f(g_2)] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1 \circ h_2) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_2) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1)] \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_2)] \\
&= \vartheta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\chi_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1 \circ g_2) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1 \circ g_2)] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1) \circ f(g_2)] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}(h_1 \circ h_2) \\
&\leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(h_1) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(h_2) \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1)] \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}[f(g_2)] \\
&= \chi_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1) \diamond \chi_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_2)
\end{aligned}$$

olur. Daha sonra

$$\begin{aligned}
\theta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1^{-1})] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[(f(g_1))^{-1}] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1) \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1)] \\
&= \theta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vartheta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1^{-1})] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[(f(g_1))^{-1}] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1^{-1}) \\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1)] \\
&= \vartheta_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\chi_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1^{-1})] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[(f(g_1))^{-1}] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}(h_1^{-1}) \\
&\leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(h_1) \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f(g_1)] \\
&= \chi_{f^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f^{-1}(\widetilde{N})$, G_E üzerinde neutrosophic esnek gruptur.

Tanım 3.2.13. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek grup ve $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1]$, $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$ olsun. Buradan $\forall g \in G$ ve $x \in E$ için

1. $g = e_G$ için $\theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \alpha$, $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \beta$, $\chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = \gamma$ ve aksi halde $\theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = 0$, $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = 1$ ise $\widetilde{N}$'ye G_E üzerinde (α, β, γ)-birimsel neutrosophic esnek grup denir.

2. $\theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \alpha$, $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \beta$, $\chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = \gamma$ ise $\widetilde{N}$'ye G_E üzerinde (α, β, γ)-tam neutrosophic esnek grup denir (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Teorem 3.2.14. $\phi : G \longrightarrow H$ bir grup izomorfizması olsun.

1. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek grup ise $g \in Ker(\phi)$ için $\theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \alpha$, $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \beta$, $\chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = \gamma$ ve aksi halde $\forall g \in G$ ve $x \in E$ için $\theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = 0$, $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = 1$ ise $\phi(\widetilde{N})$, H_E üzerinde (α, β, γ)-birimsel neutrosophic esnek gruptur.

2. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde (α, β, γ)-tam neutrosophic esnek grup ise $\phi(\widetilde{N})$, H_E üzerinde (α, β, γ)-tam neutrosophic esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. 1. Teorem 3.2.11 den dolayı $\phi(\widetilde{N})$, H_E üzerinde neutrosophic esnek gruptur. $g \in ker\phi$ ise $\phi(g) = e_H$ (e_H, H'nin birim elemanı) olur. Buradan

$$\theta_{\phi(\widetilde{N})(x)}(e_H) = \theta_{\widetilde{N}(x)}[\phi^{-1}(e_H)] = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \alpha$$

$$\vartheta_{\phi(\widetilde{N})(x)}(e_H) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[\phi^{-1}(e_H)] = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \beta$$

$$\chi_{\phi(\widetilde{N})(x)}(e_H) = \chi_{\widetilde{N}(x)}[\phi^{-1}(e_H)] = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = \gamma$$

Benzer şekilde $x \notin ker\phi$ ise

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = 0, \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = 1, \chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = 1$$

elde edilir.

2. $\forall h \in H$ için $h = \phi(g)$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. $\forall x \in E$ için

$$\theta_{\phi(\widetilde{N})(x)}(h) = \theta_{\widetilde{N}(x)}[\phi^{-1}(h)] = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \alpha$$

$$\vartheta_{\phi(\widetilde{N})(x)}(h) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[\phi^{-1}(h)] = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \beta$$

$$\chi_{\phi(\widetilde{N})(x)}(h) = \chi_{\widetilde{N}(x)}[\phi^{-1}(h)] = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = \gamma$$

elde edilir.

3.3. Neutrosophic Esnek Grupların Kartezyen Çarpımı

Tanım 3.3.1. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, sırasıyla G_E ve H_E üzerinde neutrosophic esnek grup olsun. $\forall(x,y) \in E \times E$ için $\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y) = \widetilde{N_1}(x) \times \widetilde{N_2}(y)$ olmak üzere $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$'nin kartezyen çarpımı $(g,h) \in G \times H$ için

$$\theta_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g,h) = \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N_2}(y)}(h)$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g,h) = \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(y)}(h)$$

$$\chi_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g,h) = \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(h)$$

olmak üzere

$$\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y) = \{< (g,h), \theta_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g,h), \vartheta_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g,h), \chi_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g,h) >: (g,h) \in G \times H\}$$

şeklinde tanımlanır (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Teorem 3.3.2. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, sırasıyla G_E ve H_E grupları üzerinde neutrosophic esnek grup olsun. $\widetilde{N_1 \times N_2}$, $(G \times H)_{E \times E}$ üzerinde neutrosophic esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. $\forall(g_1,h_1),(g_2,h_2) \in G \times H$ ve $\forall(x,y) \in E \times E$ için

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}[(g_1,h_1) \circ (g_2,h_2)] &= \theta_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g_1 \circ g_2, h_1 \circ h_2) \\
&= \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1 \circ g_2) * \theta_{\widetilde{N_2}(y)}(h_1 \circ h_2) \\
&\geq [\theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2)] * [\theta_{\widetilde{N_2}(y)}(h_1) * \theta_{\widetilde{N_2}(y)}(h_2)] \\
&= [\theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2}(y)}(h_1)] * [\theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2) * \theta_{\widetilde{N_2}(y)}(h_2)] \\
&= \theta_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g_1,h_1) * \theta_{f_{\widetilde{N_1 \times N_2}}(x,y)}(g_2,h_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}[(g_1,h_1)\circ(g_2,h_2)] &= \vartheta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_1\circ g_2, h_1\circ h_2)\\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1\circ g_2)\diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1\circ h_2)\\
&\leq [\vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1)\diamond \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)]\diamond[\vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1)\diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(h_2)]\\
&= [\vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1)\diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1)]\diamond[\vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)\diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(h_2)]\\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_1,h_1)\diamond \vartheta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_2,h_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\chi_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}[(g_1,h_1)\circ(g_2,h_2)] &= \chi_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_1\circ g_2, h_1\circ h_2)\\
&= \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1\circ g_2)\diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1\circ h_2)\\
&\leq [\chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1)\diamond \chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)]\diamond[\chi_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1)\diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(h_2)]\\
&= [\chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1)\diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1)]\diamond[\chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2)\diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(h_2)]\\
&= \chi_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_1,h_1)\diamond \chi_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_2,h_2)
\end{aligned}$$

Daha sonra

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}[(g_1,h_1)^{-1}] &= \theta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_1^{-1},h_1^{-1})\\
&= \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1^{-1}) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1^{-1})\\
&\geq \theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1)\\
&= \theta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_1,h_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}[(g_1,h_1)^{-1}] &= \vartheta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_1^{-1},h_1^{-1})\\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1^{-1}) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1^{-1})\\
&\leq \vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(h_1)\\
&= \vartheta_{\widetilde{N_1 \times N_2(x,y)}}(g_1,h_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\chi_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}[(g_1,h_1)^{-1}] &= \chi_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g_1^{-1},h_1^{-1}) \\
&= \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1^{-1}) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(h_1^{-1}) \\
&\leq \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(h_1) \\
&= \chi_{\widetilde{N_1 \times N_2}(x,y)}(g_1,h_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\widetilde{N_1 \times N_2}$, $(G \times H)_{E\times E}$ üzerinde bir neutrosophic esnek gruptur.

3.4. Neutrosophic Esnek Alt Gruplar

Tanım 3.4.1. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, G_E grubu üzerinde iki neutrosophic esnek grup olsun. $\forall g \in G$, $x \in E$ için

$$\theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) \leq \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g), \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) \geq \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g), \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g) \geq \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g)$$

ise $\widetilde{N_1}$'e $\widetilde{N_2}$'nin neutrosophic esnek alt grubu denir (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Örnek 3.4.2. $V = \{e,a,b,c\}$ Klein-4 grubu ve $E = \{x,y,z,t\}$ parametre kümesi olsun. t-norm $(*)$ ve s-norm $(\diamond)$, $a*b = max(a+b-1,0)$ ve $a\diamond b = min(a+b,1)$ olmak üzere V_E üzerinde $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$ neutrosophic esnek grupları aşağıdaki gibi tanımlansın.

	$\widetilde{N_1}(x)$	$\widetilde{N_2}(y)$	$\widetilde{N_1}(z)$	$\widetilde{N_1}(t)$
e	(0.65, 0.42, 0.54)	(0.68, 0.21, 0.76)	(0.70, 0.31, 0.32)	(0.59, 0.38, 0.62)
a	(0.61, 0.44, 0.78)	(0.62, 0.31, 0.79)	(0.67, 0.41, 0.39)	(0.41, 0.49, 0.64)
b	(0.55, 0.55, 0.59)	(0.59, 0.42, 0.80)	(0.60, 0.36, 0.48)	(0.56, 0.43, 0.68)
c	(0.47, 0.49, 0.69)	(0.67, 0.43, 0.84)	(0.48, 0.52, 0.54)	(0.49, 0.50, 0.70)

Tablo 3.2. $\widetilde{N_1}$ neutrosophic esnek grubu

	$\widetilde{N_2}(x)$	$\widetilde{N_2}(y)$	$\widetilde{N_2}(z)$	$\widetilde{N_2}(t)$
e	(0.65, 0.34, 0.14)	(0.88, 0.12, 0.72)	(0.72, 0.21, 0.16)	(0.69, 0.31, 0.32)
a	(0.71, 0.22, 0.78)	(0.71, 0.19, 0.44)	(0.84, 0.16, 0.25)	(0.62, 0.32, 0.42)
b	(0.75, 0.25, 0.52)	(0.83, 0.11, 0.28)	(0.69, 0.31, 0.39)	(0.58, 0.41, 0.66)
c	(0.67, 0.32, 0.29)	(0.75, 0.21, 0.19)	(0.79, 0.19, 0.41)	(0.71, 0.27, 0.53)

Tablo 3.3. $\widetilde{N_2}$ neutrosophic esnek grubu

$\widetilde{N_1}$, V_E üzerinde $\widetilde{N_2}$'nin neutrosophic esnek alt grubudur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

Teorem 3.4.3. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek grup ve $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, $\widetilde{N}$'nin neutrosophic esnek alt grupları olsun. $\widetilde{N}$ neutrosophic esnek grubunun θ, ϑ, χ fonksiyonları birimsel t-norm ve birimsel s-normun kurallarını sağlıyorsa

1. $\widetilde{N_1 \cap N_2}$, $\widetilde{N}$'nin neutrosophic esnek alt grubudur.
2. $\widetilde{N_1 \wedge N_2}$, $\widetilde{N \wedge N}$'nin neutrosophic esnek alt grubudur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. Teorem 3.2.6 ve Teorem 3.2.9' dan $\widetilde{N_1} \cap \widetilde{N_2}$ ve $\widetilde{N_1} \wedge \widetilde{N_2}$'nin neutrosophic esnek grup olduğunu biliyoruz. Şimdi neutrosophic esnek alt grup olduğunu gösterelim. $\forall g \in G$ ve $\forall x \in E$ için

1.

$$\theta_{\widetilde{N_1 \cap N_2}(x)}(g) = \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g) \leq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g)$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_1 \cap N_2}(x)}(g) = \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g) \geq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g)$$

$$\chi_{\widetilde{N_1 \cap N_2}(x)}(g) = \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g) \geq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g)$$

olur. Böylece $\widetilde{N_1 \cap N_2}$, $\widetilde{N}$'nin neutrosophic esnek alt grubudur.

2.

$$\theta_{\widetilde{N_1 \wedge N_2}(x,y)}(g) = \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N_2}(y)}(g) \leq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N}(y)}(g) = \theta_{\widetilde{N \wedge N}(x,y)}(g)$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_1 \wedge N_2}(x,y)}(g) = \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(y)}(g) \geq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(y)}(g) = \vartheta_{\widetilde{N \wedge N}(x,y)}(g)$$

$$\chi_{\widetilde{N_1 \wedge N_2}(x,y)}(g) = \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(g) \geq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g) \diamond \chi_{\widetilde{N}(y)}(g) = \chi_{\widetilde{N \wedge N}(x,y)}(g)$$

olur. Böylece $\widetilde{N_1 \wedge N_2}$, $\widetilde{N \times N}$'nin neutrosophic esnek alt grubudur.

Örnek 3.4.4. $S = \{1, \omega, \omega^2\}$ olmak üzere birimin küp kökleri $(S, .)$ grubu alınsın. $E = \{x, y, z\}$ parametre kümesi olsun. t-norm ve s-norm sırasıyla $a * b = ab$ ve $a \diamond b = a + b - ab$ olarak tanımlansın. $(S, .)$ üzerinde $\widetilde{N}$ neutrosophic esnek grubu ve $\widetilde{N}$'nin iki neutrosophic alt grubu $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

	$\widetilde{N}(x)$	$\widetilde{N}(y)$	$\widetilde{N}(z)$
1	(0.7, 0.3, 0.2)	(0.6, 0.5, 0.6)	(0.6, 0.3, 0.5)
ω	(0.7, 0.2, 0.4)	(0.5, 0.5, 0.7)	(0.7, 0.3, 0.5)
ω^2	(0.6, 0.3, 0.2)	(0.4, 0.4, 0.6)	(0.5, 0.4, 0.6)

Tablo 3.4. $\widetilde{N}$ neutrosophic esnek grubu

	$\widetilde{N_1}(x)$	$\widetilde{N_1}(y)$	$\widetilde{N_1}(z)$
1	(0.4, 0.4, 0.9)	(0.5, 0.6, 0.6)	(0.6, 0.6, 0.6)
ω	(0.6, 0.4, 0.7)	(0.4, 0.5, 0.7)	(0.5, 0.8, 0.5)
ω^2	(0.3, 0.5, 0.8)	(0.4, 0.8, 0.7)	(0.5, 0.6, 0.7)

Tablo 3.5. $\widetilde{N_1}$ neutrosophic esnek alt grubu

	$\widetilde{N_2}(x)$	$\widetilde{N_2}(y)$	$\widetilde{N_2}(z)$
1	(0.6, 0.5, 0.2)	(0.5, 0.5, 0.7)	(0.6, 0.4, 0.6)
ω	(0.7, 0.3, 0.4)	(0.4, 0.5, 0.8)	(0.6, 0.4, 0.5)
ω^2	(0.6, 0.4, 0.3)	(0.3, 0.6, 0.7)	(0.5, 0.5, 0.7)

Tablo 3.6. $\widetilde{N_2}$ neutrosophic esnek alt grubu

	$\widetilde{N_1 \cap N_2}(x)$	$\widetilde{N_1 \cap N_2}(y)$	$\widetilde{N_1 \cap N_2}(z)$
1	(0.24, 0.70, 0.92)	(0.25, 0.80, 0.88)	(0.36, 0.76, 0.84)
ω	(0.42, 0.58, 0.82)	(0.16, 0.75, 0.94)	(0.30, 0.88, 0.75)
ω^2	(0.18, 0.70, 0.86)	(0.12, 0.92, 0.91)	(0.25, 0.80, 0.91)

Tablo 3.7. $\widetilde{N_1 \cap N_2}$ neutrosophic esnek alt grubu

	$\widetilde{N_1 \wedge N_2}(x,x)$ $\widetilde{N_1 \wedge N_2}(x,y)$ $\widetilde{N_1 \wedge N_2}(x,z)$	$\widetilde{N_1 \wedge N_2}(y,x)$ $\widetilde{N_1 \wedge N_2}(y,y)$ $\widetilde{N_1 \wedge N_2}(y,z)$	$\widetilde{N_1 \wedge N_2}(z,x)$ $\widetilde{N_1 \wedge N_2}(z,y)$ $\widetilde{N_1 \wedge N_2}(z,z)$
1	(0.24, 0.70, 0.92) (0.24, 0.64, 0.96) (0.20, 0.70, 0.97)	(0.30, 0.80, 0.68) (0.30, 0.76, 0.84) (0.25, 0.80, 0.88)	(0.36, 0.80, 0.68) (0.36, 0.76, 0.84) (0.30, 0.80, 0.88)
ω	(0.42, 0.58, 0.82) (0.36, 0.64, 0.85) (0.24, 0.70, 0.94)	(0.28, 0.65, 0.82) (0.24, 0.70, 0.85) (0.16, 0.75, 0.94)	(0.35, 0.86, 0.70) (0.30, 0.88, 0.75) (0.20, 0.90, 0.90)
ω^2	(0.18, 0.70, 0.86) (0.15, 0.75, 0.94) (0.09, 0.80, 0.94)	(0.24, 0.88, 0.79) (0.20, 0.90, 0.91) (0.12, 0.92, 0.91)	(0.30, 0.76, 0.79) (0.25, 0.80, 0.91) (0.15, 0.84, 0.91)

Tablo 3.8. $\widetilde{N_1 \wedge N_2}$ neutrosophic esnek alt grubu

	$\widetilde{N \wedge N}(x,x)$ $\widetilde{N \wedge N}(x,y)$ $\widetilde{N \wedge N}(x,z)$	$\widetilde{N \wedge N}(y,x)$ $\widetilde{N \wedge N}(y,y)$ $\widetilde{N \wedge N}(y,z)$	$\widetilde{N \wedge N}(z,x)$ $\widetilde{N \wedge N}(z,y)$ $\widetilde{N \wedge N}(z,z)$
1	(0.49, 0.51, 0.36) (0.52, 0.51, 0.60) (0.42, 0.65, 0.68)	(0.42, 0.65, 0.68) (0.36, 0.65, 0.80) (0.36, 0.75, 0.84)	(0.42, 0.51, 0.60) (0.36, 0.71, 0.75) (0.36, 0.65, 0.80)
ω	(0.49, 0.36, 0.64) (0.49, 0.44, 0.70) (0.35, 0.60, 0.82)	(0.35, 0.60, 0.82) (0.35, 0.65, 0.85) (0.25, 0.75, 0.91)	(0.49, 0.44, 0.70) (0.49, 0.51, 0.75) (0.35, 0.65, 0.85)
ω^2	(0.36, 0.51, 0.51) (0.30, 0.58, 0.72) (0.24, 0.58, 0.72)	(0.24, 0.58, 0.72) (0.20, 0.64, 0.84) (0.16, 0.64, 0.84)	(0.30, 0.58, 0.72) (0.25, 0.64, 0.84) (0.20, 0.64, 0.84)

Tablo 3.9. $\widetilde{N \wedge N}$ neutrosophic esnek alt grubu (Bera ve Mahapatra, 2016a)

Teorem 3.4.5. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, G_E üzerinde iki neutrosophic esnek grup olsun $\widetilde{N_1}$, $\widetilde{N_2}$'nin neutrosophic esnek alt grubu olacak şekilde $f : G \longrightarrow H$ bir grup izomorfizması olsun. $f(\widetilde{N_1})$ ve $f(\widetilde{N_2})$, H_E üzerinde iki neutrosophic esnek gruptur. Ayrıca $f(\widetilde{N_1})$, $f(\widetilde{N_2})$'nin neutrosophic esnek alt grubudur (Bera ve Mahapatra, 2016a).

İspat. $f(\widetilde{N_1})$ ve $f(\widetilde{N_2})$'nin H_E üzerinde neutrosophic esnek grup olduğu Teorem 3.2.11 de ispatlanmıştır. $f(\widetilde{N_1})$'in $f(\widetilde{N_2})$'nin neutrosophic esnek alt grubu olduğunu gösterelim. $h = f(g)$ olacak şekilde $g \in G$ ve $h \in H$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) &\leq \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g) \\
\theta_{\widetilde{N_1}(x)}[f^{-1}(h)] &\leq \theta_{\widetilde{N_2}(x)}[f^{-1}(h)] \\
\theta_{f(\widetilde{N_1})(x)}(h) &\leq \theta_{f(\widetilde{N_2})(x)}(h)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g) &\geq \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g) \\
\vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}[f^{-1}(h)] &\geq \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}[f^{-1}(h)] \\
\vartheta_{f(\widetilde{N_1})(x)}(h) &\geq \vartheta_{f(\widetilde{N_2})(x)}(h)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g) &\geq \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g) \\
\chi_{\widetilde{N_1}(x)}[f^{-1}(h)] &\geq \chi_{\widetilde{N_2}(x)}[f^{-1}(h)] \\
\chi_{f(\widetilde{N_1})(x)}(h) &\geq \chi_{f(\widetilde{N_2})(x)}(h)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $f(\widetilde{N_1})$, $f(\widetilde{N_2})$'nin neutrosophic esnek alt grubudur.

3.5. Neutrosophic Normal Esnek Gruplar

Bu bölümde neutrosophic normal esnek grupları ve bazı temel özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 3.5.1. $\widetilde{N}$, G_E grubu üzerinde neutrosophic esnek grup olsun. $\forall x \in E$, $\forall n \in \widetilde{N}(x)$ ve $\forall g \in G$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(gong^{-1}) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(n)$$

$$\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(gong^{-1}) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(n)$$

$$\chi_{\widetilde{N}(x)}(gonog^{-1}) \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(n)$$

ise $\widetilde{N}$'ye G_E üzerinde neutrosophic normal esnek grup denir (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Tanım 3.5.2. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek grup olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in E$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1)$$

$$\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1)$$

$$\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1)$$

ise $\widetilde{N}$'ye G_E üzerinde değişmeli neutrosophic esnek grup denir (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Örnek 3.5.3. $\mathbb{N}^+$ doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olmak üzere $\widetilde{N} : \mathbb{N}^+ \longrightarrow P_{\mathbb{Z}}(N)$ fonksiyonu, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ve $\forall z \in \mathbb{Z}$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(n)}(z) = \begin{cases} 0 & , z \text{ tek ise} \\ \frac{2}{n} & , z \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N}(n)}(z) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , z \text{ tek ise} \\ 0 & , z \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N}(n)}(z) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{n} & , z \text{ tek ise} \\ 0 & , z \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. t-norm($*$) ve s-norm($\diamond$) sırasıyla $a * b = min[a, b]$ ve $a \diamond b = max[a, b]$ şeklinde tanımlansın. $\widetilde{N}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{N}^+}$ üzerinde bir neutrosophic normal esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Önerme 3.5.4. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek grup olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in E$ için

1. $\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1)$ dir.

2. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde değişmeli neutrosophic esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2017b).

İspat. $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in E$ için

1.

$$\begin{aligned} \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}[(g_2^{-1} o g_2) o g_1 o (g_2^{-1} o g_2)] \\ &= \theta_{\widetilde{N}(x)}[g_2^{-1} o (g_2 o g_1 o g_2^{-1}) o g_2] \\ &= \theta_{\widetilde{N}(x)}[g_2^{-1} o (g_2 o g_1 o g_2^{-1}) o (g_2^{-1})^{-1}] \\ &\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[(g_2^{-1} o g_2) o g_1 o (g_2^{-1} o g_2)] \\ &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[g_2^{-1} o (g_2 o g_1 o g_2^{-1}) o g_2] \\ &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[g_2^{-1} o (g_2 o g_1 o g_2^{-1}) o (g_2^{-1})^{-1}] \\ &\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}[(g_2^{-1} o g_2) o g_1 o (g_2^{-1} o g_2)] \\ &= \chi_{\widetilde{N}(x)}[g_2^{-1} o (g_2 o g_1 o g_2^{-1}) o g_2] \\ &= \chi_{\widetilde{N}(x)}[g_2^{-1} o (g_2 o g_1 o g_2^{-1}) o (g_2^{-1})^{-1}] \\ &\leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Neutrosophic normal esnek grup tanımından

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1)$$

eşitlikleri elde edilir.

2.

$$\begin{aligned}\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1})\\ \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o (g_1 o g_2) o g_2^{-1})\\ \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1})\\ \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o (g_1 o g_2) o g_2^{-1})\\ \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2) &= \vartheta_{\widetilde{N}(e)}(g_2 o g_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1})\\ \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o (g_1 o g_2) o g_2^{-1})\\ \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\widetilde{N}$, G_E üzerinde değişmeli neutrosophic esnek gruptur.

Teorem 3.5.5. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, G_E grubu üzerinde neutrosophic normal esnek grup olsun.

1. $\widetilde{N_1} \cap \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek gruptur.
2. $\widetilde{N_1} \wedge \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2017b).

İspat. 1. $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in E$ için

$$\begin{aligned}\theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1})\\ &\geq \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1)\\ &= \theta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \\ &\leq \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\ &= \vartheta_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \\ &\leq \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(x)}(g_1) \\ &= \chi_{\widetilde{N_{1\cap 2}(x)}}(g_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\widetilde{N_1} \cap \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek gruptur.

2. $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall (x, y) \in E \times E$ için

$$\begin{aligned}\theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) * \theta_{\widetilde{N_2}(y)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \\ &\geq \theta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N_2}(y)}(g_1) \\ &= \theta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(y)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \\ &\leq \vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2}(y)}(g_1) \\ &= \vartheta_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(g_2 o g_1 o g_2^{-1}) \\ &\leq \chi_{\widetilde{N_1}(x)}(g_1) \diamond \chi_{\widetilde{N_2}(y)}(g_1) \\ &= \chi_{\widetilde{N_{1\wedge 2}(x,y)}}(g_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\widetilde{N_1} \wedge \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek gruptur.

Uyarı 3.5.6. Genellikle iki neutrosophic normal esnek grubun birleşimi neutrosophic normal esnek grup değildir. Bir grup diğerinin alt kümesi ise sağlanır.

Örnek 3.5.7. $G = (\mathbb{Z}, +)$ ve $E = 3\mathbb{Z}$ olsun. G_E üzerinde $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$ neutrosophic esnek grupları aşağıdaki gibi tanımlansın. $\forall x, z \in \mathbb{Z}$ için

$$\theta_{\widetilde{N_1}(3z)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x = 6kz,\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_1}(3z)}(x) = \begin{cases} 0 & , x = 6kz,\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ \frac{1}{5} & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N_1}(3z)}(x) = \begin{cases} 0 & , x = 6kz,\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ \frac{1}{4} & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve

$$\theta_{\widetilde{N_2}(3z)}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & , x = 9kz,\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_2}(3z)}(x) = \begin{cases} 0 & , x = 9kz,\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ \frac{1}{6} & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N_2}(3z)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , x = 9kz,\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 1 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

t-norm($*$) ve s-norm($\diamond$) sırasıyla $a * b = min[a, b]$ ve $a \diamond b = max[a, b]$ şeklinde tanımlansın. Böylece $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, G_E üzerinde normaldir.

$z = 1$, $x = 6$, $y = 9$ için

$$\theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}}(3)}(6 - 9) = \theta_{\widetilde{N_1}(3)}(-3) \diamond \theta_{\widetilde{N_2}(3)}(-3) = max[0, 0] = 0$$

ve

$$\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(3)}}(6) * \theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(3)}}(9) &= \{\theta_{\widetilde{N_1}(3)}(6) \diamond \theta_{\widetilde{N_2}(3)}(6)\} * \{\theta_{\widetilde{N_1}(3)}(9) \diamond \theta_{\widetilde{N_2}(3)}(9)\} \\
&= min[max\{\frac{1}{2}, 0\}, max\{0, \frac{2}{3}\}] \\
&= min[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(3)}}(6-9) < \theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(3)}}(6) * \theta_{\widetilde{N_{1\cup 2}(3)}}(9)$'dir. Yani, $\widetilde{N_1} \cup \widetilde{N_2}$ neutrosophic esnek grup değildir.

Şimdi, G_E üzerinde $\widetilde{N_2}$ neutrosophic esnek grubu aşağıdaki şekilde gibi tanımlansın.

$$\theta_{\widetilde{N_2}(3z)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , x = 12kz, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_2}(3z)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x = 12kz, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 1 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N_2}(3z)}(x) = \begin{cases} 0 & , x = 12kz, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ \frac{2}{5} & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Böylece $\widetilde{N_2} \subseteq \widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_1} \cup \widetilde{N_2}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Teorem 3.5.8. $f : G \longrightarrow H$ bir grup izomorfizması olsun. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek grup ise $f(\widetilde{N})$, H_E üzerinde neutrosophic normal esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2017b).

İspat. $h_2 \in f(\widetilde{N})(x)$ ve $h_1 \in H$ için $h_1 = f(g_1)$ ve $h_2 = f(g_2)$ olacak şekilde $g_2 \in \widetilde{N}(x)$ ve $g_1 \in G$ var olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\theta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1 o h_2 o h_1^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1 o h_2 o h_1^{-1})] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1) o f^{-1}(h_2) o f^{-1}(h_1^{-1})] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1) o f^{-1}(h_2) o (f^{-1}(h_1))^{-1}] \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2 o g_1^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2) \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_2)] \\
&= \theta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vartheta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1 o h_2 o h_1^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1 o h_2 o h_1^{-1})] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1) o f^{-1}(h_2) o f^{-1}(h_2^{-1})] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1) o f^{-1}(h_2) o (f^{-1}(h_1))^{-1}] \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2 o g_1^{-1}) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_2)] = \vartheta_{f(\widetilde{N})(x)}(h_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\chi_{f(\widetilde{N})(x)}(h_1 o h_2 o h_1^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1 o h_2 o h_1^{-1})] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1) o f^{-1}(h_2) o f^{-1}(h_1^{-1})] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(h_1) o f^{-1}(h_2) o (f^{-1}(h_1))^{-1}] \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1 o g_2 g_1^{-1}) \leq \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2) \\
&= \chi_{\widetilde{N}(x)}[f^{-1}(g_2)] = \chi_{f(\widetilde{N})(x)}(h_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f(\widetilde{N})$, H_E üzerinde neutrosophic normal esnek gruptur.

3.6. Neutrosophic Esnek Kosetler

Tanım 3.6.1. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic esnek grup ve $g_1 \in G$ sabit bir eleman olsun.

$$\begin{aligned} g_1 o\widetilde{N}(x) &= \{< g_2, \theta_{g_1 o\widetilde{N}(x)}(g_2), \vartheta_{g_1 o\widetilde{N}(x)}(g_2), \chi_{g_1 o\widetilde{N}(x)}(g_2) >: \forall g_2 \in G\} \\ &= \{< g_2, \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1} o g_2), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1} o g_2), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1} o g_2) >: \forall g_2 \in G\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$g_1 o\widetilde{N} = \{g_1 o\widetilde{N}(x) : \forall x \in E\}$$

kümesine $\widetilde{N}$' nin G_E'deki sol neutrosophic esnek koseti denir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \widetilde{N}(x) o g_1 &= \{< g_2, \theta_{\widetilde{N}(x) o g_1}(g_2), \vartheta_{\widetilde{N}(x) o g_1}(g_2), \chi_{\widetilde{N}(x) o g_1}(g_2) >: \forall g_2 \in G\} \\ &= \{< g_2, \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1^{-1}), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1^{-1}), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1^{-1}) >: \forall g_2 \in G\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\widetilde{N} o g_1 = \{\widetilde{N}(x) o g_1 : \forall x \in E\}$$

kümesine $\widetilde{N}$' nin G_E'deki sağ neutrosophic esnek koseti denir (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Önerme 3.6.2. $\widetilde{N}$' nin G_E üzerinde neutrosophic normal esnek grup olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{N}$'nin G_E'deki sağ ve sol neutrosophic esnek kosetlerinin eşit olmasıdır (Bera ve Mahapatra, 2017b).

İspat. İlk olarak $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek grup olsun. Buradan

$$\begin{aligned} g_1 o\widetilde{N}(x) &= \{< g_2, \theta_{g_1 o\widetilde{N}(x)}(g_2), \vartheta_{g_1 o\widetilde{N}(x)}(g_2), \chi_{g_1 o\widetilde{N}(x)}(g_2) >: \forall g_2 \in G\} \\ &= \{< g_2, \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1} o g_2), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1} o g_2), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1} o g_2) >: \forall g_2 \in G\} \\ &= \{< g_2, \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1^{-1}), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1^{-1}), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2 o g_1^{-1}) >: \forall g_2 \in G\} \\ &= \{< g_2, \theta_{\widetilde{N}(x) o g_1}(g_2), \vartheta_{\widetilde{N}(x) o g_1}(g_2), \chi_{\widetilde{N}(x) o g_1}(g_2) >: \forall g_2 \in G\} \\ &= \widetilde{N}(x) o g_1 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\widetilde{N}$'nin G_E'deki sağ ve sol neutrosophic esnek kosetleri eşittir. Şimdi $g_1 o\widetilde{N} = \{g_1 o\widetilde{N}(x) : \forall x \in E\} = \{\widetilde{N}(x) o g_1 : \forall x \in E\} = \widetilde{N} o g_1$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\theta_{g_1\circ\widetilde{N}(x)}(g_2) &= \theta_{\widetilde{N}(x)\circ g_1}(g_2) \\
\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}\circ g_2) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2\circ g_1^{-1}) \\
\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2\circ g_1^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}\circ g_2) \\
\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1\circ g_2\circ g_1^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vartheta_{g_1\circ\widetilde{N}(x)}(g_2) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)\circ g_1}(g_2) \\
\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}\circ g_2) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2\circ g_1^{-1}) \\
\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2\circ g_1^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}\circ g_2) \\
\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1\circ g_2\circ g_1^{-1}) &= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\chi_{g_1\circ\widetilde{N}(x)}(g_2) &= \chi_{\widetilde{N}(x)\circ g_1}(g_2) \\
\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}\circ g_2) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2\circ g_1^{-1}) \\
\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2\circ g_1^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}\circ g_2) \\
\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1\circ g_2\circ g_1^{-1}) &= \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek grup olur.

Bundan sonra, neutrosophic normal esnek grubun sağ ve sol kosetleri eşit olduğundan sadece neutrosophic esnek koset denilecektir.

Örnek 3.6.3. G bir grup olsun. $\forall g \in G$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(e_G)$$

olmak üzere $\widetilde{N} = \{< x, \widetilde{N}(x) >: \forall x \in E\}$, G'ni neutrosophic normal esnek grubudur (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Teorem 3.6.4. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde neutrosophic normal esnek grup olsun. G üzerinde $\widetilde{N}$'nin tüm farklı neutrosophic esnek kosetlerinin kümesi $\Im$ olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $g_1\widetilde{N}g_2\widetilde{N} = (g_1g_2)\widetilde{N}$ çarpımına göre $\Im$ bir gruptur (Bera ve Mahapatra, 2017b).

İspat. İlk önce iyi tanımlılığını gösterelim.
$\forall g_1, g_2, g_1', g_2' \in G$ için $g_1\widetilde{N} = g_1'\widetilde{N}$ ve $g_2\widetilde{N} = g_2'\widetilde{N}$ ise $g_1\widetilde{N}g_2\widetilde{N} = (g_1'g_2')\widetilde{N}$ olduğunu gösterelim.
$g_1\widetilde{N} = g_1'\widetilde{N}$ ve $g_2\widetilde{N} = g_2'\widetilde{N}$ iken $x_1 \in E$ için $g_1^{-1}g_1' = \widetilde{N}(x_1)$ ve $x_2 \in E$ için $g_2^{-1}g_2' = \widetilde{N}(x_2)$'dir. $(g_1g_2)\widetilde{N} = (g_1'g_2')\widetilde{N}$ yani $(g_1g_2)^{-1}(g_1'g_2') \in \widetilde{N}$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}(g_1g_2)^{-1}(g_1'g_2') &= g_2^{-1}g_1^{-1}g_1'g_2' \\ &= g_2^{-1}\widetilde{N}(x_1)g_2' \\ &= g_2^{-1}g_2'\widetilde{N}(x_1) \\ &= \widetilde{N}(x_2)\widetilde{N}(x_1) \\ &= \widetilde{N}(x_3) \in \widetilde{N}, x_3 \in E\end{aligned}$$

Dolayısıyla iyi tanımlıdır. Şimdi

1. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $g_1\widetilde{N}, g_2\widetilde{N} \in \Im$ iken $g_1g_2\widetilde{N} \in \Im$ olduğu açıktır.

2. $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ için

$$g_1\widetilde{N}[g_2\widetilde{N}g_3\widetilde{N}] = g_1\widetilde{N}(g_2g_3)\widetilde{N} = g_1(g_2g_3)\widetilde{N}$$

ve

$$[g_1\widetilde{N}g_2\widetilde{N}]g_3\widetilde{N} = (g_1g_2)\widetilde{N}g_3\widetilde{N} = (g_1g_2)g_3\widetilde{N}$$

olur. G bir grup ve birleşme özelliği sağlandığından $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$ olur.

3. e_G, G'nin birim elemanı olmak üzere

$$e_G\widetilde{N}g_1\widetilde{N} = (e_Gg_1)\widetilde{N} = g_1\widetilde{N}$$

ve

$$g_1\widetilde{N}e_G\widetilde{N} = (g_1e_G)\widetilde{N} = g_1\widetilde{N}$$

olur. Birim eleman $e_G\widetilde{N} \in \Im$'dir.

4. Son olarak

$$g_1^{-1}\widetilde{N}g_1\widetilde{N} = (g_1^{-1}g_1)\widetilde{N} = e_G\widetilde{N} = \widetilde{N}$$

ve

$$g_1\widetilde{N}g_1^{-1}\widetilde{N} = (g_1g_1^{-1})\widetilde{N} = e_G\widetilde{N} = \widetilde{N}$$

olur. Ters eleman $(g_1\widetilde{N})^{-1} = g_1^{-1}\widetilde{N}$'dir.

Böylece $\Im$ bir gruptur. Bu gruba G ile $\widetilde{N}$'nin bölüm grubu (veya çarpım grubu) denir ve $G/\widetilde{N}$ ile gösterilir.

Tanım 3.6.5. G bir yarı grup ve $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, G_E üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$'nin neutrosophic esnek çarpımı $\widetilde{N_1}.\widetilde{N_2} = \widetilde{N_{1.2}}$ ile gösterilir ve $\forall(x, y) \in E \times E$ ve $\forall g_1 \in G$ için

$$\theta_{\widetilde{N_{1.2}(x,y)}}(g_1) = \begin{cases} max_{g_1=g_2g_3}[\theta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2) * \theta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_3)] & , g_1 = g_2g_3 \text{ olarak yazılabiliyorsa} \\ 0 & , g_1 = g_2g_3 \text{ olarak yazılamıyorsa} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N_{1.2}(x,y)}}(g_1) = \begin{cases} min_{g_1=g_2g_3}[\vartheta_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2) \diamond \vartheta_{\widetilde{N_2(y)}}(g_3)] & , g_1 = g_2g_3 \text{ olarak yazılabiliyorsa} \\ 1 & , g_1 = g_2g_3 \text{ olarak yazılamıyorsa} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N_{1.2}(x,y)}}(g_1) = \begin{cases} min_{g_1=g_2g_3}[\chi_{\widetilde{N_1(x)}}(g_2) \diamond \chi_{\widetilde{N_2(y)}}(g_3)] & , g_1 = g_2g_3 \text{ olarak yazılabiliyorsa} \\ 1 & , g_1 = g_2g_3 \text{ olarak yazılamıyorsa} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Teorem 3.6.6. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde bir neutrosophic normal esnek grup olsun. $\phi : G \longrightarrow G/\widetilde{N}$, $\forall g \in G$ için $\phi(g) = g\widetilde{N}$ şeklinde tanımlı doğal bir homomorfizma vardır (Bera ve Mahapatra, 2017b).

İspat. $\phi : G \longrightarrow G/\widetilde{N}$ fonksiyonu $\forall x \in E$ için $\phi(g) = g\widetilde{N}(x)$ şeklinde tanımlansın. ϕ'nin homomorfizma olduğu gösterilecektir. Yani $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$, yani $(g_1g_2)\widetilde{N}(x) = (g_1\widetilde{N}(x))(g_2\widetilde{N}(x))$ olduğu gösterilecektir. $\forall g \in G$ için

$$
\begin{aligned}
(g_1\widetilde{N}(x))(g) &= <\theta_{g_1\widetilde{N}(x)}(g), \vartheta_{g_1\widetilde{N}(x)}(g), \chi_{g_1\widetilde{N}(x)}(g_1)> \\
&= <\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}g), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}g), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}g)> \\
(g_2\widetilde{N}(x))(g_1) &= <\theta_{g_2\widetilde{N}(x)}(g), \vartheta_{g_2\widetilde{N}(x)}(g), \chi_{g_2\widetilde{N}(x)}(g)> \\
&= <\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}g), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}g), \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}g)> \\
((g_1g_2)\widetilde{N}(x))(g) &= <\theta_{g_1g_2\widetilde{N}(x)}(g), \vartheta_{g_1g_2\widetilde{N}(x)}(g), \chi_{g_1g_2\widetilde{N}(x)}(g)> \\
&= <\theta_{\widetilde{N}(x)}((g_1g_2)^{-1}g), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}((g_1g_2)^{-1}g), \chi_{\widetilde{N}(x)}((g_1g_2)^{-1}g)>
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
[(g_1(\widetilde{N}(x)))(g_2(\widetilde{N}(x)))](g) =&< max_{g=rs}\{\theta_{g_1(\widetilde{N}(x))}(r) * \theta_{g_2(\widetilde{N}(x))}(s)\}, \\
min_{g=rs}\{\vartheta_{g_1(\widetilde{N}(x))}(r) \diamond \vartheta_{g_2(\widetilde{N}(x))}(s)\}, & min_{g=rs}\{\chi_{g_1(\widetilde{N}(x))}(r) \diamond \chi_{g_2(\widetilde{N}(x))}(s)\}> \\
=&< max\{\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}r) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}s)\}, \\
min\{\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}r) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}s)\}, & min\{\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}r) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}s)\}>
\end{aligned}
$$

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\theta_{\widetilde{N}(x)}((g_1g_2)^{-1}g) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}g_1^{-1}g) \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}g_1^{-1}rs) \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}(g_1^{-1}rsg_2^{-1})g_2) \\
&= \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}rsg_2^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}r) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(sg_2^{-1})
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde ϑ ve χ için de sağlanır. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
&\theta_{\widetilde{N}(x)}((g_1g_2)^{-1})g) = max_{g=rs}[\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}r) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}s)], \\
&\vartheta_{\widetilde{N}(x)}((g_1g_2)^{-1})g) = min_{g=rs}[\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}r) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}s)], \\
&\chi_{\widetilde{N}(x)}((g_1g_2)^{-1})g) = min_{g=rs}[\chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1}r) \diamond \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_2^{-1}s)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$[(g_1g_2)\widetilde{N}(x)](g) = [(g_1\widetilde{N}(x))(g_2\widetilde{N}(x))](g) \Rightarrow \phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

olduğu görülür.

Önerme 3.6.7. $\widetilde{N}$, sonlu bir G_E grubu üzerinde neutrosophic esnek grup olsun. $\forall x \in E$ için

$$H = \{g_1 \in G : \theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G); \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G); \chi_{\widetilde{N}(x)}(g_1) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(e_G)\}$$

$$K = \{g_2 \in G : \widetilde{N}g_2 = \widetilde{N}e_G\}$$

yani

$$K = \{g_2 \in G : \theta_{\widetilde{N}(x)g_2}(g_1) = \theta_{\widetilde{N}(x)e_G}(g_1);$$

$$\vartheta_{\widetilde{N}(x)g_2}(g_1) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)e_G}(g_1); \chi_{\widetilde{N}(x)g_2}(g_1) = \chi_{\widetilde{N}(x)e_G}(g_1) : \forall g_1 \in G\}$$

şeklinde tanımlansın. $*$ eşgüçlü t-norm ve $\diamond$ eşgüçlü s-norm ise H ve K, G'nin alt gruplarıdır. Ayrıca $H = K$'dır (Bera ve Mahapatra, 2017b).

İspat. $\forall h_1, h_2 \in H$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_2) &\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_2) \\ &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \\ &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_2) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G)$ elde edilir.
Ayrıca $\theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_1^{-1}) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1)*\theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1)$ yani, $\theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1)$ olur. Böylece, $\theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1)$ elde edilir. h_1 yerine h_1h_2 yazarsak, $\theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_2)$ olur. Buradan $\theta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_2) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G)$ elde edilir. (1)

Sonrasında

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_2) &\leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_2) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \\
&= \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G)
\end{aligned}$$

yani

$$\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_2) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G)$$

elde edilir.

Ayrıca $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_1^{-1}) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1) \diamond \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1)$ yani, $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1)$ olur. Böylece $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1)$ olur. h_1 yerine h_1h_2 yazarsak $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \leq \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_2)$ olur. Buradan $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(h_1h_2) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G)$ elde edilir. (2)

Benzer şekilde $\chi_{\widetilde{N}(x)}(h_1)h_2 = \chi_{\widetilde{N}(x)}(e_G)$ elde edilir. (3)

Yani (1), (2), (3)'den $\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1h_2 \in H$ olduğu görülür. G sonlu olduğundan H, G'nin bir alt grubudur. Son olarak $H = K$ olduğunu gösterelim. $k \in K$ olsun, $\forall g \in G$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(x)k}(g) = \theta_{\widetilde{N}(x)e_G}(g), \vartheta_{\widetilde{N}(x)k}(g) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)e_G}(g), \chi_{\widetilde{N}(x)k}(g) = \chi_{\widetilde{N}(x)e_G}(g)$$

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(gk^{-1}) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g{e_G}^{-1}), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(gk^{-1}) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g{e_G}^{-1}), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(gk^{-1}) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g{e_G}^{-1})$$

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(gk^{-1}) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(gk^{-1}) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g), \chi_{\widetilde{N}(x)}(gk^{-1}) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g)$$

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(k^{-1}) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G), \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(k^{-1}) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(e_G), \chi_{\widetilde{N}(x)}(k^{-1}) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(e_G)$$

($g = e_G$ alınırsa) Buradan $k^{-1} \in H$ elde edilir. H, G'nin alt grubu olduğundan $k \in H$ olur. Dolayısıyla, $K \subseteq H$ olur. (4)

$h \in H$ olsun. Buradan, $\forall g \in G$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(x)h}(g) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1})$$

ve

$$\theta_{\widetilde{N}(x)e_G}(g) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(ge_G^{-1}) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\theta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1}) &\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(h) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \\ &\geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(g) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\theta_{\widetilde{N}(x)}(g) &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1}h) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1}) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(h) \\ &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1}) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(e_G) \geq \theta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1}) * \theta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1}) \\ &= \theta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1})\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\theta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1}) = \theta_{\widetilde{N}(x)}(g)$ olur. Benzer şekilde, $\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1}) = \vartheta_{\widetilde{N}(x)}(g)$ ve $\chi_{\widetilde{N}(x)}(gh^{-1}) = \chi_{\widetilde{N}(x)}(g)$ olduğu görülür. Böylece $h \in K$ olur. Buradan $H \subseteq K$ elde edilir. (5)
Dolayısıyla (4) ve (5)'den $H = K$ olur ve böylece K, G'nin bir alt grubudur.

3.7. Neutrosophic Esnek Homomorfizma

Bu bölümde ilk olarak bir neutrosophic esnek küme fonksiyonu tanımlanacaktır. Neutrosophic esnek küme fonksiyonunun görüntüsü ve ters görüntüsü kavramları incelenecektir. Daha sonra neutrosophic esnek homomorfizma ve bazı özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 3.7.1. U ve V evrensel küme, E parametre kümesi olmak üzere $\mu : U \longrightarrow V$ ve $\beta : E \longrightarrow E$ iki fonksiyon olsun. (μ, β) ikilisine U_E'dan V_E'ye bir neutrosophic esnek fonksiyon denir ve $\mu_\beta : U_E \longrightarrow V_E$ şeklinde gösterilir (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Tanım 3.7.2. $\widetilde{N_1}$ ve $\widetilde{N_2}$, sırasıyla U_E ve V_E üzerinde tanımlı neutrosophic esnek kümeleri olsun. $\mu_\beta : U_E \rightarrow V_E$ neutrosophic esnek fonksiyonu olsun.

1. μ_β altında $\widetilde{N_1}$'nin görüntüsü V_E üzerinde $\mu_\beta(\widetilde{N_1})$ neutrosophic esnek kümedir. $\forall y \in \beta(E), \forall v \in V$ için

$$\mu_\beta(\widetilde{N_1}) = (\mu(\widetilde{N_1}), \beta(E)) = \{< \beta(x), \beta(\widetilde{N_1}) >: x \in E\}$$

şeklinde gösterilir ve

$$\theta_{\mu(\widetilde{N_1})(y)}(v) = \begin{cases} max_{\mu(u)=v} max_{\mu(x)=y}[\theta_{\widetilde{N_1}(x)}(u)] & , u \in \mu^{-1}(v) \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\varphi(\widetilde{N_1})(y)}(v) = \begin{cases} min_{\mu(u)=v} min_{\mu(x)=y}[\vartheta_{\widetilde{N_1}(x)}(u)] & , u \in \mu^{-1}(v) \text{ ise} \\ 1 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\chi_{\mu(\widetilde{N_1})(y)}(v) = \begin{cases} min_{\mu(u)=v} min_{\varphi(x)=y}[\chi_{\widetilde{N_1}(x)}(u)] & , u \in \mu^{-1}(v) \text{ ise} \\ 1 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlanır.

2. μ_β altında $\widetilde{N_2}$'nin ters görüntüsü U_E üzerinde $\mu_\beta^{-1}(\widetilde{N_2})$ neutrosophic esnek kümedir. $\forall x \in \beta^{-1}(E), \forall u \in U$ için

$$\mu_\beta^{-1}(\widetilde{N_2}) = (\mu^{-1}(\widetilde{N_2}), \beta^{-1}(E))$$

şeklinde gösterilir ve

$$\begin{aligned} \theta_{\mu^{-1}(\widetilde{N_2})(x)}(u) &= \theta_{\widetilde{N_2}[\beta(x)]}(\mu(u)) \\ \vartheta_{\mu^{-1}(\widetilde{N_2})(x)}(u) &= \vartheta_{\widetilde{N_2}[\beta(x)]}(\mu(u)) \\ \chi_{\mu^{-1}(\widetilde{N_2})(x)}(u) &= \chi_{\widetilde{N_2}[\beta(x)]}(\mu(u)) \end{aligned}$$

ile tanımlanır. β ve μ, birebir ve örten ise μ_β' da birebir ve örtendir (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Örnek 3.7.3. $E = \mathbb{N}^+$ (doğal sayılar kümesi) parametre kümesi ve $G = (\mathbb{Z}, +)$ tamsayıların bir grubu olsun. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ve $\forall z \in \mathbb{Z}$ için $\widetilde{N} : \mathbb{N}^+ \not\models \longrightarrow P_U(\mathbb{Z})$

fonksiyonu $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(n)}(z) = \begin{cases} 0 & , z = 2k-1 \text{ ise} \\ \frac{1}{n} & , z = 2k \text{ ise} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N}(n)}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & , z = 2k-1 \text{ ise} \\ 0 & , z = 2k \text{ ise} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N}(n)}(z) = \begin{cases} 1-\frac{1}{n} & , z = 2k-1 \text{ ise} \\ 0 & , z = 2k \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. t-norm($*$) ve s-norm($\diamond$) sırasıyla $a * b = min\{a, b\}, a \diamond b = max\{a, b\}$ şeklinde tanımlansın. Buradan $\widetilde{N}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{N}+}$ üzerinde neutrosophic esnek gruptur. $\mathbb{Z}$ üzerinde $\mu(z) = 3z + 1$ ve $\beta(z) = z^2$ fonksiyonları tanımlansın. Buradan $\mu_\beta(\widetilde{N}) = (\mu(\widetilde{N}), \beta(\mathbb{N}^+)) = (\mu(\widetilde{N}), {\mathbb{N}^+}^2)$ neutrosophic esnek küme fonksiyonu
$\forall x \in {\mathbb{N}^+}^2, y \in 3\mathbb{Z} + 1$ için

$$\theta_{\widetilde{N}(x)}(z) = \begin{cases} 0 & , z = 6k-2 \text{ ise} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & , z = 6k+1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\vartheta_{\widetilde{N}(x)}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & , z = 6k-2 \text{ ise} \\ 0 & , z = 6k+1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\chi_{\widetilde{N}(x)}(z) = \begin{cases} 1-\frac{1}{\sqrt{x}} & , z = 6k-2 \text{ ise} \\ 0 & , z = 6k+1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir (Bera ve Mahapatra, 2017b).

Teorem 3.7.4. $\widetilde{N}$, G_E üzerinde bir neutrosophic esnek grup ve $\mu_\beta : G_E \to H_E$ bir neutrosophic esnek homomorfizma olsun. $\mu_\beta(\widetilde{N})$, H_E üzerinde bir neutrosophic esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2017b).

İspat. $y \in \beta(E)$ ve $h_1, h_2 \in H$ olsun. $\mu^{-1}(h_1) = \emptyset$ ya da $\mu^{-1}(h_2) = \emptyset$ için ispat açıktır.
Bundan dolayı $\mu(g_1) = h_1, \mu(g_2) = h_2$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in G$ olduğunu kabul

edelim. Buradan

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1h_2) &= max_{\mu(g)=h_1h_2} max_{\beta(x)=y}[\theta_{\widetilde{N}(x)}(g)] \\
&\geq max_{\beta(x)=y}[\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1g_2)] \\
&\geq max_{\beta(x)=y}[\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1) * \theta_{\widetilde{N}(g)}(g_2)] \\
&= max_{\beta(x)=y}[\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1)] * max_{\beta(x)=y}[\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2)]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1^{-1}) &= max_{\mu(g)=h_1^{-1}} max_{\beta(x)=y}[\theta_{\widetilde{N}(x)}(g)] \\
&\geq max_{\beta(x)=y}[\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1^{-1})] \\
&\geq max_{\beta(x)=y}[\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1)]
\end{aligned}$$

$\forall g_1, g_2 \in G$ için $\mu(g_1) = h_1$, $\mu(g_2) = h_2$ sağlandığından bu eşitsizlik sağlanır. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1h_2) &\geq (max_{\mu(g_1)=h_1} max_{\beta(x)=y}\{\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1)\} * (max_{\mu(g_2)=h_2} max_{\beta(x)=y}\{\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_2)\}) \\
&= \theta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1) * \theta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\theta_{\mu(\widetilde{N})}(y)(h_1^{-1}) \geq (max_{\mu(g_1)=h_1} max_{\beta(x)=y}\{\theta_{\widetilde{N}(x)}(g_1)\}) = \theta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1)$ olur. Benzer şekilde

$$\vartheta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1h_2) \leq \vartheta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1) \diamond \vartheta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_2), \vartheta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1^{-1}) \geq \vartheta_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1)$$

$$\chi_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1h_2) \leq \chi_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1) \diamond \chi_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_2), \chi_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1^{-1}) \geq \chi_{\mu(\widetilde{N})(y)}(h_1)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.5. $\widetilde{N}$, H_E üzerinde bir neutrosophic esnek grup ve $\mu_\beta : G_E \to H_E$ bir neutrosophic esnek homomorfizma olsun. $\mu_\beta^{-1}\widetilde{N}$, G_E üzerinde bir neutrosophic esnek gruptur (Bera ve Mahapatra, 2017b).

İspat. $\forall x \in \beta^{-1}(E)$ ve $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1g_2) &= \theta_{\widetilde{N}[\beta(x)]}(\mu(g_1g_2)) \\
&= \theta_{\widetilde{N}[\beta(x)]}(\mu(g_1)\mu(g_2)) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}[\beta(x)]}(\mu(g_1)) * \theta_{\widetilde{N}[\beta(x)]}(\mu(g_2)) \\
&= \theta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1) * \theta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1^{-1}) &= \theta_{\widetilde{N}[\beta(x)]}(\mu(g_1^{-1})) \\
&= \theta_{\widetilde{N}[\beta(x)]}(\mu(g_1)^{-1}) \\
&\geq \theta_{\widetilde{N}[\beta(x)]}(\mu(g_1)) \\
&= \theta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1g_2) &\leq \vartheta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1) \diamond \vartheta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_2) \\
\vartheta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1^{-1}) &\leq \vartheta_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1), \\
\chi_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1g_2) &\leq \chi_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1) \diamond \chi_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_2) \\
\chi_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1^{-1}) &\leq \chi_{\mu^{-1}(\widetilde{N})(x)}(g_1),
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak esnek kümeler hakkında bilgi verildi. Sonra neutrosophic esnek kümelere değinildi. Daha sonra Neutrosophic esnek gruplar kavramı bazı özellikler ve teoremlerle incelendi. Neutrosophic esnek grupların kartezyen çarpımı ele alındı. Neutrosophic esnek altgrup kavramı incelendi. Daha sonra Neutrosophic normal esnek grup kavramı tanıtıldı ve cebirsel özellikleri incelendi. Neutrosophic esnek kosetler ve Neutrosophic esnek homomorfizma hakkında bilgi verildi.

KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F. ve Tanay, B., 2010. Soft sets and soft rings. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3458-3463.

Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007. Soft sets and soft groups. Informations Sciences, 177, 2726-2735.

Ali, M.I, Feng, F., Liu, X. Min, W.K ve Shabir M., 2009. One some new operation in soft theory, Computers and Mathematics with Applications, 57 (9), 1547-1553.

Atagün, A. O. ve Sezgin, A., 2011. Soft substructures of rings, fields and modules. Computers and Mathematics with Applications, 61 (3), 592-601.

Atanassov K., 1986. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy sets and systems, 20 (1), 87-96.

Aygünoğlu, A. ve Aygün, H., 2009. Indroduction to fuzzy soft groups. Computers and Mathematics with Applications, 58, 1279-1286.

Basu T. M., Mahapatra N. K. ve Mondal S. K., 2012. Intuitionistic fuzzy soft function and it's application in the climate system. IRACST, 2 (3), 2249-9563.

Bera T., Mahapatra N. K. 2016a. Introduction to Neutrosophic Soft Groups. Neutrosophic Sets and Systems, 13, 118-127.

Bera T. ve Mahapatra N. K., 2016b. On neutrosophic soft function. Annal of Fuzzy Mathematics and Informatics, 12 (1), 101-119.

Bera T. ve Mahapatra N. K., 2017a. On neutrosophic soft rings. OPSEARCH, 54, 143-167.

Bera T. ve Mahapatra N. K., 2017b. On neutrosophic normal soft groups. Int. J. Appl. Comput. Math., 3, 3047-3066.

Bera T., Mahapatra N. K., 2017c.Introduction to neutrosophic soft topological spaces. Communicated Paper for Possible Publication, 841-867.

Broumi S., 2013. Generalized neutrosophic soft set. IJCSEIT, 3 (2), 17-30.

Broumi S. ve Smarandache F., 2013. Intuitionistic neutrosophic soft set. Journal of Information and ,computing Science, 8 (2), 130-140.

Broumi S., Smarandache F. ve Maji P. K., 2014. Intuitionistic neutrosophic soft set over rings. Math. Stat., 2 (3), 120-126.

Chen D., Tsang E.C.C., Yeung D,S., Wang X., 2005. The Parameterization Reduction of Soft Sets and Its Applications. Computers and Mathematics with Applications, 49 (56): 757-763.

Çağman N., Çıtak, F. ve Aktaş, H., 2012. Soft int-group and its applications to group theory. Neural Computing and Applications, 21 (1), 151-158.

Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S., 2010. Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. Turkish Journal of Fuzzy Systems, 1 (1), 21-35.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010. Soft matrix theory and decision making, Computers and Mathematics with Application, 59, 3308-3314.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010. Soft set theory and uni-int decision making, Eur. J. Oper. Res., 207, 847-855.

Çağman, N., Enginoğlu, S. ve Çıtak, F. 2011. Fuzzy soft set theory and its applications. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 8 (3), 137-147.

Deli I. ve Broumi S., 2015. Neutrosophic Soft Matrices and NSM decision Making. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 28 (5), 2233-2241.

Dinda B. ve Samanta T. K., 2010. Relations on intuitionistic fuzzy soft sets. Gen. Math. Notes, 1 (2), 74-83.

Feng, F., Li C.X., Davvas, B., Leoreanu-Fotea, V. ve Ali, M.İ., 2010. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach, Soft Computing, 14, 899-911.

Feng, F., Li C.X., Davvas, B., Leoreanu-Fotea, V. ve Jun, Y.B., 2011. Soft sets and softs rough sets, Infor. Sci., 181 (6), 1125-1137.

Feng, F., Jun, Y. B. ve Zhao, X., 2008. Soft semiring. Computers and Mathematics with Applications, 10, 10-16.

Ghosh J., Dinda B., Samanta T. K., 2011. Fuzzy soft rings and fuzzy soft ideals. Int. J. Pure Appl. Sci. Technol, 2 (2), 66-74.

Jun, Y. B., 2008. Soft BCK/BCI-algebras. Computer and Mathematics with Applications, 56 1408-1413.

Jun, Y.B., Lee, K,J. ve Zhan, J., 2009. Soft p-ideals of soft BCI-algebras. Comput. Math. Appl., 58, 2060-2068 .

Jun, Y. B. ve Park, C. H., 2008. Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras, Information Sciences, 178, 2466-2475.

Maji P. K., 2015. An application of weighted neutrosophic soft sets in a decission making problem. Springer proceedings in Mathematics and Statistics, 125, 215-223.

Maji P. K., 2013. Neutrosophic soft set. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 5 (1), 157-168.

Maji P. K., Biswas R. ve Roy A. R., 2001. Fuzzy soft sets. The journal of fuzzy mathematics, 9 (3), 589-602.

Maji P. K., Biswas R. ve Roy A. R., 2001. Intuitionistic fuzzy soft sets. The journal of fuzzy mathematics, 9 (3), 677-692.

Maji P. K., Biswas R. ve Roy A. R., 2004. On intuitionistic fuzzy soft sets. The journal of fuzzy mathematics, 12 (3), 669-683.

Maji, P.K., Biswas R. ve Roy, A.R., 2003. Soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 45, 555-562.

Majumdar, P.ve Samanta, S.K., 2010. On soft mapping. Computers and Mathematics with Applications, 60 (9), 2666-2672.

Molodtsov, D., 1999. Soft set theory-first result. Computers and Mathematics with Applications, 37, 19-31.

Molodtsov, D.A.,Yu., V., Leonov ve Kovkov, D.V., 2006. Soft sets technique and its application.Nechetkie Sistemi i Myakic Vychisleniya, 1 (1), 8-39.

Rosenfeld A., 1971. Fuzzy groups. Journal of mathematical analysis and applications, 35, 512-517.

Sezgin, A. ve Atagün, A.O., 2011. On operations of soft sets. Comput. Math. Appl., 61 (5), 1457-1467.

Sezgin, A., Atagün, A.O. ve Aygün E., 2011. A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings. Filomat, 25, 53-68.

Smarandache F., 2005. Neutrosophic set, a generalisation of the intuitionistic fuzzy sets. Inter. J. Pure Appl. Math., 24, 287-297.

Şahin M., Alkhazaleh S. ve Ulucay V., 2015. Neutrosophic soft expert sets. Applied Mathematics, 6, 116-127.

Varol B. P., Aygünoğlu A. ve Aygün H.,2012. On fuzzy soft rings. Journal of Hyperstructures, 1 (2), 1-15.

Zadeh L. A., 1965. Fuzzy sets. Information and control, 8, 338-353.

Zhan, J., Jun, Y.B., 2010.Soft BL-algebras based on fuzzy sets. Computers and Mathematics with Applications, 59 (6) 2037-2046.

Zhang Z., 2012. Intuitionistic fuzzy soft rings. International Journal of Fuzzy System, 14 (3), 420-431.

6. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Zeynep ÇELİK

Doğum Tarihi : 01.05.1994

Doğum Yeri : Sulusaray/TOKAT

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 05452590543

E-posta : zeynep-9967@hotmail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2016
Lise	Anadolu İmam Hatip Lisesi	2011