



T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇATLAKLI JEOTERMAL REZERVUARLARDA
ISI YAYILIMI MODELLEMESİ

Mahmut BÜLBÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jeoloji Mühendisliği Anabilim Dalı

Ocak-2015
BATMAN
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Mahmut BÜLBÜL tarafından hazırlanan “ ÇATLAKLI JEOTERMAL REZERVUARLARDA ISI YAYILIMI MODELLEMESİ ” adlı tez çalışması .../.../... tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Jeoloji Mühendisliği Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri		İmza
	Başkan	
Unvanı Adı SOYADI	
	Danışman	
Unvanı Adı SOYADI	
	Üye	
Unvanı Adı SOYADI	
	Üye	
Unvanı Adı SOYADI	
	Üye	
Unvanı Adı SOYADI	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. M. Tahir NALBANTÇILAR
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

Mahmut BÜLBÜL

15.01.2015

ÖZET**YÜKSEK LİSANS TEZİ****ÇATLAKLI JEOTERMAL REZERVUARLARDA ISI YAYILIMI MODELLEMESİ****Mahmut BÜLBÜL****Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Jeoloji Mühendisliği Anabilim Dalı****Danışman: Prof. Dr. İbrahim KOCABAŞ****2015, 121 Sayfa****Jüri****Prof. Dr. Mustafa ONUR
Prof. Dr. İbrahim KOCABAŞ
Doç. Dr. M. Tahir NALBANTÇILAR**

Bu çalışmada jeotermal rezervuarlardan üretilen sıcak su ve buharın ısısı alındıktan sonra jeotermal rezervuarlara geri basılması sırasında gelişen veya sıcak susuz jeotermal alanlarda ısı kurtarım için soğuk su enjeksiyonu sırasında gelişen ısı transferi modellerinin yeni analitik çözümleri sunulmuştur. Jeolojik olarak geçirimsiz matris içinde yerleşik sonsuz sayıda ayrı paralel çatlak modeli seçilmiş ve bu model için iki ayrı akış modeli gözönüne alınmıştır. İlk akış modelinde çatlak boyunca ısı taşınımı yalnız su akışı ve çatlağa iki yanından bitişik sonlu iki matris bloklarında ise akışa dik bir ısı iletimi farzedilmiştir. Bu akış modeli için Skoop ve Warrick (1974) tarafından izleyici taşınımı için geliştirilen çözümden çok daha basit ama çok daha etkin bir yeni çözüm geliştirilmiştir. İkinci akış modelin de ise çatlak boyunca ısı taşınımı yalnız su akışı ve hidrolik ısı yayılımı, bitişik matris bloklarında ise akışa dikey bir ısı iletiminin farzedilmiştir. Günümüze kadar sadece Laplace uzayında sunulmuş bu akış modelinin çözümlerinin hesaplanmasında sayısal dönüştürücüler (yarı-analitik çözümler) kullanılmıştır. Bu çalışmada ilk defa İteratif Laplace dönüşümü metodu kullanılarak bu modelin yeni bir kapalı analitik çözümü (gerçek uzayda) geliştirilmiştir. Son olarak her iki modelin doğrusal olmayan regresyon yöntemi ile saha deneylerinin verileri kullanılarak parametre değer tahminleri (kestirimleri) yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Jeotermal Rezervuarlarda Isı transferi, Jeotermal rezervuarlarda Isı Taşınım Modellemesi, İteratif Laplace Dönüşümü, Jeotermal Rezervuarlarda Soğutulmuş Suyun Geri-Basılması

ABSTRACT**MS THESIS****MODELLING OF HEAT TRANSFER IN FRACTURED GEOTHERMAL RESERVOIRS****Mahmut BÜLBÜL****THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
OF BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN GEOLOGY ENGINEERING****Advisor: Prof. Dr. İbrahim KOCABAŞ****2015, 121 Pages****Jury****Prof. Dr. Mustafa ONUR
Prof. Dr. İbrahim KOCABAŞ
Doç. Dr. M. Tahir NALBANTÇILAR**

In this work, novel analytical solution to models of heat transport during reinjection of heat depleted geothermal waters into geothermal reservoirs and/or during cold water injection into hot dry rock have been presented. A geological model of infinite number of distinct parallel fractures located in an impermeable matrix have been selected and for the geological model two different heat transport models have been considered. For the first transport model, a purely convective transport within the fracture and perpendicular conduction into the adjacent finite size matrix blocks on two sides of the fracture mechanisms are assumed. For this transport model, a novel model has been developed which is superior to the previously developed Skopp and Warrick (1975) solution presented for solute transport. In the second transport model in addition to the purely convective transport within the fracture and perpendicular conduction into the adjacent finite size matrix blocks on two sides of the fracture, a hydraulic dispersion along the flow direction mechanisms is assumed. Until today only Laplace Space solutions (semi-analytical solutions) of this model have been presented and numerical Laplace Inversion algorithms have been employed to compute return profiles. In this work, a novel closed form analytical solution (real space) has been developed by using iterated Laplace transform method. Finally, nonlinear regression analysis of these two transport models have been performed to match model results with experimental data and to estimate model parameter values.

Keywords: Fractured Geothermal Reservoirs, Heat Transport in geothermal reservoirs, Thermal Transients During Reinjection, Iterated Laplace Transform, Reinjection

ÖNSÖZ

Bu çalışma, her aşamasındaki ciddi yönlendirme, katkı ve değerlendirmeleri nedeniyle hocamız sayın Prof. Dr. İbrahim KOCABAŞ 'a zaman, emek ve vefa borçludur. Dolayısıyla çalışmanın olumlu sonuçlarından büyük oranda Hocamız hissedardır. Eğitim süreçlerimizin sekteye uğramadan işlemesindeki dikkatli tutumları ve eşsiz öngörülerini noktasında hocamız Doç.Dr. M.Tahir NALBANTÇILAR ve tüm Fen bilimleri Enstitüsü personelinin gayretleri takdire şayandır. Ayrıca başta hocamız Prof. Dr. Mustafa ONUR olmak üzere tüm jüri üyelerine değerli katkıları nedeniyle teşekkür ederim. Bu tür çalışmalar şüphesiz çoğu kez eş ve çocuklara ayrılacak zamanın da bir kısmını gerektirmektedir. Bu nedenle aileme de fedakarlıkları nedeniyle şükran borçluyum.

Mahmut BÜLBÜL
BATMAN-2015

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	1
1.2. Kaynak Araştırması	2
1.2.1. Paralel Çatlaklarda Isı Transferi	2
1.2.2. Akiferlerde Duyarlı Isı Depolanması.....	3
1.2.3. Gelişmiş/İleri Jeotermal Sistemlerde Isıl Kurtarı.....	3
1.2.4. Jeotermal Rezervuarlarda Soğuk Su Geri Basılması ve Isı Taşınımı.....	5
1.2.5. Isı Taşınım Denklemlerinin Analitik Çözümleri.....	5
1.3. Materyal ve Yöntem	6
1.4. Tez Eserinin Önemi	8
2. TEORİ.....	10
2.1. Jeotermal Rezervuarlarda Isı Transferi Mekanizmaları.....	10
2.2. Ayrık Paralel Çatlaklı Jeotermal Rezervuar Modeli.....	11
3. I. AKIŞ MODELİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ	14
3.1. I. Akış Modeli için Skoop ve Warrick Çözümü	15
3.2. I.Akış Modelinin Yeni analitik Çözümü.....	19
3.2.1. I.Akış Modelinin Yaklaşık Yeni analitik Çözümü	20
3.3. Çözümlerin Karşılaştırılması	23
4. II. AKIŞ MODELİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ	24
4.1. II. Akış Modeli için Skopp ve Warrick Yaklaşımı ile Yeni Çözüm.....	25
4.1.1. Algoritma Düzenlemeleri ve Tolerans Kabulleri.....	25
4.1.2. Yakınsama Örnekleri	27
4.2.II. Akış-Modeli için Seri Yaklaşımı ile Yeni Çözüm	33
4.2.1. Algoritma Düzenlemeleri ve Tolerans Kabulleri.....	33
4.2.2. Yakınsama Örnekleri	34
4.3. Çözümlerin Karşılaştırılması	40

4.4. Boyuna Isı Yayılmının Etkisi	42
5. DUYARLILIK VE REGRESYON ANALİZLERİ	44
5.1. I. Akış Modeli	44
5.1.1. Orantılı Parametre ve Duyarlılık Tanımları	44
5.1.2. Orantılı Duyarlılık Grafikleri	46
5.1.3. İzleyici Taşınımları Analizleri	49
5.1.3.1. Regresyon Grafikleri	51
5.1.3.2. Güven Aralığı Grafikleri	54
5.2. II. Akış Modeli İzleyici Taşınım Analizi	55
5.2.1. Tek Çatlakta II. Akış Modeli İzleyici Taşınım Analizi	55
5.2.2. Orantılı Duyarlılık Grafikleri	53
5.2.3. Regresyon ve Güven Aralığı Grafikleri	58
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	62
6.1. I. Akış Modeli	62
6.2. II. Akış Modeli	62
6.3. Akış Modellerin Karşılaştırılması ve Öneriler	63
KAYNAKLAR	65
EKLER.....	71
ÖZGEÇMİŞ.....	121

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil-1.1.	Skoop ve Warrick izleyici taşınımı modeli	1
Şekil-2.1.	Jeolojik ve Akış Modelleri Bütünleşik Sistemleri	13
Şekil-2.2.	Tek ve paralel çatlaklı rezervuar modelleri.....	13
Şekil-3.1.	$x_D=1$; $t_D=2$ için integral içi fonksiyon yakınsaması	16
Şekil 3.2.	$x_D=2$; $t_D=1$ için integral içi fonksiyon yakınsaması	17
Şekil 3.3.	$x_D=0.5$; $t_D=0.5$ integral içi fonksiyon yakınsaması	17
Şekil 3.4.	$x_D=0.3$; $t_D=0.3$ integral içi fonksiyon yakınsaması.....	18
Şekil 3.5.	$x_D=1$; $t_D=0.6$ için T_D dağılımı.....	18
Şekil 3.6.	$x_D=2$ ve $t_D=1$ için T_D yakınsaması	21
Şekil 3.7.	$x_D=1$ ve $t_D=2$ için T_D yakınsaması	21
Şekil 3.8.	$x_D=0,5$ ve $t_D=0,5$ için T_D yakınsaması.....	22
Şekil 3.9.	$x_D=1$ ve $t_D=0.6$ için T_D grafiği.....	23
Şekil 3.10.	$x_D=1$ ve $t_D=0.6$ için T_D grafikleri.....	23
Şekil 4.1.	F integral içi fonksiyonu yakınsaması.....	27
Şekil 4.2.	F integral içi fonksiyonu yakınsaması	28
Şekil 4.3.	F integral içi fonksiyonu	28
Şekil 4.4.	t_D , $\tau= 0..0,3$ aralığı Tolerans değerleri.....	29
Şekil 4.5.	t_D , $\tau= 1..2$ aralığı Tolerans3 değerleri.	30
Şekil 4.6.	t_D , $\tau= 0.01..0.1$ aralığı T_D ve Tolerans3 değerleri.	30
Şekil 4.7.	t_D , $\tau= 0,1..1$ aralığı Tolerans3 değerleri.....	31
Şekil 4.8.	t_D , $\tau=1..10$ aralığı T_D ve Tolerans3 değerleri.....	31
Şekil 4.9.	t_D , $\tau= 1..10$ aralığı analitik ve sayısal T_D değerleri.....	32
Şekil 4.10.	$T_D=1$ integral içi fonksiyon grafiği.....	35
Şekil 4.11.	$T_D=1$ integral içi fonksiyon grafiği.....	35
Şekil 4.12.	$T_D=1$ integral içi fonksiyon grafiği.....	36
Şekil 4.13.	$T_D=2$ integral içi fonksiyon grafiği.....	36
Şekil 4.14.	$T_D=2$ integral içi fonksiyon grafiği.....	37
Şekil 4.15.	$T_D=2$ integral içi fonksiyon grafiği.....	37
Şekil 4.16.	$T_D=2$ integral içi fonksiyon grafiği.....	38
Şekil 4.17.	$t_D=1$, $n=3$, $(\lambda, a_D) = (1,1)$ için T_D yakınsaması.....	38
Şekil 4.18.	$t_D=1$, $n=3$, $(\lambda, a_D) = (0.01,2)$ için T_D yakınsaması.....	39
Şekil 4.19.	$t_D=10$, $n=10$ $(\lambda, a_D) = (0.01,2)$ için T_D yakınsaması.....	39
Şekil 4.20.	$t_D=1..10$, T_D değerleri 1.çözüm.....	41
Şekil 4.21.	$t_D=1..10$, T_D değerleri 2.çözüm.....	41
Şekil 4.22.	$t_D=1..10$, T_D değerleri 1. ve 2.çözümler.....	42
Şekil 4.23.	k_m/k için model çözümleri karşılaştırması.....	43
Şekil 4.24.	k_m/k için model çözümleri karşılaştırması.....	43
Şekil 5.1.	Orantılı duyarlılık dağılımı.....	46
Şekil 5.2.	Orantılı duyarlılık dağılımı.....	47
Şekil 5.3.	Orantılı duyarlılık dağılımı.....	47

Şekil 5.4.	Orantılı duyarlılık dağılımı.....	48
Şekil 5.5.	t_{Dn} aralığı orantılı duyarlılık dağılımı.....	48
Şekil 5.6.	t_{Dn} aralığı drantılı duyarlılık dağılımı.....	49
Şekil 5.7.	Gürültülü izleyici dağılımları.....	51
Şekil 5.8.	Gürültülü izleyici dağılımları.....	52
Şekil 5.9.	Gürültülü izleyici dağılımları.....	52
Şekil 5.10.	x_{Dn} boyunca izleyici derişim dağılımları.....	53
Şekil 5.11.	x_{Dn} boyunca izleyici derişim dağılımları.....	53
Şekil 5.12.	Gürültülü izleyici dağılımları ve güven aralıkları.....	54
Şekil 5.13.	Gürültülü izleyici dağılımları ve güven aralıkları.....	55
Şekil 5.14.	Akış hattı izleyici transfer dağılımları karşılaştırması.....	57
Şekil 5.15.	Üretim noktası izleyici transfer dönüşleri kıyaslaması.....	57
Şekil 5.16.	Akış sonu orantılı duyarlılık dağılımları.....	58
Şekil 5.17.	Akış sonu orantılı duyarlılık dağılımları.....	59
Şekil 5.18.	Akış hattı orantılı duyarlılık dağılımları.....	59
Şekil 5.19.	Akış hattı orantılı duyarlılık dağılımları.....	60
Şekil 5.20.	Gürültülü izleyici dağılımları ve güven aralıkları.....	61
Şekil 5.21.	Gürültülü İzleyici dağılımları ve güven aralıkları.....	61

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1	Orantılı duyarlılık için orantılı parametre ve örnek değerler.....	43
Çizelge 5.2	İzleyici yayılım modeli orantılı parametre ve örnek değerler.....	50
Çizelge 5.4	İzleyici yayılım modeli orantılı parametre ve örnek değerler.....	56

SİMGELER

a	matris bloğu sıcaklık değişimi gözlenmeyen sınır (m)
b	yarı çatlak genişliği (m)
c_m	matris özgül ısısı (J/kg.°C)
c_r	çatlak özgül ısısı (J/kg.°C)
c_w	Su özgül ısısı (J/kg.°C)
k_m	matris ısı iletkenliği (W/m.°C)
k	çatlak termal iletkenliği (W/m.°C)
x	akış doğrultusu mesafesi (m)
x_D	birimsiz akış doğrultusu mesafesi
T	çatlak sıcaklığı (°C)
T_i	enjeksiyon sıvısı sıcaklığı (°C)
T_0	rezervuar başlangıç sıcaklığı (°C)
T_D	birimsiz çatlak sıcaklığı (°C)
T_m	matris sıcaklığı (°C)
T_{mD}	birimsiz matris sıcaklığı (°C)
t_D	birimsiz süre
t_{Di}	birimsiz toplam enjeksiyon süresi
s	enjeksiyon süresi Laplace değişkeni, birimsiz
p	geri akış süresi Laplace değişkeni, birimsiz
u	çatlak akış hızı (m/h)
z	akış doğrultusuna dik mesafe (m)
z_D	birimsiz akış doğrultusuna dik mesafe
ϕ	çatlak gözenekliliği
ρ_m	matris yoğunluğu (kg/m ³)
ρ_r	çatlak yoğunluğu (kg/m ³)
ρ_w	jeotermal su yoğunluğu (kg/m ³)
λ, θ	boyuna ısı yayılım modeli için boyutsuz parametre tanımları
S_i	orantılı duyarlılık
P_i	model parametre değişkenleri
x_{Dn}	orantılı boyutsuz mesafe
t_{Dn}	orantılı boyutsuz süre
t_w	ısı taşınımı için karakteristik zaman (h)
t_m	boyuna ısı yayılımı için karakteristik zaman (h)
t_d	difüzyon için karakteristik zaman (h)
t_{pvi}	gözenekli hacim için gereken birimsiz enjeksiyon süresi, birimsiz

t_{Dm}	boyutsuz orantılı süre için ara parametre
x_{Dm}	boyutsuz orantılı mesafe için ara parametre
L	üretim enjeksiyon arası mesafe (m)
C_D	çatlak içi birimsiz izleyici derişimi
C	izleyici derişimi
C_m	matris bloğu izleyici derişimi
C_{mD}	matris bloğu birimsiz izleyici derişimi
D_m	matris bloğu için konveksiyon (izleyici difüzyonu) (m ² /h)
D	boyuna dispersiyon (izleyici yayılımı) (m ² /h)
T_y	yüzey sıcaklığı (K)
T_s	ortalama sıvı sıcaklığı (K)

1. GİRİŞ

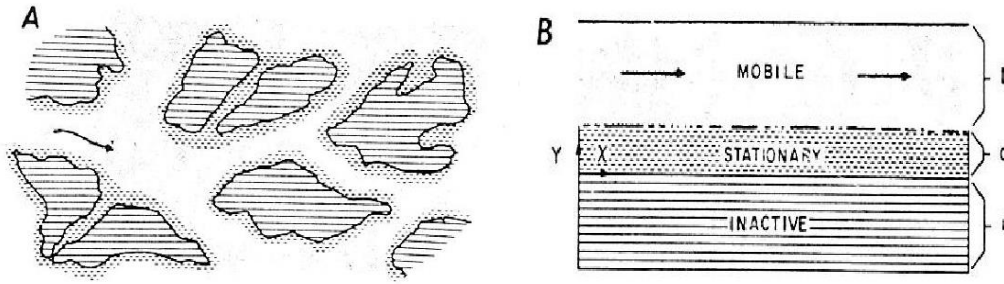
1.1. Amaç ve Kapsam

Jeotermal rezervuarlardan üretilen sıcak su ve buharın ısısı alındıktan sonra jeotermal rezervuarlara tekrar enjekte edilmesi , bu suların atılımı ve rezervuar basıncının takviyesi için dünya çapında yaygın olarak uygulanan ekonomik bir yöntemdir (Pruess ve Bodvarsson 1984, Shaik vd. 2011, Juliusson ve Horne 2013, Suzuki vd. 2014, Ascencio vd. 2014). Bu çalışmanın amacı çatlaklı jeotermal rezervuarlarda geri enjeksiyon sırasında gelişen veya sıcak susuz jeotermal alanlarda ısı kurtarım için soğuk su enjeksiyonu sırasında gelişen ısı yayılımı için yeni analitik çözümler geliştirmektir.

Geri enjeksiyon boyunca ısı taşınımı modellenmesi; enjeksiyonun yapıldığı an ve şartlar itibariyle ve ilerleyen süreç ve olası şartlar içerisinde etkilerinin değerlendirilmesinde , hesaplanmasında ve ayrıca ısı cephesi hareketinin enjeksiyon şartlarının optimizasyonu ile kontrol edilmesinde oldukça önemlidir.

Doğal çatlaklı rezervuarların idealize edilmiş jeolojik modellenmesi şu şekilde sınıflandırılabilir. 1. Ana ayrık çatlakların yer aldığı geçirimsiz matris. 2. Bir çatlak ağının yer aldığı geçirimsiz matris. Ana ayrık çatlaklar ise 1. Tek bir fay veya ana çatlak, 2. Birden fazla ama sınırlı sayıda ana ayrık çatlak 3. Sonsuz sayıda paralel ana ayrık çatlak olarak üç alt grupta ele alınabilir. Bir çatlak ağı oluşturan matrisler ise iki alt grupta toplanabilirler. 1. Biri çatlak ağı diğeri matris bloklarından oluşan iki çakıştırılmış (superposed) süreç (continuum) 2. Sonsuz sayıda ayrık paralel çatlak içerem matris. Doğal çatlaklı jeotermal rezervuarlar, düşük geçirgenlikli matris bloklarından oluşan bir çatlak ağı şeklinde değerlendirilebilirler. Bu tip bir yapının idealize edilmiş hali sonsuz sayıdaki paralel çatlakların sabit kalınlıktaki matrislerle birbirinden ayrılması şeklindedir. Aynı paralel ayrık çatlaklar modeli sıcak kuru kayalarda ısı kurtarım için oluşturulan yapay çoklu paralel çatlaklar için de kullanılabilir.

Sonsuz sayıda paralel ayrık çatlaklı jeolojik model için, çatlak boyunca sıcak su akışının ve matris sonlu bir bloğunda ise akışa dik bir ısı iletiminin farzedildiği jeotermal rezervuar modellerinin gerçek uzayda analitik çözümleri yetmişli yılların sonlarında geliştirilmiştir. Skoop ve Warrick (1974) yaklaşımı olarak isimlendireceğimiz bu yalın akış-dik ısı iletimi modeli aslında gözenekli ortamda çözelti ve kimyasal izleyici taşınımı için geliştirilmiş ve ısının da özel bir izleyici olması nedeniyle çatlaklı jeotermal rezervuarlarda ısı taşınımı için kullanılabilirliği mümkün olmuştur. Şekil 1.1 gözenekli ortamda çözelti ve izleyici taşınımının Skoop ve Warrick tarafından nasıl idealize edilip paralel akış kanalları olarak modellendiğini göstermektedir. Oldukça basit bir fiziksel model olmasına rağmen, bu model için geliştirilen Skoop ve Warrick analitik çözümünün yüksek fonksiyonlar ve ikili sayısal integral hesaplanmasını gerektirmesi dikkat çeken bir zorluk olarak süregelmiştir. Dikkat çeken bir başka nokta ise neredeyse eşzamanlı olarak yayınlanan doğal çatlaklı rezervuarlarda (Pruess ve Bodvarsson, 1984) ve sıcak kuru kayalar rezervuarlarında (Gringarten vd. 1975) ısı taşınımını modelleyen çalışmalarda çözüm sadece Laplace uzayında verilmiş ve hesaplamalar için sayısal Laplace ters dönüşüm algoritmaları kullanılmak zorunda kalmıştır.



Şekil-1.1 : Skoop ve Warrick çözelti ve kimyasal izleyici taşınımı modeli ; A- Gerçek, B- İdealize
Mobile: Akış hattı, *Stationary*: Durağan hat, *Inactive*: Etkisiz hat (Skoop ve Warrick, 1974)

Buna ek olarak çatlak boyunca yalın akış ve hidrolik ısı yayılımı (dispersion) matriks bloğunda ise akışa dikey bir ısı iletiminin farzedildiği biraz daha değiştirilmiş bir sistem (Tang vd. 1981 ve Suducki ve Frind 1982) günümüze kadar sadece Laplace uzayında sunulmuş (Barker 1982; West 2004; Chen 1986) ve çözümlerin hesaplanması için sayısal dönüştürücüler kullanılmıştır (Stehfest 1970 ; Dubner ve Abate 1968 ; Dehoog vd. 1982). Yalnızca Laplace uzayında verilen ve sayısal ters Laplace dönüşüm algoritmalarıyla hesaplanabilen bu çözümler yarı analitik çözümler olarak adlandırılırlar.

Bu çalışmanın kapsamı iki aşama olarak belirlenmiştir. İlk aşamanın ilk adımında paralel çatlaklı rezervuar modeli için yalın akış-dikey ısı iletimi modeli tekrar ele alınacak ama Skoop ve Warrick çözümünden çok daha basit ve çok daha etkin bir yeni çözüm geliştirilecektir. Bu çözüm ilerleyen bölümlerde birinci akış modeli olarak anılacaktır. İkinci adım olarak ise şimdiye kadar sadece Laplace uzayında çözüm üretilebilen hidrolik ısı yayılımının da gözönüne alındığı akışmodeli için İteratif Laplace dönüşümü yöntemi kullanılarak yeni iki kapalı analitik çözüm (gerçek uzayda) geliştirilecektir. Bu çözümler ise ilerleyen bölümlerde ikinci akış modeli çözümleri olarak anılacaktır.

İkinci aşamada ise bu modellerin doğrusal olmayan regresyon yöntemi ile saha deney verileri kullanılarak parametre değer tahminleri (kestirimleri) yapılacaktır. Bu kestirilmiş değerleri kullanarak hem tekrar basma hem de susuz jeotermal alanlara da ısı kurtarım projeleri daha sağlıklı tasarımlanabilecektir.

1.2. Kaynak Araştırması

Kaynak araştırmasını, paralel çatlaklarda ısı transferi, akiferlerde duyarlı ısı depolanması, gelişmiş/ileri jeotermal sistemlerde (susuz sıcak kayaç sistemleri) ısı kurtarım, jeotermal rezervuarlarda ısı taşınımı denklemlerinin analitik çözümleri olmak üzere beş ayrı konu başlığında sınıflandırmak mümkündür. Bu konularda yapılmış ilgili çalışmalar aşağıda verilmiştir.

1.2.1. Paralel Çatlaklarda Isı Transferi

Paralel ayrı çatlaklarda ısı transferi konusundaki çalışmalar sıcak kuru kayalardan ısı kurtarım (Gringarten vd. 1975) ve jeotermal rezervuarlarda geri-basım işleminin ısı etkilerini araştırma (Bodvarsson ve Tsang 1982) amacıyla başlamış olup günümüzde de devam etmektedir. Mohais vd. (2011) geçirgen duvarlı paralel çatlak boyunca ısı ve akışkan taşınımı için oluşturdukları analitik model üzerinde çalışmışlardır. Bu çalışmalarında İleri jeotermal sistemlerde hidrolik çatlak ile oluşan çatlaklar için sıklıkla

ön kabulü yapıla gelen geçirimsiz duvar yerine değişken geçirgenlikli çatlak duvarlarına göre model uyarlanmıştır.

Ekneligoda ve Ki-Bok (2013) çalışmalarında optimum üretim sıcaklık parametrelerini tespit için yatay çatlaklı bir jeotermal rezervuarda analitik ve sayısal ısı transfer modellerini kullanmışlardır. Modellerinde Çatlak boyunca ısı taşınımı geçirimsiz kayaç da ise akış yönüne dik ısı iletimi kabulleri yapılmış, ısı yayılım denklemleri yayılım ve iletim için birbirinden bağımsız oluşturulmuştur.

Hao vd. (2013) çalışmalarında ikili sürekli bir çatlaklı jeotermal rezervuar modeli için akışkan ve ısı yayılımı simülasyonunu ele almışlardır. Modellerinde çatlak boyunca ısı yayılımı , geçirimsiz kayaç da ise akış yönüne dik ısı iletimi kabulleri yapılmış, matris ve akışkan ortamı için iki ayrı enerji korunum denklemi türetilerek sayısal çözümü yapılmıştır.

Luo vd. (2014) CO₂ ile ikili (üretim-enjeksiyon) ileri jeotermal sistemlerde ısı ve akış transferi için geliştirdikleri modelin sayısal analizi üzerinde çalışmışlardır. Modelleri, birbirine paralel farklı geçirgenlikteki jeotermal kayaçlar ve bunları birbirinden ayıran paralel çatlaklardan oluşur. Enjeksiyon sıvısı olarak CO₂ kullanılan modelde farklı enjektivite değerleri ve farklı bölgeler için farklı senaryolara göre sıcaklık/zaman grafikleri oluşturulmuştur.

Zhihong (2014) çalışmasında ısı transferi parametreleri tespiti için kayaç –granit-çatlakları içersindeki kararlı ısı taşınım denklemlerinin çözümlerini kullanarak bir çalışma yapmış ve bu çalışmada teorik ve deneysel verileri karşılaştırmıştır.

1.2.2. Akiferlerde Duyarlı Isı Depolanması

Akiferlerde duyarlı ısı depolanması konusundaki çalışmalar Paris havzasında yer alan akiferlerin bu amaçla kullanılması için yapılan deneylerle başlamış (Sauty vd. 1978 ve Sauty vd 1982) olup günümüzde de devam etmektedir.

Palmer vd. (1992), Rosen (1999) ,Chevalier ve Banton (1999) gözenekli akiferlerde ısı enerjisi depolaması uygulaması konusunda çalışmışlardır. Çalışmalarında gelişi-güzel adım yöntemi ile sayısal olarak çözülen ısı iletim-yayılım modeli , sabit enjeksiyon ve enjeksiyon-üretim döngüsü için analitik çözümler ile kıyaslanmıştır.

Dickinson vd. (2009) akifer ısı enerjisi depolaması konusunda teorik ve uygulamalı analizler yapmışlardır. Çalışmalarında mevsimsel sıcaklık döngüsü kullanılarak yapıların soğutulması ve ısıtılması için yer altı suyu kapalı akiferde ısı enerjisi depolaması amaçlanmıştır.

Kim vd. (2010) akifer ısı enerjisi depolaması sayısal modellemesi konusunda çalışmışlardır. Üç boyutlu ısı-hidrolik bu model ile enjeksiyon-üretim noktaları arasındaki uzaklık , enjeksiyon-üretim debileri ve hidrolik iletim arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Kocabaş ve Küçük (2011) akiferlerde duyarlı ısı enerjisi depolaması modellemesi konusunda çalışmışlardır. Modellerinde akış hattında sonsuz yatay iletim ve matriste sabit iletim farzedilmiş, oluşturulan yayılım denklemlerinin analitik çözümlemesi yapılmıştır.

Socacio (2011) dönemsel duyarlı ısı enerjisi depolama çözümleri konusunda çalışmıştır. Bu çalışma farklı dönemsel ısı enerjisi depolaması seçeneklerini ve bunların birbirine göre göreceli avantaj-dezavantajlarını konu edinmiştir.

Vandenbohede vd. (2011) sıg ısı enjeksiyonu ve depolaması deneyi ile ısı yayılım simülasyonu ve duyarlılık analizi üzerinde çalışmışlardır. Modellerinde SEAWAT (version 4) programı kullanılarak ısı yayılım-iletim aktarım denklemi (Thorne, 2006) ile canlandırma yapılmış ve bu sonuçlar deneysel sonuçlarla farklı senaryolar için karşılaştırılmıştır.

Xu vd. (2013) dönemsel ısı enerjisi depolaması için uygun teknolojiler konusunda çalışmışlardır. Bunlar üç grup : duyarlı ısı depolaması , latent ısı depolaması ve kimyasal depolama , halinde değerlendirilmiştir.

Sommer vd. (2014) akifer ısı enerjisi depolamasında ısı performansı ve ısı transferi konusunda çalışmışlardır. Çalışmalarında yedi yıllık enjeksiyon ,üretim akış debileri ve sıcaklık kayıtları sayesinde detaylı bir termal enerji depolaması ve kullanımı analizi yapılmıştır.

1.2.3. Gelişmiş/İleri Jeotermal Sistemler de (Susuz Sıcak Kayaç Sistemleri) Isıl

Kurtarım

Yine yaklaşık kırk yıl önce başlayan sıcak kuru kayaçlardan ısıl kurtarım amaçlı çalışmalar (Gringarten vd. 1975) bugünde tüm hızıyla devam etmektedir.

Pierce (2010) jeotermal enerji kaynakları konusunda çalışmıştır. Çalışmalarında 1997-2009 yılları arasında Birleşik Devletlerin Jeotermal enerji –ileri jeotermal sistemler-kullanımı ve gelişimi detaylı araştırılmıştır.

Zaigham ve Nayyar (2010) Pakistan‘ın yenilenebilir susuz sıcak jeotermal kayaç kaynağı ve potansiyeli üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında son 22 yıl içersinde kazılan petrol ve gaz kuyuları verileri kullanılarak potansiyel jeotermal kaynaklar araştırılmıştır.

Feng vd. (2012) çalışmalarında Yangbajing baseninde (Çin) yer alan susuz jeotermal kayaç kaynağının geliştirilmesi üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında bir adet enjeksiyon ve iki adet üretim kuyusu tasarımı ile yatırım-kazanç analizi yapılmıştır.

Zeng vd. (2013) çalışmalarında tek bir dikey susuz jeotermal kuyusundan su sirkülasyonu ile ısı kazanımının sayısal simülasyonunu incelemişlerdir. Çalışmalarında 20 yıllık bir enjeksiyon-üretim döngüsünde bazı sistem parametreleri için duyarlılık analizleri de yapılmıştır. Sayısal simülasyon için TOUGH2 kodu (LBNL) kullanılmıştır.

Hofmann vd. (2014a) petrol kumlarından petrol üretimi aşamalarında kullanılan suyun ısıtılmasında ileri jeotermal sistem kullanımı konusunda çalışmışlardır. Çalışmalarında petrol kumlarından petrol ayrıştırılması işlemlerinde gereken sıcak su ihtiyacı için saha yakınındaki granit kayaçların farklı hidrolik çatlatma senaryoları ile ileri jeotermal sistemler karşılaştırılmış ve ekonomik analizleri yapılmıştır.

Hofmann vd. (2014b) Kanada Alberta sahası gelişmiş jeotermal sistemleri potansiyeli üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında saha civarındaki olası uygun formasyonlar için hidrolik çatlatma ile ileri jeotermal kazanımlar analiz edilmiştir.

Chamorro vd. (2014) Avrupa ileri jeotermal sistemlerinin teknik ve yeterlilik potansiyelleri üzerine karşılaştırmalı bir değerlendirme üzerinde çalışmışlardır.

Çalışmalarında Türkiye de dahil olmak üzere Avrupa ülkelerinin yeraltı sıcaklık profilleri tesbit edilerek ileri jeotermal sistemler ile elde edilebilecek enerji kazanımları analiz edilmiştir.

1.2.4. Jeotermal Rezervuarlarda Soğuk Su Geri Basılması ve Isı Taşınımı

Jeotermal rezervuarlarda teorik ısı taşınımı çalışmaları temellerini petrol rezervuarlarına yapılan ayrık-sıcaklıklı su basımı çalışmalarından (Lauwerier, 1955, Avdonin, 1964 and Spillette, 1965) alır. Bu çalışmalar daha sonra jeotermal rezervuarlarda geri-basım (Pruess ve Bodvarsson 1984) ve sıcak kuru kayaçlardan ısı kurtarım çalışmalarıyla (Gringarten vd 1975) devam etmiş ve günümüzde de sürmektedir.

Shaik vd. (2011) doğal çatlaklı rezervuar sisteminde ısı transferi için sayısal simülasyon üzerinde çalışmışlardır. Modellerinde bir adet enjeksiyon ve bir adet üretim kuyusundan oluşan bir sistem için rezervuar sıcaklık ve basınç değişim profilleri zaman ve konum için sayısal yöntemler ile hesaplanmıştır.

Fox vd. (2013) çalışmalarında çatlaklı jeotermal rezervuarlarda üretim ve ısı yayılımı modellemesini kullanmışlardır. Çatlak boyunca ısı yayılımı ve akış yönüne dik olarak kayaçta ısı iletiminin farzedildiği birbirine paralel çatlak ve çatlaklar için oluşturulan modellerin denklemleri; tek çatlak için analitik, çoklu çatlak sistemi için sayısal olarak – TOUGH2- çözülmüş ve sıcaklık-zaman profilleri oluşturulmuştur.

Juliusson ve Horne (2013) çatlaklı jeotermal rezervuarlarda enjeksiyon profili optimizasyonu üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında ısı yayılımı için Lauwerier (1955) formülünü kullanarak iki ayrı çatlaklı yapı modeli için üretim-enjeksiyon ileri jeotermal sistemleri için ekonomik analizler yapılmıştır.

Suzuki vd. (2014) çatlaklı jeotermal rezervuarlarda su enjeksiyonu analizi üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında çatlakları çevreleyen jeotermal kayaçlardaki geçirgenliğin sıcaklık profillerinde oluşturduğu değişim –TOUGH2- sayısal yöntemi kullanılarak gözlenmiştir.

Ascencio vd. (2014) çalışmalarında doğal çatlaklı jeotermal rezervuarlara soğuk su basılması ile oluşan ısı transferi üzerinde Lauwerier (1955) ve Bodvarsson ve Tsang (1982) modellerinin kombinasyonu bir teorik model oluşturarak çalışmışlardır. Modellerinde farklı enjeksiyon sürelerinde kimyasal/ısı cephe hareketi için eğriler oluşturulmuştur.

1.2.5. Isı Taşınım Denklemlerinin Analitik Çözümleri

Jeolojik modellemelerle paralel şekilde ilerleyen analitik çözümler Lauwerier (1955) ile başlamış Skoop ve Warrick (1974) , Roberts (1980) ve Chen (1986) ile devam etmiştir.

Massabo vd. (2006) silindirik geometride iki boyutlu yayılım-iletim denklemi analitik çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında Bessel fonksiyonu, Fourier dönüşümü ve Laplace dönüşümleri kullanılmıştır.

Guerrero vd. (2009) değişken değiştirme ve integral dönüşümü teknikleri kullanımıyla yayılım-iletim denklemi analitik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında genel integral dönüşüm metodunun klasik versiyonu ile analitik çözümlere gidilmiştir.

Guerrero ve Skaggs (2010) çalışmalarında mesafe bağımlı değişkenli tek boyutlu yayılım-iletim taşınım denklemi analitik çözümünü ele almışlardır. Çalışmalarında analitik çözümler için integral faktörü ile genel integral dönüşüm tekniği kullanılmıştır.

Kumar vd. (2010) yarı sonsuz ortamda -değişken katsayı- tek boyutlu yayılım-iletim denklemi analitik çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Çözümlemede Laplace dönüşüm tekniği kullanılmıştır.

Jaiswal vd. (2011) bağımsız katsayılı tek boyutlu yayılım-iletim denklemi analitik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Çözümlemede Laplace dönüşüm tekniği kullanılmıştır.

Chen vd. (2011) çalışmalarında silindirik koordinatlarda sonlu alanda iki farklı giriş sınır koşulları için iki boyutlu yayılım-iletim denklemi analitik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında sonlu Hankel dönüşümü ve genel integral dönüşüm metodu kullanılmıştır.

Chen vd. (2011) çalışmalarında farklı bir giriş sınır koşullu silindirik koordinatlarda iki boyutlu konveksiyon-dispersiyon taşınım denklemi tam analitik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında Laplace dönüşümü ve genel integral dönüşüm metodu kullanılmıştır.

Ziskind vd. (2011) atımlı sınır koşullu sonlu bir bölgede yayılım-iletim reaksiyon denklemi analitik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında Laplace dönüşümü ve kompleks form ve kalıntı teorisini temel alan ters dönüşümler kullanılmıştır.

Guerrero vd. (2013) tabakalı ortamda yayılım-iletim denklemi analitik çözümü konusunda çalışmışlardır. Çözümlemede klasik integral dönüşüm metodunu kullanmışlardır.

Atangan ve (2013) yayılım-iletim denklemi uzay-zaman kısmi türevi analitik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında kısmi türevler Riemann-Liouville kısmi türevlerine evrilmiş (Zeng ve Qin ,2012) ve ulaşılan Mittag-Leffler fonksiyonları (Miller ve Ross, 1993) Laplace dönüşümleri ile çözümlenmiştir.

Genuchten vd. (2013) nehirlerde atık taşınımında yayılım ve iletim denklemi tam analitik çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında değişken dönüşümleri ve Laplace dönüşümlerini kullanmışlardır.

Povstenko (2014) iki boyutlu uzayda yayılım iletim denklemi temel çözümleri üzerinde çalışmıştır. Çalışmalarında zaman değişkeni için Laplace integral dönüşümü, konum değişkenleri için Fourier dönüşümleri kullanılmıştır.

Kocabaş ve Bülbül (2014) paralel çatlaklı jeotermal sistemlerde izleyici yayılımı için iteratif Laplace dönüşümü odaklı yayılım iletim denklemi analitik çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında analitik çözümlerin duyarlılık ve regresyon analizlerine de yer vermişlerdir.

1.3. Materyal ve Yöntem

Bu çalışmada öncelikle jeotermal sahalarda doğal çatlaklı rezervuarlarda oluşması muhtemel çatlak yönelimleri açıklanacaktır. Bir başka deyişle neden diker yönelimli

çatlakların oluşması gerektiği temellendirilecektir. Daha sonra bu dikey yönelimli çatlaklar içeren rezervuarlarda çatlaklar ve içinde yer aldıkları matrislerin akış özelliklerinden jeolojik kavramsal modeller tanımlanacaktır. Yine bu kavramsal jeolojik modeller içinde gelişen muhtemel akış-taşınım mekanizmaları tanımlanacaktır. Bu tanımlara uygun olarak matematik denklemler geliştirilecek ve/veya geçmiş çalışmalardan alınacaktır. Son olarak matematik denklemler için özellikle integral dönüşümleri ve iteratif Laplace dönüşümleri kullanılarak yeni analitik çözümler üretilecektir.

Çatlaklı jeotermal rezervuarlarda (doğal çatlaklı veya yapay çatlaklı) ısı taşınımını tanımlayan matematik modellerin (denklemlerin) geliştirilmesinde ortak bazı ön kabuller yapılacaktır. Doğal ana çatlaklar veya faylar tektonik hareketlerin sonucunda oluştuğu (Dickson ve Fanelli 1995), yapay çatlaklar ise hidrolik çatlaklar (Petroleum Engineering Handbook, 2007) yoluyla 300 m. derinlikten daha fazla derinde oluşturuldukları için bütün çatlaklar dikey çatlaklardır. Ayrık çatlaklar arasında kalan matris blokları akışa geçirimsiz ve eş-genişlikte olup rezervuar ısı haznesi olarak işlev görürler. Her bir çatlakta tek fazlı, kararlı, sıkıştırılmaz ve değişken sıcaklıklı bir akış vardır. Geçirimsiz matriste ise sadece çatlak boyunca akış yönüne dik ısı iletimi gerçekleşir. Her bir çatlak içinde akışa dik yönlü ısı yayılımı sonsuz hızda kabul edilir ve çatlak içinde sıcaklıkları hızla eşitler. Diğer bir deyişle çatlak genişliği boyunca sıcaklık değerleri eşittir. Matris blokları ve onlara bitişik çatlaklar arasındaki ısı alışverişi sadece matris-çatlak kesişim yüzeyinde oluşur.

Oluşturulan ısı yayılım denklemleri boyutsuz parametreler tanımlanarak boyutsuz denklemlere dönüştürülmüştür. Bu çalışmada gözönüne alınan her iki jeolojik modeli için jeotermal rezervuarın sabit kalınlıktaki matrislerle birbirinden ayrılmış paralel çatlaklardan oluştuğu varsayılır.

Birinci modelde yalın akış ve akışa dik ısı iletimi varsayılır ve bu model için seri toplam metodu ve ikili Laplace dönüşümü ile yeni ve etkin bir çözüm türetilmiştir. Bu çözüm Skopp ve Warrick çözümü ile ve sayısal ters Laplace dönüşüm algoritmalarıyla hesaplanan çözümlerle sonuçların doğruluk derecesi, hesaplama hızı, çözümlerde yer alan ifadelerin fiziksel anlamları açısından karşılaştırılmıştır.

İkinci modelde ise birinci modeldekine ek olarak çatlak içinde boyuna ısı yayılımı (hidrolik dispersion) varsayılır. Bu model için ise iki ayrı analitik çözüm geliştirilmiştir. Bunlardan ilkinde Skopp ve Warrick ters dönüşüm sonuçları ve iteratif Laplace dönüşümü birlikte kullanılmış; ikincisi için ise Fourier Sine dönüşümü, seri toplam metodu ve iteratif Laplace dönüşümü ile çözüm türetilmiştir. Bu iki çözümden ikincisinin hesaplama hızı ve çözümlerde yer alan ifadelerin fiziksel anlamları açısından çok daha ileri olduğu görülmüştür.

Tüm çözümlerin doğruluğunu test için ilk aşamada ilk ve sınır değerler çözümler üzerinde denenmiştir. Sonrasında Matlab ortamında oluşturulan program ve fonksiyonlar ile belirli bir hata payının/toleransın üstüne çıkmayacak şekilde çözümlerin belli değerlere yakınsaması gözlemlenmiştir.

Bu analitik çözümde ortaya çıkan yarı-sonsuz integrallerin ve sonsuz toplamaların yakınsaması ayrıca incelenmiştir. Çözümde ortaya çıkan her türden integral, türev ve toplam fonksiyonları için ayrı ayrı Matlab kodları yazılmıştır. İntegral hesaplama kodlarında Yamuk yöntemine göre yazılım geliştirilmiştir. Kabul edilebilir maksimum Tolerans 10^{-7} olarak alınmıştır.

Olası yazılım hatalarının bulunmadığı ise Matlab Invlap fonksiyonu ile Laplace uzayı çözümlerinin sonuçlarının çakışmasıyla teyid edilmiştir.

Her iki rezervuar modelinin çözümleri belli toleranslar ile doğrulandıktan sonra kullanım/yazılım kolaylığı, düşük hata payı, çabuk yakınsayan ve hızlı olan çözümler seçilmiştir. Seçilen çözümler ile çatlakda boyuna ısı iletimi varsayımını etkisi farklı senaryolar ile test edilmiştir.

Çözüm aşamalarında ‘Tamamlayıcı Hata ve Hermit’ fonksiyonları kullanılmıştır. (Matlab Hata fonksiyonu hesaplama toleransı 10^{-7} civarındadır)

Yakınsama, yaklaşımlar ve toleranslar için görsel/grafiksel analizler yapılmıştır.

Hesaplama süreleri de en az çözümler kadar belirleyici olabildiğinden çalıştırılan tüm Matlab program ve fonksiyonlarının hesaplama süreleri de programlarla birlikte değerlendirilmiştir.

Ayrıca model analitik çözümlerinin duyarlılık analizleri (çözüm fonksiyonlarının değişken parametrelere göre türevlerinin alınması yoluyla) yapılmış ve son olarak her iki model çözümleri (gürültülü veri kullanımı ile doğrusal olmayan regresyon analizleri için) izleyici konsanstrasyonu dağılımına göre de düzenlenmiş ve kullanıma sunulmuştur.

1.4. Tez Eseri'nin Önemi

Jeotermal rezervuarlardan üretilen suyun yine aynı rezervuarlara geri enjeksiyonu nedeniyle oluşan ısıl kirlenme (burada ısıl kirlenme ile üretim sıcaklığının düşmesi kastedilmektedir) önemli bir ekonomik problemdir. Ayrıca susuz jeotermal sahalarda ısıl kurtarım için tek yöntem sahaya sıcak su basma ve bir yapay çevrim oluşturma şeklinde uygulanmaktadır. Ancak yetersiz bir soğuk su geri-basma sistem tasarımı ve/veya ısıl kurtarım çevrim dizaynı üretim kuyularından erken soğuk su üretimini de beraberinde getirebilecektir. Bu nedenle çatlaklı jeotermal rezervuarlarda ısı yayılım mekanizmalarının iyi anlaşılması büyük ekonomik ve teknik önem taşımaktadır.

Gözenekli ortamda analitik yayılım modelleri, temel taşınım mekanizmalarının kavranmasında oldukça öğretici bir rol oynarlar. Analitik modeller ayrıca parametrelerin duyarlılık analizlerinin yürütülmesinde ve parametrelerin kollektif rollerinin belirlenmesinde de boyutsuz parametre gruplarının tanımlanması yoluyla rol alırlar. Son olarak analitik modellerin diğer önemli bir işlevi ise sayısal modeller için bir referans noktası olmalarıdır.

Tekrar basma operasyonlarının tasarımı üç parametrenin en doğru şekilde saptanmasını gerektirir. Bunlar enjeksiyon debisi, üretim ve enjeksiyon kuyu çiftleri arasındaki mesafe ve beklenen soğuk su üretim zamanı (yani projenin ömrü) şeklindedir. Bu parametreler ise uygun ve etkili jeotermal modeller yardımıyla tesbit edilmektedir. Bu çalışmanın da bu amaçlara hizmet etmesi ve çalışılan model ve çözümlerinin endüstride kullanılacağı öngörülmektedir.

Gözenekli ortamda akış ve taşınmanın modellenmesi pratik veya teorik alanda çözülmesi gereken önemli bir problemdir. Çünkü bu modeller petrol, doğal gaz, yeraltısu ve jeotermal rezervuarlarda izleyici, çözelti ve ısı taşınmasının anlaşılması ve

yorumlanmasında kullanılırlar. Bu çalışmada jeotermal rezervuarlarda geri basım operasyonlarının tasarım ve tahmininde kullanılacaktır.

Bu problem üzerine basitten karmaşığa doğru değişik kavramsal jeolojik modeller geliştirilmiş ve bu modellerde yine basitten karmaşığa doğru akış ve taşınım yaklaşımları kullanılmıştır. Jeolojik modeller önce ayrık ana çatlak modelleri ve çakıştırılmış çatlak ağı ve geçirimsiz matris süreç modelleri olarak iki ana sınıfa ayrılabilir. Ayrık çatlak modelleri ise tek çatlaklı ve paralel çatlaklı olmak üzere iki çeşittir. Akış ve taşınım modelleri ise önce uzay boyutuna göre tek boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu olmak üzere önce üçe ayrılırlar. Yine her bir boyut için de yalın akış ve çatlak matris etkileşimi ve akış, boyuna ısı yayılımı ve çatlak matris etkileşimi olmak üzere iki genel kısma ayrılabilir (bkz. Şekil 2.1). Bu çalışmada paralel çatlaklı jeolojik model içinde tek boyutlu akış sisteminin alt akış modelleri ele alınmıştır.

Geçmiş çalışmalarda jeolojik ve akış modellerin çözümleri genl olarak analitik, yarı analitik ve sayısal çözümler olarak üç alanda geliştirilmiştir. Tek çatlaklı jeolojik model için farklı yaklaşımlarla analitik ve yarı analitik çözümler geliştirmiştir (Chen 1986, De Smedt 1981, Kocabaş 2011). Paralel çatlaklı jeolojik modelin yalın akış sistemi için Skopp ve Warrick (1974), yalın akış ve boyuna ısı yayılımı sistemi için Chen (1986) analitik çözümler geliştirmiş ancak çoğunlukla yarı analitik çözümler tercih edilmek durumunda kalmıştır (Barker, 1982).

Yukarıda belirtilen analitik ve yarı analitik çözümlerin çoğunun üç engeli bulunmaktadır. Bunlar fiziksel olayların anlamını içeren terimlerin ayrımının olanaksızlığı , çoklu integraller gerektirmeleri dolayısı ile hesaplama zorluğu ve tek boyutta ortaya çıkan karmaşık ifadelerin iki veya üç boyuta taşınmasının imkansızlığı ve daha gerçekçi problemlerin çözümüne katkı sağlayamamaları şeklindedir. Bu çözümlerin bu açılardan geliştirilmeleri önemlidir.

2011 yılında Kocabaş bu tek boyutlu ve diğer başka iki boyutlu modeller için hem fiziksel anlamını koruyan hem hesaplama kolaylığı sağlayan hem de iki ve üç boyuta taşınmalarına imkan veren iteratif Laplace dönüşümünü odağına alan bir seri çözüm yayınlamıştır (Kocabas (2011a), Kocabas (2011b), Kocabas ve Küçük (2011), Küçük ve Kocabas(2011)). Ancak bu çözümlerin önemli bir kısmı sayısal hesapları yapılmadan bırakılmıştır, iteratif Laplace dönüşümünde ise daha karmaşık ifadelere yolaçan Skopp and Warrick yaklaşımının kullanılması da bir engel olarak görülebilir..

Bu çalışma yukarıda yayınlanan çözümlerin belirtilen engellerini ortadan kaldıran, paralel çatlaklı model için her iki akış ve taşınım yaklaşımı açısından geliştirilen üç ayrı yeni analitik çözümü içermektedir.

İlk çözüm yalın akış ve çatlak matris etkileşimi için ikili Laplace dönüşümü ve binom serisi açılımı ile Skopp ve Warrick çözümünden daha sade ve daha kolay hesaplanabilen bir ifadedir. İkinci çözüm yalın akış, boyuna ısı yayılımı ve çatlak matris etkileşimi için geliştirilen ve Skopp ve Warrick dönüşümünü iteratif Laplace dönüşümü ile birleştiren bir ifadedir. Bu çözümü Kocabaş 2011 de yayınlanmış ancak çözüm hesaplamaları bu çalışmada gerçekleştirilmiştir. Üçüncü çözüm ise yine yalın akış, boyuna ısı yayılımı ve çatlak matris etkileşimi için iteratif Laplace dönüşümü ile Binom serisi açılımını esas alan yeni sade ve hesaplaması kolay olan bir ifadedir.

2. TEORİ

2.1. Jeotermal Rezervuarlarda Isı Transferi Mekanizmaları

Herhangi bir fiziksel sistemde ısı, iletim (kondüksiyon), akışkanla-taşınım (konveksiyon), radyasyon ve hidrolik yayılım (dispersion) yoluyla olmak üzere dört yolla taşınmaktadır. İletim yoluyla (kondüktif) ısı yayılımı ısının herhangi bir taşıyıcı ajan olmaksızın sıcaklık gradyanına bağlı olarak doğrudan iletimidir. Akışkanla-taşınım yoluyla (konvektif) ısı taşınımı ise bir akışkan hareketi ile taşınımır. Radyasyon (yayınım) ise, bir kütlenin sıcaklığından dolayı yaydığı enerjidir. Hidrolik yayılım ise ortamdaki vektör-hız (velocity) farklılıkları ile difüzyon ısı iletiminin birlikte neden olduğu bir mekanizmadır.

Isı iletimi (kondüksiyon), moleküler titreşim nedeniyle komşu moleküllerin çarpışması yoluyla ortaya çıkan ısı aktarımıdır. İletim yoluyla ısı aktarımı, sıcaklık farklılığının bir sonucudur. Sıcaklığın yüksek olduğu yerden düşük olduğu yere ısının yayılım yoluyla iletimi Fourier yasası ile ifade edilir. Yasa, birim zamanda bir tabaka boyunca olan ısı akışı miktarının, sıcaklık farkının gradyanına olan oranıdır. Bu kanunla kapalı bir şekilde ortaya çıkan orantı sabiti ise ısı iletim katsayısı (k) adını alır.

$$\frac{dQ}{dt} \approx -kA \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

Genel anlamıyla akışkanla-taşınım (konveksiyon) , sıcak suyun hareketiyle ısının taşınımıdır. Jeotermal sistemlerde genellikle akışkanın hareketine bağlı olarak ısı taşınımı meydana gelir. Taşınım ile ısı transferi Newton Soğurma Kanunu ile formüle edilir. Bu formülde J ısı akışı (watt/m²) , h ısı transfer katsayısı (w/m²-K) sıcaklıklar ise yüzey ve ortalama sıvı sıcaklığı (K) şeklindedir.

$$J = h(T_y - T_s) \quad (2)$$

Jeotermal rezervuarlarda taşınım bu anlamıyla değil akışkanın sahip olduğu enerjiyi akışdan dolayı kütle taşınımı ile taşınması olarak kabul edilir. Bu anlamda taşınım veya konveksiyon teriminin matematik ifadesi aşağıdaki şekilde verilir:

$$J_c = \rho c u \frac{dT}{dx} \quad (3)$$

Diğer bir ısı yayılım mekanizması ise difüzyon dur. Moleküllerin kinetik enerjileri sebebiyle çok yoğun bir bölgeden az yoğun bir bölgeye hareketleri olarak tanımlanabilen difüzyon Fick'in 1. ve 2. Kanunu olarak formüle edilmiştir. Sıcaklıkların sabit olduğu iki ortam arasındaki akı ya da ısı enerjisi için uygulanan 1. Kanun (4) aşağıdaki denklemler ile ifade edilebilir (Bird vd. 1976).

$$J = k \frac{dT}{dx} \quad , \quad Q = A.t.J = A.t.k \frac{dT}{dx} \quad (4)$$

Burada k , termal iletkenlik (w/m-K) , Q ısı enerjisi (joule), A yüzey alanı (m²) şeklindedir. Sıcaklığın zamana bağlı olarak değiştiği sistemler için kullanılan 2. Kanun ise aşağıdaki gibidir (Bird vd. 1976).

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad \text{olmak üzere} \quad \frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2} \quad (5)$$

Burada α ısı difüzyon katsayısı , ρ yoğunluk c_p sabit basınç ısı kapasitesi şeklindedir. Hidrolik ısı yayılımı ifadesi ise aynı difüzyon şeklinde olup sadece difüzyon katsayısı yerine dispersiyon katsayısı kullanılır.

Radyasyon yoluyla ısı iletimi, jeotermal rezervuarlar için ihmal edilebilir ölçülerdedir. P nedenle bu çalışmanın modellerinde kullanılmayacaktır.

2.2. Ayrık Paralel Çatlaklı Jeotermal Rezervuarların Matematik Modeli

Doğal çatlaklı bir jeotermal rezervuarın yapısı düşük geçirgenlikli matris bloklarından oluşan bir çatlaklar ağı şeklinde olabilmektedir. Ayrıca sıcak kuru kayaç rezervuarlarında enjeksiyon ve üretim kuyuları birbirine çok sayıda paralel çatlakla bağlanabilirler. Bu sistemlerin idealize bir kabulü sonsuz sayıda ayrık paralel çatlakların sabit genişlikteki matris tabakaları ile birbirinden ayrıldığı bir yapı olarak değerlendirilebilir. Bu jeolojik jeotermal rezervuar modeli, 1970'li yıllardan günümüze kadar uygulanan klasik izleyici ve ısı taşınım modellemeleri olarak süregelmiştir. (Pruess ve Bodvarsson (1984), Gringarten vd (1975), Skopp and Warrick, Tang vd. 1981; Suducki ve Frind, 1982).

Sınır koşulları çerçevesinde yukarıdaki sistemin matematiksel modeli aşağıdaki varsayımlara göre oluşturulur;

- Çatlaklar dikeydir ve yönelimlidir (tektonik hareketlere bağlı çatlaklar ve 300 m. den daha derinde açılan yapay çatlaklar yatay yönelimli olamazlar).
- Matris blokları geçirimsiz ve eş genişliktedir.
- Çatlaklarda tek fazlı, kararlı, sıkıştırılmaz ve zaman değişimli sıcaklıklı bir akış gerçekleşir.
- Matris bloğunda akış yoktur, sadece akış yönüne dik bir ısı iletimi –izleyici ise difüzyon- oluşur.
- Sonsuz büyüklükteki akışa dik yönlü ısı yayılımları çatlak genişliği boyunca sıcaklıkları eşitler.
- Matris ve çatlak arasındaki ısı alışverişi matris-çatlak kesişim yüzeyinde oluşur ve matristeki zıt yönlü sıcaklık gradyanı ile orantılıdır.
- Tek çatlaklı jeolojik model geçirimsiz sonsuz yanal genişlikte bir matriste yer alan dikey tek bir çatlaktan oluşur.
- Ayrık paralel çatlaklı jeolojik model için gözenekli sistem sabit genişlikte matrislerle birbirinden ayrılmış dikey paralel çatlaklardan oluşur.
- Yukarıda verilen jeolojik modellere uygulanan akış modellerinden, yalnız akış modelinde çatlak boyunca sadece akış nedeniyle ısı taşınımı ve akışa dik matris içine ısı iletimi gerçekleşir. (Bu model I. Akış Modeli olarak adlandırılacaktır.)
- Diğer akış modelinde ise yalnız akış ve akışa dik ısı iletimi yanında akış boyunca hidrolik ısı yayılımı da gerçekleşir. (Bu model II. Akış Modeli olarak adlandırılacaktır.)

Bu varsayımlar ile idealize edilen tek ve paralel çatlaklı jeolojik modellerin şematik gösterimi Şekil 2.2'deki gibidir. Bu matris-çatlak jeolojik tanımlamaları ile II. Akış Modeli için çatlak ve matris içindeki ısı aktarımı/değişimi denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\left[\rho_r c_r \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w c_w \phi u \frac{\partial T}{\partial x} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{k_m}{b} \frac{\partial T_m}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad (6)$$

$$\rho_m c_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - k_m \frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

Ayrık paralel çatlaklı rezervuarlar için başlangıç ve sınır koşulları ise şu şekildedir:

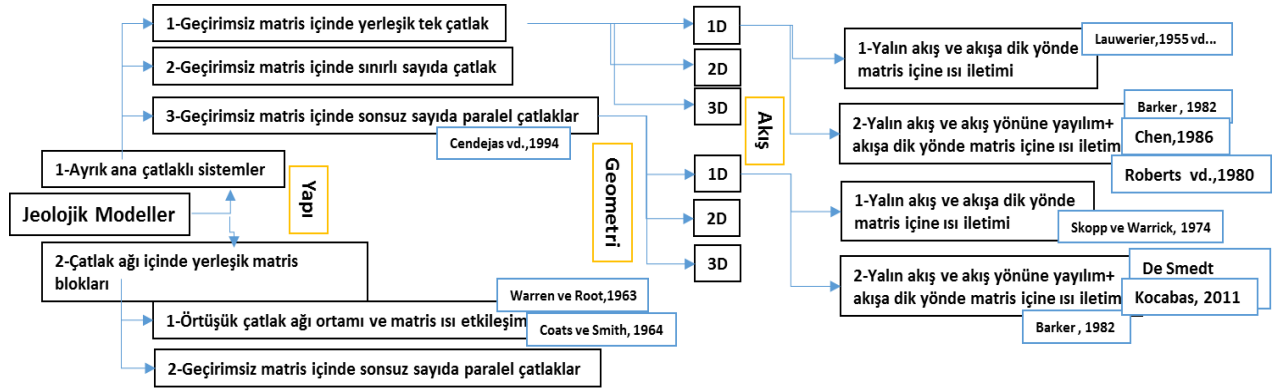
$$t = 0 \quad \text{için} \quad T = T_m = T_0 \quad (8)$$

$$x = 0 \quad \text{için} \quad T = T_i \quad (9)$$

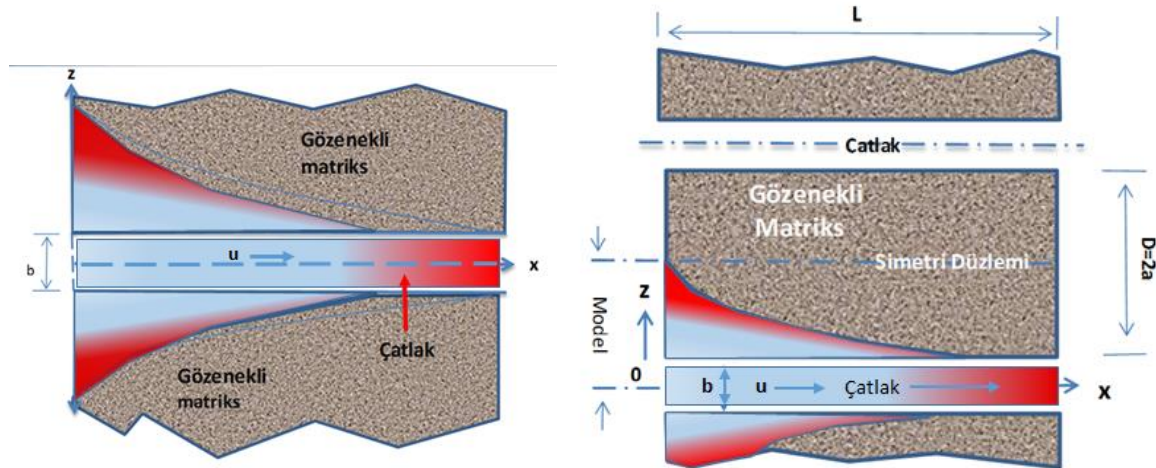
$$x \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad T \rightarrow 0 \quad (10)$$

$$z = 0 \quad \text{için} \quad T_m = T \quad (11)$$

$$z = a \quad \text{için} \quad \frac{\partial T_m}{\partial z} = 0 \quad (12)$$



Şekil 2.1 Jeolojik ve Akış Modelleri Bütünleşik Sistemleri



Şekil 2.2 Tek ve paralel çatlaklı jeolojik model idealize yapıları.

3. I. AKIŞ MODELİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

II. Akış Matematik Modelinde (Denklem 6) bulunan akış boyunca hidrolik ısı yayılımının ihmal edilmesiyle ayrık I. Akış Modeli elde edilir. I. Akış Modelinin çatlak içinde ısı taşınımını belirten Denklem 6 aşağıdaki sadeleşmiş hale dönüşür.

$$\left. \rho_r c_r \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w c_w \phi u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{k_m}{b} \frac{\partial T_m}{\partial z} \right]_{z=0} = 0$$

(13)

I. Akış Modelinin matris bloğu denklemi (Denklem 7) aynı kalır. Bu denklem aşağıda yeniden yazılmıştır.

$$\rho_m c_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - k_m \frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

Başlangıç ve sınır koşulları Bölüm 2.2 de yer alan (8), (9), (11) ve (12) koşullarıdır.

Model transfer denklemleri [(13) ve (7)] ve başlangıç ve sınır koşullarının boyutsuz ifadelerine çevrilmesi için boyutsuz değişken tanımları aşağıdaki şekilde oluşturulabilir;

$$T_D = \frac{T_o - T}{T_o - T_i} \quad (14)$$

$$T_{mD} = \frac{T_o - T_m}{T_o - T_i} \quad (15)$$

$$t_D = \left(t - \frac{\rho_r c_r}{\rho_w c_w \phi u} x \right) \frac{k_m}{\rho_m c_m a^2} \quad (16)$$

$$x_D = \frac{k_m x}{\rho_w c_w \phi u b a} \quad (17)$$

$$z_D = \frac{z}{a} \quad (18)$$

Bu boyutsuz değişkenlerin kullanımıyla (13) ve (7) denklemleri aşağıdaki formlara dönüşür.

$$\left. \frac{\partial T_D}{\partial x_D} - \frac{\partial T_{mD}}{\partial z_D} \right]_{z_D=0} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial T_{mD}}{\partial t_D} - \frac{\partial^2 T_{mD}}{\partial z_D^2} = 0 \quad (20)$$

Benzer şekilde başlangıç ve sınır koşulları da boyutsuz formlara aşağıdaki şekilde dönüştürülebilir;

$$t_D = 0 \quad \text{için} \quad T_D = T_{mD} = 0 \quad (21)$$

$$x_D = 0 \quad \text{için} \quad T_D = 1 \quad (22)$$

$$z_D = 0 \quad \text{için} \quad T_{mD} = T_D \quad (23)$$

$$z_D = 1 \quad \text{için} \quad \frac{\partial T_{mD}}{\partial z_D} = 0 \quad (24)$$

3.1. I. Akış Modeli İçin Skopp ve Warrick Çözümü

Ayrık paralel çatlak jeolojik modelinin I. Akış Modeli için yapılan ilk çalışmalar yalnızca yarı-analitik çözümler olarak kalmış (Gringarten vd (1975) ve Bodvarsson ve Tsang (1982)) ve ilk gerçek uzayda analitik çözüm Skopp and Warrick (1974) tarafından geliştirilmiştir.

Gözenekli ortamda çözelti ve kimyasal izleyici taşınımı için geliştirilen Skopp ve Warrick çözümü ayrık paralel çatlaklı rezervuarlarda birinci akış modeli için geçerlidir. Isının da özel bir izleyici olması nedeniyle bu çözümün jeotermal rezervuarlarda ısı taşınımı modellenmesi için kullanılabilmesi mümkün olmuştur

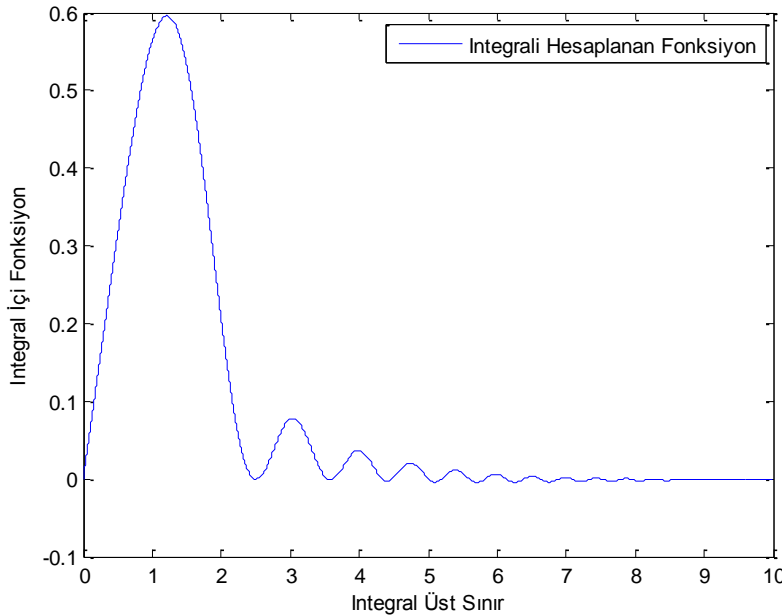
Bu çözüm Skopp ve Warrick'in geliştirdikleri EK-1 de verilen Laplace Ters Dönüşüm Bağlantısı kullanılarak geliştirmiş ve yayınlanmıştır. Ek-2 bu çözümü yukarıda verilen boyutsuz değişkenler ve bağımlı değişken dönüşümü kullanarak yeniden vermektedir. Bu yeni metod Skopp ve Warrick sonucuyla aynı sonucu vermektedir ancak yeni yaklaşımda matematik işlemler biraz daha sadeleştirilmiş olmaktadır. Skopp ve Warrick çözümü aşağıda Denklem 25.1 te verilmiştir.

$$T_D = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda_R) \left[\text{Sin}\left(\frac{\omega^2 t_D}{2} - \lambda_1\right) + \text{Sin}(\lambda_1) \right] \frac{d\omega}{\omega} \quad (25.1)$$

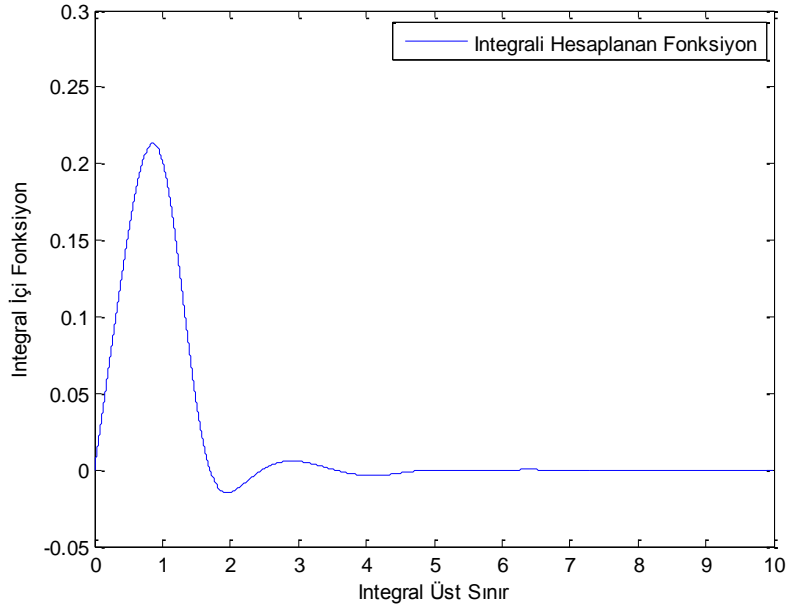
Yarı sonsuz bir integrali de içeren bu karmaşık çözümün sayısal sonuçları ve analizi için Ek-12 de yer alan A-2.1 ve A-2.2 matlab programları oluşturulmuş ve kullanılmıştır.

İntegral hesaplamaları için yakınsamanın tamamlandığı kabul edilebilir bir üst sınır seçilmiş-belirli toleranslar için (10^{-7} gibi) ve seçilen sınır için adım aralıkları daraltılarak ikinci bir tolerans değerleri bulunmuş ve bu tolerans makul sınırlarda tutularak hesaplama yapılmıştır. Programlarda yarı sonsuz integralin sayısal değerinin bulunması için Yamuk yöntemi kullanılmıştır. Adım aralıkları da bu yöntem içindir. Adım aralıklarının sıklaştırılması Yamuk yönteminden kaynaklanan hata oranını en aza indirecektir. Ancak bu sıklaştırmanın program çalışma süresine olumsuz etkisi olacağı için kabul edilebilir hata sınırları için en fazla adım aralığı genişliği kullanılacaktır. Bu tür kullanım aynı zamanda farklı çözümlerin süre yönünden kıyaslanmasında da bir zorunluluktur.

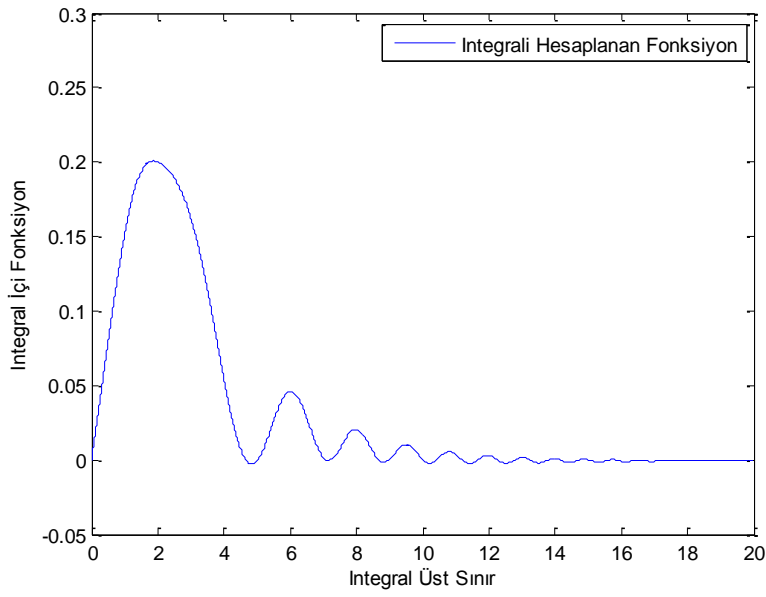
Aşağıda yer alan dört grafik yarı sonsuz integrali hesaplanacak fonksiyonun (integral içi fonksiyon) farklı değişken değerleri (x_D , t_D) için gereken integral üst sınır kabullerini ve tolerans değerlerini göstermektedir. Bu grafiklerdeki tolerans değerleri Yamuk yöntemi ile hesaplanan iki farklı adım aralığı için (0.001 ve 0.05) integral değerleri farkıdır.



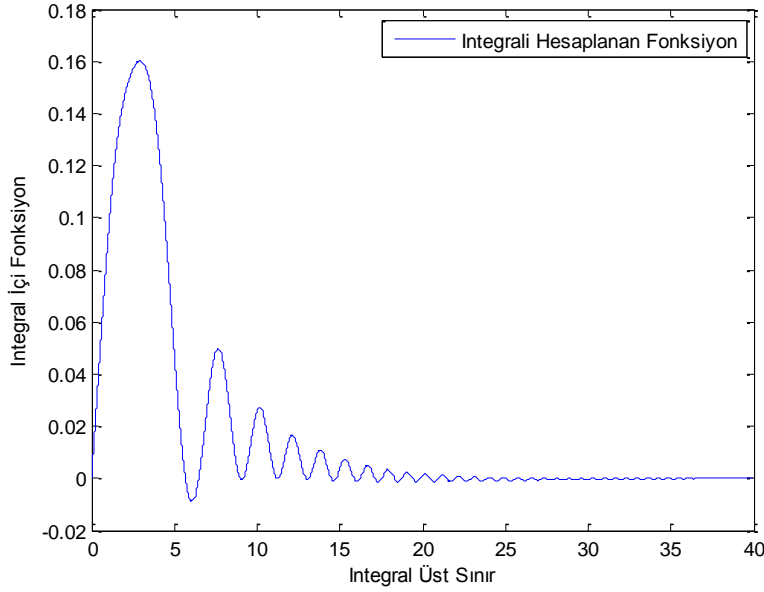
Şekil-3.1 $x_D=1$; $t_D=2$ için İntegral içi Fonksiyon yakınsaması, Adım aralığı=0.001, Tolerans=2.9847e-008.



Şekil 3.2 $x_D=2$; $t_D=1$ için İntegral içi Fonksiyon yakınsaması Tolerans= $8.0193e-008$.

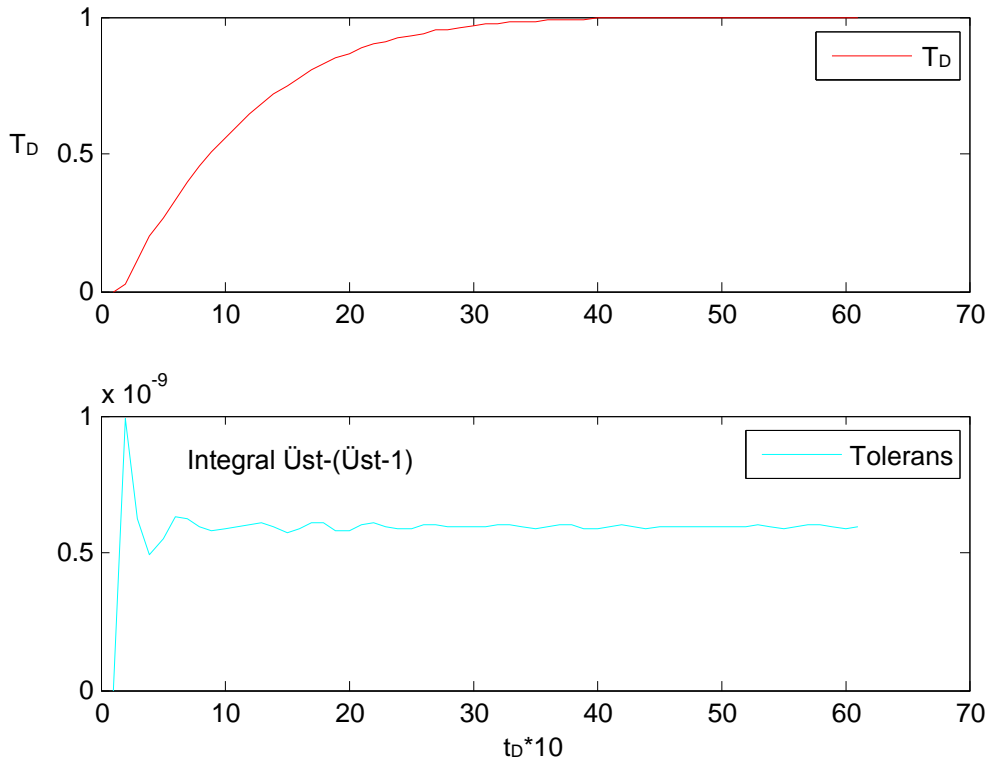


Şekil 3.3 $x_D=0.5$; $t_D=0.5$ İntegral içi Fonksiyon yakınsaması, Adım aralığı=0.001, Tolerans= $2.2088e-008$.



Şekil 3.4 $x_D=0.3$; $t_D=0.3$ Integral içi Fonksiyon yakınsaması , Adım aralığı=0.001, Tolerans= 5.2203e-008.

Yukarıdaki şekillerde görüleceği üzere bu yöntem ile x_D ve t_D nin küçük değerleri için yarı sonsuz integral üst sınır kabulünün 30-40 arasında olması gerekmektedir. Ayrıca 10^{-7} lik bir toleransı aşmamak için sınır değerleri adım aralığı 0.001 den büyük olmaması gerekmektedir.



Şekil 3.5 $x_D=1$; $t_D=0.6$ için 0.1'lik aralıklarla çizdirilmiş T_D grafiği (T_D =İntegral değeri, Yamuk yöntemiyle hesaplandı).

Şekil 3.5 de yer alan grafikteki Tolerans bu yöntem için 2. hata hesaplamasıdır. Bu Tolerans (Üst sınır, n-Üst sınır, n-1) farkıdır. Grafikte x_D ve t_D nin küçük değerleri için bu toleransın büyük değerler aldığı görülmektedir. Bu yöntem ile 10^{-7} lik toleranslar için yapılan hesaplamada geçen süre 4.2 saniyedir. t_D adım aralığının 10 kat artırılması ile (adım aralığı olarak 0.001 yerine 0.01 alınması) hesaplama süresi 30.8 saniyeye çıkmıştır.

3.2. I. Akış Modelinin Yeni Analitik Çözümü

I. Akış Modeli matematik denklemleri Skopp ve Warrick yaklaşımından farklı bir yol izlenerek, diğer bir deyişle İkili Laplace Dönüşümü kullanılarak bu çalışmada çözülmüştür. Ayrıntılı çözüm adımları Ek-3 ve Ek-4 de yer alan bu çözüm aşağıda 25-29 nolu denklemler olarak verilir.

$$T_D = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F(t_D) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{x_D^m}{m!} G(t_D) \right] \quad (25.2)$$

$$F(t_D) = \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{2n + x_D}{2\sqrt{t_D}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2(n+1) + x_D}{2\sqrt{t_D}} \right) \right\} \quad (26)$$

$$G(t_D) = \left\{ \frac{2^{(m+1)/2}}{\sqrt{\pi} t_D^{m/2}} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_1^2}{4t_D}\right) \operatorname{He}_{m-1} \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2t_D}} \right) + \exp\left(-\frac{\alpha_2^2}{4t_D}\right) \operatorname{He}_{m-1} \left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2t_D}} \right) \right] \right\} \quad (27)$$

$$\alpha_1 = 2n + x_D \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = 2(n+1) + x_D \quad (28)$$

$$\operatorname{He}_{m-1}(\omega) = (m-1)! \sum_{i=0}^{(m-1)/2} (-1)^i \frac{\omega^{m-1-2i}}{i! 2^i (m-1-2i)!} \quad (29)$$

Yukarıda verilen Denklem (26) Tamamlayıcı Hata ve Denklem (29) Hermit fonksiyonları içermektedir.

3.2.1 I. Akış Modelinin Yaklaşık Yeni Analitik Çözümü

Yeni analitik çözümünün ilk üç terim toplamına göre yeniden düzenlenmesiyle elde edilen (Bkz. Ek-4) yaklaşık çözüm aşağıdaki 30 nolu denklemlerle verilir.

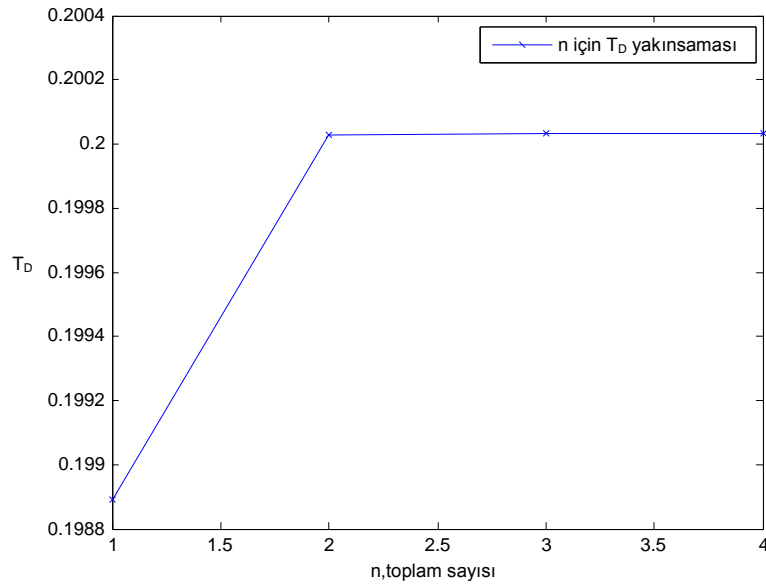
$$F(t_D) = \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{2n + x_D}{2\sqrt{t_D}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2(n+1) + x_D}{2\sqrt{t_D}} \right) \right\} \quad (30.1)$$

$$G_1(t_D) = \left\{ \frac{2 \exp \left(-\frac{(2n + x_D)^2}{4t_D} \right)}{\sqrt{\pi t_D}} + \frac{2 \exp \left(-\frac{(2(n+1) + x_D)^2}{4t_D} \right)}{\sqrt{\pi t_D}} \right\} \quad (30.2)$$

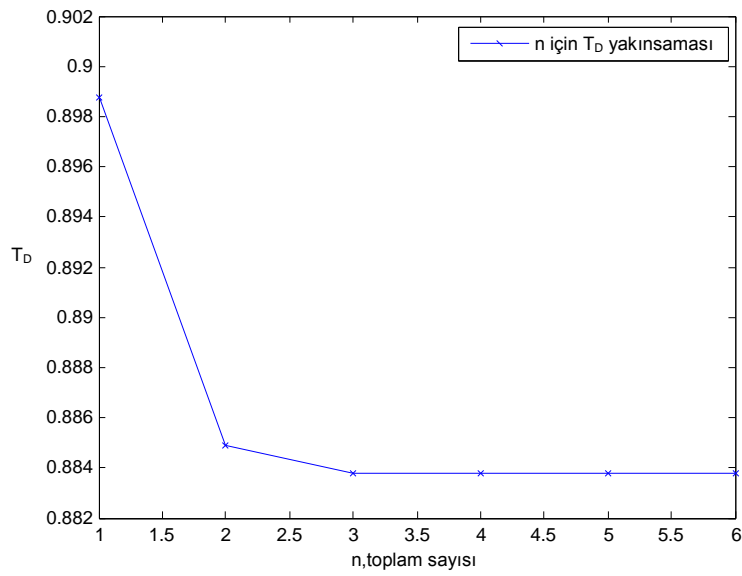
$$G(t_D) = \left\{ \frac{2^{(m+1)/2}}{\sqrt{\pi} t_D^{m/2}} \left\{ \exp \left(-\frac{\alpha_1^2}{4t_D} \right) \operatorname{He}_{m-1} \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2t_D}} \right) + \exp \left(-\frac{\alpha_2^2}{4t_D} \right) \operatorname{He}_{m-1} \left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2t_D}} \right) \right\} \right\} \quad (30.3)$$

Ek-12 de yer alan A-1-1 ve A-1-2 programları ile bu yeni analitik tam çözüm ve yaklaşık çözümün sayısal sonuçları ve analizi yapılmıştır. Bir önceki yönteme benzer şekilde sonsuz seri toplamları içinde bir üst sınır belirlenmiş ve bu sınır değerinin bir önceki adım sınır değeri ile farkından tolerans hesaplanmıştır. Bu tolerans değerini makul değerlere düşürmek için sınır değeri artırılarak hesaplama yapılmıştır.

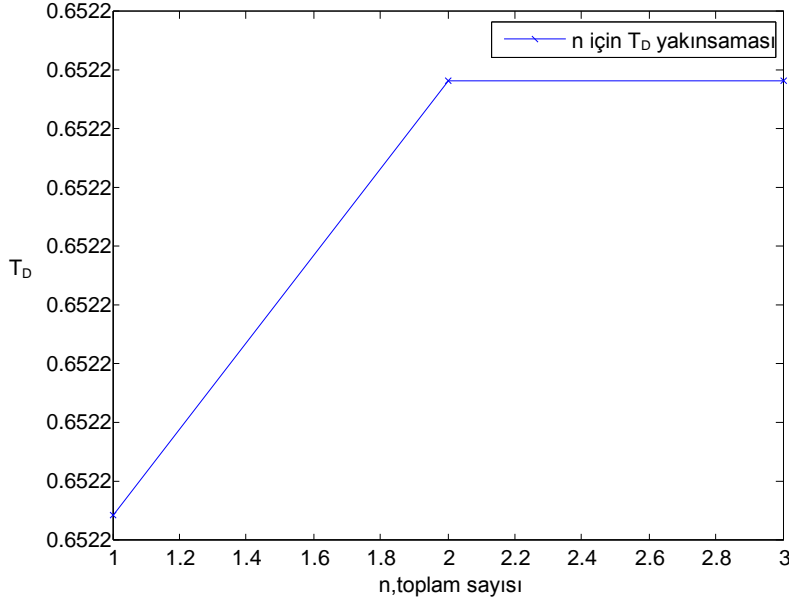
Şekil 3.6, 3.7 ve 3.8 de yer alan üç grafik sonsuz toplam fonksiyonun (25 no'lu denklem) farklı değişken değerleri (x_D , t_D) için T_D yakınsamasını ve ön kabulü yapılan sonsuz toplam üst sınırının içerdiği tolerans değerlerini (hata paylarını) göstermektedir. Örneğin $n=4$ için hesaplanan tolerans $T_D(n=4) - T_D(n=3)$ farkıdır.



Şekil 3.6 $x_D=2$ ve $t_D=1$ için T_D yakınsaması, Tolerans $(T_{Dn}-T_{Dn-1})= 3.3866e-009$.

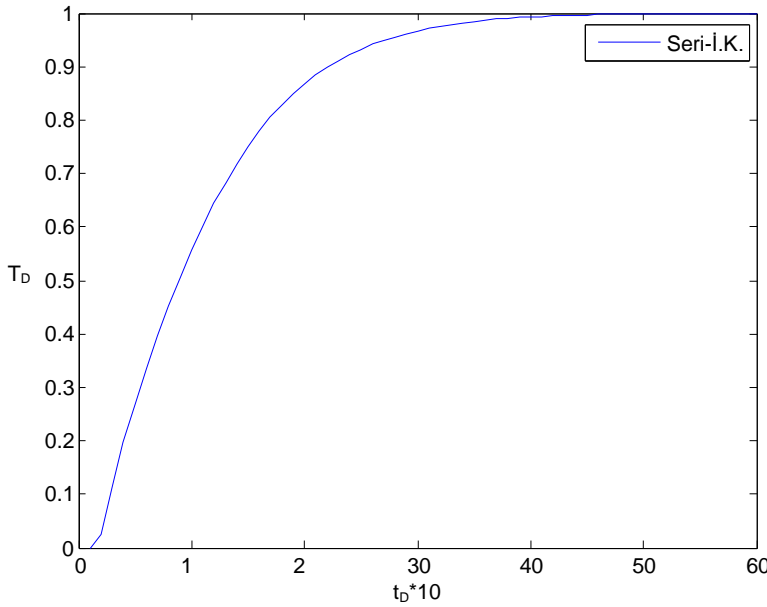


Şekil 3.7 $x_D=1$ ve $t_D=2$ için T_D yakınsaması Tolerans = $3.0071e-010$.



Şekil 3.8 $x_D=0,5$ ve $t_D=0,5$ için T_D yakınsaması, Tolerans = $1.3581e-011$

Yukarıdaki şekillerde görüleceği üzere bu yöntem ile T_D yakınsamasına çok çabuk ulaşılabilmektedir. Sonsuz toplam üst sınırının (n) t_D tamsayı değerinden 1 ya da 2 fazla olması 10^{-7} lik tolerans değerleri için yeterli gelmektedir.



Şekil 3.9 $x_D=1$ ve $t_D=0.6$ için 0.1 'lik aralıklarla çizdirilmiş T_D grafiği.

Şekil 3.9 de yer alan grafikte sonsuz toplam üst sınırı $n=t_D+2$ olarak alınmıştır. Bu yöntem ile 10^{-7} lik toleranslar için yapılan hesaplamada geçen süre 1.2 saniyedir. t_D adım aralıklarının 10 kat artırılması ile hesaplama süresi 8.1 saniyeye çıkmıştır.

3.3. Çözümlerin Karşılaştırılması

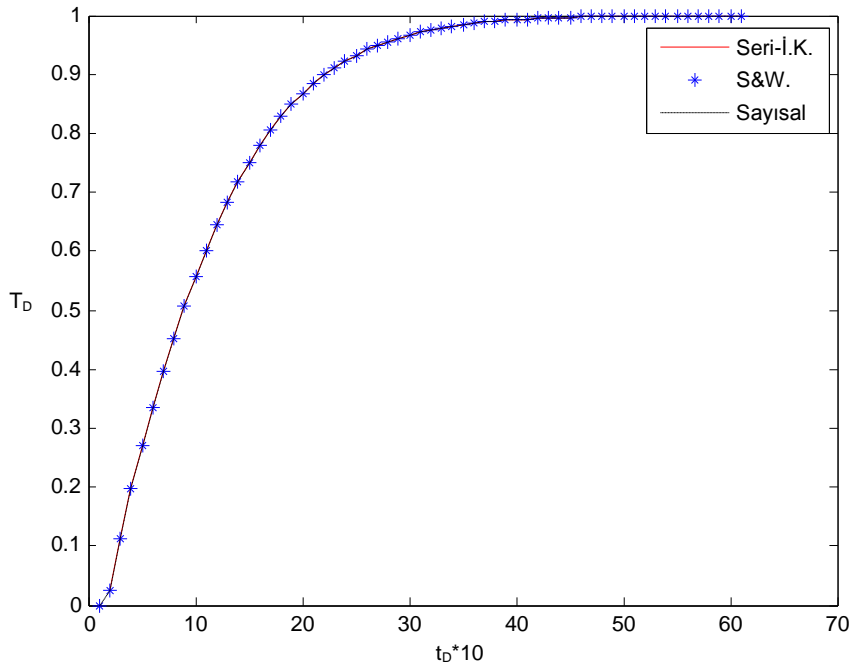
Analitik çözümler INVLAP isimli bir Sayısal Laplace Ters dönüşüm algoritması da kullanılarak (bkz. Ek-12 /A-3-2) karşılaştırıldılar.

Ortak sınır değerleri, adım aralıkları ve tolerans kabulleri için Skoop ve Warrick çözümü ve yeni analitik çözüm aynı değerleri vermekte ancak Skoop ve Warrick çözümü yaklaşık 4 kat fazla süre almaktadır(bkz. Şekil 3.10).

İkinci olarak yeni analitik çözüm için tek tolerans ile hesaplama yapılırken, Skoop ve Warrick dönüşümü çözümü için iki ayrı tolerans değerlerine göre değerlendirme yapmak gerekmektedir.

Son olarak Skoop ve Warrick çözümünde x_D ve t_D nin küçük değerlerinde yakınsama ve tolerans kabulleri için sınır değerlerini artırmak gerektirmekte bu da hesaplama süresinde olumsuz etki göstermektedir.

Her çözümün aynı sonucu vermesi (Şekil 3.1) yaklaşımların herbirinin doğruluğunu teyid etmekte, ancak hesaplama hızı, verimlilik ve fiziksel anlamlandırma açılarından yeni analitik çözüm öne çıkmaktadır.



Şekil 3.10 $x_D=1$ ve $t_D=0.6$ için 0.1 'lik aralıklarla çizdirilmiş T_D grafikleri

- Seri-İ.K. : I. Akış Modeli yeni analitik çözümü
- S&W. : Skoop ve Warrick çözümü
- Sayısal : Sayısal yarı-analitik çözüm. (Matlab INVLAP fonksiyonu ile çözüm)

4. II. AKIŞ MODELİNİN YENİ ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

Ayrık Paralel Çatlaklı Jeotermal Rezervuar jeolojik modeli için II. Akış modeli (yalın-akış, akış boyunca ısı yayılımı ve matris içine ısı iletimi) modelinin matematik denklemleri ve modelin başlangıç ve sınır koşulları Bölüm 2.2 verilmişti. Bugüne kadar bu modelin Sudicki ve Frind (1982) çalışması hariç yalnızca Laplace uzayında yarı analitik çözümler verilebilmiştir. Aşağıda ilk kez gerçek uzayda analitik çözümler türetilecektir.

Matematik Model taşınım denklemleri [(6) ve (7)] ve başlangıç ve sınır koşullarının boyutsuz ifadelerle çevrilmesi için etkin (tek tek parametrelerin bütünsel etkilerinin ayrı ayrı değerlendirilebileceği) boyutsuz değişken tanımları aşağıdaki şekilde oluşturulabilir;

$$T_D = \frac{T_o - T}{T_o - T_i} \quad (31)$$

$$T_{mD} = \frac{T_o - T_m}{T_o - T_i} \quad (32)$$

$$z_D = \sqrt{\frac{\rho_m c_m}{\rho_r c_r} \frac{\rho_w c_w u}{\sqrt{kk_m}}} z \quad (33)$$

$$x_D = \frac{\rho_w c_w u}{k} x \quad (34)$$

$$t_D = \frac{\rho_w c_w}{\rho_r c_r} \frac{\rho_w c_w u^2 t}{k} \quad (35)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho_m c_m}{\rho_r c_r} \frac{\sqrt{kk_m}}{\rho_w c_w u b}} \quad (36)$$

Bu boyutsuz değişkenlerin kullanımıyla (6) ve (7) denklemleri aşağıdaki formlara dönüşür.

$$\left. \frac{\partial T_D}{\partial t_D} + \frac{\partial T_D}{\partial x_D} - \frac{\partial^2 T_D}{\partial x_D^2} - \lambda \frac{\partial T_{mD}}{\partial z_D} \right]_{z_D=0} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial T_{mD}}{\partial t_D} - \frac{\partial^2 T_{mD}}{\partial z_D^2} = 0 \quad (38)$$

Benzer şekilde başlangıç ve sınır koşullarının boyutsuz şekilleri aşağıdaki gibidir.

$$t_D = 0 \quad \text{için} \quad T_D = T_{mD} = 0 \quad (39)$$

$$x_D = 0 \quad \text{için} \quad T_D = 1 \quad (40)$$

$$z_D = 0 \quad \text{için} \quad T_{mD} = T_D \quad (41)$$

$$z_D = a_D \quad \text{için} \quad \frac{\partial T_{mD}}{\partial z_D} = 0 \quad (42)$$

$$x_D \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad T_D \rightarrow 0 \quad (43)$$

4.1. II. Akış-Modeli için Skopp and Warrick Yaklaşımı ile Yeni Çözüm

II. Akış modeli için ilk analitik çözüm İteratif Laplace Dönüşüm metodu ve Skopp ve Warrick Laplace ters dönüşüm bağıntısı kullanılarak geliştirilmiştir.(Çözüm adımlarının ayrıntıları Ek-5 te verilmiştir.) Bu çözüm aşağıdaki 44-47 nolu denklemlerle verilir.

$$T_D = \int_0^{t_D} \frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) F(t_D - \tau) d\tau \quad (44)$$

$$F = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_R} \left[\text{Sin}\left(\frac{\omega^2(t_D - \tau)}{2} - \lambda_I\right) + \text{Sin}(\lambda_I) \right] \frac{d\omega}{\omega} \quad (45)$$

$$\lambda_R = \frac{\lambda\tau\omega}{2} \frac{\text{Sinh}(a_D \omega) - \text{Sin}(a_D \omega)}{\text{Cosh}(a_D \omega) + \text{Cos}(a_D \omega)} \quad (46)$$

$$\lambda_I = \frac{\lambda\tau\omega}{2} \frac{\text{Sinh}(a_D \omega) + \text{Sin}(a_D \omega)}{\text{Cosh}(a_D \omega) + \text{Cos}(a_D \omega)} \quad (47)$$

Bu yeni analitik çözümün belirli bir integral içinde yarı sonsuz bir integral içeren karmaşık bir yapıya sahip olduğu görülür.

Ek-11 de yer alan B-1-1 ve B-1-2 programları ile bu analitik çözümün sayısal sonuçları ve analizi yapılmıştır. Bu modelde I. Akış Modeline nazaran fazladan (λ ve a_D) iki yeni değişken kullanılması gerekmiştir.

4.1.1 Algoritma Düzenlemeleri ve Tolerans Kabulleri

Analitik çözümün sayısal sonuçları ve analizleri için bazı algoritma ve tolerans kabulleri aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir.

$$T_D = \int_0^{t_D} \frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) F(t_D - \tau) d\tau \quad (48)$$

T_D integrali sınır değerleri t_D için 0..10 aralığı ve Yamuk yöntemi adım aralığı için ‘*adim1*’ değişkeni kullanılmıştır.

adim1 değişkeni istenen tolerans değerlerine göre genişletilecek veya daraltılacaktır. $t_D=0$ için ($\tau=0$) integral içi fonksiyonun değerinin hesaplanması mümkün olmadığından bu değer 0’a çok yakın bir değer kabul edilecektir. (Örneğin 10^{-4})

$$F = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_r} \left[\text{Sin}\left(\frac{\omega^2(t_D - \tau)}{2} - \lambda_r\right) + \text{Sin}(\lambda_r) \right] \frac{d\omega}{\omega} \quad (49)$$

F integrali Yamuk yöntemi ile hesaplanırken sonsuz sınır için ‘üst’ değişkeni ve adım aralıkları için ‘*adim2*’ değişkeni kullanılmıştır.

İntegral içi fonksiyonun yakınsaması için ‘üst’ değeri artırılacak, tolerans kabulüne göre yakınsamanın yeterli olduğu durumda program hızı için gerekirse düşürülecektir.

adim2 değişkeni istenen tolerans değerlerine göre genişletilecek veya daraltılacaktır. $w=0$ için integral içi fonksiyonun değerinin hesaplanması mümkün olmadığından bu değer 0’a çok yakın bir değer kabul edilecektir.(Örneğin 10^{-4})

Bu çözümde 3 ayrı tolerans hesabı yapılacaktır. Bunlar;

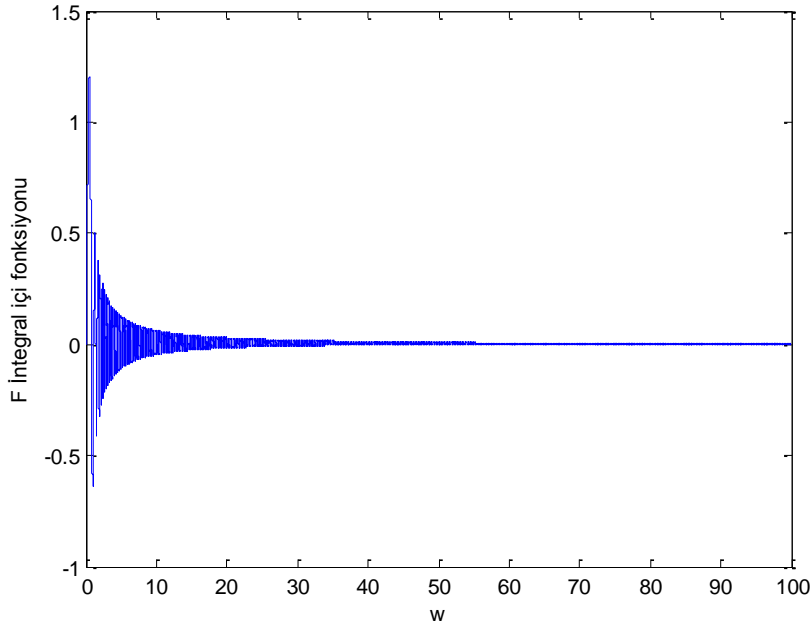
- ‘Tolerans1’ : F integrali içindeki fonksiyonun ön kabülü yapılmış bir ‘üst’ değer için adım aralıklarının (*adim1*) genişletilmesi ile ortaya çıkan integral değerleri farkıdır (Yamuk yöntemiyle hesaplanmış).
- ‘Tolerans2’ : F İntegrali içindeki fonksiyonun adım aralıkları (*adim1*) sabit kalmak koşulu ile üst değerinin bir azaltılması ile ortaya çıkan integral değerleri farkıdır (Yamuk yöntemiyle hesaplanmış).

- ‘Tolerans3’ : ilk iki tolerans kabulleri sonrası T_D integrali sınır aralıkları adımlarının (*adim2*) genişletilmesi ile ortaya çıkan integral değerleri farkı (Yamuk yöntemiyle hesaplanmış) şeklindedir.

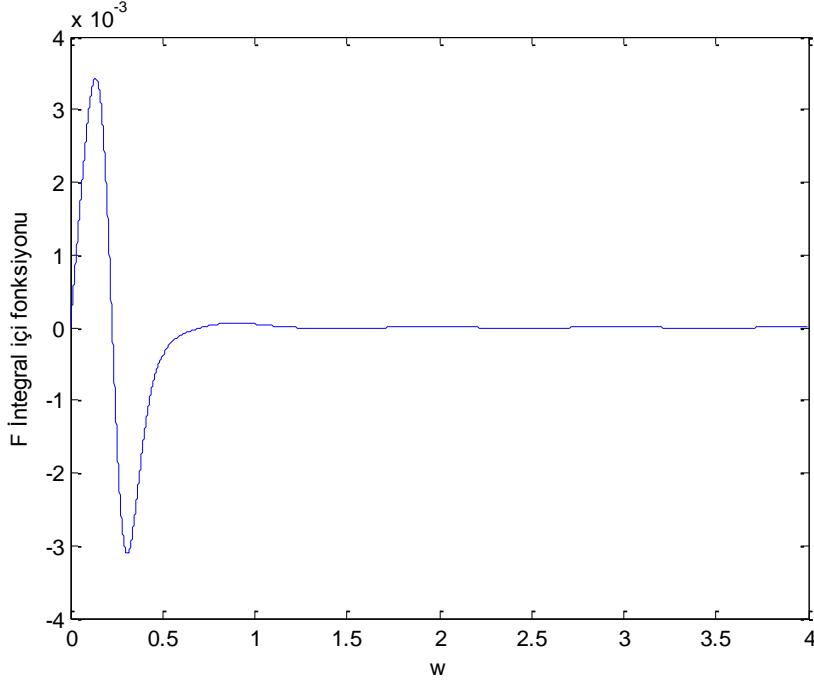
Tolerans için 10^{-7} lik bir değer (farklı iki çözümün kıyaslanması için) kabul edilebilir varsayılmıştır. Program hesaplama süreleri de bu kabul için hesaplanmıştır. Pek tabii ki tolerans değerlerini düşürmek program hesaplama sürelerini artıracaktır.

4.1.2 Yakınsama Örnekleri

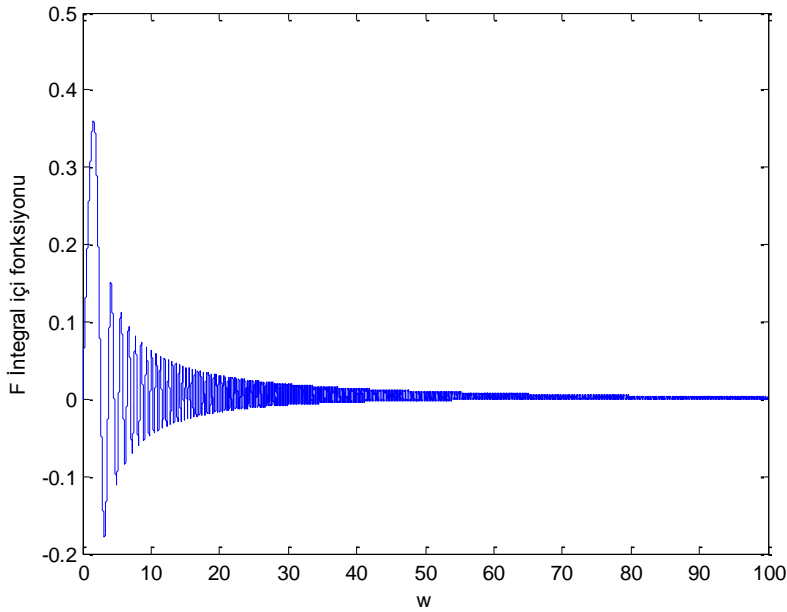
Şekil 4.1, 4.2 ve 4.3’de yer alan grafikler yarı sonsuz F integrali içerisindeki fonksiyonun bazı parametre değerleri için yakınsama noktalarını ve bunlara karşılık gelen toleranslı değerlerini göstermektedir.



Şekil 4.1 $(\tau, \lambda, a_D, t_D) = (0, 1 * 0.3, 5, 10)$ ve *adim2* aralığı 0.001 için F integral içi fonksiyonu yakınsaması tolerans1 = $3.0889e-007$ ($e-7$ lik bu tolerans için ‘üst’ sınırın 100 olması gerekmiştir).

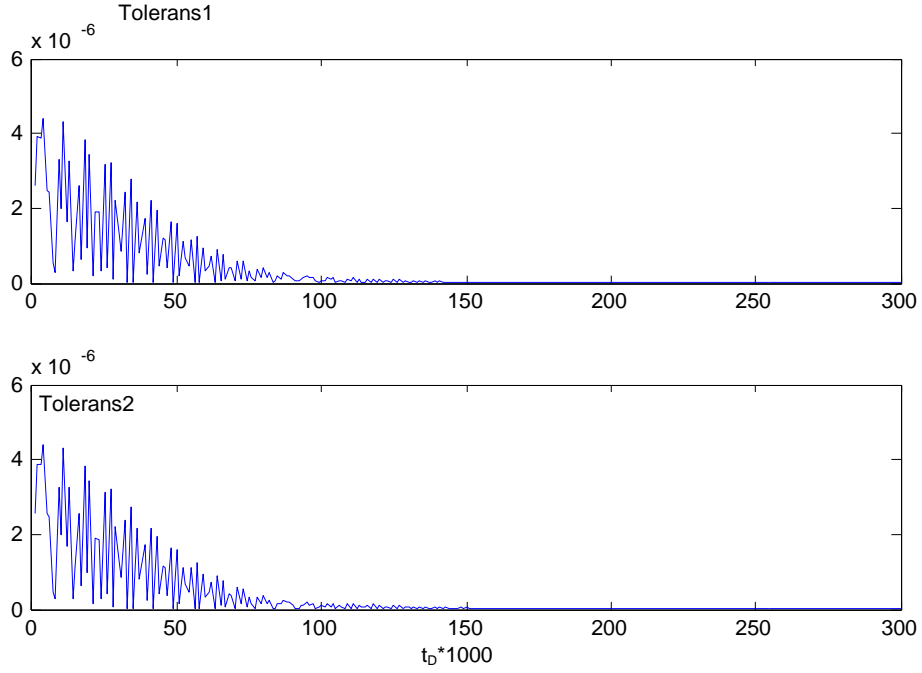


Şekil 4.2 $(\tau, \lambda, a_D, t_D) = (9, 9 * 1.3, 5, 10)$ ve $adım2$ aralığı 0.001 için F integral içi fonksiyonu yakınsaması tolerans1 = $5.5862e-010$ (10^{-7} lik bu tolerans için 'üst' sınırın 4 olması yetmiştir).



Şekil 4.3 $(\tau, \lambda, a_D, t_D) = (0.1, *0.3, 5, 1)$ lik ortalama bir değer ve $adım2$ aralığı 0.001 için F integral içi fonksiyonu yakınsaması, tolerans1 = $2.4075e-007$ (10^{-7} lik bu tolerans için 'üst' sınırın 100 olması yetmiştir).

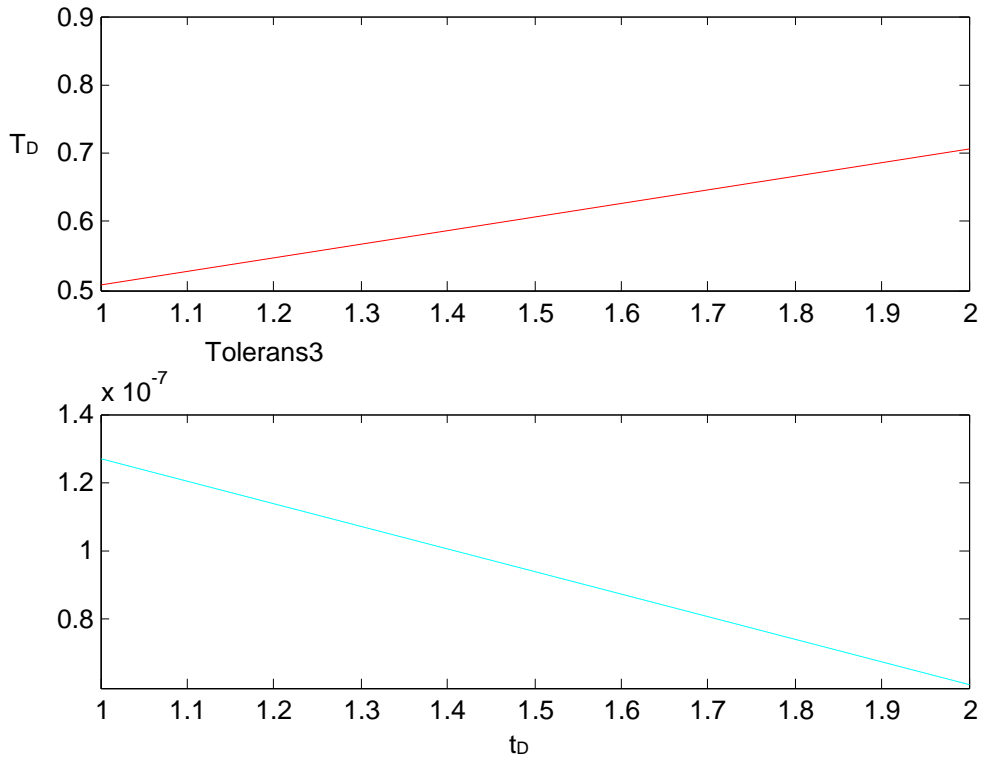
Bu üç grafikte görüleceği üzere 10^{-7} lik tolerans1 değerleri için adım aralıkları 0.001 den büyük olmamalıdır. Ayrıca $\tau * \lambda$ ifadesinin küçük değerlerinde sağlıklı yakınsamalar için integral *üst* sınırının büyütülmesi gerekecektir.



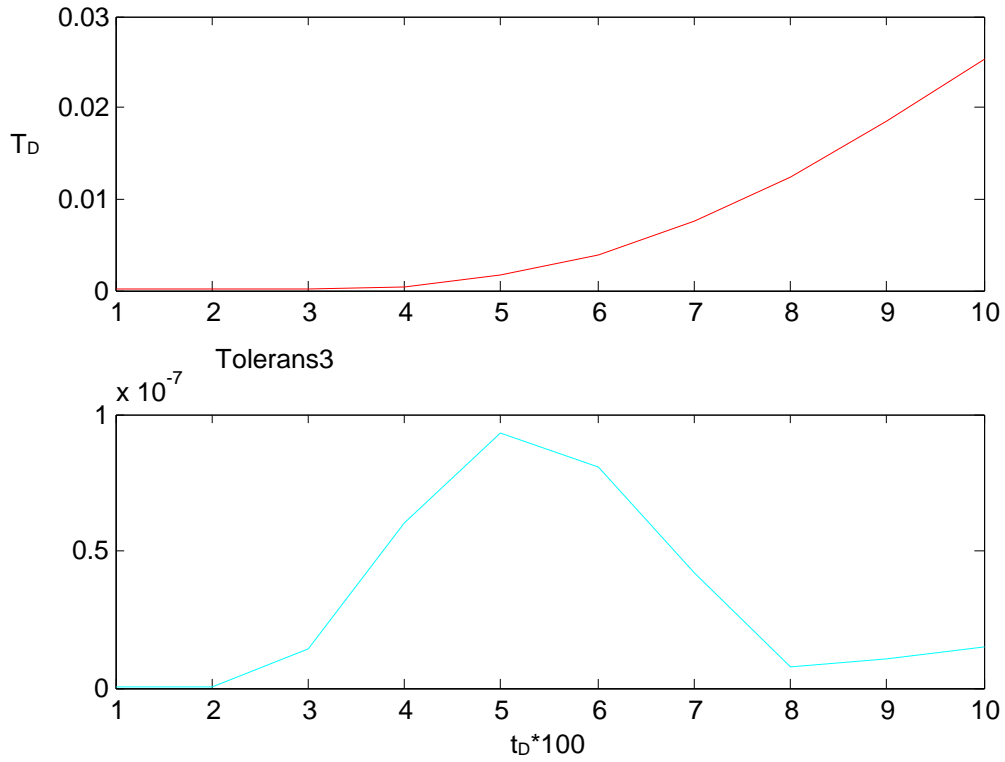
Sekil 4.4. $(\tau, \lambda, a_D, t_D) = (0.1, *0.3, 5, 1)$ lik ortalama bir değer , $adım2 = 0.001$, $üst = 140$, $(t_D, \tau = 0..0, 3)$ aralığı için Tolerans değerleri.

Yukarıda yer alan Şekil 4.4 ise t_D nin küçük değerler yelpazesi için oluşturulmuş F integrali hesaplamalarının tolerans değerlerini göstermektedir. İntegral *üst* sınırı olarak makul bir değer olan 140 seçilmiştir. Geniş bir t_D yelpazesi için bu değer yeterli iken (10^{-7} lik tolerans değerleri için) t_D nin 0.005 den küçük değerleri için *üst* ve *adım2* değerlerinin değiştirilmesi gerekecektir.

Şekil 4.5, 4.6, 4.7 ve 4.8'de yer alan grafikler bazı parametre değerleri, *adım1*, *adım2* ve yarı sonsuz integral *üst* sınırı için belirli T_D integrali hesaplamasını ve bu kabul değerlerine karşılık gelen Tolerans3 değerlerini ve program hesaplama sürelerini göstermektedir.

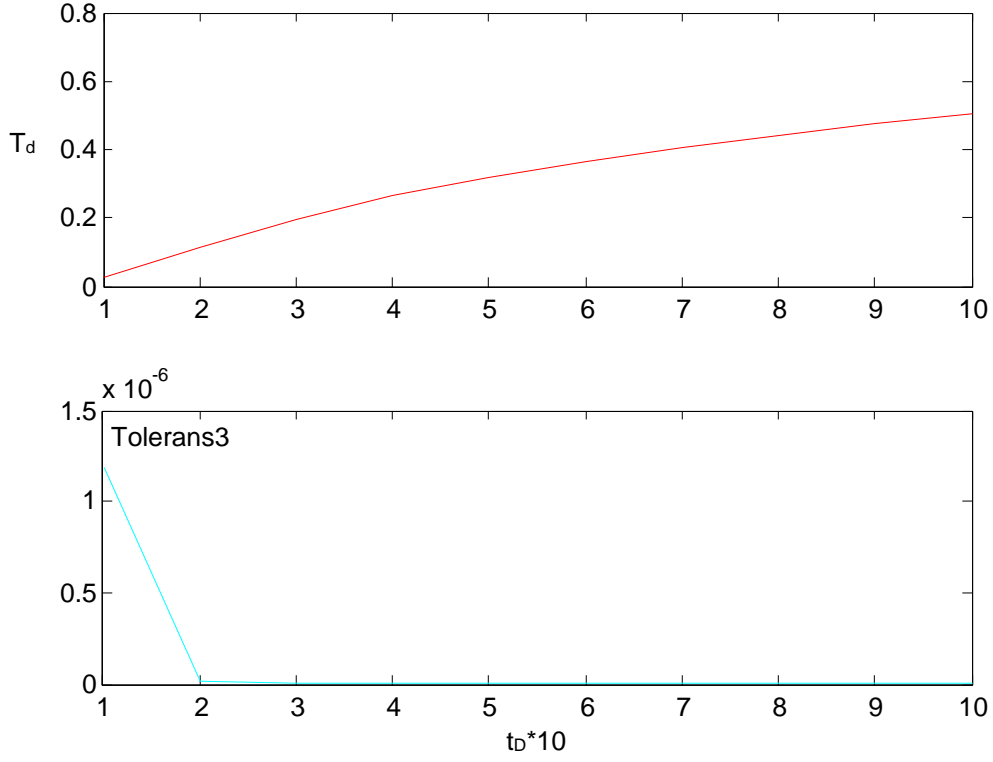


Şekil 4.5. $(\tau/\lambda)=(\tau/1)$ lik ortalama bir değer, $adim1=0.01$, $üst=100$, $(t_D, \tau=1..2)$ aralığı için Tolerans3 değerleri (hesaplama süresi: 30.1 saniye).

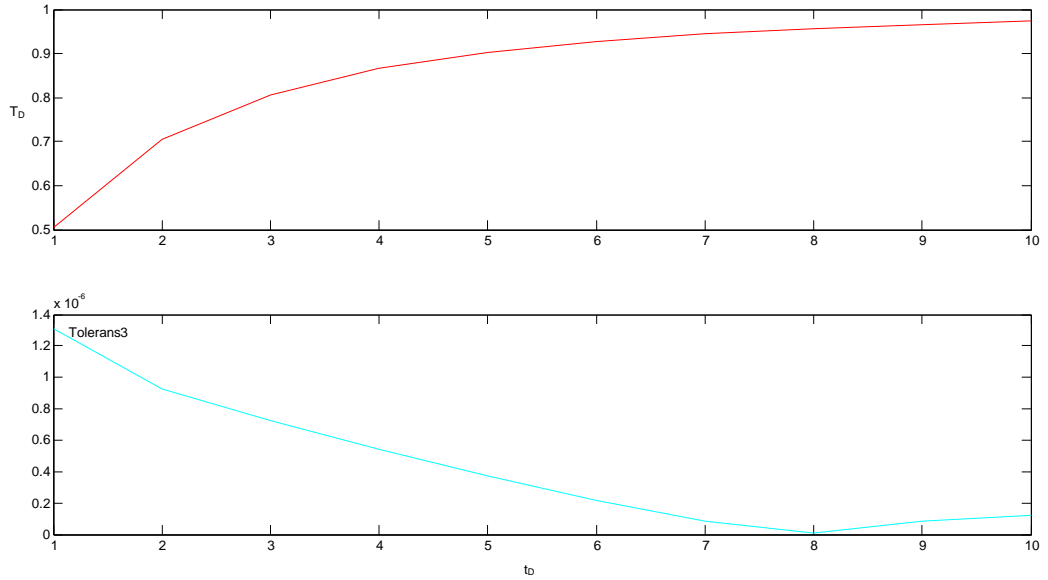


Şekil 4.6. $(\lambda, ad)=(0.3, 5)$ lik ortalama bir değer, $adim1=0.0001$, $adim2=0.001$, $üst=100$

t_D , $\tau=0.01,0.1$ aralığı için T_D ve Tolerans3 değerleri (hesaplama süresi 361 saniye).



Şekil 4.7. $(\lambda, a_D)=(0.3,5)$ lik ortalama bir değer, $adim1=0.001$, $üst=50$ t_D , $\tau=0,1..1$ aralığı için Tolerans3 değerleri. (hesaplama süresi 224 saniye).

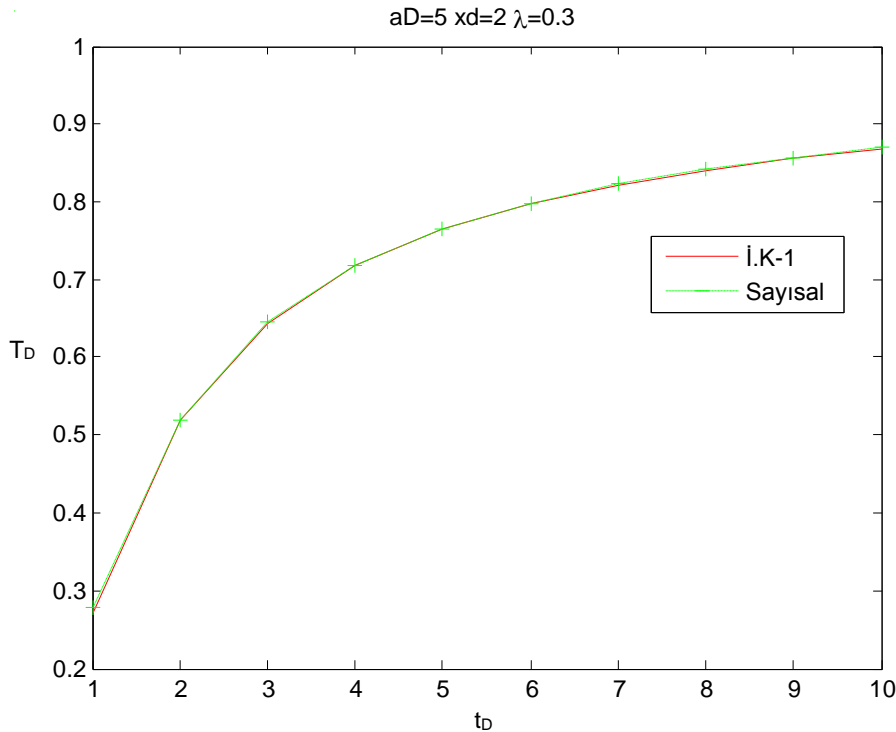


Şekil 4.8. $(\tau, \lambda, a_D)=(0.1, *0.3,5)$ lik ortalama bir değer, $adim1=0.01$, $adim2=0.001$ $üst=50$ t_D , $\tau=1..10$ aralığı için T_D ve Tolerans3 değerleri (hesaplama süresi 228 saniye).

Yukarıdaki grafiklerin verileri doğrultusunda şu sonuçlara ulaşılabilir;

- t_D nin 0'a yakın değerleri göz ardı edilirse Tolerans1, Tolerans2 ve Tolerans3 değerlerini 10^{-7} civarında tutmak için *adım2* aralıkları 0.001, *adım1* aralıkları 0.01 ve *üst* değeri 200 civarında olmalıdır.
- Tolerans3 hesaplamalarında λ, a_D ortalama değerler olarak seçilmiştir. Bu değerlerin küçülmesi de tolerans3 değerlerini dolayısıyla hesaplama sürelerini artıracaktır.
- t_D nin 0'a yakın değerlerinde daha iyi tolerans değerlerine ulaşmak için *adım2* ve *adım1* aralıklarını sıklaştırmak gerekir.

Şekil 4.9 da yer alan grafikte bu modelin sayısal sonuçları matlab INVLAP fonksiyonu değerleri ile kıyaslanmıştır. INVLAP fonksiyonu Laplace uzayı çözümünü sayısal yaklaşımlarla hesaplamaktadır. Bu algoritmanın kullanımı bu çalışmada iki amaca yöneliktir. Birincisi çözümlerin ve hesaplama yöntemlerinin doğruluğunu karşılıklı olarak teyid etmek; ikincisi ise hesaplama programlarında muhtemel yazılımsal hataları erken fark edebilmektir..



Şekil 4.9 $(\lambda, a_D)=(0.3,5)$ lik ortalama bir değer, *adım1* =0.001, *adım2*= 0.005 *üst* =40 $t_D, \tau= 1..10$ aralığı için Paralel Çatlaklı Model analitik çözümü-1 ve INVLAP ile hesaplanan T_D değerleri (Sayısal).

4.2. II. Akış-Modeli için Seri Yaklaşımı ile Yeni Çözüm

II. Akış modeli için ikinci analitik çözüm Laplace, Fourier Sine dönüşümleri ile yarı analitik çözüm olarak, Binom serisi yaklaşımı ile İteratif Laplace Dönüşüm metodu bağıntısı kullanılarak da gerçek uzay çözümü geliştirilmiştir.(Çözüm adımlarının ayrıntıları Ek-6 da verilmiştir.) Bu çözüm aşağıdaki 49-51 nolu denklemlerle verilir.

$$T_D = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_{D-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} T_{D-2} \quad (49)$$

Burada TD_1 ve TD_2 fonksiyonlarını oluşturmak için (6.3) deki tanım kullanılır.

$$T_{D-1} = \int_0^{t_D} \left\{ \frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(x_D-\tau)^2}{4\tau}\right) (erfc(\alpha_1) + erfc(\alpha_2)) \right\} d\tau \quad (50)$$

ve

$$T_{D-2} = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \left\{ \int_0^{t_D} \frac{\tau^m x_D \exp\left(-\frac{(x_D-\tau)^2}{4\tau}\right)}{m! \sqrt{\tau^3} \sqrt{(t_D-\tau)^m}} \begin{pmatrix} e^{-\alpha_1^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_1) + \\ e^{-\alpha_2^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_2) \end{pmatrix} d\tau \right\} \quad (51)$$

Üç eşitlikten oluşan bu yeni analitik çözümün; tamamlayıcı hata ve Hermit fonksiyonlarını da içeren iki adet belirli integral fonksiyonlarının sonsuz toplamları dizisi şeklindeki bir yapıya sahip olduğu görülür.

Ek-11 de yer alan B-2-1, B-2-2 ve B-2-3 programları ile bu analitik çözümün sayısal sonuçları ve analizi yapılmıştır. Bu programlarda belirli integraller için *INT1* ve *INT2* isimli iki ayrı matlab fonksiyonu oluşturulmuştur. Bu modelde de (λ ve a_D) değişken değerleri kullanılmıştır.

4.2.1 Algoritma Düzenlemeleri ve Tolerans Kabulleri

Analitik çözümün sayısal sonuçları ve analizleri için bazı algoritma ve tolerans kabulleri aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir.

TD_1 İntegrali için *INT1* fonksiyonu; *TD_2* İntegrali için *INT2* fonksiyonu oluşturulmuştur. Bu İntegraller için tolerans hesaplamaları;

- Tolerans1; *TD_1* integrali sınır aralıkları adımlarının (*adim*) genişletilmesi ile ortaya çıkan integral değerleri farkı (Yamuk yöntemiyle hesaplanmış)

$$T_{D_{-1}} = \int_0^{t_D} \left\{ \frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) \right. \\ \left. (erfc(\alpha_1) + erfc(\alpha_2)) \right\} d\tau \quad (52)$$

- Tolerans2; TD_{-1} integrali sınır aralıkları adımlarının (*adim*) genişletilmesi ile ortaya çıkan integral değerleri farkı (Yamuk yöntemiyle hesaplanmış) şeklindedir

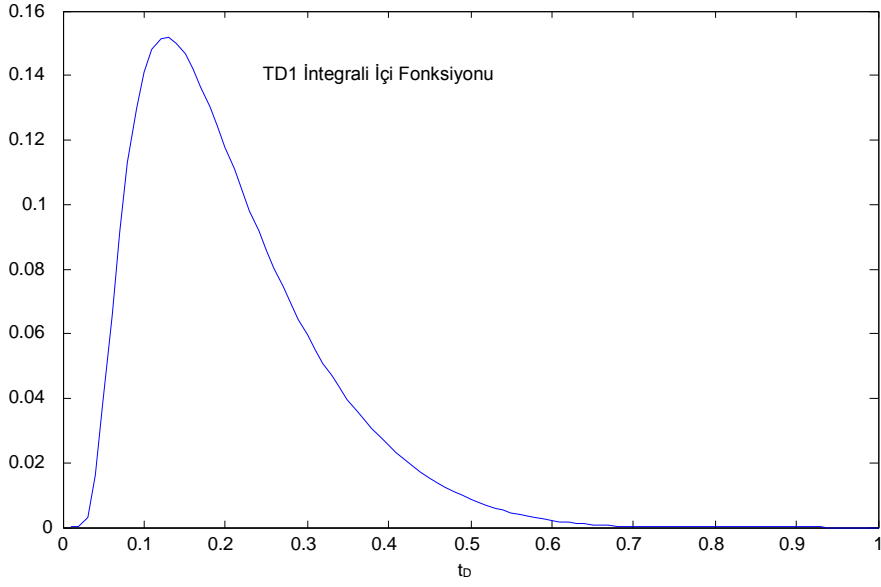
$$T_{D_{-2}} = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \left\{ \int_0^{t_D} \frac{\tau^m x_D \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right)}{m! \sqrt{\tau^3} \sqrt{(t_D - \tau)^m}} \right. \\ \left. \left(e^{-\alpha_1^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_1) + e^{-\alpha_2^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_2) \right) d\tau \right\} \quad (53)$$

Sonsuz seri toplamları için de bir *üst* sınır belirlenmiş ve bu sınır değerinin bir önceki adım sınır değeri ile farkından tolerans3 hesaplanmıştır. Bu tolerans değerini makul değerlere düşürmek için sınır değeri artırılarak hesaplama yapılmıştır.

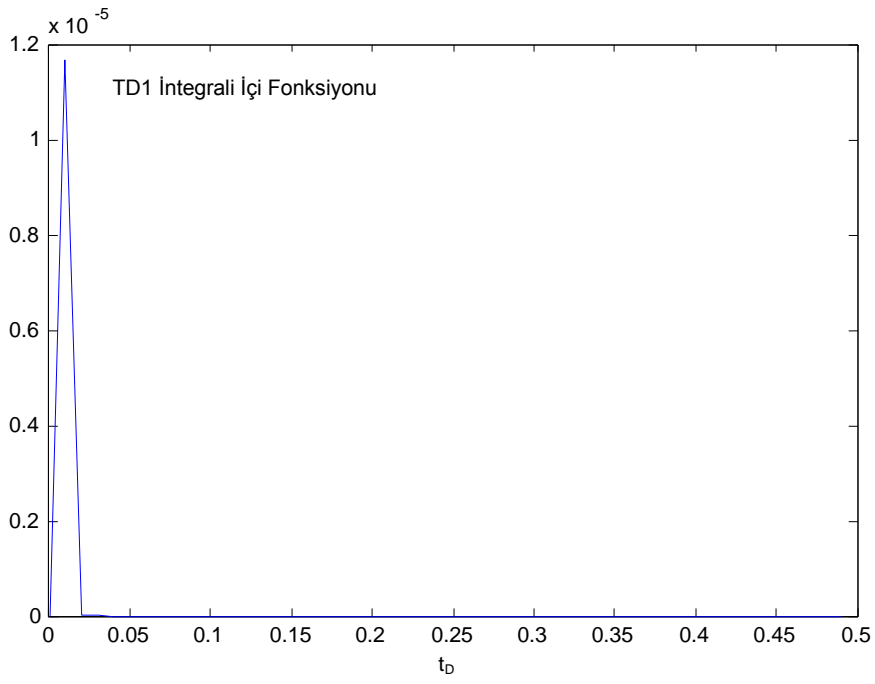
$$T_D = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_{D_{-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} T_{D_{-2}} \quad (54)$$

4.2.2 Yakınsama Örnekleri

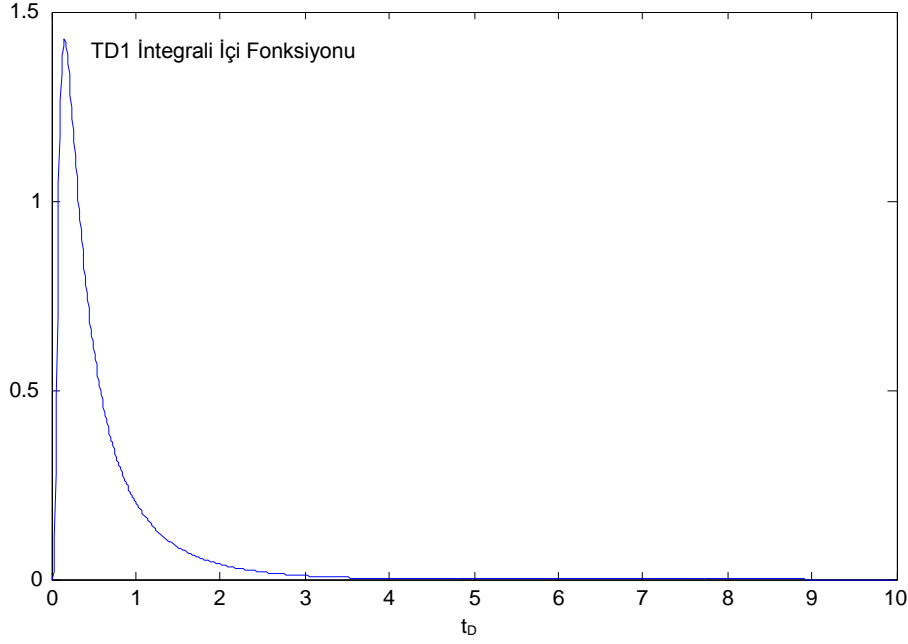
Aşağıda yer alan Şekil 4.10, 4.11 ve 4.12, TD_{-1} integrali içerisindeki fonksiyonun bazı parametre değerleri için yakınsama noktalarını ve bunlara karşılık gelen tolerans1 değerlerini göstermektedir. TD_{-1} integral içi fonksiyonu $INTI(x_D, t_D, \lambda, a_D, n)$ matlab fonksiyonu ile parantez içerisindeki parametrelere göre hesaplanmaktadır. Aşağıdaki grafiklerde de bu formatta gösterilmiştir.



Şekil 4.10 $adım=0.01$ ve $INT1(1,1,1,1,1)$ için Tolerans1 = $8.6006e-009$.

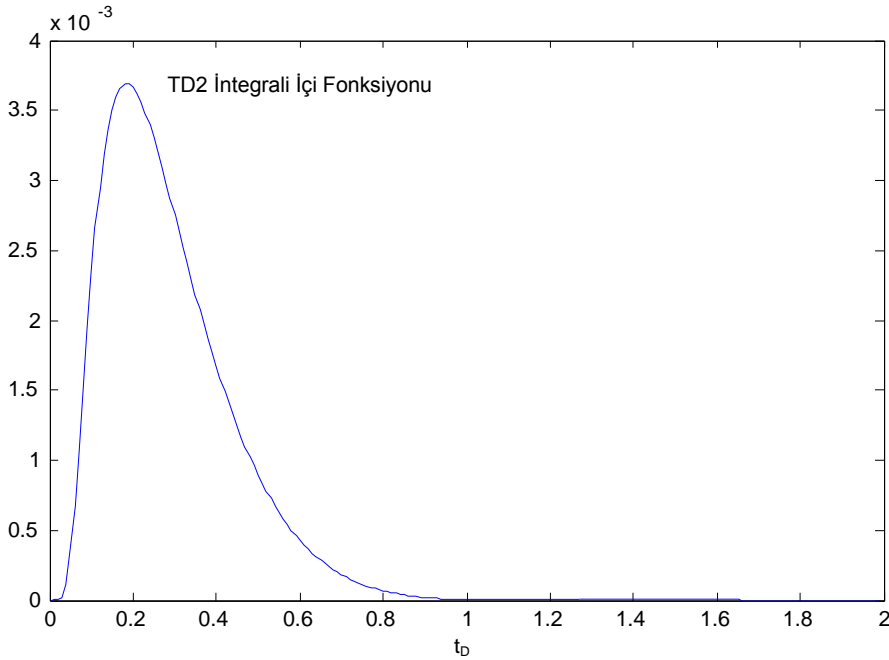


Şekil 4.11 $t_D=0..0.5$ ve $INT1(1,0.5,0.01,2,1)$ için Tolerans1 = $7.0355e-008$.

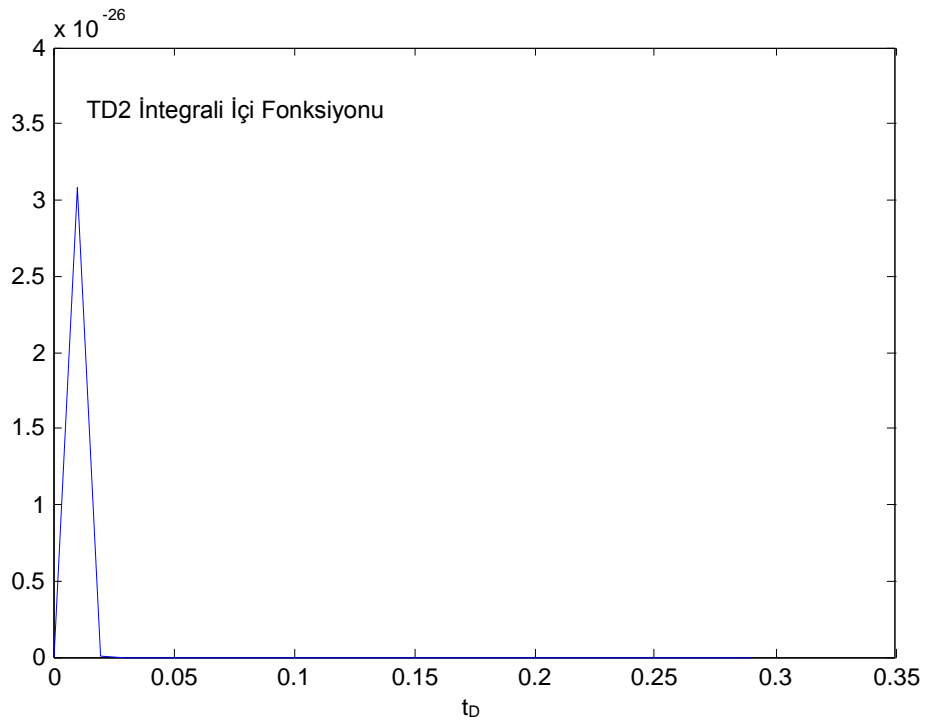


Şekil 4.12 $adım = 0.01$ ve $INT1(1,10,1,1,1)$ için Tolerans1 = $8.6971e-008$.

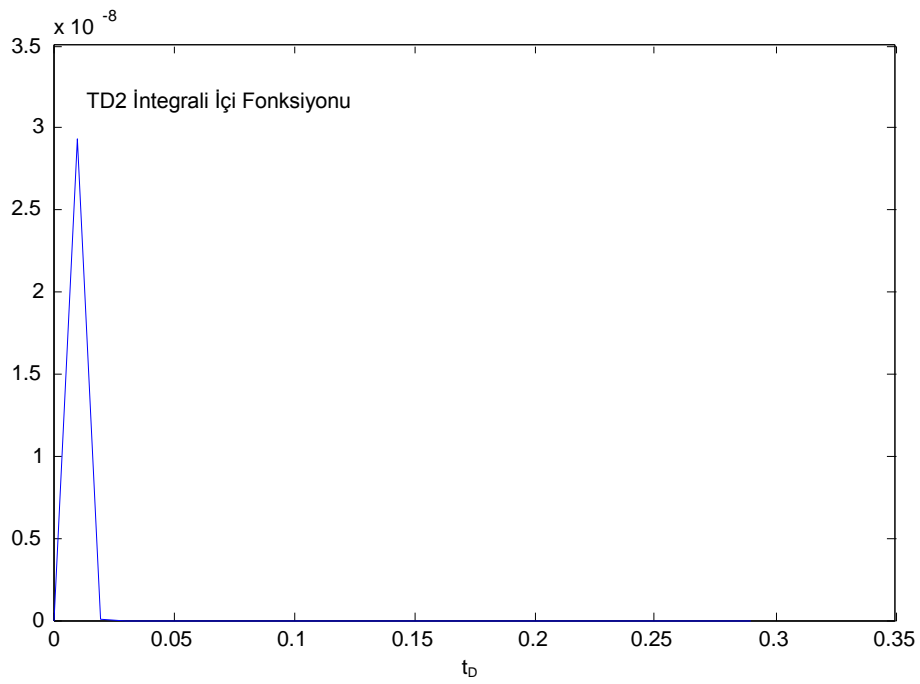
Aşağıda yer alan Şekil 4.13, 4.14, 4.15 ve 4.16, TD_2 integrali içerisindeki fonksiyonun bazı parametre değerleri için yakınsama noktalarını ve bunlara karşılık gelen tolerans2 değerlerini göstermektedir. TD_2 integral içi fonksiyonu $INT2(x_D, t_D, \lambda, a_D, n, m)$ matlab fonksiyonu ile parantez içerisindeki parametrelere göre hesaplanmaktadır. Aşağıdaki grafiklerde de bu formatta gösterilmiştir.



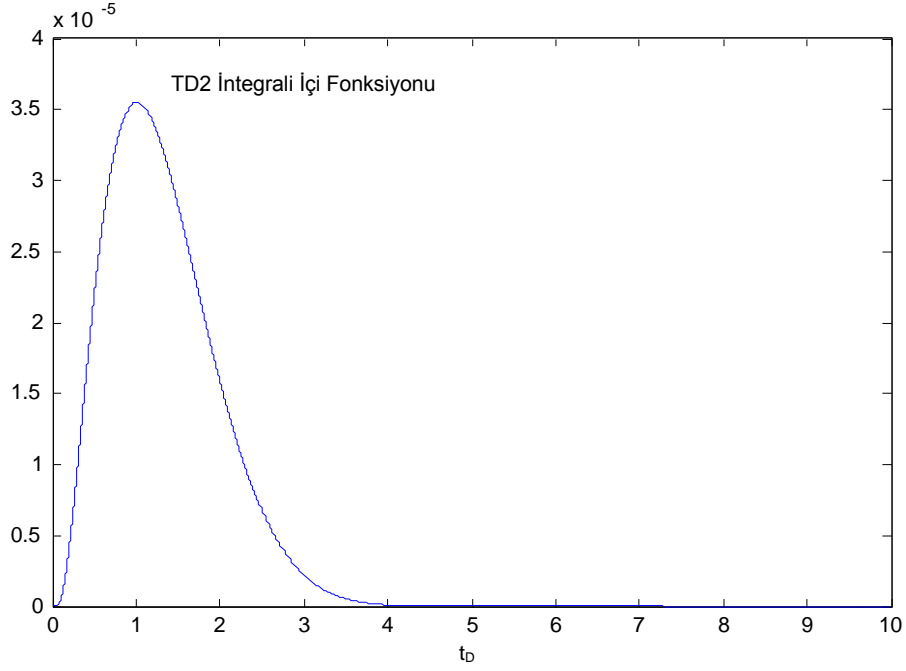
Şekil 4.13 $adım = 0.01$ ve $INT2(1,2,1,1,3,1)$ için Tolerans2 = $3.7665e-006$.



Şekil 4.14 $t_D=0..0.3$ ve $INT2(1,0.3,0.01,2,3,1)$ Tolerans2 =4.2277e-018.

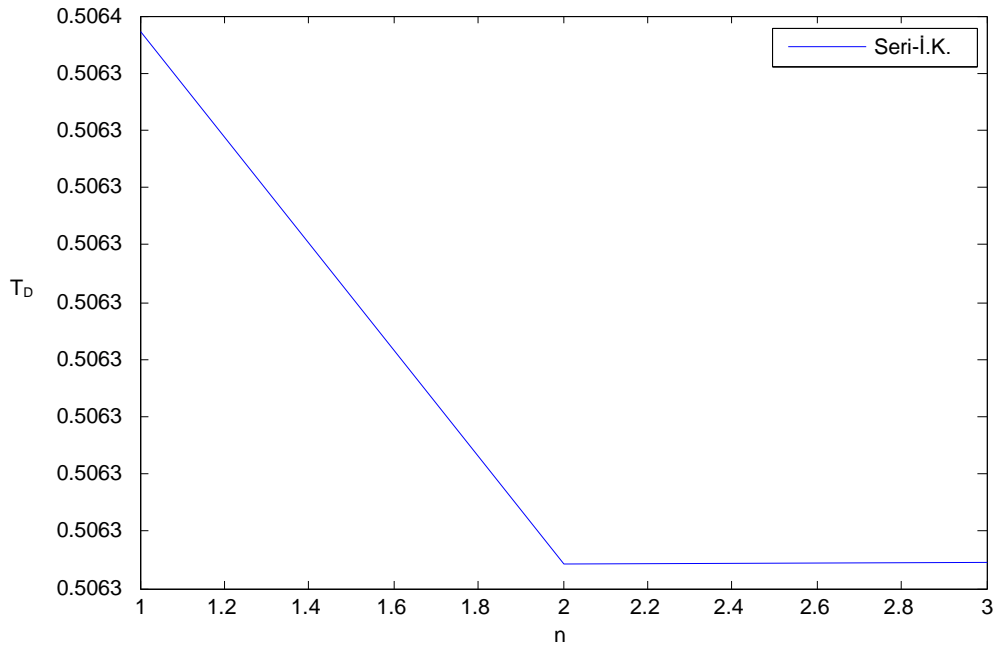


Şekil 4.15 $t_D=0..0.3$ ve $INT2(1,0.3,0.01,2,1,1)$ Tolerans2 = 1.2352e-005.

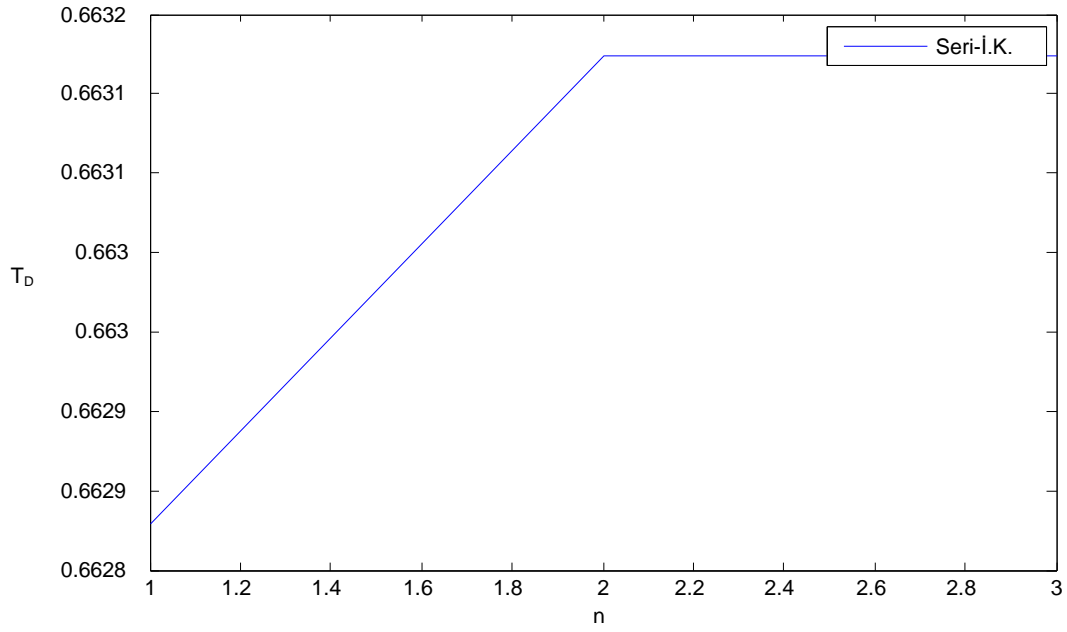


Şekil 4.16 $adim=0.01$, $INT2(1,10,1,1,8,3)$ için Tolerans2 = $3.5268e-007$.

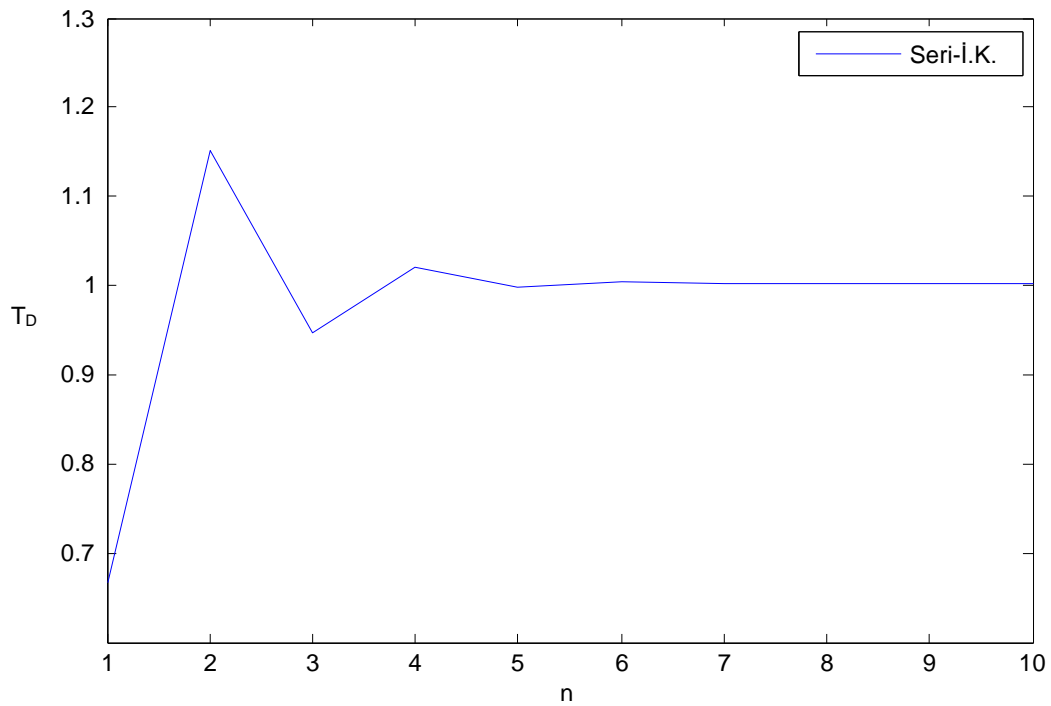
Aşağıda yer alan Şekil 4.17, 4.18 ve 4.19’da ise T_D Sonsuz seri toplamlarının farklı parametre değerleri için yakınsamalarını ve bu değerlere karşılık gelen tolerans3 hata paylarını göstermektedir.



Şekil 4.17 $t_D=1, n=3$ (λ, a_D) = (1,1) için T_D yakınsaması ($x_D=1$) Tolerans3 = $3.1051e-007$.



Şekil 4.18 $t_D=1, n=3, (\lambda, a_D)=(0.01, 2)$ için T_D yakınsaması ($x_D=1$) Tolerans3 = $3.5989e-007$.



Şekil 4.19 $t_D=10, n=10, (\lambda, a_D)=(0.01, 2)$ için T_D yakınsaması ($x_D=1$) Tolerans3 = $2.8985e-006$.

Yukarıdaki grafiklerin verileri doğrultusunda şu sonuçlara ulaşılabılır;

- TD_1 İntegralinin 10^{-7} lik toleranslarla yakınsaması için 0,01 lik *adim* aralıkları yeterlidir.
- TD_2 İntegralinin 10^{-7} lik toleranslar ile yakınsaması için 0.001 *adim* aralıkları yeterlidir. Ancak $n=1$ için tolerans değerleri büyümektedir. n değeri büyüdükçe tolerans değerleri de küçülmektedir. t_D değerleri büyüdükçe toleransı muhafaza için n sayısının da artması gerekmektedir.
- İntegral toplamlarından T_D hesaplamasında 10^{-7} lik toleranslarla yakınsama için sonsuz toplam *üst* sınırının 10 (n) olması yeterli gelmektedir. t_D nin küçük değerleri için bu da fazladır. $t_D+2=n$ gibi değerler yeterlidir.

4.3. Çözümlerin Karşılaştırılması

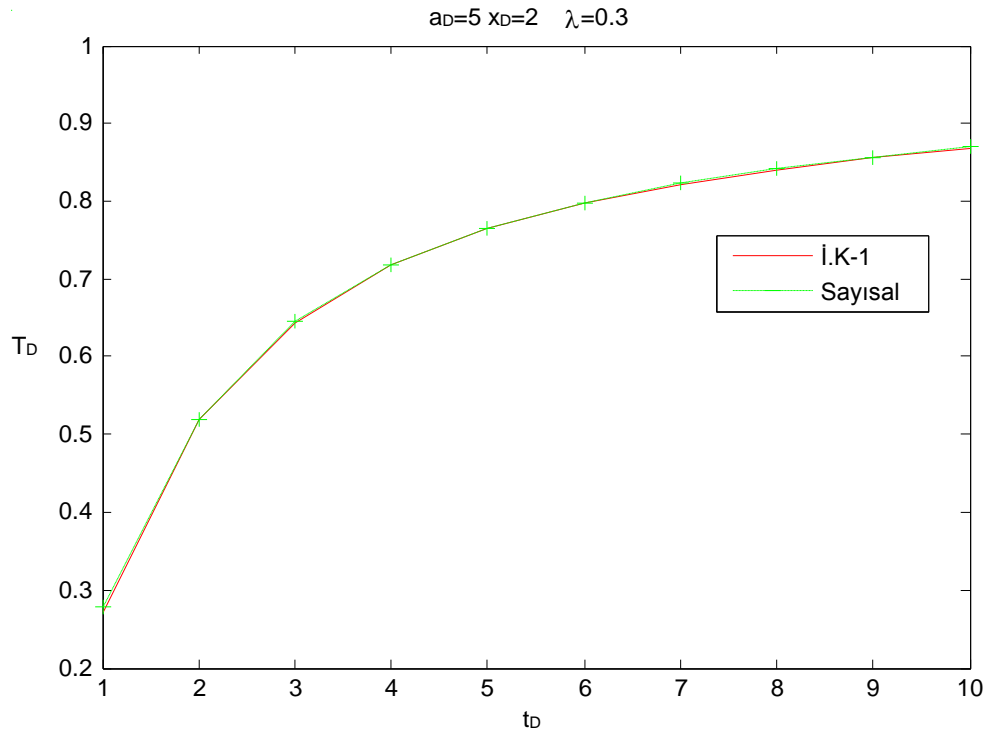
Bu aşamada da yine INVLAP isimli bir sayısal ters dönüşüm fonksiyonu sonuçları yeni iki çözümün sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. (bkz. Ek-12 /A-3-2).

Her iki paralel çatlaklı rezervuar modeli analitik çözümlerinde genel olarak 10^{-7} lik toleranslar kabul edilmiştir. Kıyaslama için yazılımların içerisindeki tolerans döngüleri iptal edilerek hesaplama yapılmıştır. t_D nin 1 den 10 a kadar olan ardışık değerleri için hesaplama yapılmış, grafik çizdirilmiş ve program hesaplama süreleri not edilmiştir.

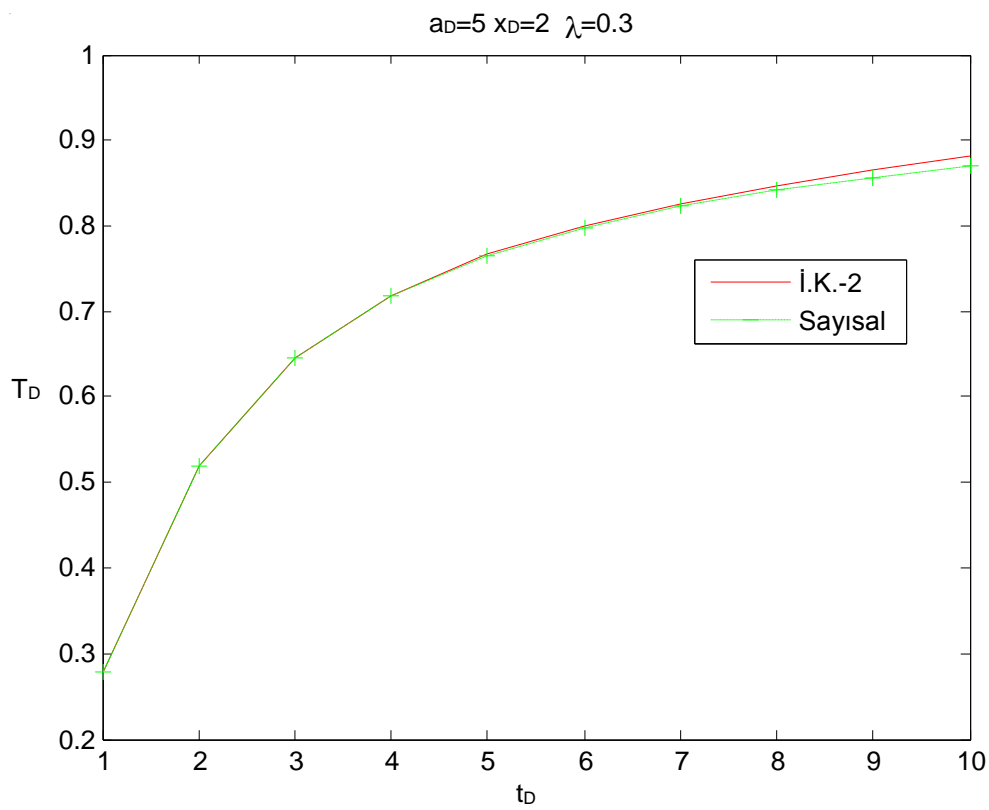
Bu kabuller sonrasında her iki çözüm değerleri grafik üzerinde çakışmış, ikinci analitik çözüm (Şekil 4.20 de İ.K.-2 olarak isimlendirilen), ilk analitik çözüme (Şekil 4.19 da İ.K.-1 olarak isimlendirilen) göre daha az süre almıştır. Ancak bu ilk analitik çözümünde 10^{-7} lik toleranslar için ciddi süreler gerektiğinden t_D nin 0..1 aralığı ve λ, a_D nin küçük değerleri kıyaslama dışı bırakılmıştır. Buna göre İ.K.-2 çözümünün daha etkin ve geniş kullanım alanlı olduğu ortaya çıkar.

Aşağıda yer alan grafiklerin tümünde INVLAP sayısal yaklaşımı çözümlerine de yer verilerek Sayısal Laplace dönüşümünün doğruluğu teyid edilmiş ve buna ek olarak olası yazılım hatalarının olmaması sağlanmıştır.

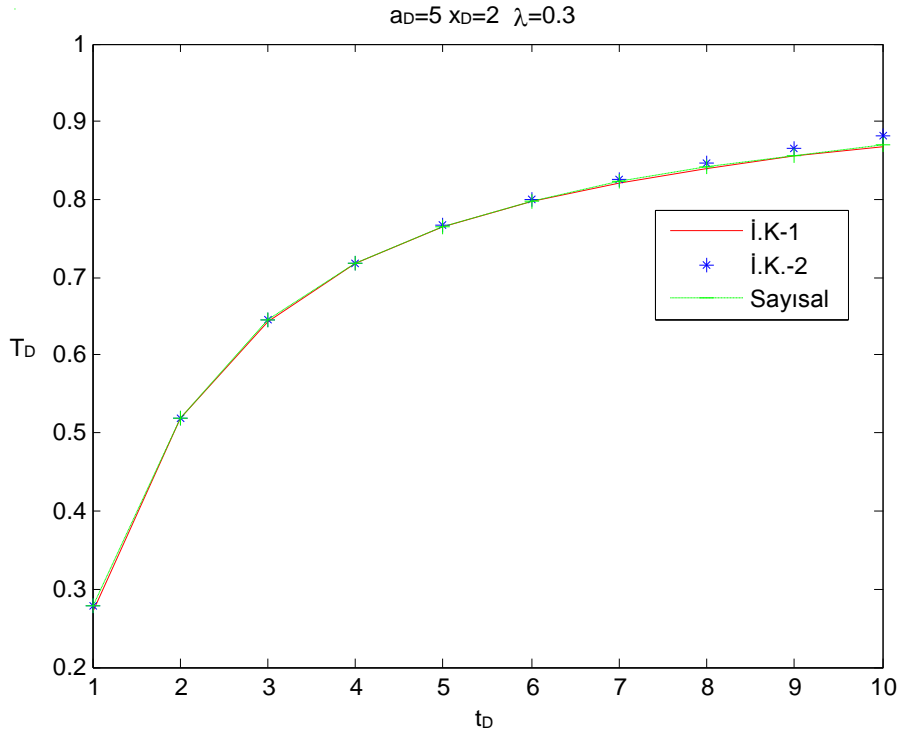
Bu kıyaslamalar neticesinde t_D nin ve λ, a_D nin her aralığı çözümleri için ikinci analitik çözüm daha uygundur. Bu nedenle boyuna ısı yayılımının etkilerini ve analizlerini test etmek için bu çözümün kullanılması daha uygundur.



Şekil 4.20 $t_D=1..10$, $ust=200$, $adim1=0.01$, $adim2=0.001$ için hesaplama Süresi:340 saniye.



Şekil 4.21 $t_D=1..10$, $TD1-adim=0.01$, $TD2-adim=0.001$ için hesaplama Süresi:325 saniye



Şekil 4.22 $t_D=1..10$ için model çözümleri, *I.K.-1*: 1.Yeni Analitik Çözüm, *I.K.-2*: 2.Yeni Analitik Çözüm
Sayısal : INVLAP sayısal yaklaşım çözümü

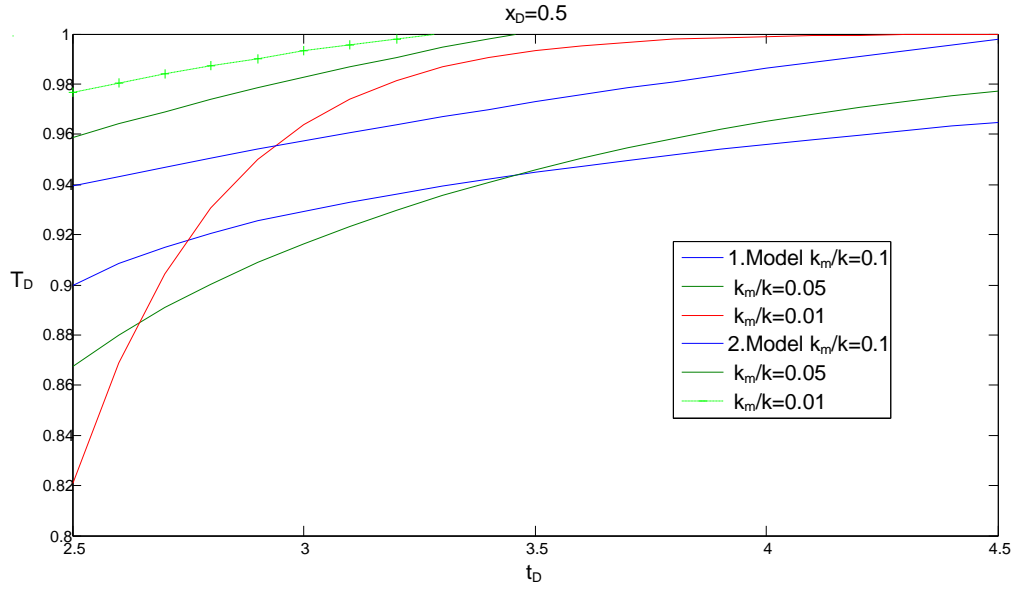
4.4 Boyuna Isı Yayılmının Etkisi

Paralel çatlaklı rezervuar modeli yeni analitik çözümü ile Skopp ve Warrick modeli yeni analitik çözümleri kullanılarak farklı k_m/k değer yelpazeleri için Şekil 4.23 ve 4.24'de verilen grafikler matlab programları yardımıyla oluşturulmuştur.

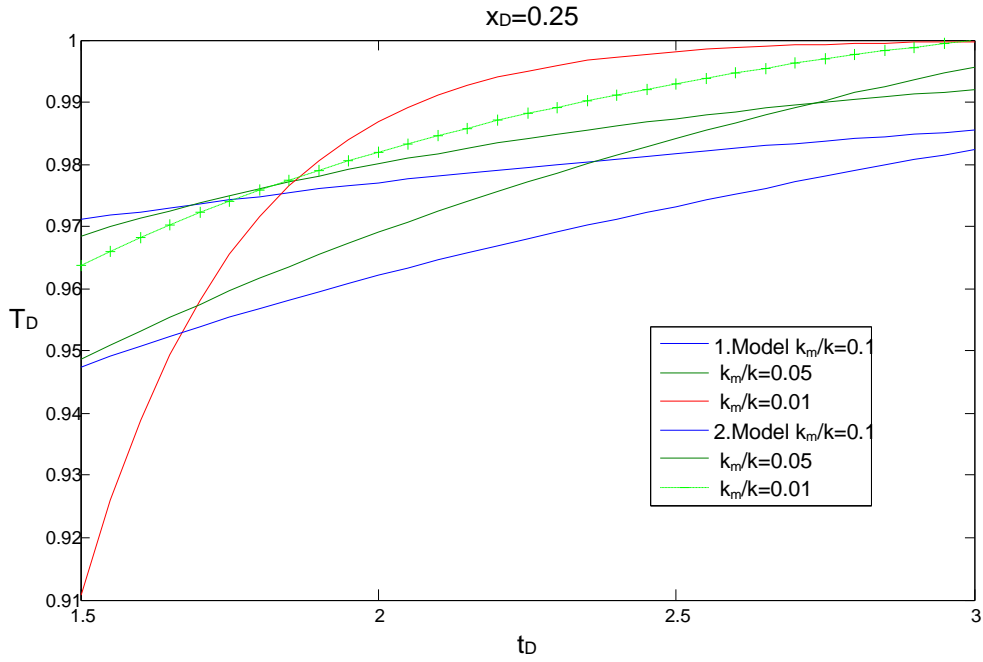
Dikkat edilmesi gereken bir nokta her iki modelde kullanılan x_D ve t_D değişken tanımlarının birbirinden farklı oluşudur. Bu nedenle grafikler oluşturulurken II. Akış modeli parametreleri baz alınarak bu değerlere karşılık gelen I. Akış Modeli parametreleri için ortak x_D , t_D değerleri hesaplanmıştır.

Grafiklerden görüleceği gibi k_m/k değerinin küçülmesi T_D model grafiklerinin birbirine yakınsamasına neden olmaktadır.

Modeller arasındaki fark akış yönündeki ısı yayılımıdır. Ortak bir k_m/k değeri için ısı yayılımının hesaba katılması T_D değerinde neredeyse %20 lik bir artışla neticelenmiştir. Bu ise üretilen suda kabaca %20 lik bir sıcaklık düşüşü anlamına gelir. Bu k_m/k değerinin 10 kat düşürülmesi T_D oranını %5 lere düşürmektedir. Dolayısıyla akış yönündeki ısı yayılımı ihmal edilebilir bir parametre gibi görünmemektedir.



Şekil 4.23 k_m/k için I. Akış modeli ve II. Akış modeli çözümleri karşılaştırması, $x_D=0.5$.



Şekil 4.24 k_m/k için I. Akış modeli ve II. Akış modeli çözümleri karşılaştırması, $x_D=0.25$.

5. DUYARLILIK VE REGRESYON ANALİZLERİ

5.1 I. Akış Modeli

Bu kısımda I. Akış Modeli'nin yeni analitik çözümünün orantılı parametrelerin kullanıldığı orantılı duyarlılık analizleri yer almaktadır. Ayrıca model, izleyici yayılım modeline uyarlanarak gürültülü veri kullanımı ile doğrusal olmayan regresyon analizi de yapılmıştır.

5.1.1 Orantılı Parametre ve Duyarlılık Tanımları

Bu model için Orantılı duyarlılık katsayısı tanımı aşağıdaki eşitlikteki gibidir.

$$S_i = P_i \frac{\partial T_D(x_D, t_D)}{\partial P_i} \quad (55)$$

Burada P_i model parametrelerini temsil etmektedir. Bu model için bu parametreler x_D ve t_D değişkenleridir. Model analitik çözümünün bu parametrelere göre alınmış kısmi türevleri EK-7 de ve bu türevlerin Matlab yazılımları EK-12/C-1 de yer almaktadır.

Akış modelinin canlandırılması/fiili durumlara adapte edilebilmesi için aşağıdaki tanımlar olası model parametre değer aralıklarının tesbit edilmesinde oldukça kullanışlıdır.

İlk olarak boyutsuz zaman ve mesafe değişkenleri aşağıdaki gibi tekrar düzenlenebilir.

$$t_D = \left(\frac{ut}{L} - \frac{\rho_r c_r}{\rho_w c_w \phi} \frac{x}{L} \right) \frac{L k_m}{u \rho_m c_m a^2}, \quad x_D = \frac{k_m L}{\rho_w c_w \phi u b a} \frac{x}{L} \quad (56.1)$$

Böylelikle aşağıdaki boyutsuz normalize değişkenleri tanımlanabilir.

$$x_{Dn} = \frac{x}{L}, \quad t_{pvi} = \frac{ut}{L} \quad (56.2)$$

$$\theta = \frac{\rho_r c_r}{\rho_w c_w \phi} \quad (57)$$

$$t_{Dm} = \frac{Lk_m}{u\rho_m c_m a^2}, \quad x_{Dm} = \frac{k_m L}{\rho_w c_w \phi u b a} \quad (58)$$

Çatlak içerisinde sıvı/katı veya ısı taşınımı, matriks komşuluğundaki değerlere kıyasla ihmal edilebilir düzeylerde olduğunda θ değişkeni 1 olarak kabul edilebilir. Böylece duyarlılık analizleri t_{Dm} ve x_{Dn} parametrelerine göre düzenlenebilir. Böylece t_{Dm} ve x_{Dm} duyarlılıkları x_{Dn} ve t_{Dn} değişkenlerinin fonksiyonu olacaktır. Akış boyunca duyarlılıklar x_{Dn} değişkeninin 0 ile 1 arasındaki değerleri için hesaplanacaktır.

Isıl cephe oldukça yavaş yayılacağı için sıcaklık ve duyarlılık değerlerinde önemli değişiklikler görebilmek için t_{Dn} nin 100-300 gibi değerler alması gerekebilecektir.

$x=L$ sınırında sıcaklık değişimleri görebilmek için ön kabul değerleri olarak $t_{Dn}=100$ ve 200 Tahmini/ortalama x_{Dm} ve t_{Dm} değerleri olarak ise sırasıyla 3,1 ve 0,011 değerleri kullanılmıştır.

Çizelge 5.1 Orantılı duyarlılık için orantılı parametre ve örnek değerler

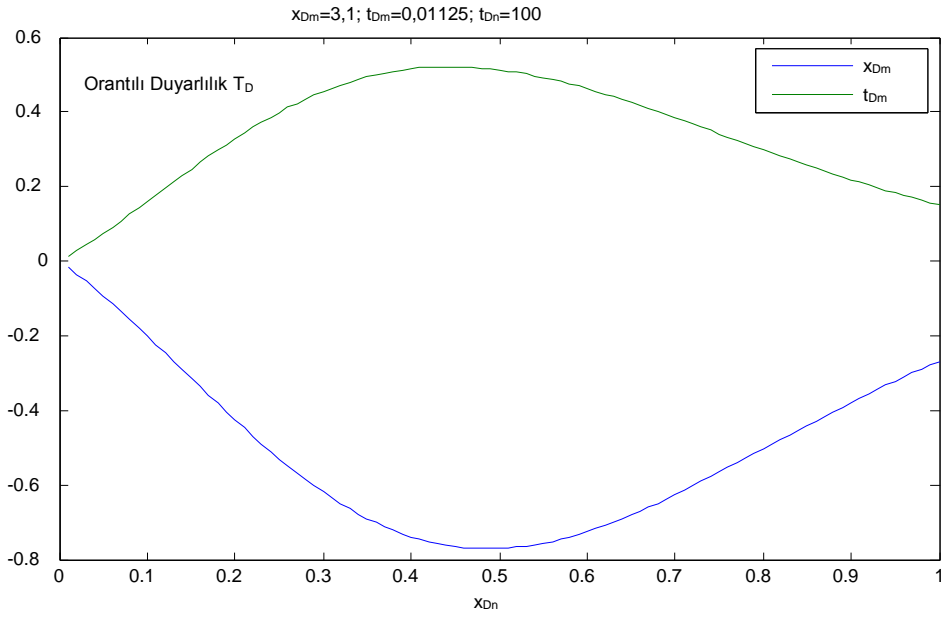
Parametre	Tahmini değer	Birim
L	300	m
u	5	m/h
a	5	m
b	0,1	m
ρ_w	1000	kg/m ³
c_w	4186	J/kg.K
ϕ	0,25	-
ρ_m	960	kg/m ³
c_m	2400	J/kg.K
k_m	3	W/m.K
1 W=1 J/s=3600 J/h		

		a/b=50	a/b=100	a/b=200
t_{Dm}	0,01125	0.045	0.01125	0,0028
x_{Dm}	2,47682752	5	2,5	1,24
x_{Dn}	0..1			
t_{Dn}	1			

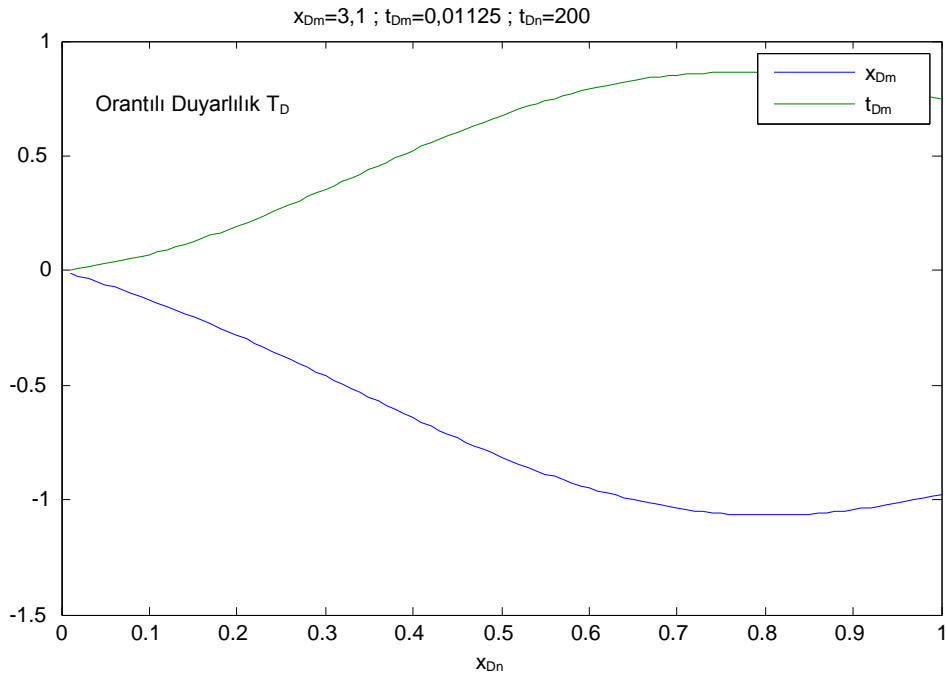
x_D	(0..1)* x_{Dm}
t_D	(1-0..1)* t_{Dm}

5.1.2 Orantılı Duyarlılık Grafikleri

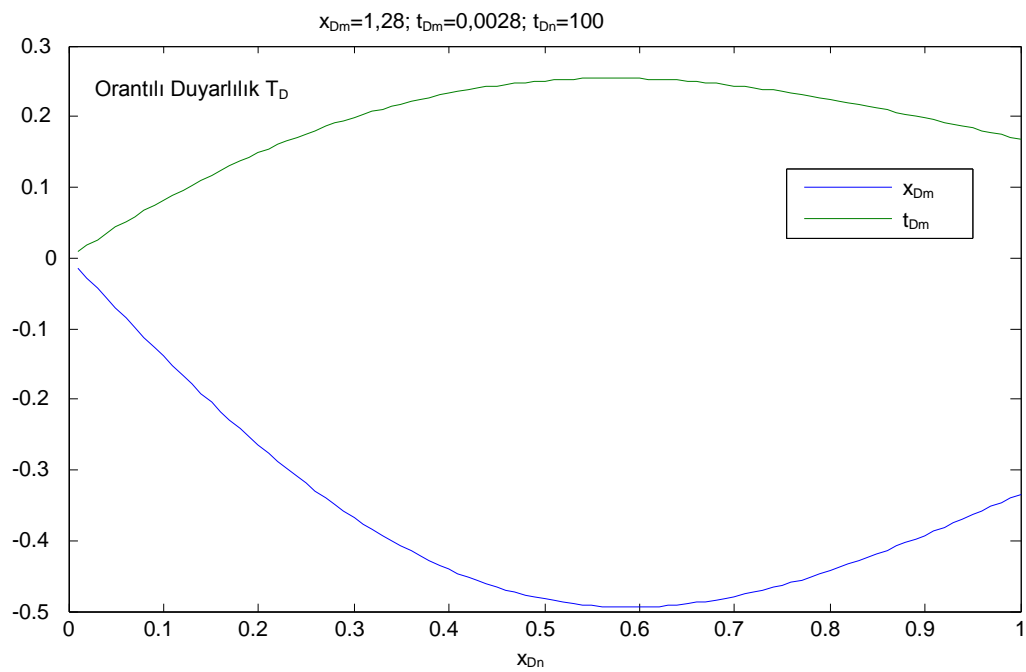
Şekil 5.1, 5.2, 5.3 ve 5.4 farklı senaryolar için x_{Dn} boyunca orantılı duyarlılık değerlerini göstermektedir. Bu grafiklerde Akış hattı boyunca konum ve zaman orantılı parametreleri farklı yönlerde benzer değerler aldığı görülmektedir. Bu da bu parametrelerin birbirinden bağımsız olmadığını göstermiştir.



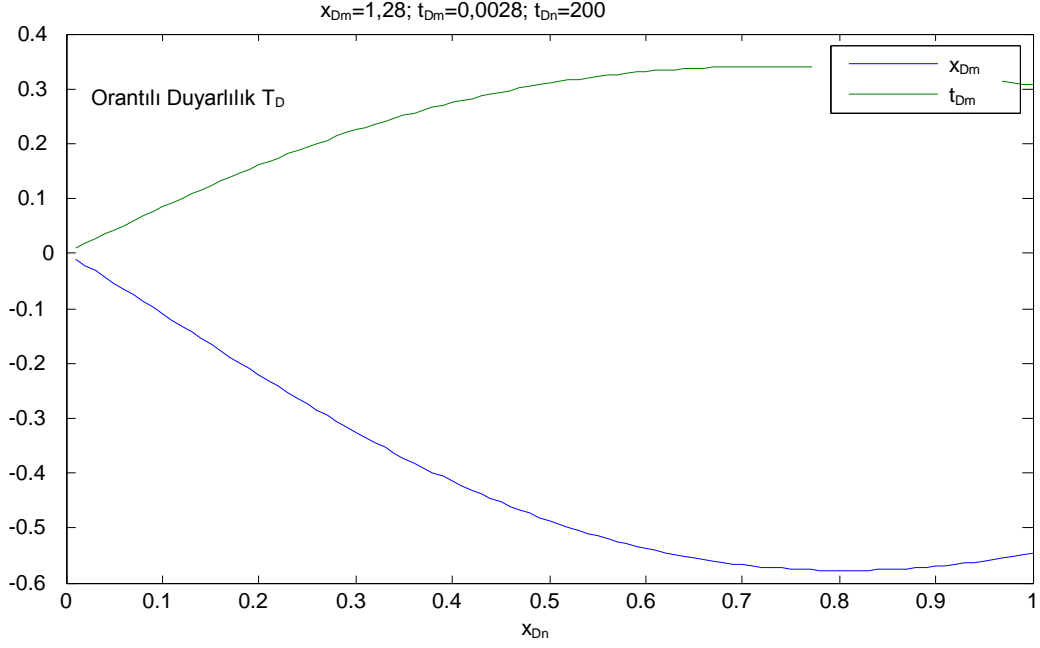
Şekil 5.1 $x_{Dm}=3,1$, $t_{Dm}=0,01125$, $t_{Dn}=100$ için x_{Dn} aralığı orantılı duyarlılık dağılımı.



Şekil 5.2 $x_{Dm}=3,1$, $t_{Dm}=0,01125$, $t_{Dn}=200$ için x_{Dn} aralığı orantılı duyarlılık dağılımı.

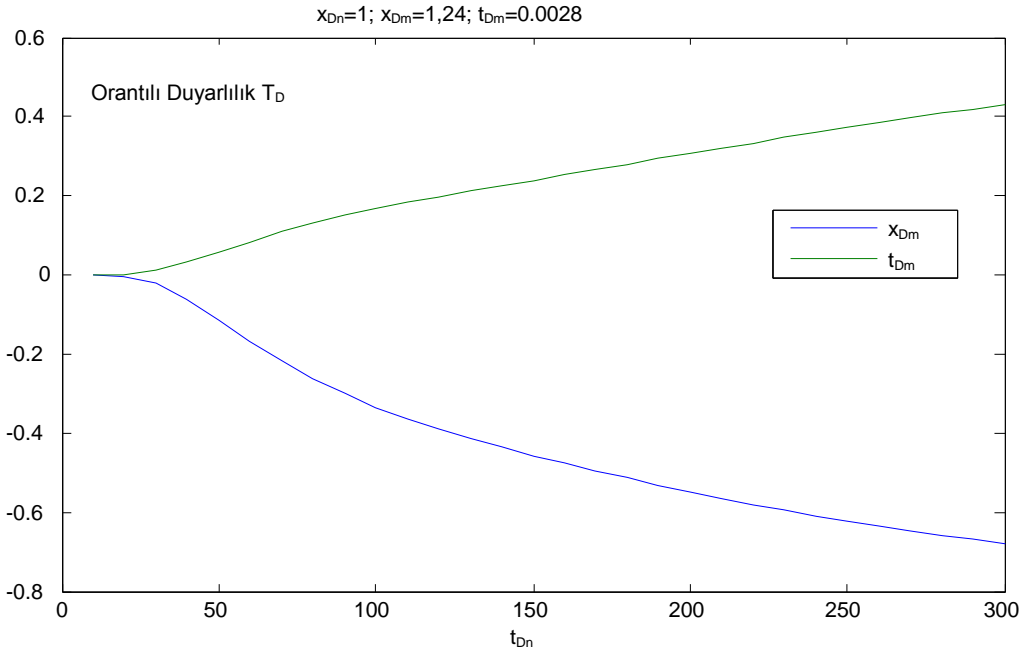


Şekil 5.3 $x_{Dm}=1,28$, $t_{Dm}=0,0028$, $t_{Dn}=100$ için x_{Dn} aralığı orantılı duyarlılık dağılımı.

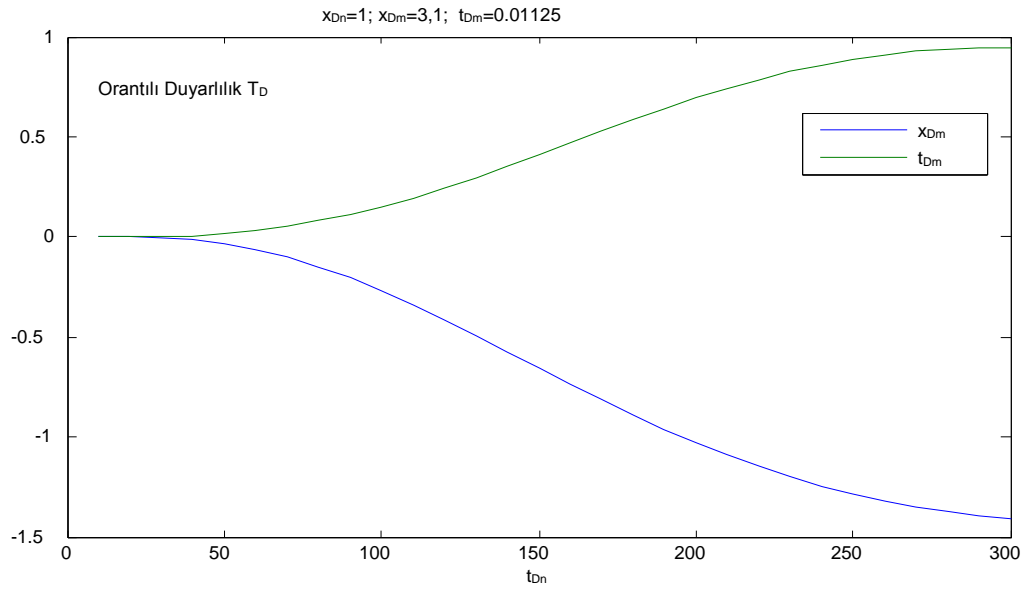


Şekil 5.4 $x_{Dm}=1,28$, $t_{Dm}=0,0028$, $t_{Dn}=200$ için x_{Dn} aralığı orantılı duyarlılık dağılımı.

Aşağıda yer alan Şekil 5.5 ve 5.6 da ise farklı iki senaryo için t_{Dn} süreci orantılı duyarlılık değerlerini göstermektedir. Akış sonu üretim noktasındaki orantılı duyarlılık değerlerini veren bu grafiklere göre belirleyici veriler elde edebilmek için en azından gözenek hacminin 100 katı kadar enjeksiyon süresi geçmesi gerekmektedir. Bu grafikler de konum ve zaman orantılı parametrelerinin birbirine bağımlı olduğunu göstermiştir.



Şekil 5.5 $x_{Dm}=1,24$, $x_{Dn}=1$, $t_{Dm}=0,0028$ için t_{Dn} aralığı orantılı duyarlılık dağılımı.



Şekil 5.6 $x_{Dm}=3,1$, $x_{Dn}=1$, $t_{Dm}=0.01125$ için t_{Dn} aralığı orantılı duyarlılık dağılımı.

5.1.3 İzleyici Taşınımı Analizleri

Bu kısımda I. Akış Modeli izleyici taşınım modeline uyarlanmıştır. Isı ve izleyici taşınım denklemleri aynı fiziksel olayları içermektedirler, diğer bir deyişle sıcaklık da bir çeşit izleyicidir. O nedenle aynı çözümleri sadece parametre değişiklikleri ile uygulamak mümkündür. İzleyici taşınım hızı ısı taşınım hızından çok daha büyük olduğu için, burada amaç üretim kuyusunda geri enjeksiyonun etkisini beklemeden bir izleyici modelden istifade ederek parametre değer kestirimleri yapabilmektir.

EK-9 da ayrıntılı şekilde açıklanan bu uyarlama ile aynı diferansiyel denklemlere ulaşılmıştır. Böylece yeni analitik model çözümü bu izleyici modeli için de kullanılacaktır. Bu modelin farkı sıcaklığın yerine izleyici derişimi alması ve diğer parametre tanımlarının bu doğrultuda değişmesidir.

Canlandırma/fiili durumlara adapte edebilme için bu modelde de boyutsuz parametre tanımları kullanılmıştır. Boyutsuz zaman ve mesafe için orantılı değişken tanımları yine Ek-9 da yer almaktadır (bkz. Ek-9: 9.9, 9.10, 9.11, 9.18, 9.19, 9.22, 9.23, 9.24 ve 9.25 nolu eşitlikler).

Doğrusal olmayan regresyon analizi için aşağıda yer alan çizelgedeki tahmini parametre değerleri kullanılmıştır. Bu analiz Ek-12 D-1 de gösterilen matlab yazılımlarıyla hesaplanmıştır.

Çizelge 5.2 İzleyici yayılım modeli orantılı parametre ve örnek değerler.

Parametre	Tahmini değer	Birim
L	3000	m
u	1	m/h
a	0,1	m
b	0,01	m
D_m	0,00000036	m ² /h
D	0,00000036	m ² /h
ϕ	0,05	-

t_{Dm}	0,108
x_{Dm}	0,054
x_{Dn}	1
t_{Dn}	1

Regresyon analizinde seçilen tahmini bir senaryo için boyutsuz orantılı parametre değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$t_{Dm} = \frac{LD_m}{ua^2} = \frac{L}{u} \frac{D_m}{a^2} = \frac{t_c}{t_m} = 0.1 ,$$

$$x_{Dm} = \frac{\phi_m D_m L}{uba} = \frac{L}{u} \frac{\phi_m D_m}{b^2} \frac{b}{a} = \frac{t_c}{t_t} \frac{b}{a} = 0.05 * 1 = 0.05 \quad \text{ve} \quad x_D = 1$$

Matlab da doğrusal olmayan regresyon için aşağıdaki Matlab içi rezerve *nlinfit* fonksiyonu kullanılmıştır.

$$[fitcof,r,J,Sigma]=nlinfit(XN,TD,@TDfun,xtd0)$$

Bu fonksiyon için gerekli diğer fonksiyonlar ise *TDfun*, model fonksiyon, *seritoplam2(xDm*Katsayı1,tDm*Katsayı2)* şeklindedir.

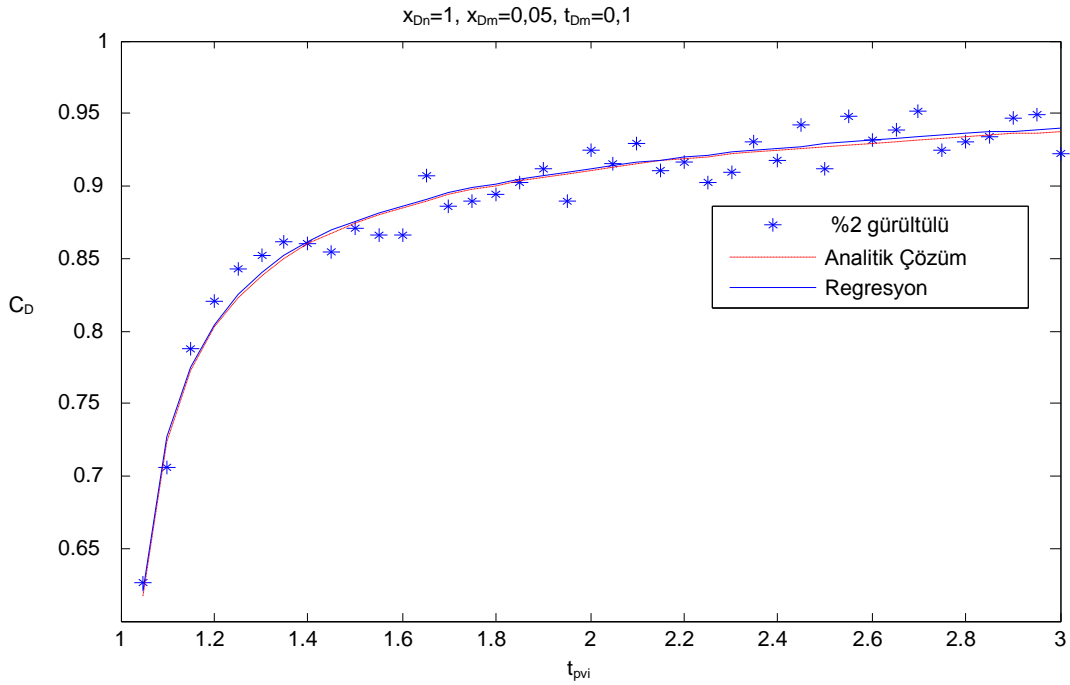
Analitik çözüm değerlerine gürültü eklenerek gürültülü derişim dağılımı oluşturulmuştur. Model fonksiyonda tüm noktalar için iki parametrelili bir vector (*katsayı1* ve *katsayı2*) ilk tahmin olarak kullanılmıştır. Bu parametrelerin model fonksiyondaki kullanım şekli analitik fonksiyonda x_D ve t_D değişkenlerinden hariç sabit bir katsayı kullanılmadığı için- *seritoplam(xD*Katsayı1,tD*katsayı2)* gibidir.

Aşağıdaki ilk üç grafik ilk tahmin katsayı değerleri olarak 1.1 ve 1.1 alınarak oluşturulmuştur. Ancak *nlinfit* fonksiyonu ile doğrusal olmayan regresyon sonrası bu

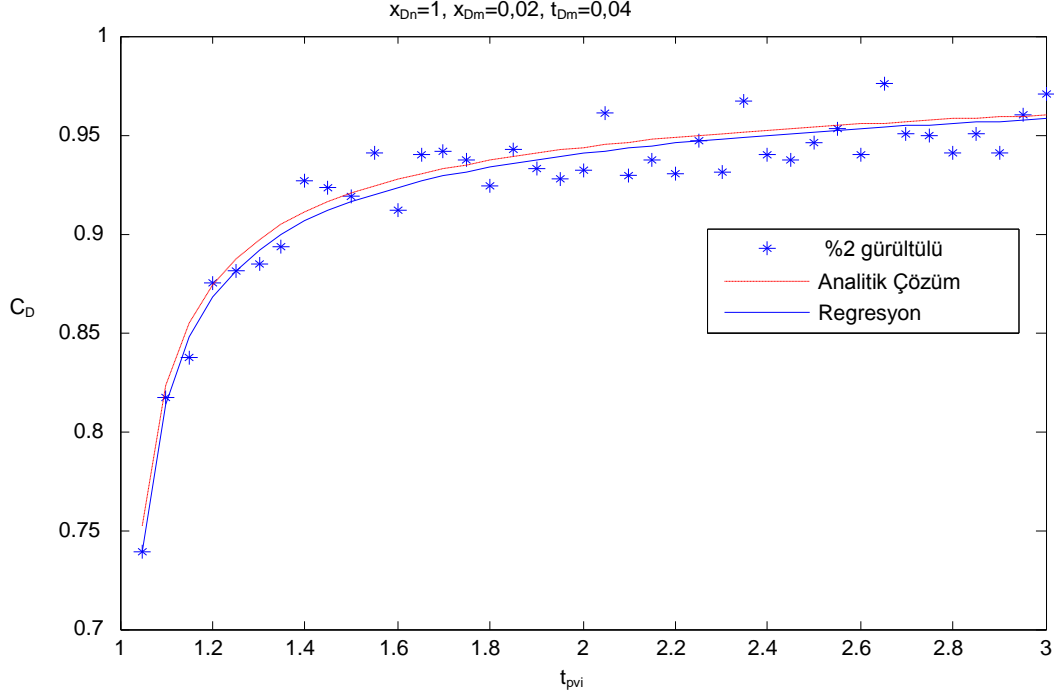
değerler 1 ve 1 e değilde başka x_D, t_D ikililerine de yakınsayabilmektedir. Mesela Şekil 5.8 de yer alan dağılım için bu katsayılar 1.1349 ve 1.3157 olarak bulunmuştur.

5.1.3.1 Regresyon Grafikleri

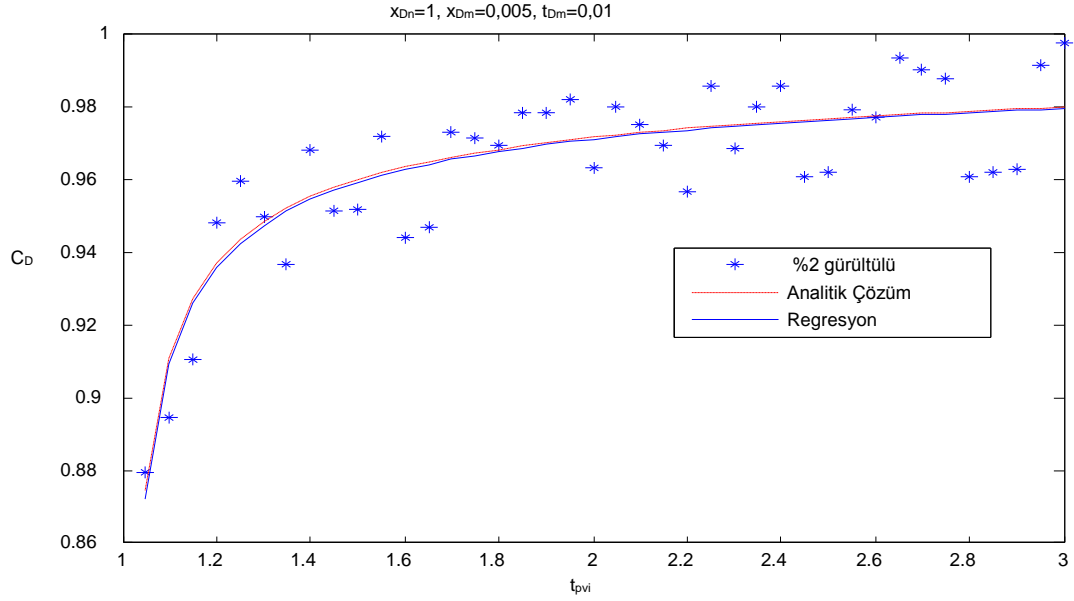
Şekil 5.7, 5.8 ve 5.9 da yer alan grafikler farklı senaryolar için gözenek tekrar basma süreleri ile (gözenek hacminin 1-3 katları için gereken) izleyici derişimi değişimini göstermektedir. Gürültülü veriler ve analitik model foksiyonun tahmini katsayıları ile oluşturulan doğrusal olmayan regresyon sonunda her üç senaryoda da analitik çözüm ile örtüşme gerçekleşmiştir.



Şekil 5.7 $x_{Dn}=1, x_{Dm}=0,05, t_{Dm}=0,1$ için gürültülü veri kullanımı ile izleyici dağılımları.

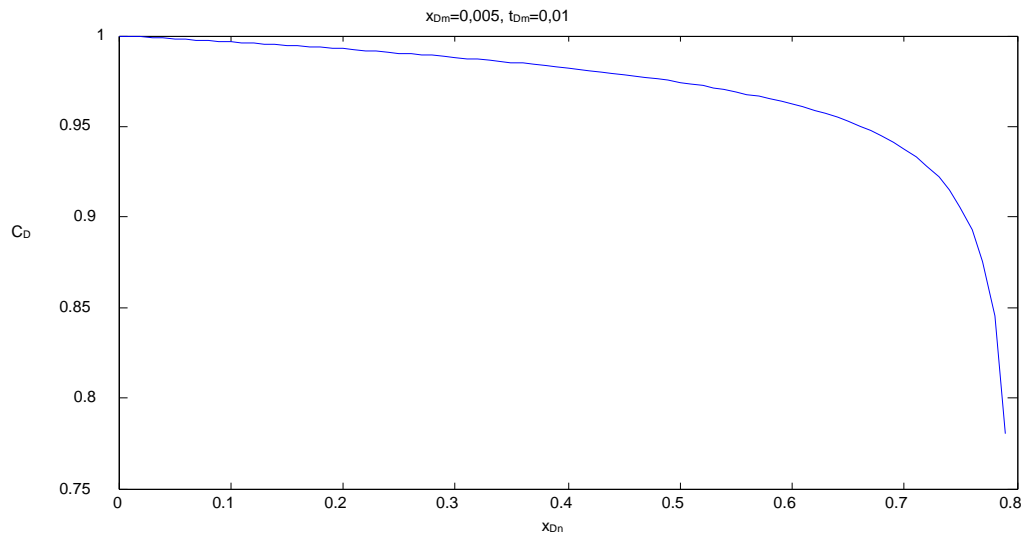


Şekil 5.8 $x_{Dn}=1, x_{Dm}=0,02, t_{Dm}=0,04$ için gürültülü veri kullanımı ile izleyici dağılımları.

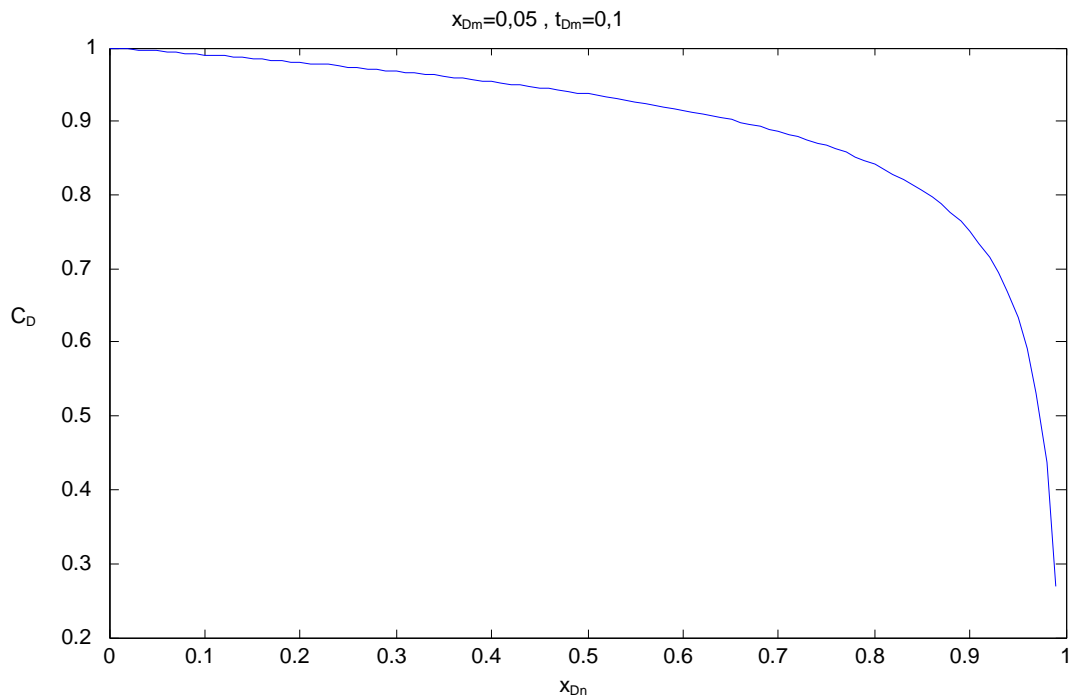


Şekil 5.9 $x_{Dn}=1, x_{Dm}=0,005, t_{Dm}=0,01$ için gürültülü veri kullanımı ile izleyici dağılımları

Şekil 5.10 ve 5.11 de yer alan iki grafik ise farklı iki senaryo için akış hattı boyunca oluşan izleyici derişim dağılımlarını göstermektedir. Orantılı parametreler ile oluşturulan bu grafiklere göre geri basma süresinin artışı üretim noktasındaki derişimlerde artışla sonuçlanmaktadır.



Şekil 5.10 $x_{Dm}=0.005, t_{Dm}=0.01$ için x_{Dn} boyunca izleyici derişim dağılımları.



Şekil 5.11 $x_{Dm}=0.05, t_{Dm}=0.1$ için x_{Dn} boyunca izleyici derişim dağılımları.

5.1.3.2 Güven Aralığı Grafikleri

Doğrusal olmayan regresyon için oluşturulan model fonksiyon ve buna bağlı katsayı/parameter tanımları ve $n\text{lparci}$ fonksiyonu kullanımı ile güven aralığı hesaplamalarında makul sonuçlara ulaşılamamıştır. Ancak tek parameter kullanımı ile (x_D ve t_D ye çarpan olarak değilde C_D ye çarpan olarak kullanılan) aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

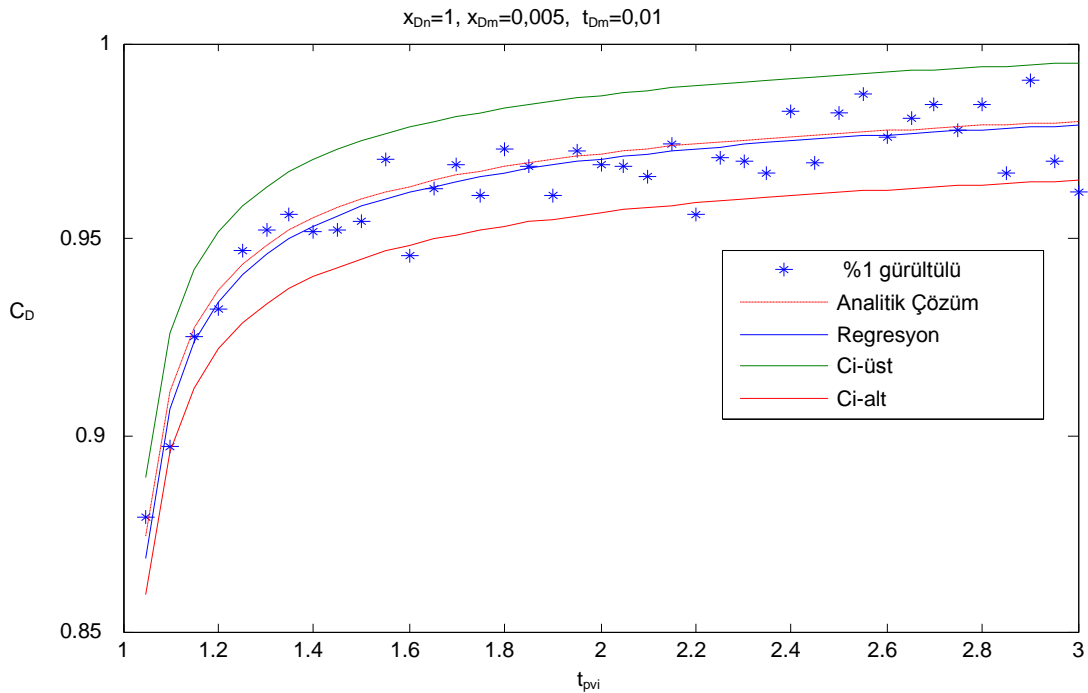
- $katsayı=1.1$ (ilk tahmin)
- Model fonksiyon= $\rightarrow seritoplam(xd,td)*katsayı$
- $\text{Fitcof}(Katsayı)=1.008$ (Şekil 5.12)
- Güven aralığı (%95) katsayıları = (0.9981, 1.0055) (Şekil 5.12)

Aşağıdaki Şekil 5.12 ve 5.13 de yer alan grafikler farklı iki senaryo için gürültülü veri kullanımı ile izleyici dağılımları regresyon analizi ve güven aralıklarını (%95) göstermektedir. Gürültülü verilerin güven aralıklarının hesaplanmasında aşağıdaki bağıntı kullanılmıştır.

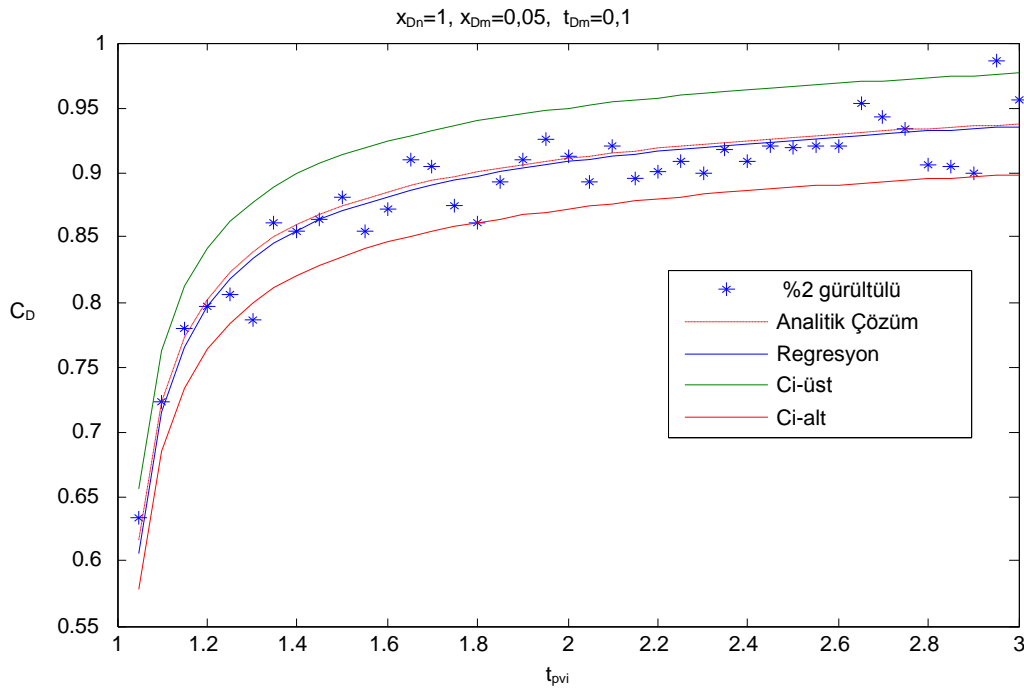
$$b_j - t_{1-\alpha/2} \sigma_{b_j} \leq \beta_j \leq b_j + t_{1-\alpha/2} \sigma_{b_j}, j=1, \dots, n \quad (\text{Doğru vd. 1977})$$

Burada b ve β değerleri sırasıyla teorik ve gerçek verileri (gürültülü) temsil etmektedir.

Veri sayısı 25'in üzerinde olduğu için $t(1-\alpha/2)$ değeri 2 olarak alınmış standart sapmalar ise gürültülü veriler ile teorik verilerin farklarının standart sapması olarak kabul edilmiştir. Katsayıların güven aralığı ise Matlab $n\text{lparci}$ fonksiyonu ile hesaplanmıştır.



Şekil 5.12 $x_{Dn}=1$, $x_{Dm}=0,005$, $t_{Dm}=0,01$ için gürültülü veri kullanımı ile izleyici dağılımları ve güven aralıkları.



Şekil 5.13 $x_{Dn}=1, x_{Dm}=0,05, t_{Dm}=0,1$ için gürültülü veri kullanımlı izleyici dağılımları ve güven aralıkları

5.2 II. Akış Modeli İzleyici Taşınım Analizi

Bu kısımda paralel çatlaklı rezervuar modeli ikinci analitik çözümünün orantılı parametreler kullanılarak orantılı duyarlılık analizleri yer almaktadır. Model, izleyici yayılım modeline uyarlanarak gürültülü veri kullanımı ile doğrusal olmayan regresyon analizi oluşturulmuştur.

5.2.1 Tek Çatlakta II. Akış Modeli İzleyici Taşınım Analizi

Bu kısımda da paralel çatlaklı rezervuar modeli, izleyici yayılımı modeline uyarlanmıştır. Burada da amaç aynı şekilde üretim kuyusunda tekrar basmanın etkisini beklemeden bir izleyici modelden istifade ederek parametre değer kestirimleri yapabilmektir. İzleyici yayılımı modelinde ısı yayılımı modelinden farklı olarak sınır koşulu eş zamanlı/ani enjeksiyon olarak ve jeolojik model yapısı paralel değil tek çatlaklı olarak kabul edilmiştir. Bu kabul izleyicinin çok daha yavaş bir difüzyon ile matris içinde hareket etmesi dolayısıyla basım kuyusuna verilen izleyicinin üretim kuyusuna ulaştığı zaman matris içine sızan izleyicinin matris sınırlarına ulaşamayacağı öngörüsüne dayanmaktadır.

EK-10 da ayrıntılı şekilde açıklanan bu uyarlamada sıcaklığın yerine izleyici derişimi almış ve diğer parametre tanımları bu doğrultuda değişmiştir. Canlandırma/fili durumlara adapte edebilme için bu modelde de boyutsuz normalize parametre tanımları yapılmıştır(bkz Ek-10).

Boyutsuz zaman ve mesafe için orantılı değişken tanımları yine Ek-10 da yer almaktadır (Bkz. Ek-10 ;10, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 25 ve 26 no'lu eşitlikler)

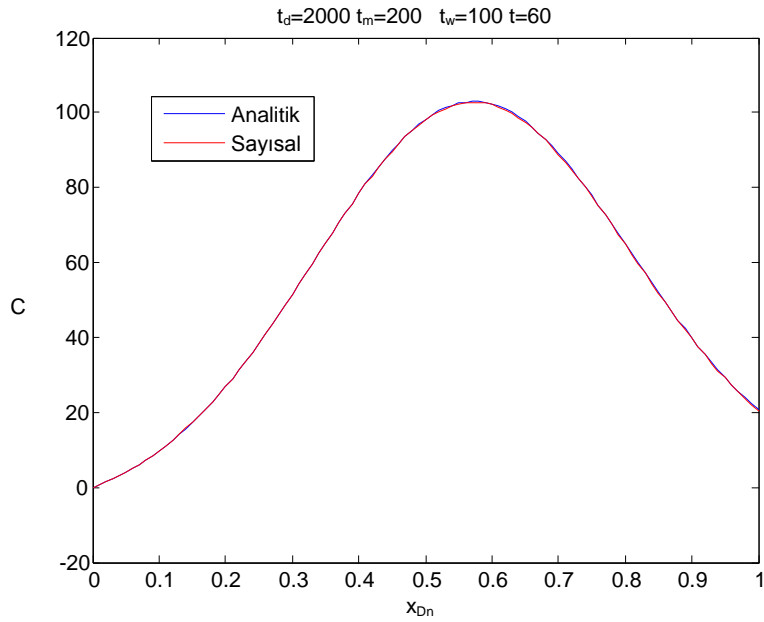
Duyarlılık ve regresyon analizlerine geçmeden önce izleyici yayılım modeli analitik çözümünün, Laplace dönüşümü sayısal yaklaşım çözümü ile karşılaştırması yapılmıştır. (Bkz. Şekil.5.14 ve Şekil 5.15) Burada *İnvlap* fonksiyonuna ek olarak *euler_inversion* ters dönüşüm fonksiyonu da kullanılmıştır. Aynı sonuçları veren bu fonksiyon, fonksiyon içi değişken tanımlanabilirliği ile yazılımsal kolaylıklar sağlayabilecek niteliktedir. (Bkz. Ek-12, E-1)

Doğrusal olmayan regresyon analizi için aşağıda yer alan çizelgedeki tahmini parametre değerleri kullanılmıştır. Bu analiz Ek-12 D-2 de gösterilen matlab yazılımlarıyla hesaplanmıştır.

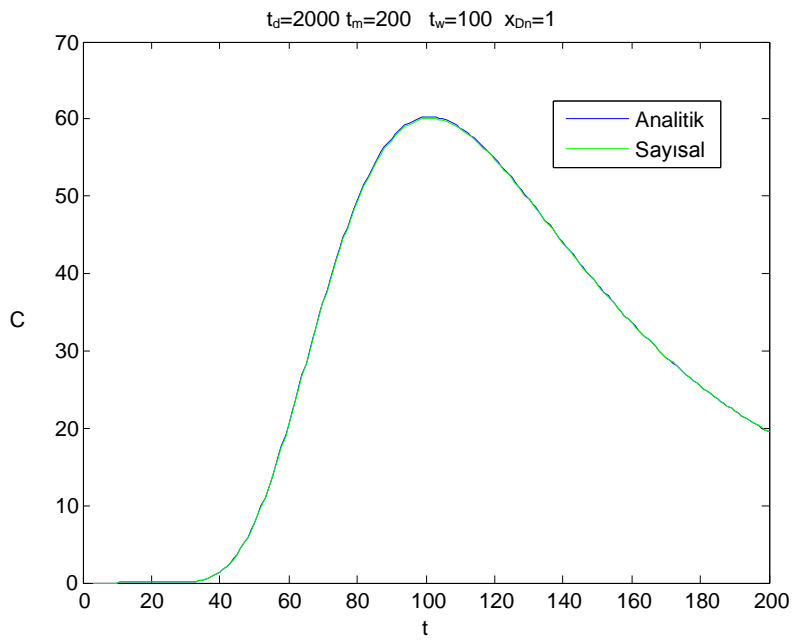
Çizelge 5.4 İzleyici yayılımı modeli ortalama parametre ve örnek değerler

Parametre	Tahmini değer	Birim
L	20	m
u	0,2	m/h
a	1	m
b	0,0254	m
D_m	0,0005	m ² /h
D	0,05	m ² /h
ϕ	0,04	-

x_d/x	4
t_d/t	0,8
z_d/z	40
λ	0,000001
t_d	8000
t_w	100
t_m	806
Pe	80



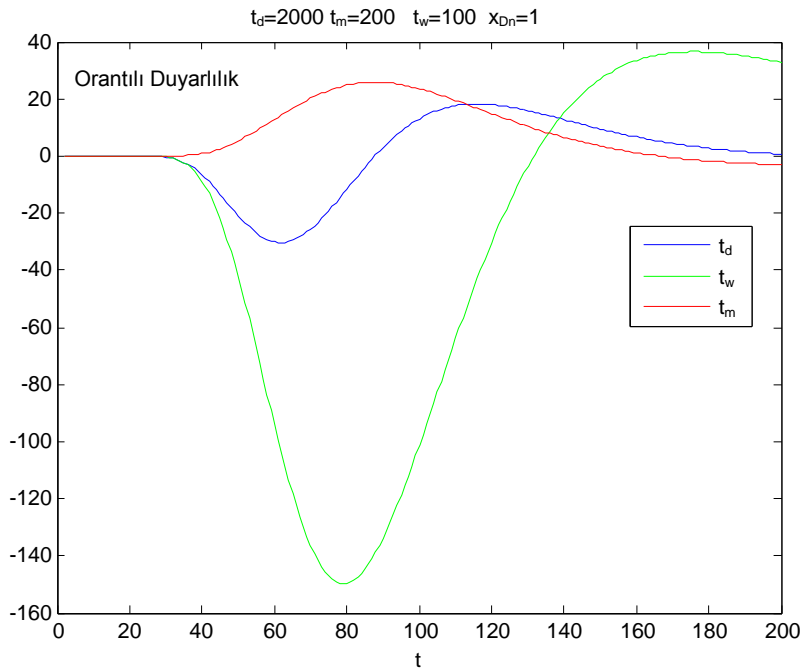
Şekil 5.14 Örnek senaryo akış hattı izleyici derişim dağılımları karşılaştırması



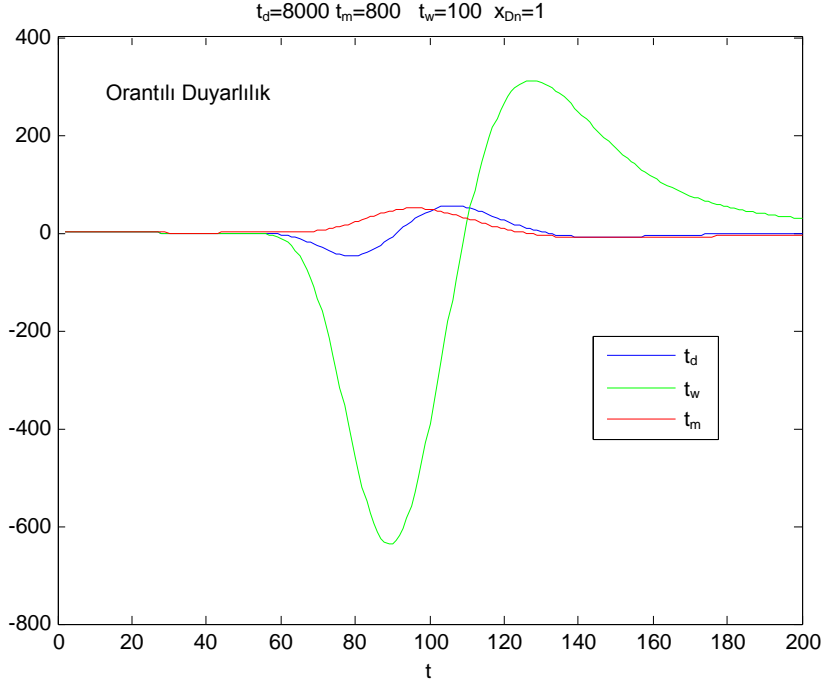
Şekil 5.15 Örnek senaryo üretim noktası izleyici derişimleri kıyaslaması

5.2.2 Orantılı Duyarlılık Grafikleri

Aşağıda verilen Şekil 5.16 ve 5.17 iki farklı senaryo için akış sonunda belirli zaman aralıklarındaki karakteristik zamanlardaki orantılı duyarlılık dağılımlarını göstermektedir. Yayılım, iletim ve difüzyon (t_d, t_w, t_m) karakteristik zamanları için orantılı duyarlılıklar farklı büyüklüklerde ve farklı yönlerde ortaya çıkmıştır. Buna göre bu parametrelerin birbirinden bağımsız oldukları sonucuna ulaşılabılır. Bu grafiklere göre belirleyici duyarlılık değerlerine ulaşabilmek için geri basmada 50 birim ve üzeri süre geçmesi gerekecektir.

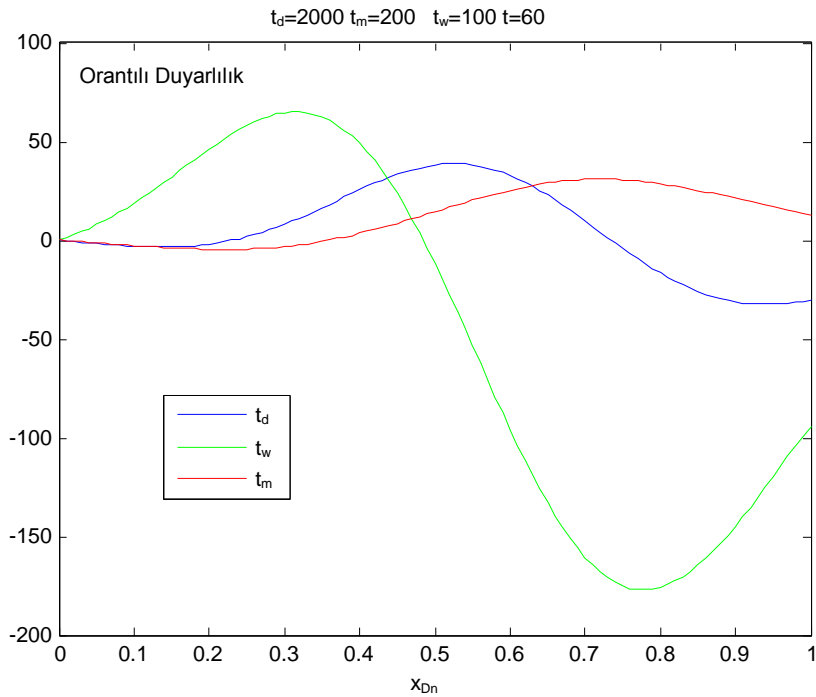


Şekil 5.16 Örnek karakteristik zamanlar için akış sonu normalize duyarlılık dağılımları.

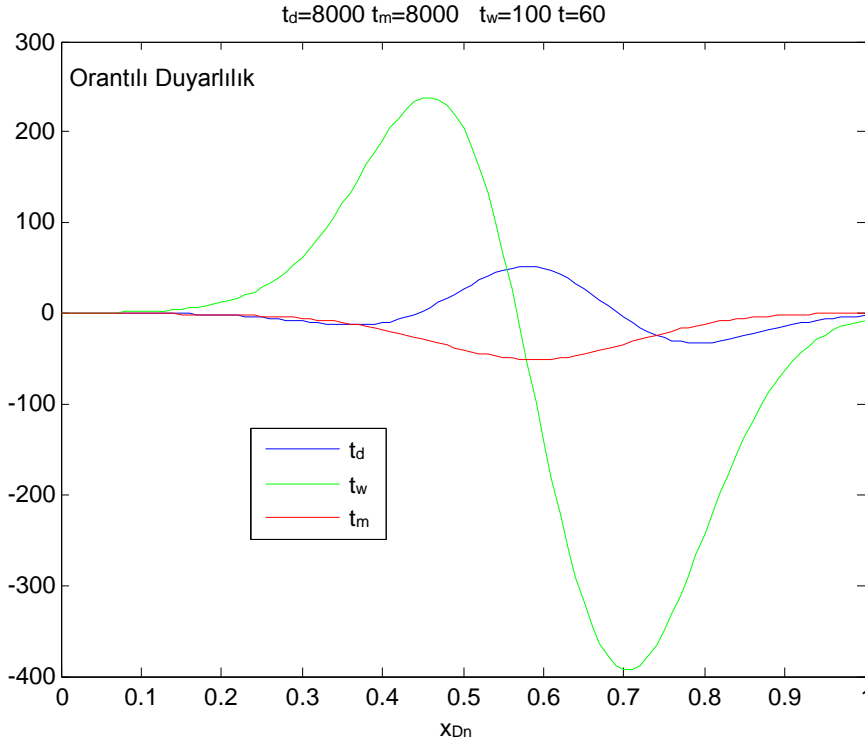


Şekil 5.17 Örnek karakteristik zamanlar için akış sonu normalize duyarlılık dağılımları.

Aşağıda verilen Şekil 5.18 ve 5.19 ise yine iki farklı senaryo için akış boyunca belirli zamanda karakteristik zamanlar için orantılı duyarlılık dağılımlarını göstermektedir. Bu grafiklerde de yayılım, iletim ve difüzyon karakteristik zamanları orantılı duyarlılıkları farklı büyüklüklerde ve farklı yönlerde ortaya çıkmıştır.



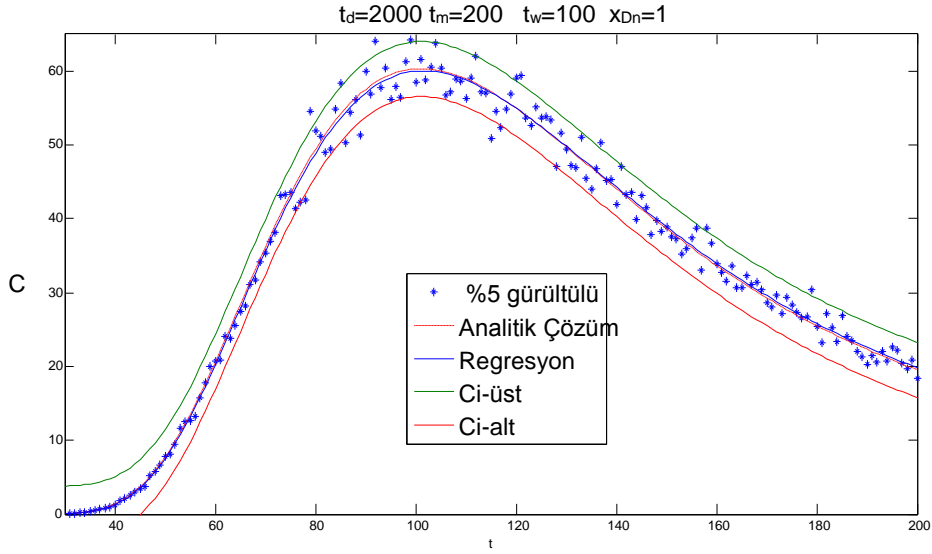
Şekil 5.18 Örnek karakteristik zamanlar için akış hattı boyunca orantılı duyarlılık dağılımları.



Şekil 5.19 Örnek karakteristik zamanlar için akış hattı boyunca orantılı duyarlılık dağılımları.

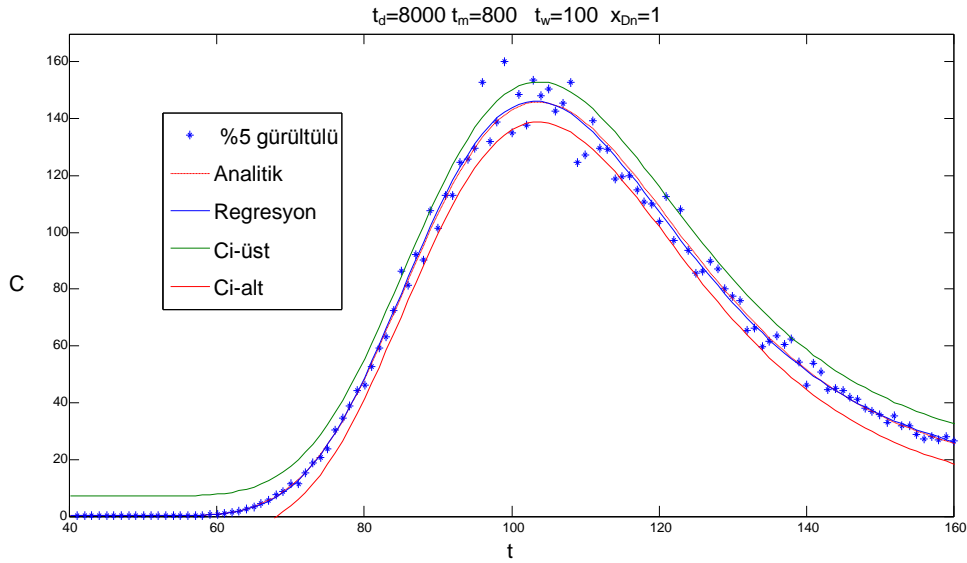
5.2.3 Regresyon ve Güven Aralığı Grafikleri

Aşağıdaki Şekil 5.20 ve 5.21 de yer alan grafikler iki farklı senaryo için regresyon ve güven aralığı dağılımlarını göstermektedir. İkinci grafik olan Şekil 5.22 de tüm karakteristik zaman parametreleri için doğrusal olmayan regresyon ile makul sonuçlara ulaşılmıştır. Bu grafiklerde de Matlab kodlu *nlinfit* ve *nlparci* fonksiyonları kullanılmıştır. Gürültülü dağılımlar için *randn* fonksiyonu ile *mean* değeri '0' ve standart sapması '1' olan normal dağılımlar oluşturularak istenen gürültü oranı ile -burada %5 seçilmiştir- çarpılmış ve teorik verilere eklenmiştir.



Şekil 5.20 Gürültülü veri kullanımlı izleyici dağılımları ve güven aralıkları.

- $C(x_{Dn}, tD * fitcof, t_d, t_m, t_w)$
- $fitcof = 0.9995$
- $ci = (0.9951, 1.0039)$



Şekil 5.21 gürültülü veri kullanımlı izleyici dağılımları ve güven aralıkları

- $C(x_{Dn}, tD * fitcof1, t_d * fitcof2, t_m * fitcof3, t_w * fitcof4)$
- İlk Tahminler 1.1, 7990, 795, 95
- $fitcof = 1.0e+03 * (0.0010 \quad 7.9271 \quad 0.8401 \quad 0.1009)$
- $ci = 1.0e+03 *$

0.0010	0.0010
7.6989	8.1553
0.7140	0.9662
0.0985	0.1033

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 I. Akış Modeli

Matlab yazılımlarında yazım hatalarını test için kullanılan INVLAP sayısal ters dönüşüm fonksiyonu sonuçları Skopp ve Warrick ve yeni analitik gerçek uzay çözümlerinin her ikisi ile grafiksel olarak örtüşmüştür.

Ortak sınır değerleri, adım aralıkları ve tolerans kabulleri için ile Skoop ve Warrick çözümü ve yeni analitik çözüm aynı değerleri vermiş ancak Skoop ve Warrick çözümü yaklaşık 4 kat fazla süre almıştır. Diğer bir nokta ise yeni analitik çözüm için tek tolerans ile hesaplama yapılırken Skoop ve Warrick çözümü için iki ayrı tolerans değerlerine göre değerlendirme yapmak gerekmesidir. Buna ek olarak Skoop ve Warrick çözümünde x_D ve t_D nin küçük değerlerinde yakınsama ve tolerans kabulleri için sınır değerlerini artırmak gerektirmekte bu da hesaplama süresinde olumsuz etki göstermektedir. Bu nedenle duyarlılık ve regresyon analizleri ile bu modelin gerçek saha değerlerine uyarlanmasında ve canlandırılmasında yeni analitik çözüm kullanılmıştır.

Tahmini senaryolar için oluşturulan normalize duyarlılık grafikleri x_D ve t_D parametrelerinin farklı yönlerde benzer büyüklükte duyarlılık değerleri vermiştir. Bu parametreler arası korrelasyonu göstermekte ve bağımsız tahminlerini imkansız kılmaktadır.

Üretim kuyusunda tekrar basmanın etkisini beklemeden bir izleyici modelden istifade ederek parametre değer kestirimleri yapabilmek amacıyla oluşturulan izleyici yayılım modeli için doğrusal olmayan regresyon analizlerinde gürültülü veri kullanılmıştır. Matlab *nlinfit* revize fonksiyonu ile gerçekleştirilen bu parametre kestirimleri ile %2 lik gürültülerde analitik çözüm grafiği ile parametre kestirimli grafikler hemen hemen örtüşmüştür.

Matlab *nlparci* revize fonksiyonu kullanılarak oluşturulan güven aralığı hesaplamalarında parametreler bağımsız olmadıklarından iki parametre için makul sonuçlara ulaşılamamıştır. Tek parametre için güven aralığı hesaplanabilmiştir.

6.2 II. Akış Modeli

Matlab yazılımlarında yazım hatalarını test için kullanılan *Invlap* ve *Euler_Inversion* sayısal ters dönüşüm fonksiyonları sonuçları her iki (Skopp ve Warrick bağıntısı, Seri yaklaşımı) analitik gerçek uzay çözümleri ile grafiksel olarak örtüşmüştür.

Her iki analitik çözüm ortak sınır değerleri, adım aralıkları ve tolerans kabulleri için hesaplama süresi yönünden karşılaştırıldığında yeni analitik çözüm daha hızlı sonuç vermiştir.

Her iki çözüm de temel olarak 3 ayrı tolerans –hata payı- hesaplaması içermektedir. Ancak yeni analitik çözümün belirli integraller içermesi ve sonsuz toplamın istenen toleranslara çok çabuk yakınsaması bu çözümü diğer çözüme nazaran daha güvenilir yapmaktadır.

Bu model için duyarlılık analizlerinde modelin izleyici yayılım modeline uyarlaması kullanılarak üretim kuyusunda geri enjeksiyonun etkisini beklemeden bir izleyici modelden istifade ederek parametre değer kestirimleri yapılması amaçlandığı için duyarlılık ve regresyon analizlerinde izleyici transfer modeli çözümü kullanılmıştır. Bu İzleyici transfer model analitik çözümü, Laplace dönüşümü sayısal çözümleri ile karşılaştırılmış birebir örtüşmeler elde edilmiştir.

Orantılı duyarlılık grafikleri yayılım, iletim ve difüzyon (t_d, t_w, t_m) karakteristik zamanlarına göre oluşturulmak suretiyle parametrelerin tek tek duyarlılıkları görülebilmektedir.

Modelin tahmini parametreler ile doğrusal olmayan regresyon analizi (t_d, t_w, t_m) karakteristik zaman değişkenleri için oluşturulmuş ve makul sonuçlara ulaşılmıştır. Ayrıca regresyon parametre kestirimleriyle elde t_d , t_m ve t_w değerleri ilk tahmini giriş değerlerine yakınsamıştır. Model çözümü bu parametrelerin tek tek değil de tümüyle regresyon analizi yapılmasına da olanak sağlamaktadır. Ancak bu noktada ilk tahmin değerleri önem taşımaktadır. Uzak ilk tahmin değerleri yakınsamamalara neden olabilmektedir.

6.3 Akış Modellerin Karşılaştırılması ve Öneriler

I Akış modeli yeni analitik çözümü ile II. Akış modeli seri yaklaşımı analitik çözümü boyutsuz giriş parametreleri eşitlenerek grafiksel olarak farklı x_D , k_m/k değerleri için karşılaştırılmış ve beklenen sonuçlara ulaşılmıştır. Bu grafiklerde k_m sabit kabul edilerek k parametresi değiştirilmiş ve k_m/k değeri küçüldükçe grafiklerin birbirine yakınsadığı gözlenmiştir. Akış yönünde ısı yayılımının hesaba katılması T_D değerlerinde %5-20 lik artışlar ve dolayısıyla üretilen suda kabaca %5-20 lik sıcaklık düşüşleri oluşturabilmektedir. Bu nedenle akış yönündeki ısı yayılımı ihmal edilebilir bir parametre gibi görünmemektedir.

Laplace uzayı çözümleri için yarı analitik sayısal yaklaşım çözümü olarak *invlab* fonksiyonu tüm modeller için sorunsuz çalışmıştır. Buna alternatif olarak *euler_Inversion*

yazılımı da denenmiş, bu fonksiyon da benzer şekilde sorunsuz çalışarak aynı değerleri vermiştir.

Analitik model çözümlerinde iteratif Laplace ters dönüşüm yönteminin güçlü bir çözüm yöntemi olduğu bir kez daha teyit edilmiştir. Bu yöntem sayesinde iki ve üç boyutlu modeller içinde analitik çözümlere ulaşılabileceğini Kocabas 2011 deki yayınları (yayınları referans verelim) ile göstermiş, bu çalışma o çözümlere ve diğer başka üretilebilecek çözümlere güçlü bir delil oluşturmuştur. O nedenle bu yöntemin yaygın uygulamalarını önermekteyiz.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. ve Stegun I.A., 1972, Handbook of Mathematical Functions, *Dover Publications*, NY, 10th Ed.
- Ascencio F. , Samaniego F. ve Rivera J., 2014, A heat loss analytical model for the thermal front displacement in naturally fractured reservoirs, *Geothermics* Vol. 50 ,pp. 112–121.
- Atangan A. ve Kilicman A., 2013, Analytical Solutions of the Space-Time Fractional Derivative of Advection Dispersion Equation, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering* Vol. 2013, A. ID 853127.
- Avdonin N.A., 1964, Some formulas for calculating the temperature field of a stratum subject to thermal injection, *Neft'i Gaz*, Vol. 7 No. 3, pp.37-43.
- Barker, J. A., 1982, Laplace transform solutions for solute transport in fissured aquifers, *Adv. Water resources*, Vol. 5 No.2, pp. 98-104.
- Bird R. B., Stewart W.E., Lightfoot E.N., 1976, Transport Phenomena, John Wiley and sons.
- Bodvarsson, G.S., Tsang,C.F., 1982, Injection and thermal breakthrough in fractured geothermal reservoirs, *Journal of Geophysical Research* 87(B2), 1031–1048.
- Cendejas F.A., Rivera, J., 1994, Heat transfer processes during low or high enthalpy fluid injection into naturally fractured reservoir, *Proceedings 19th Annual Workshop on Geothermal Reservoir Engineering*, Stanford University, Stanford, CA, USA, pp. 81–87.
- Chamorro C. R., García-Cuesta J. L., Mondéjar M. E. ve Pérez-Madrado A., 2014, Enhanced geothermal systems in Europe: An estimation and comparison of the technical and sustainable potentials, *Energy* Vol.65 pp. 250-263.
- Chen, S.C., 1986, Solutions for Radionuclide Transport From an Injection Well Into a Single Fracture in a Porous Formation., *Water Resour. Res.*, Vol. 22, No. 4, pp. 508-518,
- Chen Jui-Sheng, Juan-Tse C., Chen-Wuing Liu, Ching-Ping Liang ve Chien-Wen Lin, 2011, Analytical solutions to two-dimensional advection–dispersion equation in cylindrical coordinates in finite domain subject to first- and third-type inlet boundary conditions, *Journal of Hydrology* Vol.405 pp. 522–531.
- Chen Jui-Sheng , Liu Y., Liang C., Liu C. ve Lin C., 2011, Exact analytical solutions for two-dimensional advection–dispersion equation in cylindrical coordinates subject to third-type inlet boundary condition, *Advances in Water Resources* Vol.34 pp. 365–374.

- Chevalier S. ve Banton O., 1999, Modelling of heat transfer with the random walk method. Part 1. Application to thermal energy storage in porous aquifers, *Journal of Hydrology* Vol. 222 pp. 129–139.
- Coats, K. H. ve Smith, B. D., 1964, Dead-end pore volume and dispersion in porous media. *SPE Journal* 4(1), pp.73–84.
- De Smedt, F., Brevis, W. and Debels, P., 2005, Analytical solution for solute transport resulting from instantaneous injection in streams with transient storage, *Journal of Hydrology*, Vol. 315, pp. 25-39.
- De Smedt, F. ve Wierenga P. J., 1981, A generalized solution for solute flow in soils with mobile and immobile water, *Water Resources. Res. Vol. 15*, No. 5, pp. 1137-1141.
- DeHoog FR, Knight JH ve Stokes AN., 1982, An improved method for numerical inversion of Laplace transforms, *SIAM J Scient Statist Comput Vol. 3*, No. 3, pp.357–66.
- Dickinson J.S, Buik N., Mathews M.C. ve Snijders A., 2009, Aquifer thermal energy storage : theoretical and operational analysis, *Geotechnique* , Vol 59 ,No:3 ,pp. 249-260.
- Dickson M.H. ve Fanelli M., 1995, Geothermal energy: utilization and technology, *UNESCO Publishing*.
- Doğru A.H., Dixon T.N. ve Edgar T.F., 1977, Confidence limits on the parameters and predictions of slightly compressible, single phase reservoirs, *Society of Petroleum Engineers Journal*, V.17, no.1, pp. 44-56.
- Dubner, H. ve Abate, J., 1968, Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the Finite Fourier Cosine Transform, *J. ACM*, V Vol.13, No.1, pp.115-123.
- Ekneligoda T.C. ve Min K., 2014, Determination of optimum parameters of doublet system in a horizontally fractured geothermal reservoir, *Renewable Energy* Vol. 65 pp. 152-160.
- El-Khatib, Noaman A. F., 2009, Transient pressure behavior for a reservoir with continuous permeability distribution in the invaded zone, *Proceedings 16th SPE Middle East Oil and Gas Show and Conference, MEOS*, V.2, pp. 609-624.
- Fenga Z., Zhaoa Y., Zhoua A. ve Zhanga N., 2012, Development program of hot dry rock geothermal resource in the Yangbajing Basin of China, *Renewable Energy* Vol.39 pp. 490-495.
- Fox Don B., Sutterd D., Beckersa K.F., Lukawski M.Z., Koch D.L., Andersone B.J. ve Tester J.W., 2013, Sustainable heat farming: Modeling extraction and recovery in discretely fractured geothermal reservoirs, *Geothermics* Vol.46 pp. 42– 54.
- Genuchten M. Th. van , Leij F.J., Skaggs T.H., Toride N., Bradford S.A. ve Elizabeth M., 2013, Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers 1. The equilibrium advection-dispersion equation, *J. Hydrol. Hydromech.*, Vol 61, pp.146–160.

- Gringarten A.C., Witherspoon P.A ve Ohnishi Y., 1975 Teory of heat extraction from fractured hot dry rock, *Journal of Geophysical Research* 80 , pp.1020-4
- Guerrero J.S. P., Pimentel L.C.G., Skaggs T.H. ve Genuchten M.T., 2009, Analytical solution of the advection–diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique, *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol.52 pp. 3297–3304.
- Guerrero J. S. P. , Pimentel L.C.G. ve Skaggs T.H., 2013, Analytical solution for the advection–dispersion transport equation in layered media, *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol.56 pp.274–282.
- Guerrero J. S. P. ve Skaggs T.H., 2010, Analytical solution for one-dimensional advection–dispersion transport equation with distance-dependent coefficients, *Journal of Hydrology* Vol.390 ,pp. 57–65.
- Hao Y., Fu P. ve Carrigan C.R., 2013, Application of dual-continuum model for simulation of fluid flow and heat transfer in fractured geothermal reservoir, *Proceedings , Thirty-Eighth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering Stanford University, Stanford, California.*
- Hofmann H., Babadagli T. ve Zimmermann G., 2014a , Hot water generation for oil sands processing from enhanced geothermal systems: Process simulation for different hydraulic fracturing scenarios, *Applied Energy* Vol.113 pp. 524–547.
- Hofmann H., Weides S., Babadagli T., Zimmermann G., Moeck I., Majorowicz J. ve Unsworth M., 2014b , *Energy* Vol.69 pp. 578–591.
- Holditch S.A., 2007, Hydraulic Fracturing, *P.E. Handbook Volume IV, Production Operations Engineering*, SPE Publications.
- Jaiswal D.K, Kumar A. ve Yadav R.R., 2011, Analytical Solution to the One-Dimensional Advection-Diffusion Equation with Temporally Dependent Coefficients, *Journal of Water Resource and Protection*, Vol. 3, pp.76-84.
- Juliusson E. ve Horne R.N., 2013, Optimization of injection scheduling in fractured geothermal reservoirs, *Geothermics* Vol.48 ,pp. 80–92.
- Kim J., Lee Y., Yoon W.S., Jeon J.S., Koo M.H. ve Keehm Y., 2010, Numerical modeling of aquifer thermal energy storage system, *Energy* Vol. 35 pp. 4955-4965.
- Kocabaş İ., 2011, Application of iterated Laplace transformation to tracer transients in heterogeneous porous media, *J. Franklin Institute, Volume 348, Issue 7, Sept.*, pp. 1339- e1362.
- Kocabas, I., 2011a, A Novel Two Dimensional Analytical Model of Contaminant Transport in Groundwater Aquifers, *The 2011 International Conference on water, energy and the environment* , Nov. 14-17, 201 AUS, Sharjah, UAE.

- Kocabas, I., 2011b, Modeling Thermal Degradation in Geothermal Reservoirs due to Reinjection, *The 2011 International Conference on water, energy and the environment* , Nov. 14-17, 201 AUS, Sharjah, UAE.
- Kocabaş İ. ve Bülbül M., 2014, Modeling solute/contaminant transport in heterogeneous aquifers , *Environmental Science and Pollution Research*, Online ISSN 1614-1344.
- Kocabas İ. ve Kucuk İ., 2011, Modeling Sensible Energy Storage in Aquifers, *Proceedings of the First International Conference on Water, Energy and Environment* , Sharjah, U.A.E.
- Kucuk, I. Ve Kocabaş, I ,2011, Analytical and Numerical Modeling of 2-D Solute Transport in an Fracture/Matrix Aquifer System, *The 2011 International Conference on water, energy and the environment* , Nov. 14-17, 201 AUS, Sharjah, UAE.
- Kumar A., Jaiswal D.K. ve Kumar N., 2010, Analytical solutions to one-dimensional advection–diffusion equation with variable coefficients in semi-infinite media, *Journal of Hydrology* Vol.380 pp. 330–337.
- Lauwerie H.A., 1955, The transport of heat into an oil layer caused by the injection of hot fluid, *J.Appl.Sc.Res.*, Section A, Vol 5, Nr 2-3, pag 145-150.
- Luo F., Xu R.N. ve Jiang P.X., 2014, Numerical investigation of fluid flow and heat transfer in a double enhanced geothermal system with CO₂ as the working fluid (CO₂-EGS), *Energy* Vol. 64 , pp. 307-322.
- Massabo M., Cianci R. ve Paladino O., 2006, Some analytical solutions for two-dimensional convection-dispersion equation in cylindrical geometry, *Environmental Modelling & Software* Vol. 21 pp. 681-688.
- Miller K. S. ve Ross B., 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, *A Wiley-Interscience Publication*, JohnWiley ve Sons Inc., New York, NY, USA.
- Mohais R., Xu C. ve Dowd P.A., 2011, An analytical model of coupled fluid flow and heat transfer through a fracture with permeable walls in an EGS, *Australian Geothermal Energy Conference*.
- Palmer C. D., Blowes D. W., Frind, E. O., ve Molson, J. W. ,1992, Thermal energy storage in an aquifer 1. Field Injection experiment, *Water resources Research*, Vol. 28 No.10 pp.2845-2856.
- Pierce B., 2010, Geothermal Energy Resources, U.S. *Geological Survey NARUC Winter Meeting Energy Interdependencies Panel*.
- Povstenko Y. Z., 2014, Fundamental Solutions to Time-Fractional Advection Diffusion Equation in a Case of Two Space Variables , *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering* Vol. 2014,A. ID 705364.

- Pruess K. ve Bodvarsson G. S., 1984, Thermal effects of reinjection in geothermal reservoirs with major vertical fractures, *J. Pet. Tech.*, Sept., pp. 1567-1578.
- Rosen, M. A., 1999, Second-law analysis of aquifer thermal energy storage systems, *Energy*, Vol. 24, pp.167-182.
- Sauty J. P., Gringarten, A., Menjoz, A. ve Landel, P.A., 1982, Sensible energy storage in aquifers: 1. Theoretical study, *water resources research*, Vol. 18 (2), pp.245-252.
- Sauty J. P., Gringarten, A. ve Landel, P.A., 1978, The effect of thermal dispersion on injection of hot water in aquifers , *Proc. The Second Invitational Well Testing Symposium, Div. Of Geothermal Energy*, U.S. Dept. of Energy. Berkeley CA., pp. 122-131.
- Shaik A. R. , Rahman S.S., Tran N.H. ve Tran T., 2011, Numerical simulation of Fluid-Rock coupling heat transfer in naturally fractured geothermal system, *Applied Thermal Engineering* Vol.31 pp. 1600-1606.
- Skopp J. ve Warrick A.W., 1974, A two phase model for the miscible displacement of reactive solutes in soils, *Soil sci. Soc. Am. Proc. Vol 38 No. 4*, pp. 545-550.
- Socacio L. G., 2011, Seasonal Sensible Thermal Energy Storage Solutions, *Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies, Issue 19*, pp.49-68.
- Sommer W. T., Doornenbal P.J., Drijver B.C., van Gaans P.F.M., Leusbrock I. , Grotenhuis J.T.C. ve Rijnaarts H.H.M., 2014, Thermal performance and heat transport in aquifer thermal energy storage, *Hydrogeology Journal Vol. 22* pp.263–279.
- Spillette, A.G., 1965, Heat transfer during hot fluid injection into an oil reservoir, *In: D.N. Dietz (Ed.), Thermal Recovery Techniques, SPE Reprint Series 10*, pp. 21-26.
- Suducki, E. A. ve Frind, E. O. ,1982, “Contaminant transport in fractured porous media: Analytical solutions for a system of parallel fractures”, *Water Resour. Res.*, Vol. 18, No. 6, pp. 1634-1642, Dec.
- Suzuki A., Niibori Y., Fomin S.A., Chugunov V.A. ve Hashida T., 2014, Analysis of Water Injection in Fractured Reservoirs Using a Fractional-Derivative-Based Mass and Heat Transfer Model, *Math Geosci* DOI 10.1007/s11004-014-9522-5.
- Tang D.H, Frind E. O. ve Suducky E. A., 1981, Contaminant transport in fractured porous media for a single fracture, *Water Resour. Res.*, Vol.17, No.3, pp. 555-564, June.
- Xu J., Wang R.Z. ve Y. Li, 2014, A review of available technologies for seasonal thermal energy storage, *Solar Energy* ,Vol.103, pp. 610–638.
- Vandenbohede A., Hermans T., Nguyen F. ve Lebbe L., 2011, Shallow heat injection and storage experiment: Heat transport simulation and sensitivity analysis, *Journal of Hydrology* Vol. 409 pp. 262–272.

- Zaigham N.A. ve Nayyar Z.A., 2010, Renewable hot dry rock geothermal energy source and its potential in Pakistan, *Renewable and Sustainable Energy Reviews* Vol.14 pp. 1124–1129.
- Zeng D.Q. ve Qin Y.M., 2012, The Laplace-Adomian-Pade technique for the seepage flows with the Riemann-Liouville derivatives, *Communications in Fractional Calculus*, no. 3, pp. 26–29.
- Zeng Y.C., Su Z. ve Wu N.Y., 2013, Numerical simulation of heat production potential from hot dry rock by water circulating through two horizontal wells at Desert Peak geothermal field, *Energy* Vol .56, pp. 92-107.
- Zeng Yu-Chao, Neng-You Wu, Zheng Su, Xiao-Xing Wang ve Jian Hu , 2013, Numerical simulation of heat production potential from hot dry rock by water circulating through a novel single vertical fracture at Desert Peak geothermal field, *Energy* Vol.63 pp. 268-282.
- Zhao Z., 2014, On the heat transfer coefficient between rock fracture walls and flowing fluid, *Computers and Geotechnics*, Vol 59 pp.105–111.
- Ziskind G., Shmueli H. ve Gitis V., 2011, An analytical solution of the convection–dispersion–reaction equation for a finite region with a pulse boundary condition, *Chemical Engineering Journal* Vol.167 pp. 403–408.

EKLER

- EK-1** Skopp ve Warrick Laplace Ters Dönüşüm Bağıntısı
- EK-2** I. Akış Modeli Skopp ve Warrick Yaklaşımı Çözümü
- EK-3** I. Akış Modeli Yeni Analitik Çözümü-1
- EK-4** I. Akış modeli Yeni analitik Çözümü-2
- EK-5** II. Akış Modeli Analitik Çözümü-1
- EK-6a** II. Akış Modeli Analitik Çözümü-2
- EK-6b** II. Akış Modeli İzleyici Taşınımı Analitik Çözümü
- EK-7** I. Akış Modeli Yeni analitik Çözümü-2 Kısmi Türevleri
- EK-8** II. Akış Modeli Yeni Analitik Çözümü-2 Kısmi Türevleri
- EK-9** I. Akış İzleyici Taşınımı Modeli
- EK-10** II. Akış İzleyici Taşınımı Modeli
- EK-11** II. Akış İzleyici Taşınımı Modeli Çözümü Kısmi Türevleri
- EK-12** Matlab Yazılımları
- A-1-1** I. Akış Modeli Yeni analitik Çözümü-1
- A-1-2** Seritoplam fonksiyonu
- A-2-1** I. Akış Modeli Çözümü
- A-2-2** skoppinv fonksiyonu
- A-3-1** I. Akış modeli çözümleri ve INVLAP çözümleri kıyaslanması
- A-3-2** INVLAP fonksiyonu
- B-1-1** II. Akış Modeli Analitik Çözümü-1 ve INVLAP ile kıyaslanması
- B-1-2** skoppinv2 fonksiyonu
- B-2-1** II. Akış Modeli Analitik Çözümü-2 ve INVLAP ile kıyaslanması
- B-2-2** INT1 fonksiyonu
- B-2-3** INT2 fonksiyonu
- C-1** I. Akış Modeli Yeni analitik Çözümü-2 Kısmi Türevleri , duyarlılık ve doğrusal olmayan regresyon analizleri
- C-2** II. Akış Modeli Analitik Çözümü-2 Kısmi Türevleri , duyarlılık ve doğrusal olmayan regresyon analizleri
- D-1** I. Akış İzleyici Taşınımı Modeli ve doğrusal olmayan regresyon analizi
- D-2** II. Akış İzleyici Taşınımı Modeli ve doğrusal olmayan regresyon analizi
- E-1** Euler_İnnversion fonksiyonu

EK-1 Skopp ve Warrick Laplace Ters Dönüşümü

$$F(s) = \frac{1}{s} \exp(-A\sqrt{s} \tanh(B\sqrt{s})) \quad (1.1)$$

$$F = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda_R) \left[\begin{array}{l} \text{Sin}(\frac{A\omega^2}{2} - \lambda_I) \\ + \text{Sin}(\lambda_I) \end{array} \right] \frac{d\omega}{\omega} \quad (1.2)$$

$$\lambda_R = \frac{A\omega}{2} \frac{\text{Sinh}(B\omega) - \text{Sin}(B\omega)}{\text{Cosh}(B\omega) + \text{Cos}(B\omega)} \quad (1.3)$$

$$\lambda_I = \frac{Ax_D}{2} \frac{\text{Sinh}(B\omega) + \text{Sin}(B\omega)}{\text{Cosh}(B\omega) + \text{Cos}(B\omega)} \quad (1.4)$$

EK-2 I. Akış Modeli Skopp ve Warrick Yaklaşımı Çözümü

Çatlaklı rezervuarlarda Isı transferi modeline uyarlanabilen en yakın tarihli bir model Skopp ve Warrick taşıyıcı yayılım modelidir. Skopp ve Warrick modelinde boyuna ısı yayılımı ihmal edilerek ısı yayılımı denklemleri (bkz. Bölüm 2.2 , 6 ve 7 no'lu denklemler) aşağıdaki şekilde sadeleşir;

$$\left. \rho_r c_r \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w c_w \phi u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{k_m}{b} \frac{\partial T_m}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho_m c_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - k_m \frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2)$$

Başlangıç ve sınır koşulları 2.2 de yer alan 8,9,11 ve 12 nolu koşullardır. Bu model için 10 no'lu koşula gerek yoktur.

Birimsiz parametreler

$$t_D = \left(t - \frac{\rho_r c_r x}{\rho_w c_w \phi u} \right) \frac{k_m}{\rho_m c_m a^2} \quad (2.3)$$

$$x_D = \frac{k_m x}{\rho_w c_w \phi u a} \quad \text{and} \quad z_D = \frac{z}{a} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır ve (2.1) ve (2.2) denklemlerine katılırsa

$$\left. \frac{\partial T_D}{\partial x_D} - \frac{\partial T_{mD}}{\partial z_D} \right]_{z_D=0} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial T_{mD}}{\partial t_D} - \frac{\partial^2 T_{mD}}{\partial z_D^2} = 0 \quad (2.6)$$

Denklemleri elde edilir. Birimsiz başlangıç ve sınır koşulları da benzer şekilde 14-18 arasındakilerdir. 16 ya yine ihtiyaç olmayacaktır. (2.6) dan Laplace dönüşümüyle (2.7) elde edilir;

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_{mD}}{\partial z_D^2} - s \bar{T}_{mD} = 0 \quad (2.7)$$

(2.7) nin çözülmesiyle (2.8) elde edilir;

$$\bar{T}_{mD} = c_1 \sinh(\sqrt{s} y_D) + c_2 \cosh(\sqrt{s} y_D) \quad (2.8)$$

Sınır koşullarının uygulanmasıyla (2.8) den (2.9) elde edilir;

$$\bar{T}_{mD} = \bar{T}_D \left[\begin{array}{l} -\tanh(\sqrt{s}) \sinh(\sqrt{s} y_D) + \\ \cosh(\sqrt{s} y_D) \end{array} \right] \quad (2.9)$$

(2.9) un türetilmesiyle

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_{mD}}{\partial y_D} \right|_{y_D=0} = -\bar{T}_D \sqrt{s} \tanh(\sqrt{s}) \quad (2.10)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin (2.5) e eklenmesiyle

$$\frac{\partial \bar{T}_D}{\partial x_D} + \sqrt{s} \tanh(\sqrt{s}) \bar{T}_D = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.11) in sınır koşulu $x_D = 0$ kullanılarak çözümlenmesiyle

$$\bar{T}_D = \frac{1}{s} \exp(-\sqrt{s} \tanh(\sqrt{s}) x_D) \quad (2.12)$$

elde edilir. (2.11) , Ek-1 de verilen Skopp ve Warrick ters dönüşümü kullanılarak

$$T_D = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda_R) \left[\text{Sin}\left(\frac{\omega^2 t_D}{2} - \lambda_I\right) + \text{Sin}(\lambda_I) \right] \frac{d\omega}{\omega} \quad (2.13)$$

$$\lambda_R = \frac{\omega x_D}{2} \frac{\text{Sinh}(\omega) - \text{Sin}(\omega)}{\text{Cosh}(\omega) + \text{Cos}(\omega)} \quad (2.14)$$

$$\lambda_I = \frac{\omega x_D}{2} \frac{\text{Sinh}(\omega) + \text{Sin}(\omega)}{\text{Cosh}(\omega) + \text{Cos}(\omega)} \quad (2.15)$$

Şeklinde çözülmüş olur.

EK-3 I. Akış Modeli Yeni Analitik Çözümü

I. Akış Modeli için yeni analitik bir çözüm aşağıdaki adımlar izlenerek elde edilir. Önce I. Akış modelinin Laplace uzayındaki çözümünü yeniden (Denklem 2.12) yazalım.

$$\bar{T}_D = \frac{1}{s} \exp\left(-\sqrt{s} \tanh(\sqrt{s}) x_D\right) \quad (3.1)$$

(3.1) Denklemine x_D için Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\bar{\bar{T}}_D = \frac{1}{s} \frac{1}{p + \sqrt{s} \tanh(\sqrt{s})} \quad (3.2)$$

elde edilir. Tekrar düzenleme ile

$$\bar{\bar{T}}_D = \frac{1}{s} \frac{\cosh(\sqrt{s})}{p \cosh(\sqrt{s}) + \sqrt{s} \sinh(\sqrt{s})} \quad (3.3)$$

Denklem (3.3) biraz daha genişletilecek olursa

$$\bar{\bar{T}}_D = \frac{1}{s} \frac{1 + \exp(-2\sqrt{s})}{(p + \sqrt{s}) + (p - \sqrt{s}) \exp(-2\sqrt{s})} \quad (3.4)$$

halini alır. Binom açılımına uyarlayabilmek için (3.4) eşitliği

$$\bar{\bar{T}}_D = \frac{1}{s(p + \sqrt{s})} \frac{1 + \exp(-2\sqrt{s})}{\left(1 + \frac{(p - \sqrt{s})}{(p + \sqrt{s})} \exp(-2\sqrt{s})\right)} \quad (3.5)$$

denklemine dönüştürülebilir. Parantez içi ifadelerin binom açılımları yapılarak ;

$$\bar{\bar{T}}_D = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (p - \sqrt{s})^n}{s(p + \sqrt{s})^{n+1}} \left\{ \frac{\exp(-2n\sqrt{s}) + \exp(-2(n+1)\sqrt{s})}{\exp(-2(n+1)\sqrt{s})} \right\} \quad (3.6)$$

denklemini elde edilir. Denklem tekrar düzenlenirse ;

$$\bar{\bar{T}}_D = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{s(p + \sqrt{s})} \left(1 - \frac{2\sqrt{s}}{p + \sqrt{s}}\right)^n \right\} \left\{ \frac{\exp(-2n\sqrt{s}) + \exp(-2(n+1)\sqrt{s})}{\exp(-2(n+1)\sqrt{s})} \right\} \quad (3.7)$$

$$\bar{\bar{T}}_D = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \frac{(-1)^{n+m}}{s} \binom{n}{m} \frac{(2\sqrt{s})^m}{(p + \sqrt{s})^{m+1}} \left(\exp(-2n\sqrt{s}) + \exp(-2(n+1)\sqrt{s})\right) \right\} \quad (3.8)$$

(3.8) nin p ye gore ters dönüşümü yapılırsa ;

$$\bar{T}_D = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \frac{(-1)^{n+m}}{s} \binom{n}{m} \frac{x_D^m (2\sqrt{s})^m}{m!} \left(\exp(-(2n+x_D)\sqrt{s}) + \exp(-(2(n+1)+x_D)\sqrt{s}) \right) \right\} \quad (3.9)$$

eşitliğine ulaşılır. İfadeye s ye gore ikinci bir ters dönüşüm uygulanır ve

m=0 için tüm n değerleri ayrı bir toplam olarak düzenlenirse eşitlik aşağıdaki şekli alır;

$$\bar{T}_D = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{x_D^m}{m!} G(s) \right] \quad (3.10)$$

Burada F ve G ifadeleri

$$F(s) = \left\{ \frac{\exp(-(2n+x_D)\sqrt{s})}{s} + \frac{\exp(-(2(n+1)+x_D)\sqrt{s})}{s} \right\} \quad (3.11)$$

$$G(s) = \left\{ 2^m (s)^{(m-1)/2-1/2} \left(\exp(-(2n+x_D)\sqrt{s}) + \exp(-(2(n+1)+x_D)\sqrt{s}) \right) \right\} \quad (3.12)$$

şeklindedir. Standart ters dönüşüm uygulanarak;

$$F(t_D) = \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+x_D}{2\sqrt{t_D}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2(n+1)+x_D}{2\sqrt{t_D}} \right) \right\} \quad (3.13)$$

$$G(t_D) = \left\{ \frac{2^{(m+1)/2}}{\sqrt{\pi} t_D^{m/2}} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_1^2}{4t_D}\right) \operatorname{He}_{m-1} \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2t_D}} \right) + \exp\left(-\frac{\alpha_2^2}{4t_D}\right) \operatorname{He}_{m-1} \left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2t_D}} \right) \right] \right\} \quad (3.14)$$

$$\alpha_1 = 2n+x_D \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = 2(n+1)+x_D \quad (3.15)$$

$$\operatorname{He}_{m-1}(\omega) = (m-1)! \sum_{i=0}^{(m-1)/2} (-1)^i \frac{\omega^{m-1-2i}}{i! 2^i (m-1-2i)!} \quad (3.16)$$

Sonuç olarak aşağıdaki gerçek uzay çözümüne ulaşılır.

$$T_D = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F(t_D) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{x_D^m}{m!} G(t_D) \right] \quad (3.17)$$

EK-4 I. Akış Modeli Yeni analitik Çözümü-2

EK-3 çözümü (3.8) eşitliği $m=0$ için tüm n değerleri ayrı bir toplam olarak düzenlenerek devam etmişti. $m=0$ ve $m=1$ için (3.8) eşitliği tekrar düzenlenirse aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\bar{T}_D = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F(s) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x_D G_1(s) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{x_D^m}{m!} G(s) \right] \quad (4.1)$$

Burada F , G_1 ve G ifadeleri

$$F(s) = \left\{ \frac{\exp(-(2n+x_D)\sqrt{s})}{s} + \frac{\exp(-(2(n+1)+x_D)\sqrt{s})}{s} \right\} \quad (4.2)$$

$$G_1(s) = 2 \left\{ \frac{\exp(-(2n+x_D)\sqrt{s})}{\sqrt{s}} + \frac{\exp(-(2(n+1)+x_D)\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \right\} \quad (4.3)$$

$$G(s) = \left\{ 2^m (s)^{(m-1)/2-1/2} \left(\exp(-(2n+x_D)\sqrt{s}) + \exp(-(2(n+1)+x_D)\sqrt{s}) \right) \right\} \quad (4.4)$$

şeklindedir. Standart ters dönüşüm uygulanarak;

$$F(t_D) = \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+x_D}{2\sqrt{t_D}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2(n+1)+x_D}{2\sqrt{t_D}} \right) \right\} \quad (4.5)$$

$$G_1(t_D) = \left\{ \frac{2 \exp \left(-\frac{(2n+x_D)^2}{4t_D} \right)}{\sqrt{\pi t_D}} + \frac{2 \exp \left(-\frac{(2(n+1)+x_D)^2}{4t_D} \right)}{\sqrt{\pi t_D}} \right\} \quad (4.6)$$

$$G(t_D) = \left\{ \frac{2^{(m+1)/2}}{\sqrt{\pi} t_D^{m/2}} \left\{ \exp \left(-\frac{\alpha_1^2}{4t_D} \right) \operatorname{He}_{m-1} \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2t_D}} \right) + \exp \left(-\frac{\alpha_2^2}{4t_D} \right) \operatorname{He}_{m-1} \left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2t_D}} \right) \right\} \right\} \quad (4.7)$$

$$\alpha_1 = 2n+x_D \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = 2(n+1)+x_D \quad (4.8),(4.9)$$

$$\operatorname{He}_{m-1}(\omega) = (m-1)! \sum_{i=0}^{(m-1)/2} \frac{(-1)^i \omega^{m-1-2i}}{i! 2^i (m-1-2i)!} \quad (4.10)$$

Böylece aşağıdaki gerçek uzay çözümüne ulaşılır.

$$T_D = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F(t_D) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n x_D}{m!} G_1(t_D) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{x_D^m}{m!} G(t_D) \right] \quad (4.11)$$

(Bu çözüm esasen (3.17) çözümününün 3 terimli halidir. Bu halde tekrar düzenmesi $n=0,1$ ve 2 için üç terimli yaklaşık bir çözüme temel teşkil etmesi nedeniyledir.)

Geniş bir parameter aralığında (4.11) denklemini nihai değerlere çok çabuk yakınsayacağı için sadece $n=0,1$ ve 2 için 3 terimlik bir çözüm oluşturulabilir. Bu durumda çözümde büyük oranda sadeleşme oluşur. Denklemdaki her bir toplam ifadesi T_{D1} , T_{D2} ve T_{D3} olarak yazılırsa yeni yaklaşık çözüm T_{D2} ;

$$T_{D2} = T_{D1} + T_{D2} + T_{D3} \quad (4.12)$$

burada

$$T_{D1} = \sum_{n=0}^2 (-1)^n F(t_D) = \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{x_D}{2\sqrt{t_D}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{6+x_D}{2\sqrt{t_D}}\right) \right\} \quad (4.13)$$

$$T_{D2} = \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} n x_D G_1(t_D) \quad (4.14)$$

$$T_{D2} = x_D \left\{ \frac{2 \exp\left(-\frac{(2+x_D)^2}{4t_D}\right)}{\sqrt{\pi t_D}} - \frac{2 \exp\left(-\frac{(4+x_D)^2}{4t_D}\right)}{\sqrt{\pi t_D}} - \frac{4 \exp\left(-\frac{(6+x_D)^2}{4t_D}\right)}{\sqrt{\pi t_D}} \right\} \quad (4.15)$$

İlk üç orthogonal polinomu He_n

$$He_0(\omega) = 1 \quad He_1(\omega) = \omega \quad He_2(\omega) = \omega^2 - 1$$

değerlerini alır.

$n=2$ için (4.11) in 3.terimi aşağıdaki şekilde sadeleşir;

$$T_{D3} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{x_D^m}{m!} G(t_D) = \frac{x_D^2}{2!} G(t_D) \quad (4.16)$$

ve

$$T_{D3} = \left\{ x_D^2 \frac{2^{1/2}}{\sqrt{\pi t_D}} \left\{ \exp\left(-\frac{(4+x_D)^2}{4t_D}\right) \left(\frac{(4+x_D)}{\sqrt{2t_D}}\right) + \exp\left(-\frac{(6+x_D)^2}{4t_D}\right) \left(\frac{(6+x_D)}{\sqrt{2t_D}}\right) \right\} \right\} \quad (4.17)$$

şeklini alır.

EK-5 II. Akış Modeli Analitik Çözümü-1

4.Bölüm 29 no'lu ve 2.Bölüm 20 no'lu denklemleri Laplace uzayı çözümlerine aşağıdaki şekilde ulaşılabilir .
20 no'lu denkleminin Laplace dönüşümü

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_{mD}}{\partial z_D^2} - s \bar{T}_{mD} = 0 \quad (5.1)$$

şeklindedir. Bu denklem çözülerek (5.2) eşitliği elde edilebilir;

$$\bar{T}_{mD} = c_1 \sinh(\sqrt{s} z_D) + c_2 \cosh(\sqrt{s} z_D) \quad (5.2)$$

(16) ve (17) sınır koşullarının dahil edilmesiyle (5.3) denklemin aşağıdaki hali alır;

$$\bar{T}_{mD} = \bar{T}_D \left[-\tanh(\sqrt{s}) \sinh(\sqrt{s} z_D) + \cosh(\sqrt{s} z_D) \right] \quad (5.4)$$

Bu denklemin z_D ye göre türevine $z_D=0$ koşulu eklenirse

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_{mD}}{\partial z_D} \right|_{z_D=0} = -\bar{T}_D \sqrt{s} \tanh(\sqrt{s}) \quad (5.5)$$

eşitliği elde edilir. 1.diferansiyel denklem (29) tekrar yazılacak olursa;

$$\left. \frac{\partial^2 T_D}{\partial x_D^2} - \frac{\partial T_D}{\partial x_D} - \frac{\partial T_D}{\partial t_D} + \lambda \frac{\partial T_{mD}}{\partial z_D} \right]_{z_D=0} = 0 \quad (5.6)$$

ve Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{T}_D}{\partial x_D^2} - \frac{\partial \bar{T}_D}{\partial x_D} - s \bar{T}_D + \lambda \frac{\partial \bar{T}_{mD}}{\partial z_D} \right]_{z_D=0} = 0 \quad (5.7)$$

eşitliği elde edilir. (5.5) eşitliğinin bu denkleme dahil edilmesiyle (5.8) elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_D}{\partial x_D^2} - \frac{\partial \bar{T}_D}{\partial x_D} - \left(s + \lambda \sqrt{s} \tanh(\sqrt{s} a_D) \right) \bar{T}_D = 0 \quad (5.8)$$

Bu denklemin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\bar{T}_D = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{x_D}{2}\right) \exp\left(-\sqrt{1+4(s+\lambda\sqrt{s}\tanh(\sqrt{s}a_D))} \frac{x_D}{2}\right) \quad (5.9)$$

Bu denklemin aşağıdaki şekilde tekrar düzenlenmesi ,Laplace iterative ters dönüşüm metodunun denklem üzerinde kolaylıkla uygulanmasına olanak verir. .

$$\bar{T}_D = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{x_D}{2}\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{1}{4} + s + \lambda\sqrt{s} \tanh(\sqrt{s}a_D)} x_D\right) \quad (5.10)$$

Bu denklemin kapalı form bir çözümünü türetmenin bir yolu yarı sonsuz bir düzlemde belirli bir integral sonuçlarını kullanmaktır. Bu metod Sudicki ve Frind (1982) tarafından yukarıdaki probleme çözüm geliştirmede kullanılmıştır. Her ne kadar bu çözüm kullanışlı olsada içerdiği Heaviside basamak fonksiyonu nedeniyle parametre tahmini için regresyon prosedürlerinde kullanışlılığını yitirir. Buna ek olarak çözümündeki model aşamalarının fiziksel bileşenlerini tanımlamak kolay değildir. Daha kullanışlı ve fiziksel olarak uyumlu bir çözüm türetmek amacıyla Laplace iterative dönüşümü aşağıdaki gibi kullanılabilir. İlk iterasyon ters dönüşümü ile denklem (5.11) e dönüşür.

$$\dot{T}_D(\tau, s) = \frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) \frac{1}{s} \exp\left(-\tau\lambda\sqrt{s} \tanh(\sqrt{s}a_D)\right) \quad (5.11)$$

İkinci iterasyon çözümü doğrudan Skopp ve Warrick (1975) çözümünden sağlanabilir. Ek-1 de yer alan Skopp and Warrick ters dönüşüm bağıntısına göre ikinci iterasyonun uygulanmasıyla aşağıdaki gerçek uzay kapalı form çözümüne ulaşılır.

$$T_D = \int_0^{t_D} \frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) F(t_D - \tau) d\tau \quad (5.12)$$

$$F = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_R} \left[\text{Sin}\left(\frac{\omega^2(t_D - \tau)}{2} - \lambda_I\right) + \text{Sin}(\lambda_I) \right] \frac{d\omega}{\omega} \quad (5.13)$$

$$\lambda_R = \frac{\lambda\tau\omega}{2} \frac{\text{Sinh}(a_D \omega) - \text{Sin}(a_D \omega)}{\text{Cosh}(a_D \omega) + \text{Cos}(a_D \omega)} \quad (5.14)$$

$$\lambda_I = \frac{\lambda\tau\omega}{2} \frac{\text{Sinh}(a_D \omega) + \text{Sin}(a_D \omega)}{\text{Cosh}(a_D \omega) + \text{Cos}(a_D \omega)} \quad (5.15)$$

EK-6a II. Akış Modeli Analitik Çözümü-2

Bu kısımda farklı bir yaklaşım ile daha basit yapılı ve sayısal çalışmaya daha uygun yeni bir çözüm yolu kullanılır. Tam analitik çözüme ulaşmadaki yeni yol şu şekildedir;

İlk olarak Fourier Sine dönüşümü ve bu dönüşümün ters dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$\chi_D(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \chi(x_D) \sin(\omega x_D) dx_D \quad (6.1) \quad \chi_D(x_D) = \int_0^{\infty} \chi(\omega) \sin(x_D \omega) d\omega \quad (6.2)$$

Ayrıca Laplace uzayı değeri aşağıda yer alan yeni bir bağımlı değişken olarak χ_D tanımlanabilir

$$\bar{\chi}_D = \exp(-x_D / 2) \bar{T}_D \quad (6.3)$$

Bu sayede (5.10) denklemini şu şekilde yazılabilir;

$$\bar{\chi}_D = \frac{1}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{1}{4} + (s + \lambda\sqrt{s} \tanh(\sqrt{s} a_D))} x_D\right) \quad (6.4)$$

Bu denklemin Fourier Sine dönüşümü ise aşağıdaki gibidir.

$$\bar{\chi}_D = \frac{2\omega}{\pi s} \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{4} + (s + \lambda\sqrt{s} \tanh(\sqrt{s} a_D))} \quad (6.5)$$

Bu denklem şu şekilde de düzenlenebilir;

$$\bar{\chi}_D = \frac{2\omega}{\pi s} \frac{\cosh(\sqrt{s} a_D)}{\eta \cosh(\sqrt{s} a_D) + \lambda\sqrt{s} \sinh(\sqrt{s} a_D)} \quad (6.6)$$

Burada η nin tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\eta = \omega^2 + \frac{1}{4} + s \quad (6.7)$$

Hiperbolik fonksiyonlar üstlü ifadeler olarak yazılacak olursa (6.6) denklemini aşağıdaki hali alır;

$$\bar{\chi}_D = \frac{2\omega}{\pi s} \frac{e^{\sqrt{s}a_D} + e^{-\sqrt{s}a_D}}{\eta(e^{\sqrt{s}a_D} + e^{-\sqrt{s}a_D}) + \lambda\sqrt{s}(e^{\sqrt{s}a_D} - e^{-\sqrt{s}a_D})} \quad (6.8)$$

Tekrar düzenlenirse;

$$\bar{\chi}_D = \frac{2\omega}{\pi s} \frac{e^{\sqrt{s}a_D} + e^{-\sqrt{s}a_D}}{e^{\sqrt{s}a_D}(\eta + \lambda\sqrt{s}) + e^{-\sqrt{s}a_D}(\eta - \lambda\sqrt{s})} \quad (6.9)$$

Denklemine dönüşür. Bir adım daha genişletme ile ;

$$\bar{\chi}_D = \left\{ \frac{\frac{2\omega}{\pi s} \frac{1}{\eta + \lambda\sqrt{s}}}{1 + e^{-2\sqrt{s}a_D}} \right\} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\eta - \lambda\sqrt{s}}{\eta + \lambda\sqrt{s}} e^{-2\sqrt{s}a_D}} \right\} \quad (6.10)$$

Ve paydanın binom serisi olarak genişletilmesi ile;

$$\bar{\chi}_D = \frac{2\omega}{\pi s} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n \left(\frac{\eta - \lambda\sqrt{s}}{\eta + \lambda\sqrt{s}} \right)^n}{\left(e^{-2n\sqrt{s}a_D} + e^{-2(n+1)\sqrt{s}a_D} \right)} \right\} \quad (6.11)$$

Denklemine ulaşılır. Tekrar bir düzenleme ile ;

$$\bar{\chi}_D = \frac{2\omega}{\pi s} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n \left(1 - \frac{2\lambda\sqrt{s}}{\eta + \lambda\sqrt{s}} \right)^n}{\left(e^{-2n\sqrt{s}a_D} + e^{-2(n+1)\sqrt{s}a_D} \right)} \right\} \quad (6.12)$$

Ve ikinci kez binom açılımı kullanılarak (6.13) elde edilir.

$$\bar{\chi}_D = \frac{2\omega}{\pi s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^n \left\{ (-1)^m \binom{n}{m} \frac{(2\lambda\sqrt{s})^m}{(\eta + \lambda\sqrt{s})^{m+1}} \right\} \left\{ \frac{1}{\left(e^{-2n\sqrt{s}a_D} + e^{-2(n+1)\sqrt{s}a_D} \right)} \right\} \quad (6.13)$$

Dikkat edilirse m=0 için denklem önemli ölçüde basitleşir. Bu nedenle denklem, iki ayrı toplam olarak

yazılabilir.

$$\bar{\chi}_D = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} G(s) \quad (6.14)$$

Burada F ve G ifadeleri aşağıdaki gibidir;

$$F(s) = \frac{2\omega}{\pi s} \frac{e^{-2n\sqrt{s}a_D} + e^{-2(n+1)\sqrt{s}a_D}}{\eta + \lambda\sqrt{s}} \quad (6.15)$$

$$G(s) = \frac{2\omega}{\pi s} \left\{ \frac{(2\lambda\sqrt{s})^m}{(\eta + \lambda\sqrt{s})^{m+1}} \right\} \left(e^{-2n\sqrt{s}a_D} + e^{-2(n+1)\sqrt{s}a_D} \right) \quad (6.16)$$

(6.15) e η tanımı eklenirse ifade aşağıdaki gibi olur;

$$F(s) = \frac{2\omega}{\pi s} \frac{e^{-2n\sqrt{s}a_D} + e^{-2(n+1)\sqrt{s}a_D}}{s + \omega^2 + \frac{1}{4} + \lambda\sqrt{s}} \quad (6.17)$$

Çözüm için iteratif Laplace dönüşüm metodu kullanılır. Denklem, ilk iterasyon ters dönüşümü ile aşağıdaki hali alır.

$$F(\tau) = \frac{2\omega}{\pi s} \left\{ \begin{array}{l} \left(e^{-2n\sqrt{s}a_D} + e^{-2(n+1)\sqrt{s}a_D} \right) \\ e^{-\omega^2\tau} \quad e^{-\tau/4} \quad e^{-\tau\lambda\sqrt{s}} \end{array} \right\} \quad (6.18)$$

Aşağıdaki ters dönüşüm bağıntısı kullanılarak;

$$L^{-1} \left(\frac{\exp(a\sqrt{s})}{s} \right) = \text{erfc} \left(\frac{a}{\sqrt{2t_D}} \right)$$

İkinci iterasyon ters dönüşümü sonrası convolution integral metodu uygulanarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$F(t_D) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{t_D} e^{-\omega^2\tau} e^{-\tau/4} \left\{ \begin{array}{l} \text{erfc}(\alpha_1) + \\ \text{erfc}(\alpha_2) \end{array} \right\} d\tau$$

(6.19)

Burada

$$\alpha_1 = \frac{2na_D + \tau\lambda}{2\sqrt{(t_D - \tau)}} \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \frac{(2n+2)a_D + \tau\lambda}{2\sqrt{(t_D - \tau)}} \quad (6.20)$$

şeklindedir. Aşağıdaki Fourier Sine ters dönüşüm formulu (Erdelyi Vol.1 , section 2.4, number 19) kullanılarak ;

$$F_s^{-1}(\omega e^{-\tau\omega^2}) = \frac{\sqrt{\pi}x_D}{4\sqrt{\tau^3}} \exp\left(-\frac{x_D^2}{4\tau}\right) \quad (6.21)$$

F(t_D) gerçek uzay fonksiyonu elde edilir.

$$F(t_D) = \int_0^{t_D} \left\{ \begin{array}{l} \exp\left(-\frac{x_D^2}{4\tau}\right) \exp\left(-\frac{\lambda\tau}{4}\right) \\ \frac{x_D (erfc(\alpha_1) + erfc(\alpha_2))}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \end{array} \right\} d\tau \quad (6.22)$$

Benzer şekilde (6.16) ya η tanımını eklenirse ifade aşağıdaki gibi olur;

$$G(s) = \frac{2\omega}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2\lambda)^m s^{m/2-1}}{\left(s + \omega^2 + \frac{1}{4} + \lambda\sqrt{s}\right)^{m+1}} \\ \left(e^{-2n\sqrt{s}a_D} + e^{-2(n+1)\sqrt{s}a_D}\right) \end{array} \right\} \quad (6.23)$$

Aynı şekilde iteratif Laplace ters dönüşümü $L^{-1}\left(\frac{1}{(s+a)^{m+1}}\right) = \frac{\tau^m e^{-a\tau}}{m!} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Kullanılması ile ilk iterasyon sonucu aşağıdaki gibi olur.

$$G(\tau) = \frac{2\omega}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2\lambda)^m s^{m/2-1} \tau^m}{m!} \\ e^{-\omega^2\tau} e^{-\tau/4} e^{-\lambda\tau\sqrt{s}} \\ \left(e^{-2n\sqrt{s}a_D} + e^{-2(n+1)\sqrt{s}a_D}\right) \end{array} \right\} \quad (6.24)$$

$$\text{Tekrar düzenlirse; } G(\tau) = \frac{2\omega}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2\lambda)^m \tau^m}{m!} e^{-\omega^2\tau} e^{-\tau/4} \\ s^{(m-1)/2-1/2} \left(e^{-\alpha_1\sqrt{s}} + e^{-\alpha_2\sqrt{s}}\right) \end{array} \right\} \quad (6.25)$$

Laplace ters dönüşüm bağıntısı (Erdelyi Vol.1, Section 5.6 transform 9)

$$L^{-1}\left(s^{(n-1)/2} \exp(a\sqrt{s})\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^n t_D^{n+1}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t_D}\right) He_n\left(\frac{a}{\sqrt{2t_D}}\right)$$

Kullanılarak ;

$$G(t_D) = \frac{2\omega}{\pi} \left\{ \frac{\lambda^m 2^{(m+1)/2}}{\sqrt{\pi m!}} \int_0^{t_D} \frac{\tau^m e^{-\omega^2 \tau} e^{-\tau/4}}{\sqrt{(t_D - \tau)^m}} \left(\begin{array}{l} e^{-\alpha_1^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_1) + \\ e^{-\alpha_2^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_2) \end{array} \right) d\tau \right\} \text{ eşitliği elde edilir.} \quad (6.26)$$

6.21 de yer alan Fourier Sine ters dönüşüm formula kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir

$$G(t_D) = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \left\{ \int_0^{t_D} \frac{\tau^m x_D e^{-\frac{x_D^2}{4\tau}} e^{-\frac{\tau}{4}}}{m! \sqrt{\tau^3} \sqrt{(t_D - \tau)^m}} \left(\begin{array}{l} e^{-\alpha_1^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_1) + \\ e^{-\alpha_2^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_2) \end{array} \right) d\tau \right\} \quad (6.27)$$

Böylece xD gerçek uzay çözümü tamamlanmış olur;

$$\chi_D = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F(t_D) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} G(t_D) \quad (6.28)$$

Benzer şekilde TD son çözümü şu şekilde yazılır;

$$T_D = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_{D-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} T_{D-2} \quad (6.29)$$

Burada TD_1 ve TD_2 fonksiyonlarını oluşturmak için (6.3) deki tanım kullanılır.

$$T_{D-1} = e^{x_D/2} F(t_D) = \int_0^{t_D} \left\{ \frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) (erfc(\alpha_1) + erfc(\alpha_2)) \right\} d\tau \quad (6.30)$$

ve

$$T_{D-2} = e^{x_D/2} G(t_D) = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \left\{ \int_0^{t_D} \frac{\tau^m x_D \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right)}{m! \sqrt{\tau^3} \sqrt{(t_D - \tau)^m}} \left(\begin{array}{l} e^{-\alpha_1^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_1) + \\ e^{-\alpha_2^2} He_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_2) \end{array} \right) d\tau \right\} \quad (6.31)$$

EK-6b II. Akış İzleyici Taşınımı Modeli Analitik Çözümü

Gözenekli ortamda ısı ve izleyici transferinin her ikisi de aynı tip difaransiyel denklemler ile tanımlanır. Isının izleyici transferinin özel bir tipi olduğu beklenen bir gerçektir. Böylece İzleyici transfer denklemini aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\phi D_m}{b} \frac{\partial C_m}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

(B1)

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} - D_m \frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} = 0 \quad (B2)$$

Başlangıç ve sınır koşulları ise;

$$C = C_m = C_i \quad t = 0 \quad (B3)$$

İzleyici deneyleri için her iki ortamın yarı sonsuz olduğu varsayılırsa ;

$$C \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad x \rightarrow \infty \quad (B4)$$

$$C_m \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad z \rightarrow \infty$$

(B5)

7.5 nolu eşitlik matris bloklarının sonsuz genişlikte olduğunu varsayar. Çünkü çatlaklı ortamdaki yayılım ve iletim transferi matris bloklarındaki difüzyon oranla oldukça büyük değerler alır. Böylece enjekte edilen izleyici çatlaklı ortamın sonuna ulaştığında matris bloğundaki difüzyon bloğun orta noktasına dahi erişememiş olacaktır. Bu nedenle matris bloğu sonsuz genişlikte kabul edilebilir.

Matris sınırındaki konsantrasyonlar ise eşitlik halindedir.

$$C = C_m \quad z = 0 \quad (B6)$$

Saha uygulamalarında sürekli bir enjeksiyonu sağlamak oldukça zordur. Bu nedenle kesikli enjeksiyon profile sıklıkla uygulanır. Bu profil için sisteme giren izleyici kütlesi transferi şu şekilde tanımlanabilir;

$$C = \frac{M}{Q} \delta(t) \quad x = 0 \quad (B7)$$

Boyutsuz değişken tanımları ise;

$$C_D = \frac{C}{m/(Qt_w)}, \quad C_{mD} = \frac{C_m}{(m/Qt_w)}$$

(B8)

$$x_D = \frac{ux}{D}, \quad t_D = \frac{u^2 t}{D}, \quad \text{and} \quad z_D = \frac{uz}{\sqrt{DD_m}} \quad (B9) \quad \lambda = \frac{\phi_m^2 D_m D}{b^2 u^2}, \quad Pe = \frac{uL}{D}, \quad Pt = \frac{b^2 u}{\phi D_m L}, \quad t_w = \frac{L}{u} \quad (B10)$$

Böylece matris ve çatlaklı ortam izleyici transfer denklemleri aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\frac{\partial C_D}{\partial t_D} + \frac{\partial C_D}{\partial x_D} - \frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} + \lambda^{1/2} \frac{\partial C_{mD}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0} = 0 \quad (B11)$$

$$\frac{\partial C_{mD}}{\partial t_D} - \frac{\partial^2 C_{mD}}{\partial z_D^2} = 0 \quad (\text{B12})$$

Benzer şekilde boyutsuz başlangıç ve sınır koşulları ;

$$C_D = C_{mD} = 0 \quad \text{at} \quad t_D = 0 \quad (\text{B13})$$

$$C_D \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad x_D \rightarrow \infty \quad (\text{B14})$$

$$C_{mD} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad z_D \rightarrow \infty \quad (\text{B15})$$

$$C_D = C_{mD} \quad \text{at} \quad z_D = 0 \quad (\text{B16})$$

$$C_D = t_w \delta(t) \quad \text{at} \quad x_D = 0 \quad (\text{B17})$$

şeklindedir.

(B12 dekleminin Laplace dönüşümü

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_m}{\partial z_D^2} - s \bar{C}_m = 0 \quad (\text{B12-1})$$

şeklindedir. Bu denklemin çözülürse

$$\bar{C}_{mD} = C_1 \exp(-\sqrt{s} z_D) + C_2 \exp(\sqrt{s} z_D) \quad (\text{B12-2})$$

elde edilir. B15 sınır koşulu için C2 sıfır olur. Böylece denklem sadeleşir

$$\bar{C}_{mD} = C_1 \exp(-\sqrt{s} z_D) \quad (\text{B12-3})$$

B16 sınır koşulu için denklemin $\bar{C}_{mD} = \bar{C}_D \exp(-\sqrt{s} z_D)$ halini alır

Bu deklemin z_D ye göre kısmi türevi alınırsa $\left. \frac{\partial \bar{C}_{mD}}{\partial z_D} \right|_{z_D=0} = -\bar{C}_D \sqrt{s}$ eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik Laplace dönüşümü yapılan B11 denklemine dahil edilirse

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_D}{\partial x_D^2} - \frac{\partial \bar{C}_D}{\partial x_D} - s \bar{C}_D + \lambda^{1/2} \frac{\partial \bar{C}_{mD}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_D}{\partial x_D^2} - \frac{\partial \bar{C}_D}{\partial x_D} - \bar{C}_D (s + \sqrt{\lambda s}) = 0 \quad (\text{B11-1})$$

1) elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$\bar{C}_D = A \exp\left(\frac{x_D}{2}\right) \exp\left(-\frac{x_D}{2} \sqrt{1 + 4(s + \sqrt{\lambda s})}\right) + A_2 \exp\left(\frac{x_D}{2}\right) \exp\left(+\frac{x_D}{2} \sqrt{1 + 4(s + \sqrt{\lambda s})}\right) \quad (\text{B11-2})$$

2)

şeklindedir. B14 sınır koşulu ile A4 sıfır olur ve denklem B18 deki gibi sadeleşir.

$$\bar{C}_D = A \exp\left(\frac{x_D}{2}\right) \exp\left(-\frac{x_D}{2} \sqrt{1+4(s+\sqrt{\lambda s})}\right) \quad (\text{B18})$$

B18 genel çözümündeki A'nın hesaplanabilmesi için eş zamanlı/ani enjeksiyon sınır koşulunun bu aşamada kullanılması gerekecektir. Başlangıç koşulunun Laplace dönüşümü

$$\bar{C}_D = \int_0^{\infty} \exp(-st_D) t_w \delta(t) dt_D \quad (\text{B19})$$

İntegral değişkenlerinin değiştirilmesi ile

$$t_D = \frac{u^2}{D} t \Rightarrow dt_D = \frac{u^2}{D} dt \quad (\text{B20})$$

B19 şu şekilde yazılabilir;

$$\bar{C}_D = \int_0^{\infty} \exp(-su^2 t / D) t_w \delta(t) (u^2 / D) dt \quad (\text{B21})$$

(B21)

Bu İntegral hesaplanırsa

$$\bar{C}_D = \frac{u^2}{D} t_w = \frac{uL}{D} \quad (\text{B22})$$

Elde edilir. Buradan $x_D=0$ için A değeri bulunmuş olur.

$$\bar{C}_D = \frac{uL}{D} \exp\left(\frac{x_D}{2}\right) \exp\left(-\frac{x_D}{2} \sqrt{1+4(s+\sqrt{\lambda s})}\right) \quad (\text{B23})$$

İteratif Laplace ters dönüşüm yöntemi kullanılarak (Kocabas 2011) D23 denklemi aşağıdaki gibi çözülmüş olur:

$$C_D = \int_0^{t_D} \left\{ \frac{\frac{uL}{D} \frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(x_D-\tau)^2}{4\tau}\right)}{\frac{\sqrt{\lambda}\tau}{2\sqrt{\pi}(t_D-\tau)^3} \exp\left(-\frac{\lambda\tau^2}{4(t_D-\tau)}\right)} \right\} d\tau \quad (\text{B24})$$

$$C_D = Pe \int_0^{t_D} \left\{ \frac{\frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(x_D-\tau)^2}{4\tau}\right)}{\frac{\sqrt{\lambda}\tau}{2\sqrt{\pi}(t_D-\tau)^3} \exp\left(-\frac{\lambda\tau^2}{4(t_D-\tau)}\right)} \right\} d\tau \quad (\text{B25})$$

Çözüm karakteristik zamanlar ve boyutlu değişkenler için düzenlenirse

$$C = \frac{m}{Q} \int_0^t \left\{ \frac{\sqrt{t_d}}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(\frac{t_d x_{Dn}}{2t_w}\right) \exp\left(-\frac{x_{Dn}^2 t_d}{4\tau}\right) \exp\left(-\frac{t_d \tau}{4t_w^2}\right) \right. \\ \left. \frac{\tau}{2\sqrt{\pi t_m (t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t_m (t-\tau)}\right) \right\} d\tau$$

şeklını alır

(B28)

EK-7 I. Akış Modeli Yeni analitik Çözümü-2 Kısmi Türevleri

Burada Duyarlılık analizlerinde kullanılması amacıyla Ek-4 de yer alan analitik çözümün ((4.4) den (4.11) e kadarki ifadeler) x_D ve t_D ye göre kısmi türevleri türetilmiştir.

$$T_D = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx_D}{m!} G_1 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{x_D^m}{m!} G \right] \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial T_D}{\partial t_D} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial F}{\partial t_D} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx_D}{m!} \frac{\partial G_1}{\partial t_D} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{x_D^m}{m!} \frac{\partial G}{\partial t_D} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_D}{\partial x_D} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial F}{\partial x_D} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{m!} \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_D} x_D + G_1 \right) + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{1}{m!} \left(x_D^m \frac{\partial G}{\partial x_D} + G(m-1)x_D^{m-1} \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$F(t_D) = \begin{cases} \operatorname{erfc}(A) \\ \operatorname{erfc}(B) \end{cases} \quad (7.4)$$

$$A = \frac{2n + x_D}{2\sqrt{t_D}} \quad (7.5)$$

$$B = \frac{2n + 2 + x_D}{2\sqrt{t_D}} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_D} &= A \frac{e^{-A^2}}{t_D \sqrt{\pi}} + B \frac{e^{-B^2}}{t_D \sqrt{\pi}} \\ (7.8) \quad \frac{\partial F}{\partial x_D} &= - \frac{e^{-A^2} + e^{-B^2}}{\sqrt{\pi t_D}} \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$G_1(t_D) = \left\{ \frac{2\exp(-A^2)}{\sqrt{\pi t_D}} + \frac{2\exp(-B^2)}{\sqrt{\pi t_D}} \right\} \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial t_D} = \frac{e^{-A^2}}{t_D \sqrt{\pi t_D}} (2A^2 - 1) + \frac{e^{-B^2}}{t_D \sqrt{\pi t_D}} (2B^2 + 1) \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_D} = - \frac{2(Ae^{-A^2} + Be^{-B^2})}{t_D \sqrt{\pi}} \quad (7.12)$$

$$G(t_D) = \left\{ \frac{2^{(m+1)/2}}{\sqrt{\pi} t_D^{m/2}} \left\{ \exp(-A^2) He_{m-1}(A) + \exp(-B^2) He_{m-1}(B) \right\} \right\} \quad (7.13) \quad A' = \frac{2n + x_D}{\sqrt{2t_D}}$$

$$(7.14) \quad B' = \frac{2n + 2 + x_D}{\sqrt{2t_D}}$$

$$(7.15)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t_D} = \frac{2^{\frac{m+1}{2}}}{\sqrt{\pi t_D^m}} \left[e^{-A^2} \left[\frac{A^2}{t_D} H_e(A') - \frac{m}{2t_D} H_e(A') + H_e'(A') \right] + e^{-B^2} \left[\frac{B^2}{t_D} H_e(B') - \frac{m}{2t_D} H_e(B') + H_e'(B') \right] \right]$$

(7.16)

$$H e_{m-1}(A') = (m-1)! \sum_{i=0}^{(m-1)/2} (-1)^i \frac{A^{m-1-2i}}{i! 2^i (m-1-2i)!}$$

(7.17)

$$H' e_{m-1}(A') = (m-1)! \sum_{i=0}^{(m-1)/2} (-1)^i \frac{A^{m-1-2i}}{i! 2^i (m-1-2i)!} * \frac{-(m-1-2i)}{2t_D}$$

(7.18)

$$\frac{\partial G}{\partial x_D} = \frac{2^{\frac{m+1}{2}}}{t_D^{m/2} \sqrt{\pi}} \left[e^{-A^2} \left[-\frac{A}{\sqrt{t_D}} H_e(A') + H_e'^*(A') \right] + e^{-B^2} \left[-\frac{B}{\sqrt{t_D}} H_e(B') + H_e'^*(B') \right] \right]$$

(7.19)

$$H'^* e_{m-1}(A') = (m-1)! \sum_{i=0}^{(m-1)/2} (-1)^i \frac{A^{m-1-2i-1}}{i! 2^i (m-1-2i)!} * \frac{m-2-2i}{\sqrt{2t_D}}$$

(7.20)

EK-8 II. Akış Modeli Yeni Analitik Çözümü Kısmi Türevleri

Burada Duyarlılık analizlerinde kullanılması amacıyla Ek-6 da yer alan analitik çözümün (6.20),(6.30)ve (6.31) x_D, t_D ve λ ya göre kısmi türevleri türetilmiştir.

$$T_D = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_{D-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} T_{D-2} \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial T_D}{\partial i_D} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial T_{D1}}{\partial i_D} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{\partial T_{D2}}{\partial i_D}$$

(8.2)

$$i_D = x_D, t_D, \lambda$$

$$T_{D-1} = \int_0^{t_D} \left\{ \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) \frac{x_D (\operatorname{erfc}(\alpha_1) + \operatorname{erfc}(\alpha_2))}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \right\} d\tau \quad (8.3)$$

$$\alpha_1 = \frac{2na_D + \tau\lambda}{2\sqrt{(t_D - \tau)}} \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \frac{(2n+2)a_D + \tau\lambda}{2\sqrt{(t_D - \tau)}}$$

$$\frac{\partial T_{D1}}{\partial x_D} = \int_0^{t_D} \left\{ \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) \frac{(\operatorname{erfc}(\alpha_1) + \operatorname{erfc}(\alpha_2))}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \left(1 - \frac{1}{2\tau} x_D (x_D - \tau)\right) \right\} d\tau \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial T_{D1}}{\partial t_D} = \int_0^{t_D} \left\{ \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) \frac{1}{(t_D - \tau)} \frac{x_D (\alpha_1 e^{-\alpha_1^2} + \alpha_2 e^{-\alpha_2^2})}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\pi\tau^3}} \right\} d\tau$$

(8.5)

$$\frac{\partial T_{D1}}{\partial \lambda} = \int_0^{t_D} \left\{ \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right) \frac{x_D}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \left[\frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\tau}{\sqrt{t_D - \tau}} (e^{-\alpha_1^2} + e^{-\alpha_2^2}) \right] \right\} d\tau \quad (8.6)$$

$$T_{D-2} = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \left\{ \int_0^{t_D} \frac{\tau^m}{m!} \frac{x_D \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right)}{\sqrt{\tau^3} \sqrt{(t_D - \tau)^m}} \left(e^{-\alpha_1^2} \operatorname{He}_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_1) + e^{-\alpha_2^2} \operatorname{He}_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_2) \right) d\tau \right\}$$

(8.7)

$$\frac{\partial T_{D2}}{\partial x_D} = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \left\{ \int_0^{t_D} \frac{\tau^m}{m!} \frac{\exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right)}{\sqrt{\tau^3} \sqrt{(t_D - \tau)^m}} \left(1 - \frac{1}{2\tau} x_D (x_D - \tau)\right) \begin{pmatrix} e^{-\alpha_1^2} \operatorname{He}_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_1) \\ e^{-\alpha_2^2} \operatorname{He}_{m-1}(\sqrt{2} \alpha_2) \end{pmatrix} d\tau \right\}$$

(8.8)

$$\frac{\partial T_{D2}}{\partial t_D} = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \left\{ \int_0^{t_D} \frac{\tau^m x_D \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right)}{m! \sqrt{\tau^3} \sqrt{(t_D - \tau)^m}} \left[\frac{e^{-\alpha_1^2} He_1}{(t_D - \tau)} \left(-\frac{m}{2} + \alpha_1^2\right) + \frac{e^{-\alpha_2^2} He_2}{(t_D - \tau)} \left(-\frac{m}{2} + \alpha_2^2\right) + e^{-\alpha_1^2} He_1' + e^{-\alpha_2^2} He_2' \right] d\tau \right\} \quad (8.9)$$

$$He_{1,2} = He_{m-1}(\sqrt{2}\alpha_{1,2}) = (m-1)! \sum_{i=0}^{(m-1)/2} (-1)^i \frac{(\sqrt{2}\alpha_{1,2})^{m-1-2i}}{i! 2^i (m-1-2i)!} \quad (8.10)$$

$$He_{1,2}' = H' e_{m-1}(\sqrt{2}\alpha_{1,2}) = (m-1)! \sum_{i=0}^{(m-1)/2} (-1)^i \frac{(\sqrt{2}\alpha_{1,2})^{m-2-2i}}{i! 2^i (m-1-2i)!} \frac{\alpha_{1,2}(m-1-2i)}{2(\tau - t_D)} \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial T_{D2}}{\partial \lambda} = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \left\{ \int_0^{t_D} \frac{\tau^m x_D \exp\left(-\frac{(x_D - \tau)^2}{4\tau}\right)}{m! \sqrt{\tau^3} \sqrt{(t_D - \tau)^m}} \left[e^{-\alpha_1^2} (-2\alpha_1 \alpha_1' He_1 + He_1^*) + e^{-\alpha_2^2} (-2\alpha_2 \alpha_2' He_2 + He_2^*) \right] d\tau \right\} \quad (8.12)$$

$$\alpha_{1,2}' = -\frac{\tau}{2\sqrt{t_D - \tau}} \quad (8.13)$$

$$He_{1,2}^* = H^* e_{m-1}(\sqrt{2}\alpha_{1,2}) = (m-1)! \sum_{i=0}^{(m-1)/2} (-1)^i \frac{\alpha_{1,2}' (\sqrt{2}\alpha_{1,2})^{m-2-2i}}{i! 2^i (m-1-2i)!} (m-1-2i)\sqrt{2} \quad (8.14)$$

EK-9 I. Akış İzleyici Taşınımı Modeli

İzleyici Yayılımı Denklemleri aşağıdaki şekilde düzenlenebilir;

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\phi D_m}{b} \frac{\partial C_m}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} - D_m \frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} = 0 \quad (9.2)$$

Sınır Koşulları ise;

$$C = C_m = C_i \quad t = 0 \quad \text{için} \quad (9.3)$$

$$C = C_i \quad x = 0 \quad \text{için} \quad (9.4)$$

$$C = C_m \quad z = 0 \quad \text{için} \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial z} = 0 \quad z = a \quad \text{içindir} \quad (9.6)$$

Birimsiz değişkenler olarak şu şekilde tanımlanabilirler;

$$C_D = \frac{C - C_i}{C_o - C_i} \quad (9.7) \quad C_{mD} = \frac{C_m - C_i}{C_o - C_i} \quad (9.8)$$

$$x_D = \frac{\phi_m D_m x}{u b a} \quad (9.9)$$

$$t_D = \left(t - \frac{x}{u} \right) \frac{D_m}{a^2} \quad (9.10)$$

$$z_D = \frac{z}{a} \quad (9.11)$$

Bu değişkenler kullanılarak İzleyici transfer denklemleri aşağıdaki formlara dönüşür.

$$\left. \frac{\partial C_D}{\partial x_D} - \frac{\partial C_{mD}}{\partial z_D} \right]_{z_D=0} = 0 \quad (9.12) \quad \frac{\partial C_{mD}}{\partial t_D} - \frac{\partial^2 C_{mD}}{\partial z_D^2} = 0$$

(9.13)

Başlangıç ve sınır koşullarının birimsiz halleri ise aşağıdaki gibidir.

$$t_D = 0 \quad \text{için} \quad C_D = C_{mD} = 0 \quad (9.14)$$

$$x_D = 0 \quad \text{için} \quad C_D = 1 \quad (9.15)$$

$$z_D = 0 \quad \text{için} \quad C_{mD} = C_D \quad (9.16)$$

$$z_D = 1 \quad \text{için} \quad \frac{\partial C_{mD}}{\partial z_D} = 0 \quad (9.17)$$

Birimsiz zaman ve mesafe tanımları tekrar düzenlenirse

$$t_D = \left(\frac{ut}{L} - \frac{x}{L} \right) \frac{L D_m}{u a^2} \quad (9.18) \quad x_D = \frac{L \phi_m D_m}{u b a} \frac{x}{L}$$

(9.19)

Eşitlikleri elde edilir. Yeni birimsiz normalize değişkenler ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$x_{Dm} = \frac{x}{L} \quad (9.20) \quad t_{pvi} = \frac{ut}{L} \quad (9.21) \quad t_{Dm} = \frac{LD_m}{ua^2} \quad (9.22) \quad x_{Dm} = \frac{\phi_m D_m L}{uba}$$

(9.23)

$$t_{Dm} = \frac{LD_m}{ua^2} = \frac{L}{u} \frac{D_m}{a^2} = \frac{t_c}{t_m} \quad (9.24)$$

$$x_{Dm} = \frac{\phi_m D_m L}{uba} = \frac{L}{u} \frac{\phi_m D_m}{b^2} \frac{b}{a} = \frac{t_c}{t_t} \frac{b}{a}$$

(9.25)

EK-10 II. Akış İzleyici Transfer Modeli

İzleyici Transfer Denklemleri aşağıdaki şekilde düzenlenebilir;

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\phi_m D_m}{b} \frac{\partial C_m}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} - D_m \frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} = 0 \quad (10.2)$$

Sınır Koşulları ise;

$$C = C_m = C_i \quad t = 0 \quad \text{için} \quad (10.3)$$

$$C = \frac{M}{Q} \delta(t) \quad x = 0 \quad \text{için} \quad (10.4)$$

$$C = C_m \quad z = 0 \quad \text{için} \quad (10.5)$$

$$C \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad (10.6)$$

$$C_m \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad (10.7)$$

Birimsiz değişkenler olarak şu şekilde tanımlanabilirler;

$$C_D = \frac{C}{m/(Qt_w)} \quad (10.8) \quad C_{mD} = \frac{C_m}{m/(Qt_w)} \quad (10.9)$$

$$x_D = \frac{ux}{D} \quad (10.10), \quad t_D = \frac{u^2 t}{D} \quad (10.11), \quad z_D = \frac{uz}{\sqrt{DD_m}} \quad (10.12), \quad \lambda = \frac{\phi_m^2 DD_m}{b^2 u^2} \quad (10.13)$$

Bu değişkenler kullanılarak İzleyici transfer denklemleri aşağıdaki formlara dönüşür.

$$\left. \frac{\partial C_D}{\partial t_D} + \frac{\partial C_D}{\partial x_D} - \frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} - \lambda^{1/2} \frac{\partial C_{mD}}{\partial z_D} \right]_{z_D=0} = 0 \quad (10.14)$$

$$\frac{\partial C_{mD}}{\partial t_D} - \frac{\partial^2 C_{mD}}{\partial z_D^2} = 0 \quad (10.15)$$

Başlangıç ve sınır koşullarının birimsiz halleri ise aşağıdaki gibidir.

$$t_D = 0 \quad \text{için} \quad C_D = C_{mD} = 0 \quad (10.16)$$

$$x_D \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad C_D \rightarrow 0 \quad (10.17)$$

$$z_D \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad C_{mD} \rightarrow 0 \quad (10.18)$$

$$z_D = 0 \quad \text{için} \quad C_{mD} = C_D \quad (10.19)$$

$$C_D = t_w \delta(t) \quad \text{için} \quad x_D = 0 \quad (10.20)$$

Orantı değişkenleri ;

$$x_{Dn} = \frac{x}{L}$$

(10.21)

$$t_{pvi} = \frac{ut}{L} \quad (10.22)$$

Karakteristik zaman değişkenleri

$$t_w = \frac{L}{u} \quad (\text{Konveksiyon için}) \quad (10.23)$$

$$t_d = \frac{L^2}{D} \quad (\text{boyuna ısı yayılımı için}) \quad (10.24)$$

$$t_m = \frac{b^2}{\phi^2 D_m} \quad \text{matriks-çatlak değişimi için} \quad (10.25)$$

EK-11 II. Akış İzleyici Transfer Modeli Çözümü Kısmi Türevleri

$$C_D = \frac{t_d}{t_w} \int_0^t \left\{ \frac{x_{Dn} t_w^2 \tau \sqrt{\frac{1}{t_d t_m}}}{4\pi \sqrt{[\tau(t-\tau)]^3}} \exp\left(-\frac{t_d(x_{Dn} - \tau/t_w)^2}{4\tau}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t_m(t-\tau)}\right) \right\} d\tau$$

$$C_D = \int_0^t \left\{ \frac{x_{Dn} t_w \tau \sqrt{t_d/t_m}}{4\pi \sqrt{[\tau(t-\tau)]^3}} \exp\left(-\frac{t_d(x_{Dn} - \tau/t_w)^2}{4\tau}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t_m(t-\tau)}\right) \right\} d\tau \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial t_d} = \int_0^t \left\{ \frac{1}{2t_d} - \frac{(x_{Dn} - \tau/t_w)^2}{4\tau} \right\} \left\{ \frac{x_{Dn} t_w \tau \sqrt{t_d/t_m}}{4\pi \sqrt{[\tau(t-\tau)]^3}} \exp\left(-\frac{t_d(x_{Dn} - \tau/t_w)^2}{4\tau}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t_m(t-\tau)}\right) \right\} d\tau \quad (11.2)$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial t_w} = \int_0^t \left\{ \frac{1}{t_w} - \frac{t_d(x_{Dn} - \tau/t_w)}{2t_w^2} \right\} \left\{ \frac{x_{Dn} t_w \tau \sqrt{t_d/t_m}}{4\pi \sqrt{[\tau(t-\tau)]^3}} \exp\left(-\frac{t_d(x_{Dn} - \tau/t_w)^2}{4\tau}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t_m(t-\tau)}\right) \right\} d\tau \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial t_m} = \int_0^t \left\{ -\frac{1}{2t_m} + \frac{\tau^2}{4(t-\tau)t_m^2} \right\} \left\{ \frac{x_{Dn} t_w \tau \sqrt{t_d/t_m}}{4\pi \sqrt{[\tau(t-\tau)]^3}} \exp\left(-\frac{t_d(x_{Dn} - \tau/t_w)^2}{4\tau}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t_m(t-\tau)}\right) \right\} d\tau \quad (11.4)$$

EK-12 Matlab Yazılımları

(Yazılımlar farklı parametre aralıkları ve farklı değişken değerleri için birden çok kez kullanıldığı için kodlardaki sayısal değerler son kullanımdaki değerlere aittir)

A-1-1

```
%SWM1 çözümü-İ.K- sayısal analizi
%seritoplam fonksiyonunun kullanır
tic
clc,clear all;
p=8;% seri toplam çözümü için sonsuz toplam üst kabulü
x=1; % xd ilk değeri
ti=6; % td üst değer
tadim=0.01; % td için adım aralıkları
n=0;
t=0.000001;
    while t < ti
        n=n+1;
Td(n)=seritoplam(x,t,p)
        t=t+tadim
    end
plot(Td)
legend('Seri-İ.K. ');
xlabel('td*10');
ylabel('Td');
toc
```

A1-2

```
function [ Tdx ] = seritoplam( xd,td,p )
% SWM1 çözümü-İ.K-
% p sonsuz toplam için üst sınırdır
% e-7,8 lik yakınsama için 5-10 arası yeterli gelmektedir
Td=0; %sonsuz toplam için ön kabul değeri
Td0=erfc(xd/(2*sqrt(td)))+erfc((xd+2)/(2*sqrt(td)));
for n=1:p;
    a1=(2*n+xd);
    a2=(2*n+2+xd);
    A=(-1)^n*(erfc(a1/(2*sqrt(td)))+erfc(a2/(2*sqrt(td))));
    C=exp(-a1*a1/(4*td));
    D=exp(-a2*a2/(4*td));
    G=0;
    for m=1:n ;
        E=0;
        F=0;
        B=(-1)^(n+m)*factorial(n)*factorial(m-1)*(xd^m)*2^((m+1)/2)...
        /(sqrt(pi)*(td^(m/2))*factorial(n-m)*factorial(m)*factorial(m));
        if rem(m-1,2)==0 ;
            jd=(m-1)/2;
        else
            jd=round((m-1)/2)-1;
        end
        for j=0:jd;
            E=E+((-1)^j)*((a1/sqrt(2*td))^(m-2*j-1))...
            /(factorial(j)*(2^j)*factorial(m-2*j-1));
            F=F+((-1)^j)*((a2/sqrt(2*td))^(m-2*j-1))...
            /(factorial(j)*(2^j)*factorial(m-2*j-1));
        end
    end
end
```



```

        G=G+B*(C*E+D*F);
    end
    Td=G+A+Td;
    Tdd(n)=Td+Td0;
end
Tolerans=abs(Tdd(p)-Tdd(p-1))
Tdx=Td+Td0;
%plot(Tdd,'-bx')
%xlabel('n,toplam sayısı');
%ylabel('Td')
%legend('n için Td yakınsaması');%görsel kontrol amaçlı
End

```

A-2-1

```

%SWM çözümü %sayısal analizi
%skoppinv isimli fonksiyonu kullanır.
clc,clear all;
tic
x=1;          % xd ilk değeri
ti=6;        % td üst değer
tadim=0.1;   % td için adım aralıkları
ust=20       % integral üst sınırı
adim=0.001   % integral sınırları adım aralıkları
t=0;
n=0;
while t < ti
    n=n+1;
    % skopp and Warrick ters dönüşümü
    z1=skoppinv(adim,ust-1,x,t);
    z2=skoppinv(adim,ust,x,t);
    % üst değer için integral hesabı hata payı
    tol(n)=abs(z2-z1);
    Td(n)=z2;
    t=t+tadim;
end
subplot(2,1,1);
plot(Td,'r');
ylabel('Td');
legend('Td');
subplot(2,1,2)
plot(tol,'c')
legend('Tolerans');
ylabel('Integral Üst-(Üst-1)');
xlabel('td*10');
toc

```

A-2-2

```

function [z] = skoppinv(adim,ust,x,t)
%(1/s)exp(-sgrt(s)tanh(sqrt(s))*xd) için
% skopp and Warrick ters dönüşümünü hesaplar
w=0.000001:adim:ust;
R=0.5*x*w.*(sinh(w)-sin(w))./(cosh(w)+cos(w));
I=0.5*x*w.*(sinh(w)+sin(w))./(cosh(w)+cos(w));
%integrali alınan fonksiyon
td=2*(1/pi)*exp(-R).*(sin(w.*w.*t/2-I)+sin(I))./w;
% trapez yöntemiyle integral değerinin hesaplanması
z=trapz(w,td)
%adım sayısının genişletilmesi ile hata payı kontrolü
j=2;

```

```

% genişletme oranı
wj=0.000001:adim*j:ust;
Rj=0.5*x*wj.*(sinh(wj)-sin(wj))./(cosh(wj)+cos(wj));
Ij=0.5*x*wj.*(sinh(wj)+sin(wj))./(cosh(wj)+cos(wj));
tdj=2*(1/pi)*exp(-Rj).*(sin(wj.*wj.*t/2-Ij)+sin(Ij))./wj;
zj=trapz(wj,tdj);
tolerans=abs(zj-z)
%Görsel kontrol amaçlı
plot(w,td)
end

```

A-3-1

```

%SWM,SWM1 ve INVLAP çözümlerini kıyaslar
clc,clear all;
p=10;% seri toplam çözümü için sonsuz toplam üst kabulü
x=1;      % xd ilk değeri
ti=6;     % td üst değer
tadim=0.1; % td için adım aralıkları
ust=20    % integral üst sınırı
adim=0.001 % integral sınırları adım aralıkları
n=0;
t=0;
while t < ti
    n=n+1;
    % skopp and Warrick ters dönüşümü
    %z1=skoppinv(adim,ust-1,x,t);
    z2=skoppinv(adim,ust,x,t);
    % üst değer için integral hesabı hata payı
    %tol(n)=abs(z2-z1);
    Td2(n)=z2
    Td1(n)=seritoplam(x,t,p)
    t=t+tadim
end
[tt,Tt]=INVLAP('(1/s)*exp(-sqrt(s)*1*tanh(sqrt(s)))',0.00001,ti,n);
plot(Td1,'-r')
hold on;
plot(Td2,'b*')
hold on;
plot(Tt,'--k')
legend('Seri-İ.K.','S&W.','Numeric');
xlabel('td*10');
ylabel('Td');

```

A3-2

```

% INVLAP - Numerical Inversion of Laplace Transforms
function [radt,ft]=INVLAP(Fs,tini,tend,nnt,a,ns,nd);
% Fs is formula for F(s) as a string
% tini, tend are limits of the solution interval
% nnt is total number of time instants
% a, ns, nd are parameters of the method
% if not given, the method uses implicit values a=6, ns=20, nd=19
% it is recommended to preserve a=6
% increasing ns and nd leads to lower error
% an example of function calling
% [t,ft]=INVLAP('s/(s^2+4*pi^2)',0,10,1001);
% to plot the graph of results write plot(t,ft), grid on, zoom on
FF=strrep(strrep(strrep(Fs,'*','.'),'/','./'),'^','.^');
if nargin==4

```

```

    a=6; ns=20; nd=19; end; % implicit parameters
    radt=linspace(tini,tend,nnt); % time vector
    if tini==0 radt=radt(2:1:nnt); end; % t=0 is not allowed
    tic % measure the CPU time
    for n=1:ns+1+nd % prepare necessary coefficients
        alfa(n)=a+(n-1)*pi*j;
        beta(n)=-exp(a)*(-1)^n;
    end;
    n=1:nd;
    bdif=fliplr(cumsum(gamma(nd+1)./gamma(nd+2-n)./gamma(n))./2^nd);
    beta(ns+2:ns+1+nd)=beta(ns+2:ns+1+nd).*bdif;
    beta(1)=beta(1)/2;
    for kt=1:nnt % cycle for time t
        tt=radt(kt);
        s=alfa/tt; % complex frequency s
        bt=beta/tt;
        btF=bt.*eval(FF); % functional value F(s)
        ft(kt)=sum(real(btF)); % original f(tt)
    end;

```

B-1-1

```

% PÇM çözümü ve INVLAP ile kıyaslama
% skoppinv2 isimli fonksiyonu kullanır.
clc,clear all;
tic
x=1;%xd için ilk değer
ti=10;% td üst değer
ust=200%integral üst sınırı
adim1=0.01%sonlu integral için adım aralıkları
adim2=0.001%sonsuz integral için adım aralıkları
A=2;
B=1;
    for k=1:ti %td sınırları
        t=k/1; % td tamsayı düzenlemesi
% skopp and Warrick ters dönüşümü
        z1=skoppinv2(adim1,adim2,ust,x,t,A,B);
% j=1.1 ;%genişletme oranı
        %z2=skoppinv2(adim1*j,adim2,ust,x,t,A,B);
Tdd(k)=z1;
%tol(k)=abs(z2-z1)
    end
    % (1/s)*exp(A*xd/2)*exp(-sqrt(A)*sqrt((A/4)+s+(B/A)*sqrt(s)*tanh(sqrt(s))))
[t,ft]=INVLAP(' (1/s)*exp(2/2)*exp(-sqrt(2)*sqrt(2/4+s+0.5*sqrt(s)*tanh(sqrt(s)))) ',1,10,10);
%subplot(2,1,1);
plot(Tdd,'r')
ylabel('Td');
hold on
plot(ft,'--g+');
legend('S&W','Numeric');
xlabel('td');
%subplot(2,1,2);
%plot(tol,'c')
%ylabel('Tolerans3');
%xlabel('td*100');
toc

```

B-1-2

```

function [z] = skoppinv2(adim1,adim2,ust,x,t,A,B)
% (1/s)exp(A*x/2)*exp(-sqrt(A)*sqrt((A/4)+s+(B/A)*sqrt(s)*tanh(sqrt(s))))
% için skopp and Warrick ters dönüşümünü hesaplar
cd=0.000001:adim1:t
for n=1:length(cd)
    c=cd(n)
    w=0.000001:adim2:ust;
    R=0.5*(B/A)*c*w.*(sinh(w)-sin(w))./(cosh(w)+cos(w));
    I=0.5*(B/A)*c*w.*(sinh(w)+sin(w))./(cosh(w)+cos(w));
    % sonsuz integrali alınan fonksiyon
    if t==c ;
        t=t+0.00001;
    end
    F=(2/pi)*exp(-R).*(sin(w.*w.*(t-c)/2-I)+sin(I))./w;
    % trapez yöntemiyle sonsuz integral değerinin hesaplanması
    Fz=trapz(w,F);
    % adım sayısının genişletilmesi ile trapez hata payı kontrolü
    % j=1.1;% genişletme oranı
    % wj=0.00001:adim*j:ust;
    % Rj=0.5*(B/A)*c*wj.*(sinh(wj)-sin(wj))./(cosh(wj)+cos(wj));
    % Ij=0.5*(B/A)*c*wj.*(sinh(wj)+sin(wj))./(cosh(wj)+cos(wj));
    % Fj=(2/pi)*exp(-Rj).*(sin(wj.*wj.*(t-c)/2-Ij)+sin(Ij))./wj;
    % Fzj=trapz(wj,Fj)
    % tolerans1=abs(Fzj-Fz)
    % tol1(n)=tolerans1;
    % üst sayısının eksiltilmesi ile trapez hata payı kontrolü
    % ust2=ust-adim;% genişletme oranı
    % wu=0.00001:adim:ust2;
    % Ru=0.5*(B/A)*c*wu.*(sinh(wu)-sin(wu))./(cosh(wu)+cos(wu));
    % Iu=0.5*(B/A)*c*wu.*(sinh(wu)+sin(wu))./(cosh(wu)+cos(wu));
    % Fu=(2/pi)*exp(-Ru).*(sin(wu.*wu.*(t-c)/2-Iu)+sin(Iu))./wu;
    % Fzu=trapz(wu,Fu)
    % tolerans2=abs(Fzu-Fz)
    % tol2(n)=tolerans2;
    % sonlu integrali alınan fonksiyon
    Td(n)=sqrt(A)*x*exp(-A*(x-c)*(x-c)/(4*c))/(2*sqrt(pi*c*c*c))*Fz;
end
% trapez yöntemiyle sonlu integral değerinin hesaplanması
z=trapz(cd,Td);
end

```

B-2-1

```

% PÇMY çözümü ve INVLAP ile kontrolü
% INT1 ve INT2 fonksiyonlarını kullanır
tic
clc,clear all;
%p=6;% PÇMY için sonsuz toplam üst kabulü
x=1; % xd ilk değeri
A=2;
B=1;
n=0;
for td=1:10
    TD1=0;
    TD=0;
    TD0=INT1(x,td,A,B,0)
    if td < 6
        p=td+2;
    else

```

```

p=td;
end
for n=1:p
    TD1=INT1(x,td,A,B,n)*(-1)^n;
    TD2=0;
    for m=1:n;
        TD2=TD2+factorial(n)*INT2(x,td,A,B,n,m)*((-1)^(m+n))*...
            /(factorial(n-m)*factorial(m));
    end
    TD=TD1+TD2+TD;
    TDD=TD+TD0;
end
%Tolerans3=abs(TDD(p)-TDD(p-1))
TDDt(td)=TDD;
end
%(1/s)*exp(A*xd/2)*exp(-sqrt(A)*sqrt((A/4)+s+(B/A)*sqrt(s)*tanh(sqrt(s))))
[t,ft]=INV LAP(' (1/s)*exp(2/2)*exp(-
sqrt(2)*sqrt(2/4+s+0.5*sqrt(s)*tanh(sqrt(s)))) ',1,10,10);
plot(TDDt,'r')
ylabel('Td');
hold on
plot(ft,'--g');
legend('Seri-İ.K.', 'Numeric');
xlabel('td');
toc

```

B-2-2

```

function [ TD1] = INT1( xd,tD,A,B,n)
%PÇMY için F(tD) integralini hesaplar
Adim=0.01; % tD için adım aralığı
t=0.00001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
    tt=t(k);
    if tt==tD;
        tt=tt-0.0000001 ;
    end
    a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    F(k)=(1/A)*exp(-A*(xd-tt)*(xd-tt)/(4*tt))*xd*(erfc(a1)+erfc(a2))*...
        /(2*sqrt(pi*((tt/A)^3)));
end
%Adım aralıklarının genişletme ile tolerans hesaplaması için
%j=1.1 ;%genişletme oranı
%t2=0.00001:Adim*j:tD;
%tt2=0;
%for kk=1:length(t2);
%    tt2=t2(kk);
%    if tt2==tD;
%        tD=tD+0.0000001 ;
%    end
%    a11=(2*n+B*tt2/A)/(2*sqrt(tD-tt2));
%    a21=(2*n+2+B*tt2/A)/(2*sqrt(tD-tt2));
%FF(kk)=exp(-A*(xd-tt2)*(xd-
tt2)/(4*tt2))*xd*(erfc(a11)+erfc(a21))*...
%    /(2*sqrt(pi*(tt2/A)^3));
%end %Tolerans döngüsü sonu
TD1=trapz(t,F);
%TD2=trapz(t2,FF);%tolerans için trapez hesabı
%Tolerans1=abs(TD2-TD1)

```

```

%plot(t,F);
xlabel('td');
ylabel('TD1 İntegrali İçi Fonksiyonu');
End

```

B-2-3

```

function [ TD2] = INT2( xd,tD,A,B,n,m)
% PÇMY için G(tD) integralini hesaplar
Adim=0.001; % tD için adım aralığı
t=0.00001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
    tt=t(k);
    if tt==tD;
        tt=tt-0.0000001 ;
    end
    a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    C=exp(-a1*a1);
    D=exp(-a2*a2);
    G=((1/A)^(m+1))*factorial(m-1)*xd*((B*tt)^m)*exp(-A*(xd-tt)*(xd-
tt)/(4*tt))...
    / (sqrt(((tt/A)^3)*(tD-tt)^m)*factorial(m));
    E=0;
    F=0;
    if rem(m-1,2)==0 ;
        jd=(m-1)/2;
    else
        jd=round((m-1)/2)-1;
    end
    for j=0:jd;
        E=E+((-1)^j)*((a1*sqrt(2))^(m-2*j-1))...
        / (factorial(j)*(2^j)*factorial(m-2*j-1));
        F=F+((-1)^j)*((a2*sqrt(2))^(m-2*j-1))...
        / (factorial(j)*(2^j)*factorial(m-2*j-1));
    end
    Gt=G*(C*E+D*F);
    Gtt(k)=Gt;
end
TD2=2^((m-1)/2)*trapz(t,Gtt)/pi;
%Tolerans hesabı için adım genişletmesi yazılımı BAŞLANGICI
%jg=1.01 %adım genişletme oranı
%t2=0.00001:Adim*jg:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
%tt2=0;
%for kk=1:length(t2);
%tt2=t(kk);
% if tt2==tD;
%     tD=tD+0.0000001 ;
% end
%a11=(2*n+A*tt2/B)/(2*sqrt(tD-tt2));
%a21=(2*n+2+A*tt2/B)/(2*sqrt(tD-tt2));
%C2=exp(-a11*a11);
%D2=exp(-a21*a21);
%G2=factorial(m-1)*xd*((B*tt2)^m)*exp(-A*(xd-tt2)*(xd-tt2)/(4*tt2))...
% / (sqrt(((tt2/A)^3)*(tD-tt2)^m)*factorial(m));
% E2=0;
% F2=0;
% if rem(m-1,2)==0 ;
%     jd=(m-1)/2;
% else

```

```

        %      jd=round((m-1)/2)-1;
        %      end
    %for j=0:jd;
        %      E2=E2+((-1)^j)*((a11*sqrt(2))^(m-2*j-1))...
        %          /(factorial(j)*(2^j)*factorial(m-2*j-1));
        %      F2=F2+((-1)^j)*((a21*sqrt(2))^(m-2*j-1))...
        %          /(factorial(j)*(2^j)*factorial(m-2*j-1));
    %end
    %Gt2=G2*(C2*E2+D2*F2);
    %Gtt2(kk)=Gt2;
    %end
%TD22=2^((m-1)/2)*trapz(t2,Gtt2)/pi;
%Tolerans hesabı için adım genişletmesi yazılımı SONU
%Tolerans2=abs(TD2-TD22)
%plot(t,Gtt);
%xlabel('td');
%ylabel('TD2 İntegrali İçi Fonksiyonu');
end

```

C-1

```

function [ dTDt ] = dTDt( xd,td,p )
%SWM2 çözümü için
% tD ye göre kısmi türev hesaplar
% p sonsuz toplam için üst sınırdır
TD0=dFtd(xd,td,0); %n=0 için
TD1=dG1td(xd,td,1)*xd-dFtd(xd,td,1); % n=1 için
TD=0;
for n=2:p;
    B=0
    for m=2:n ;

        B=B+(xd^m)*dGtd(xd,td,n,m)*((-1)^(n+m))*factorial(n)...
            /(factorial(n-m)*factorial(m)*factorial(m));
    end
    TD=TD+dFtd(xd,td,n)*(-1)^n+xd*dG1td(xd,td,n)*(-
1)^(n+1)/factorial(m)+B;
end
dTDt=TD+TD1+TD0;
end

function [ dFtd ] = dFtd( xd,td,n )
%SWM2 çözümü-türev dFtd ifadesini hesaplar
a=(2*n+xd)/(2*sqrt(td));
b=(2*n+2+xd)/(2*sqrt(td));
dFtd=a*exp(-a*a)/(td*sqrt(pi))+b*exp(-b*b)/(td*sqrt(pi));
end

function [ dG1 ] = dG1td( xd,td,n )
%SWM2 -türev için dG1 ifadesini hesaplar
a=(2*n+xd)/(2*sqrt(td));
b=(2*n+2+xd)/(2*sqrt(td));
dG1=(2*a*a-1)*exp(-a*a)/(td*sqrt(td*pi))+(2*b*b-1)*exp(-
b*b)/(td*sqrt(td*pi));
end

function [ dGtd ] = dGtd( xd,td,n,m )
% SWM2-türev için dGtd ifadesini hesaplar
a=(2*n+xd)/(2*sqrt(td));
b=(2*n+2+xd)/(2*sqrt(td));
a1=(2*n+xd)/sqrt(2*td);
b1=(2*n+2+xd)/sqrt(2*td);
B=(2^((m+1)/2))/(sqrt(pi)*(td^(m/2)));

```

```

HA=a*a*Hem1(a1,m)/td-(m/2)*Hem1(a1,m)/td+dHem1(a1,m,td);
HB=b*b*Hem1(b1,m)/td-(m/2)*Hem1(b1,m)/td+dHem1(b1,m,td);
dGtd=B*(HA*exp(-a*a)+HB*exp(-b*b));
end

```

```

function [ Hem1 ] = Hem1( a,m )
% Hermite Polinomunu hesaplar
    if rem(m-1,2)==0 ;
        jd=(m-1)/2;
    else
        jd=round((m-1)/2)-1;
    end
    F=0;
    for i=0:jd;
        F=F+((-1)^i)*(a)^(m-2*i-1)/(factorial(i)*(2^i)*factorial(m-2*i-1));
    end
    Hem1=F*factorial(m-1);
End

function [ dHem1 ] = dHem1( a,m,td )
% Hermite Polinomunu hesaplar
    if rem(m-1,2)==0 ;
        jd=(m-1)/2;
    else
        jd=round((m-1)/2)-1;
    end
    F=0;
    for i=0:jd;
        F=F+((-1)^i)*(-1)*(m-2*i-1)*(a)^(m-2*i-1)/(factorial(i)*2*td*(2^i)*factorial(m-2*i-1));
    end
    dHem1=F*factorial(m-1);
end

```

```

function [ dTDx ] = dTDx( xd,td,p )
% SWM2 için xD ye göre kısmi türev hesaplar
% p sonsuz toplam için üst sınırdır
TD0=dFxd(xd,td,0); %n=0 için
TD1=dG1xd(xd,td,1)*xd+G1td(xd,td,1)-dFtd(xd,td,1); % n=1 için
TD=0;
for n=2:p;
    B=0
    for m=2:n ;
        B=B+((xd^m)*dGxd(xd,td,n,m)+(xd^(m-1))*(m-1)*Gtd(xd,td,n,m))*((-1)^(n+m))*factorial(n)...
        /((factorial(n-m))*factorial(m)*factorial(m));
    end
    TD=TD+dFxd(xd,td,n)*(-1)^n+n*(xd*dG1xd(xd,td,n)+G1td(xd,td,n))*(-1)^(n+1)/factorial(m)+B;
end
dTDx=TD+TD1+TD0;
end

```

```

function [ dFxd ] = dFxd( xd,td,n )
% SWM2 -türev dFxd ifadesini hesaplar
a=(2*n+xd)/(2*sqrt(td));
b=(2*n+2+xd)/(2*sqrt(td));
dFxd=-exp(-a*a)/sqrt(td*pi)-exp(-b*b)/sqrt(td*pi);
end

```

```

function [ dG1 ] = dG1xd( xd,td,n )
% SWM2 dG1 ifadesini hesaplar

```



```

a=(2*n+xd)/(2*sqrt(td));
b=(2*n+2+xd)/(2*sqrt(td));
dG1=-2*a*exp(-a*a)/(td*sqrt(pi))-2*b*exp(-
b*b)/(td*sqrt(pi));
end
function [ dGxd ] = dGxd( xd,td,n,m )
% SWM2- dGxd ifadesini hesaplar
a=(2*n+xd)/(2*sqrt(td));
b=(2*n+2+xd)/(2*sqrt(td));
a1=(2*n+xd)/(sqrt(2*td));
b1=(2*n+2+xd)/(sqrt(2*td));
B=(2^((m+1)/2))/(sqrt(pi)*(td^(m/2)));
HA=-a*Hem1(a1,m)/sqrt(td)+d2Hem1(a1,m,td);
HB=-b*Hem1(b1,m)/sqrt(td)+d2Hem1(b1,m,td);
dGxd=B*(HA*exp(-a*a)+HB*exp(-b*b));
end
function [ d2Hem1 ] = d2Hem1( a,m,td )
% Hermite Polinomunu hesaplar
if rem(m-1,2)==0 ;
    jd=(m-1)/2;
else
    jd=round((m-1)/2)-1;
end
F=0;
for i=0:jd;
    F=F+((-1)^i)*(m-2*i-1)*(a)^(m-2*i-
2)/(factorial(i)*sqrt(2*td)*(2^i)*factorial(
m-2*i-1));
end
d2Hem1=F*factorial(m-1);
end

%dTdT ile numerik çözüm kıyaslaması
clc,clear all;
p=10;% sonsuz toplam üst kabulü
x=0;
for x=0.1:1:5.1
    n=0;
    for t=0.1:0.1:5
        n=n+1 ;
        Td(n)=seritoplam2(x,t,p);
        dTd(n)=dTdT(x,t,p);
        tt(n)=t;
    end
    for m=1:n-1
        dt(m)=tt(m);
        dTd1(m)=(Td(m+1)-Td(m))/(0.1)
        dTd2(m)=dTd(m);
    end
end
title('xD=0,1-1,1..5,1 için Kısmi Türevler');
plot(dt,dTd1,dt,dTd2);
hold on
end
ylabel('dTd/dtD')
legend('numerik' , 'analitik');
xlabel('td');

%dTDTx ile numerik çözüm kıyaslaması
clc,clear all;
p=10;% sonsuz toplam üst kabulü
x=0;

```

```

for t=1:2:3
    n=0;
    for x=0.1:0.1:5
        n=n+1 ;
        Td(n)=seritoplam2(x,t,p);
        dTd(n)=dTDx(x,t,p);
        xx(n)=x;
    end
    for m=1:n-1
        dt(m)=xx(m);
        dTd1(m)=(Td(m+1)-Td(m))/(0.1)
        dTd2(m)=dTd(m);
    end
    title('tD=1 ve 3 için Kısmi Türevler');
    plot(dt,dTd1,dt,dTd2);
    %plot(dTd)
    hold on
end
    ylabel('dTD/dxD')
    legend('numerik' , 'analitik');
    xlabel('xD');

% SWM2 çözümü Sensitivity dağılımlarını hesaplar
tic
clc,clear all;
p=10;% SWM2 çözümü için sonsuz toplam üst kabulü
x=0;
n=0;
xDmj=[ 3.1]
tDmj=[ 0.01125]
for j=1:1
    tDm=tDmj(j)
    xDm=xDmj(j)
    n=0;
        for xDn=0.01:0.01:1;
            n=n+1;
            xx(n)=xDn;
            t=(100-xDn)*tDm;
            x= xDn*xDm ;
            Td(n)=seritoplam2(x,t,p)
            Sx(n)=x*dTDx(x,t,p)
            St(n)=t*dTDt(x,t,p)
        end
    plot(xx,Sx,xx,St)
    hold on
end
    title('xDm=3.1 ; tDm=0.01125');
    legend('xDm','tDm');
    xlabel('xDn');
    ylabel('Normalized Sensitivity TD ');
    %ylabel('Td');
toc

% SWM2 Çözümü için nlinfit
clc,clear all;
xDm=3.1;
tDm=0.01125 ;
p=5;
    i=0;
    for n=30:80;
        i=i+1;

```

```

x=xDm-0.1+0.2*rand(1,1);
xx(i)=x;
tt=(n+1)*tDm;
t=(n+1)*(tDm-0.001+0.002*rand(1,1));
x2=xDm;
t2(i)=t;
ttt(i)=tt;
nn(i)=n;
TD(i)=seritoplam2(x,t,p)
TDO(i)=seritoplam2(x2,tt,p)
end
for j=1:length(xx)
    XN(j,1)=xx(j);
    %XN(j,1)=xDm;
    XN(j,2)=t2(j);
    xdtd0(1)=1.5;
    xdtd0(2)=1.5;
end
[fitcof,r]=nlinfit(XN,TD,@TDfun,xdtd0)
for k=1:length(xx);
    TDfit(k)=seritoplam2(fitcof(1)*xDm,fitcof(2)*ttt(k),5) ;
    Farklar(k)=TDfit(k)-TDO(k);
end
plot(nn,TD,nn,TDO,nn,TDfit);
%plot(TDfit)
%hold on
%plot(r)
%plot(fitcof);
xlabel('tpvi');
ylabel('r');
%legend('Residuals');
ylabel('TD');
title(' xDn=1 ,xDm=3,1 , tDm=0,01125');
legend(' 0.1 lik xDm-0.001 lik tDm','Analitik Çözüm' , 'Nonlinear Fit');

function [ TDD ] = TDfun( X,xdtd )
%nlinfit fonksiyonu için
for j=1:51
    TDD(j)=seritoplam2(xdtd(j,1)*X(1),xdtd(j,2)*X(2),5);
end
end

```

C-2

```

function [ TDD ] = Seritoplam3( xd,td,A,B,p )
%PÇMY çözümü INT1 ve INT2 fonksiyonlarını kullanır
TD1=0;
for i=0:p
    TD1=TD1+((-1)^i)*INT1(xd,td,A,B,i);
end
TD2=0
for n=1:p
    for m=1:n;
        TD2=TD2+factorial(n)*INT2(xd,td,A,B,n,m)*((-1)^(m+n))...
            / (factorial(n-m)*factorial(m));
    end
end
TDD=TD1+TD2;
end

```

dTD/di,dTD1/di ve dTD2/di Fonksiyon Yazılımları (i=xd,td,λ ve Θ için)

```
function [ TD2t ] = d2TDt( xd,td,A,B,p )
%PÇMY -Sensitivity için td ye göre kısmi türev hesaplar
dTD1=0;
for i=0:p
dTD1=dTD1+((-1)^i)*dTD1t(xd,td,A,B,i);
end
dTD2=0;
for n=1:p
for m=1:n;
dTD2=dTD2+factorial(n)*dTD2t(xd,td,A,B,n,m)*((-1)^(m+n))...
/(factorial(n-m)*factorial(m));
end
end
TD2t=dTD1+dTD2;
End
```

```
function [ dD1t ] = dTD1t(xd,tD,A,B,n )
%TD1 in td ye göre türevini hesaplar
Adim=0.001; % tD için adım aralığı
t=0.001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
tt=t(k);
if tt==tD;
tt=tt-0.0000001 ;
end
a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
F(k)=(2/(pi*A*(tD-tt)))*exp(-A*(xd-tt)*(xd-tt)...
/(4*tt))*xd*(a1*exp(-a1*a1)+a2*exp(-
a2*a2))/(2*sqrt(pi*pi*((tt/A)^3)));
end
dD1t=trapz(t,F);
end
```

```
function [ dD2t ] = dTD2t(xd,tD,A,B,n,m)
%TD2 in td ye göre türevini hesaplar
Adim=0.0001; % tD için adım aralığı
t=0.0001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
tt=t(k);
if tt==tD;
tt=tt-0.0000001 ;
end
a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
C=exp(-a1*a1);
D=exp(-a2*a2);
F=C*Hem1(a1*sqrt(2),m)*(-m/2+a1*a1)/(tD-tt)+...
D*Hem1(a2*sqrt(2),m)*(-m/2+a2*a2)/(tD-tt)+...
C*dHem1t(a1*sqrt(2),m,tD,tt)+D*dHem1t(a2*sqrt(2),m,tD,tt)
G=xd*((B*tt)^m)*exp(-A*(xd-tt)*(xd-tt)/(4*tt))...
/(sqrt(((tt/A)^3)*(tD-tt)^m)*factorial(m));
Gtt(k)=G*F;
end
dD2t=((1/A)^(m+1))*2^((m+1)/2)*trapz(t,Gtt)/(pi*pi);
end
```

```

function [ TD2x ] = d2TDx( xd,td,A,B,p )
%PÇMY -Sensitivity için xd ye göre kısmi türev hesaplar
dTD1=0;
for i=0:p
    dTD1=dTD1+((-1)^i)*dTD1x(xd,td,A,B,i);
end
dTD2=0;
for n=1:p
    for m=1:n;
        dTD2=dTD2+factorial(n)*dTD2x(xd,td,A,B,n,m)*((-1)^(m+n))...
            /(factorial(n-m)*factorial(m));
    end
end
TD2x=dTD1+dTD2;
End

```

```

function [ dD1x ] = dTD1x(xd,tD,A,B,n )
%TD1 in xd ye göre türevini hesaplar
Adim=0.0001; % tD için adım aralığı
t=0.0001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
    tt=t(k);
    if tt==tD;
        tt=tt-0.0000001 ;
    end
    a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    F(k)=(2/(pi*A)*exp(-A*(xd-tt)*(xd-tt)...
        /(4*tt))*xd*(1-xd*(xd-
        tt)*A/(2*tt))*(erfc(a1)+erf(a2)))/(2*sqrt(pi*((tt/A)^3)));
    end
    dD1x=trapz(t,F);
end

```

```

function [ dD2x ] = dTD2x(xd,tD,A,B,n,m)
%TD2 in xd ye göre türevini hesaplar
Adim=0.0001; % tD için adım aralığı
t=0.0001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
    tt=t(k);
    if tt==tD;
        tt=tt-0.0000001 ;
    end
    a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    C=exp(-a1*a1);
    D=exp(-a2*a2);
    F=C*Hem1(a1*sqrt(2),m)+D*Hem1(a2*sqrt(2),m);
    G=(1-xd*(xd-tt)*A/(2*tt))*xd*((B*tt)^m)*exp(-A*(xd-tt)*(xd-
    tt)/(4*tt))...
        /(sqrt(((tt/A)^3)*(tD-tt)^m)*factorial(m));
    Gtt(k)=G*F;
end
dD2x=((1/A)^(m+1))*(2^((m-1)/2))*trapz(t,Gtt)/pi;
end

```

```

function [ TD2A ] = d2TDA( xd,td,A,B,p )
%Sensitivity için Alpha ya göre kısmi türev hesaplar

```

```

dTD1=0;
for i=0:p
    dTD1=dTD1+((-1)^i)*dTD1A(xd,td,A,B,i);
end
dTD2=0;
for n=1:p
    for m=1:n;
        dTD2=dTD2+factorial(n)*dTD2A(xd,td,A,B,n,m)*((-1)^(m+n))...
        / (factorial(n-m)*factorial(m));
    end
end
TD2A=dTD1+dTD2;
End

function [ dD1A ] = dTD1A(xd,tD,A,B,n )
%TD1 in A ya göre türevini hesaplar
Adim=0.001; % tD için adım aralığı
t=0.001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
    tt=t(k);
    if tt==tD;
        tt=tt-0.0000001 ;
    end
    a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    F1=((1/(pi*A))*exp(-A*(xd-tt)*(xd-tt)/(4*tt))*xd)/sqrt(pi*pi*((tt/A)^3));
    F2=(0.5*A-(xd-tt)*(xd-tt)/(4*tt))*(erfc(a1)+erfc(a2))-...
    (exp(-a1*a1)+exp(-a2*a2))*B*tt/(A*A*sqrt(pi*(tD-tt)));
    F(k)=F1*F2;
end
dD1A=trapz(t,F);
end

function [ dD2A ] = dTD2A(xd,tD,A,B,n,m)
% PÇMY -TD2 in A ya göre türevini hesaplar
Adim=0.0001; % tD için adım aralığı
t=0.0001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
    tt=t(k);
    if tt==tD;
        tt=tt-0.0000001 ;
    end
    a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    C=exp(-a1*a1);
    D=exp(-a2*a2);
    H1=Hem1(a1*sqrt(2),m);
    H2=Hem1(a2*sqrt(2),m);
    a1a=-B*tt/(2*A*A*sqrt(tD-tt));
    F=(C*H1+D*H2)*(((m-2.5)/A)-(xd-tt)*(xd-tt)/(4*tt))+...
    C*(-2*a1*a1a*H1+dHem1A(a1*sqrt(2),m,a1a))+...
    D*(-2*a2*a1a*H2+dHem1A(a2*sqrt(2),m,a1a));
    G=xd*((B*tt)^m)*exp(-A*(xd-tt)*(xd-tt)/(4*tt))...
    / (sqrt(((tt/A)^3)*(tD-tt)^m)*factorial(m));
    Gtt(k)=G*F;
end
dD2A=((1/A)^(m+1))*(2^((m+1)/2))*trapz(t,Gtt)/(pi*pi);

```

end

```
function [ TD2B ] = d2TDB( xd,td,A,B,p )
% PÇMY- Sensitivity için tetha ya göre kısmi türev hesaplar
dTD1=0;
for i=0:p
    dTD1=dTD1+((-1)^i)*dTD1B(xd,td,A,B,i);
end
dTD2=0;
for n=1:p
    for m=1:n;
        dTD2=dTD2+factorial(n)*dTD2B(xd,td,A,B,n,m)*((-1)^(m+n))...
            /(factorial(n-m)*factorial(m));
    end
end
TD2B=dTD1+dTD2;
End
```

```
function [ dD1B ] = dTD1B(xd,tD,A,B,n )
%TD1 in tetha ya göre türevini hesaplar
Adim=0.001; % tD için adım aralığı
t=0.001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
    tt=t(k);
    if tt==tD;
        tt=tt-0.0000001 ;
    end
    a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    F(k)=(-1/(pi*A*A))*exp(-A*(xd-tt)*(xd-
        tt)/(4*tt))*xd*tt*...
        (exp(-a1*a1)+exp(-a2*a2))/sqrt((tD-
        tt)*pi*pi*((tt/A)^3));
    end
    dD1B=trapz(t,F);
end
```

```
function [ dD2B ] = dTD2B(xd,tD,A,B,n,m)
%TD2 in tetha ya göre türevini hesaplar
Adim=0.0001; % tD için adım aralığı
t=0.0001:Adim:tD; % t=0 için 0'a yakın değer seçildi.
tt=0;
for k=1:length(t);
    tt=t(k);
    if tt==tD;
        tt=tt-0.0000001 ;
    end
    a1=(2*n+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    a2=(2*n+2+B*tt/A)/(2*sqrt(tD-tt));
    C=exp(-a1*a1);
    D=exp(-a2*a2);
    H1=Hem1(a1*sqrt(2),m);
    H2=Hem1(a2*sqrt(2),m);
    a1a=-B/(2*A*sqrt(tD-tt));
    F=C*(H1*m/B+dHem1B(a1*sqrt(2),m,a1a))+...
        D*(H2*m/B+dHem1B(a2*sqrt(2),m,a1a));
    G=xd*((B*tt)^m)*exp(-A*(xd-tt)*(xd-tt)/(4*tt))...
        /(sqrt(((tt/A)^3)*(tD-tt)^m)*factorial(m));
    Gtt(k)=G*F;
end
```

```

dD2B=((1/A)^(m+1))*(2^((m+1)/2))*trapz(t,Gtt)/(pi*pi);
end

function [ Hem1 ] = Hem1( a,m )
% Hermite Polinomunu hesaplar
    if rem(m-1,2)==0 ;
        jd=(m-1)/2;
    else
        jd=round((m-1)/2)-1;
    end
    F=0;
    for i=0:jd;
        F=F+((-1)^i)*(a)^(m-2*i-1)/(factorial(i)*(2^i)*factorial(m-2*i-1));
    end
Hem1=F*factorial(m-1);
End

function [ dHemt ] = dHem1t( a,m,td,tt )
% Hermite Polinomunun td ye göre türevini hesaplar
    if rem(m-1,2)==0 ;
        jd=(m-1)/2;
    else
        jd=round((m-1)/2)-1;
    end
    F=0;
    for i=0:jd;
        F=F+a*((-1)^i)*(m-2*i-1)*(a)^(m-2*i-2)...
            /(factorial(i)*(tt-td)*(2^(i+1))*factorial(m-2*i-1));
    end
dHemt=F*factorial(m-1);
end

function [ dHemA ] = dHem1A( a,m,b )
% Hermite Polinomunun A ya göre türevini hesaplar
    if rem(m-1,2)==0 ;
        jd=(m-1)/2;
    else
        jd=round((m-1)/2)-1;
    end
    F=0;
    for i=0:jd;
        F=F+b*((-1)^i)*(m-2*i-1)*(a)^(m-2*i-2)...
            /(factorial(i)*(2^(i-0.5))*factorial(m-2*i-1));
    end
dHemA=F*factorial(m-1);
end

function [ dHemB ] = dHem1B( a,m,b )
% Hermite Polinomunun B ya göre türevini hesaplar
    if rem(m-1,2)==0 ;
        jd=(m-1)/2;
    else
        jd=round((m-1)/2)-1;
    end
    F=0;
    for i=0:jd;
        F=F+b*((-1)^i)*(m-2*i-1)*(a)^(m-2*i-2)...
            /(factorial(i)*(2^(i-0.5))*factorial(m-
2*i-1));
    end
dHemB=F*factorial(m-1);
end

```



```

end

% PÇMY -Sensitivity dağılımlarını hesaplar
tic
clc,clear all;
p=5;% PÇMY için sonsuz toplam üst kabulü
A=0.5;
B=5;
k=0;
xDm=0.1238;
tDm=0.01125;
n=0;
for ti=1:10:351;
    n=n+1;
    tn(n)=ti;
    xd=xDm
    td=tDm*ti;
    sTt(n)=td*d2TDt(xd,td,A,B,p)
    sTx(n)=xd*d2TDx(xd,td,A,B,p)
    sTA(n)=A*d2TDA(xd,td,A,B,p)
    sTB(n)=B*d2TDB(xd,td,A,B,p)
end
plot(tn,sTt,tn,sTx,tn,sTA,tn,sTB)
title('xDn=1 xDm=0,1238 tDm=0,01125 \lambda=0,5 \theta=5');
legend('tDm','xDm','\lambda','\theta');
xlabel('tDn');
ylabel('Normalized Sensitivity TD ');
toc

% PÇMY -Sensitivity dağılımlarını hesaplar
tic
clc,clear all;
p=7;
A=0.5;
B=5;
k=0;
xDm=0.1238;
tDm=0.01125;
tDn=450;
td=tDm*tDn;
n=0;
for xDn=0.1:0.1:1;
    n=n+1;
    xx(n)=xDn;
    xd= xDn*xDm ;
    sTt(n)=td*d2TDt(xd,td,A,B,p)
    sTx(n)=xd*d2TDx(xd,td,A,B,p)
    sTA(n)=A*d2TDA(xd,td,A,B,p)
    sTB(n)=B*d2TDB(xd,td,A,B,p)
end
plot(xx,sTx,xx,sTt,xx,sTA,xx,sTB)
title('xDm=0,1238 tDm=0,01125 tDn=450 \lambda=0,5 \theta=5');
legend('xDm','tDm','\lambda','\theta');
xlabel('xDn');
ylabel('Normalized Sensitivity TD ');
toc

```

Regression Analizi Yazılımları

```

function [ TD2 ] = TD2fun( X,xdtd)
%nlinfit fonksiyonu için
for j=1:51
    TD2(j)=Seritoplam3(xdtd(j,1),xdtd(j,2),X(1),X(2),5);

```

```

        end
    end

% PÇMY için nlinfit
clc,clear all;
xDm=0.1238;
tDm=0.01125 ;
A=0.5;
B=5;
p=5;
i=0;
for n=50:100;
    i=i+1;
    x=xDm-0.01+0.02*rand(1,1);
    xx(i)=x;
    tt=n*tDm;
    t=n*(tDm-0.001+0.002*rand(1,1));
    x2=xDm;
    t2(i)=t;
    ttt(i)=tt;
    nn(i)=n;
    TD(i)=Seritoplam3(x,t,A,B,p)
    TDO(i)=Seritoplam3(x2,tt,A,B,p)
end
for j=1:length(xx)
    XN(j,1)=xx(j);
    %XN(j,1)=xDm;
    XN(j,2)=t2(j);
    AB0(1)=A+0.1;
    AB0(2)=B+1;
end
[fitcof,r]=nlinfit(XN,TD,@TD2fun,AB0)
for k=1:length(xx);
    TDfit(k)=Seritoplam3(xDm,ttt(k),fitcof(1),fitcof(2),5) ;
    Farklar(k)=TDfit(k)-TDO(k);
end
plot(nn,TD,nn,TDO,nn,TDfit);
%plot(TDfit) %hold on %plot(r) %plot(fitcof);
xlabel('tpvi');
ylabel('r');
%legend('Residuals');
ylabel('TD');
title(' xDn=1 ,xDm=0,1238 , tDm=0,01125');
legend(' 0.01 lik xDm-0.001 lik tDm','Analitik Çözüm' , 'Nonlinear Fit');

```

D-1

```

% SWIM için nlinfit
clc,clear all;
xDm=1.08;
tDm=0.00108 ;
p=10;
i=0;
for n=0:0.5:30;
    i=i+1;
    x=xDm-0.1+0.2*rand(1,1);
    xx(i)=x;
    tt=(n+1)*tDm;
    t=(n+1)*(tDm-0.0001+0.0002*rand(1,1));
    x2=xDm;
    t2(i)=t;

```

```

        ttt(i)=tt;
        nn(i)=n;
        TD(i)=seritoplam2(x,t,p)
        TDO(i)=seritoplam2(x2,tt,p)
    end

    for j=1:length(xx)
        XN(j,1)=xx(j);
        %XN(j,1)=xDm;
        XN(j,2)=t2(j);
        xtd0(1)=1.1;
        xtd0(2)=1.1;
    end
    [fitcof,r,J,Sigma]=nlinfit(XN,TD,@TDFun,xtd0)
    ci=nlparci(fitcof,r,'jacobian',J)
    for k=1:length(xx);
        TDfit(k)=seritoplam2(fitcof(1)*xDm,fitcof(2)*ttt(k),p) ;
        Farklar(k)=TDfit(k)-TDO(k);
    end
    plot(nn,TD,nn,TDO,nn,TDfit);
    %plot(TDfit) %hold on %plot(nn,r) %plot(fitcof);
    xlabel('tpvi');
    ylabel('r');
    %legend('Residuals');
    ylabel('CD');
    title(' xDn=1 ,xDm=1,08 , tDm=0,00108');
    legend(' 0.01 lik xDm-0.0001 lik tDm','Analitik Çözüm' , 'Nonlinear Fit');

function [ TDD ] = TDFun( X,xtd )
% nlinfit fonksiyonu için
    for j=1:61
        TDD(j)=seritoplam2(xtd(j,1)*X(1),xtd(j,2)*X(2),5);
    end
end
% SWIM için CD-xDn
clc,clear all;
xDm=0.005;
tDm=0.01 ;
tpvi=0.8;
p=10;
i=0;
for n=0:0.01:0.8;
    i=i+1;
    nn(i)=n;
    t=(tpvi-n)*tDm;
    x=xDm;
    TD(i)=seritoplam2(x,t,p)
end
plot(nn,TD);
xlabel('xDn');
ylabel('CD');
title(' xDm=0,005 , tDm=0,01');

```

D-2

```

% PÇİM için nlinfit
clc,clear all;
xDm=0.00027;
tDm=0.00027 ;
A=0.1;
B=200;

```

```

p=5;
i=0;
for n=1:0.5:10;
    i=i+1;
    x=xDm-0.00001+0.00002*rand(1,1);
    xx(i)=x;
    tt=n*tDm/10;
    t=n*(tDm-0.00001+0.00002*rand(1,1))/10;
    x2=xDm;
    t2(i)=t;
    ttt(i)=tt;
    nn(i)=n/10;
    TD(i)=Seritoplam3(x,t,A,B,p)
    TDO(i)=Seritoplam3(x2,tt,A,B,p)
end
for j=1:length(xx)
    XN(j,1)=xx(j);
    %XN(j,1)=xDm;
    XN(j,2)=t2(j);
    AB0(1)=A+0.01;
    AB0(2)=B+20;
end
[fitcof,r,J,Sigma]=nlinfit(XN,TD,@TD2fun,AB0)
ci=nlparci(fitcof,r,'jacobian',J)
for k=1:length(xx);
    TDfit(k)=Seritoplam3(xDm,ttt(k),fitcof(1),fitcof(2),5) ;
    Farklar(k)=TDfit(k)-TDO(k);
end
plot(nn,TD,nn,TDO,nn,TDfit);
%plot(TDfit) %hold on %plot(r) %plot(fitcof);
xlabel('tpvi');
ylabel('r');
%legend('Residuals');
ylabel('CD');
title('xDn=1 ,xDm=0,00027 , tDm=0,00027');

legend(' 0.00001 lik xDm-0.00001 lik tDm','Analitik Çözüm' , 'Nonlinear
Fit');

```

E-1

```

function ilt = euler_inversion(f_s, t, M)

% ilt = euler_inversion(f_s, t, [M])
%
% Returns an approximation to the inverse Laplace transform of function
% handle f_s evaluated at each value in t (1xn) using the Euler method as
% summarized in the source below.
%
% This implementation is very coarse; use euler_inversion_sym for better
% precision. Further, please see example_inversions.m for examples.
%
% f_s: Handle to function of s
% t: Times at which to evaluate the inverse Laplace transformation of
% f_s
% M: Optional, number of terms to sum for each t (64 is a good guess);
% highly oscillatory functions require higher M, but this can grow
% unstable; see test_talbot.m for an example of stability.
%
% Abate, Joseph, and Ward Whitt. "A Unified Framework for Numerically
% Inverting Laplace Transforms." INFORMS Journal of Computing, vol. 18.4

```

```

% (2006): 408-421. Print.
%
% The paper is also online:
http://www.columbia.edu/~ww2040/allpapers.html.
%
% Tucker McClure
% Copyright 2012, The MathWorks, Inc.

% Make sure t is n-by-1.
if size(t, 1) == 1
    t = t';
elseif size(t, 2) > 1
    error('Input times, t, must be a vector.');
```

```

end

% Set M to 64 if user didn't specify an M.
if nargin < 3
    M = 32;
end

% Vectorized Talbot's algorithm
bnml = @(n, z) prod((n-(z-(1:z)))./(1:z));

xi = [0.5, ones(1, M), zeros(1, M-1), 2^-M];
for k = 1:M-1
    xi(2*M-k + 1) = xi(2*M-k + 2) + 2^-M * bnml(M, k);
end
k = 0:2*M; % Iteration index
beta = M*log(10)/3 + 1i*pi*k;
eta = (1-mod(k, 2)*2) .* xi;

% Make a mesh so we can do this entire calculation across all k for
all
% given times without a single loop (it's faster this way).
[beta_mesh, t_mesh] = meshgrid(beta, t);
eta_mesh = meshgrid(eta, t);

% Finally, calculate the inverse Laplace transform for each given
time.
ilt = 10^(M/3)./t ...
    .* sum(eta_mesh .* real(arrayfun(f_s, beta_mesh./t_mesh)), 2);

end

```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mahmut BÜLBÜL
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : Eskişehir-1973
Telefon : 0 530 458 41 03
Faks :
e-mail : mahbulbul@tpao.gov.tr

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Kocatepe Mimar Kemal Lisesi-Ankara	1991
Üniversite	: Orta Doğu Teknik Üniversitesi	1999
Yüksek Lisans	: Batman Üniversitesi	-
Doktora	: -	-

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2007-2010	TPAO Kuyu Tamamlama Hizmetleri	Kule Mühendisi
2010-2011	TPAO Rezervuar Baş Mühendisliği	Üretim Mühendisi
2012-2014	TPAO Rezervuar Baş Mühendisliği	Şef

UZMANLIK ALANI

Petrol ve Doğal Gaz

YABANCI DİLLER

İngilizce