BELİRSİZ ESNEK KÜMELER VE UYGULAMALARI

MURAT KIRCA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
Prof. Dr. NAİM ÇAĞMAN

2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BELİRSİZ ESNEK KÜMELER VE UYGULAMALARI

MURAT KIRCA

TOKAT
2019

MURAT KIRCA tarafından hazırlanan **"Belirsiz Esnek Kümeler Ve Uygulamaları"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23 MAYIS 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANA BİLİM DALI 'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	
Üye Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	
Üye Dr.Öğr.Üyesi Ayhan KULOĞLU Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi	

ONAY

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
23/05/2019

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MURAT KIRCA

23 Mayıs 2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BELİRSİZ ESNEK KÜMELER VE UYGULAMALARI

MURAT KIRCA

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:PROF. DR. NAİM ÇAĞMAN)

Bu çalışmada, ilk olarak bulanık küme, esnek küme, belirsiz küme ve belirsiz esnek küme kavramlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilecek ve sonra belirsiz esnek kümelerin bankacılık sektörü üzerine bir uygulaması verilecektir.

2019, 38 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Bulanık Kümeler, Esnek Kümeler, Belirsiz Kümeler, Belirsiz Esnek Kümeler, Esnek Alt Kümeler, Esnek Kesişim, Esnek Tümleyen, Belirsiz Esnek Alt Kümeler.

ABSTRACT

MASTER THESIS

VAGUE SOFT SETS AND THEIR APPLICATIONS

MURAT KIRCA

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR:) PROF. DR. NAİM ÇAĞMAN

In this thesis, firstly we introduced the fuzzy sets, soft sets, vague sets and vague soft sets and with their basic definitions and theorems. We then give an application of vague soft sets on the banking sector.

2019, 38 PAGE

KEYWORDS: Fuzzy Sets, Soft Sets, Vague Sets ,Vague Soft Sets, Subset Soft Sets, Intersection Soft Sets, Complement Soft Sets, Subset Vague Soft Sets.

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamamda engin bilgi birikiminden ve tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Naim Çağman'a, yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam Prof. Dr. Oktay Muhtaroğlu'na, özellikle ders verme sürecinde değerli vakitlerini ayırarak bilgilerini paylaşan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ercan Tunç'a, yine kıymetli hocam Prof. Dr. Zülfigar Akdoğan'a, tez önerisi, seminer ve tez savunması sürecinde yardımlarını esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Hayati Olğar'a, tez savunma sınavıma jüri olarak gelip onurlandıran Dr. Öğr. Üyesi Ayhan Kuloğlu'ya, değerli bilgi ve yardımlarından dolayı katkı sağlayan Matematik Bölümü'ndeki tüm hocalarıma, ilköğrenimimden bugüne kadar eğitim hayatım süresince tek tek isimlerini sayamayacağım üzerimde hakkı olan, emeği geçen, cümle hocalarıma, yüksek lisans sürecinin tüm aşamalarında yalnız bırakmayan dostlarım İsmail Demircan ve Kürşat Burak Kışla'ya, şu an çalışmakta olduğum TC Ziraat Bankası AŞ'de yüksek lisansımı yaparken destek olan, izin veren, idare eden Müdürlerim Hasan Demir ve Mustafa Düzenci ile başta Pelin Çelik ve Ahmet Melih Serdar olmak üzere tüm mesai arkadaşlarıma, ayrıca maddi ve manevi desteklerinden dolayı emeklerini asla ödeyemeyeceğim başta eşim Seda olmak üzere tüm aile fertlerim ve yakın arkadaşlarıma ayrı ayrı teşekkür eder, sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım. Hazırlamış olduğum tez çalışmasını, sevgili kızlarım Ayşe Melis ve Selin Eda'ya ithaf ediyorum. Saygılarımla.

MURAT KIRCA

Mayıs 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

Simgeler	Açıklama
$(\underset{\sim}{F},A)$	Belirsiz esnek kümeler
$\underset{\sim}{\phi}$	Boş belirsiz esnek küme
ϕ	Boş esnek küme
E	Değişkenler kümesi
$\neg E$	E’nin olumsuzu
$\underset{\sim}{\subseteq}$	Esnek alt kümeler
$\underset{\sim}{\cup}$	Esnek birleşim
$\underset{\sim}{\cap}$	Esnek kesişim
(F,E)	Esnek kümeler
$\underset{\sim}{=}$	Eşit esnek kümeler
U	Evrensel küme
$(F,A)^c$	(F,A) esnek kümesinin tümleyeni
$\underline{A}$	Mutlak belirsiz esnek küme
$\underset{\sim}{A}$	Mutlak esnek kümeler
λ	Optimizm indeksi
P(U)	U’nun kuvvet kümesi
μ_A	Üyelik fonksiyonu
$\wedge$	Ve
$\vee$	Veya

1. GİRİŞ

Matematik deyince akla gelen ilk şey kesinlik olmasına rağmen gündelik hayatta kullandığımız konuşmalar arasında belirsizlik olan, uzun, güzel, kısa gibi anlamı kişiden kişiye değişiklik gösteren kelimeler kullanılırız. Bu tür belirsizlikleri genellikle klasik mantık tanımlayamadığı için bilim adamları tarafından bilimsel olarak kabul görmemiştir.

Fakat şu da bir gerçek ki, mühendislik, ekonomi, sosyal ve sağlık bilimleri gibi önemli uygulama alalarında, ölçme aletlerinin kısıtlılığı, rastgele veri ve eksik bilgi gibi bazı nedenlerden dolayı karar verme noktasında karşımıza çıkan belirsiz veya kesin olmayan bilgi verileri, hayatımızın ve işimizin zorlu bir tarafıdır.

Bunun üstesinden gelmek için 19. asrın başlangıcında bu tür belirsizliklerle ilgili bazı filozoflar çalışmalar yapmışlardır. 1920'li yıllarda *Heisenberg* ilk belirsizlik kavramını ortaya atarak bilimi çok değerliliğe çekmiştir. 1930'lu yılların başlarında *Lukasiewicz* üç-değerli mantığı ve aynı yıllarda *Black* ise sürekli değerlere sahip mantık sistemini tanımladı. Bazı bilim adamları çok değerli mantık üzerinde çalışmalar yaptılar ama kendilerine bir uygulama zemini bulamadılar. Uygulamanın önünü açacak ilk bilim adamı *Zadeh* olmuştur. *Zadeh,* 1965'te bulanık mantık (*fuzzy logic*) ve dolayısıyla bulanık küme teorisini tanımlayarak belirsizliği modern anlamda matematiksel olarak modellemiştir.

1972'de İngiltere'de İranlı *Ebrahim Mamdani'* nin, bulanık mantık teorisini bir buhar makinesi için kullanarak, bir kontrol edici tasarlaması bilim dünyasının ilgisini bu konuya çekmiştir. Bulanık mantığın ilk kez sanayideki kullanımı, 1980'de, Danimarka'da bir çimento fabrikasının kontrolünde uygulanmasının sonrasında, başta Japonya olmak üzere dünyadaki birçok ülke araştırma ve mühendislik uygulamalarıyla bu konuya eğildiler ve büyük gelişmeler sağladılar.

Bulanık mantık ve kümeleri konusunda daha geniş bilgi için, İngilizce kaynak olarak ''*Dubois, D. and Prade, H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York. 1980, Klir, J. G, and Folger, T. A., Fuzzy Sets, And Information, New Jersey, 1988, Zimmermann, H.J., Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer, 1991*'' kitapları ve Türkçe olarak da ''*Elmas, Ç., Bulanık Mantık Denetleyiciler, Seçkin, Ankara, 2003, İbrahim, A, Gömülü Sistemlerle Bulanık Mantık (Çeviri: N. Çervatoğlu), Bileşim*

Yayınevi, İstanbul, 2004, Şen, Z., Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri, Bilge Kültür Sanat, İstanbul, 2001, Şen, Z., Modern Mantık, Bilge Kültür Sanat, İstanbul, 2003'' kitaplarından istifade edilebilir.

Bugüne kadar birikmiş ve toplanmış belirsizlik içeren kararsız verilerin sayısındaki hızlı yükselişten dolayı, kararsız veriyi modellemeye ve belirsizlik durumunu ortadan kaldırmaya yönelik kullanışlı ve etkili metotlar üzerindeki araştırmalar şu an hala da araştırılmaya devam edilmektedir.

Bulanık küme teorisinin uygulamaya başlanmasından sonra belirsizliklerle ilgili olarak birçok yeni teoriler geliştirilmiştir. Bunlardan esnek küme teorisi (*D.Molodtsov*), sezgisel bulanık küme teorisi (*K.Atanassov*), belirsiz küme teorisi (*W.I.Gau ve D.J.Buehrer*), esnek bulanık küme teorisi (*A.R.Roy ve P.K.Maji*), belirsiz esnek küme teorisi (*W. Xu, J. Ma, S. Wang ve G. Hao*) en gözde olanlarındandır. Literatürde bu teoriler ile ilgili çok sayıda araştırma ve uygulama bulunmaktadır.

Esnek kümeler ilk kez *Molodtsov* (*Soft set theory- First results, Competers & Mathematics with Applications*) tarafından 1999'da belirsizliği modellemek amacıyla ortaya atılmıştır. Esnek küme teorisinin, özellikle oyun teorisi, ölçüm teorisi, Riemann integrali karar verme gibi birçok alandaki uygulamalar için çok zengin bir potansiyeli vardır. *Molodtsov*' un bu teorisine ek olarak ilerleyen zamanlarda *Roy ve Magi*, (*A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems, Journal of Computational and Applied Mathematics*), bulanık esnek küme tanımını yaptıktan sonra özelliklerini vererek çeşitli alanlarda uygulamalarını geliştirdiler. Sonra *Chen, Tsang, Yeung ve Wang*, esnek küme değişkenlerinin indirgenmesi için bir tanım hazırladılar ve başka bir problemde bu geliştirdikleri tanım ile karar vererek, düzeltilmiş bir uygulama gösterdiler. *Kong, Gao, Wang ve Li*, (*The normal parameter of soft sets and its algorithm, Competers & Mathematics with Applications*), normal değişkenlerin indirgenmesi için esnek ve bulanık esnek kümelerin yeni bir tanımını sunarak, problemler üzerinde bu tanımlar doğrultusunda çalışmalar yaptılar. *Aktaş ve Çağman* (*Soft sets and soft groups, Information Science*), esnek kümeler üzerinde ilk esnek grubu tanımlayarak esnek cebirsel çalışmaları başlattılar.

Belirsiz küme teorisi ilk kez *Gau ve Buehrer*, (*Vague sets, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*) tarafından önerilmiştir. Belirsiz kümeler, bulanık kümeleri bir özel hali olarak kabul edilirler. Belirsiz küme teorisinin temel tanımları ve genişletilmiş bazı uygulamaları ‘‘ *H.Bustince ve P.Burillo, Vague sets are intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, S.M.Chen, Similarity measures between vague sets and between elements, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, S.M.Chen, Analyzing fuzzy system reliability using vague set theory, International Journal of Applied Science and Engineering, D.H.Hong ve C.H.Choi, Multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory, Fuzzy Set and Systems, A.Kumar, S.P.Yadav ve S.Kumar, Fuzzy reliability of a marine power plant using interval valued vague sets, International Journal of Applied Science and Engineering, A.Kumar, S.P.Yadav ve S.Kumar, Fuzzy system reliability analysis using* $T_{(i)}$ *based arithmetic operations on L-R type interval valued vague sets, International Journal of Quality & Reliability Management, J.Wang,S.Y.Liu, J.Zhang ve S.Y.Wang, On the parameterized OWA operators for fuzzy MCDM based on vague set theory, Fuzzy Optimization and Decision Making*’’ isimli kaynaklarda ayrıntılı bir şekilde bulunabilir.

Belirsiz esnek kümeler ise *Xu, Ma, Wang ve Hao*, (*Vague soft sets and their properties, Computers & Mathematics with Applications*) tarafından ilk kez 2009 yılında tanımlanmıştır. *Chetia ve Das*, (*Application of Vague Soft Sets in students’ evaluation*) tarafından öğrenci değerlendirilmesine uygulanmıştır.

Bu çalışmada, ilk olarak bulanık küme, esnek küme, belirsiz küme ve belirsiz esnek küme kavramlarıyla ilgili temel tanım ve teoremler tanıtıldıktan sonra belirsiz esnek kümelerin bankacılık sektörü üzerine bir uygulaması verilecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde bu tezde kullanacağımız, *bulanık küme, esnek küme, belirsiz küme ve belirsiz esnek küme* kavramlarıyla ilgili temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. Bulanık Mantık Ve Bulanık Kümeler

Bu alt bölümde, aralarındaki farkı anlama ve karşılaştırabilmeyi kolaylaştırmak için bulanık mantık ve onun doğurduğu bulanık kümeleri, klasik mantık (*Aristo mantığı*) ve onun oluşturduğu klasik kümeler ile birlikte vereceğiz.

Bilindiği üzere, klasik mantık, doğru veya yanlıştan biri ile değerlendirilen ve kesin hüküm bildiren önermeler üzerine inşa edilir.

Örneğin, "*Ali otuz yaşındadır.*" ve "*5, 4'ten büyük bir tamsayıdır.*" İfadeleri klasik mantıkta birer önermedir.

Bir x değişkene bağlı, *p(x) ="x ,30 yaşındadır."* Ve *q(x) ="x, 4'ten büyük bir tamsayıdır."* ifadeleri klasik mantıkta birer açık önermelerdir.

Matematiğin temel taşlarından olan kümeleri, bu önemelerle oluştururuz. Literatürde, klasik kümeler genellikle, "*iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur*" olarak tanımlanır. Önermeler kesin hüküm belirttiği için, bir açık önermeyi doğru yapan parametreler iyi tanımlanmış olurlar ve bunların topluluğu da matematikte küme olarak tanımlarız.

Örneğin, p*(x)* açık önermesinin yani 8'den büyük olan bütün tamsayıların oluşturduğu bir küme,

$$A=\{x: p(x)\}$$

biçiminde veya açık olarak

$$A=\{x: x>8, x\in Z\}$$

şeklinde veya daha açık olarak *A={9,10,11, ...}* biçiminde yazılır.

Önermeler, klasik mantıkta, ya yanlıştır ya da doğrudur, üçüncü bir durum yoktur. Bu sebeple, bir *p(x)* önermesi ve onun olumsuzu (*değili*) $\neg$ *p(x)* önermeleri için,

$$p(x) \vee \neg p(x) \text{ ve } p(x) \wedge \neg p(x)$$

bileşik önermelerine sırasıyla totoloji (*kesin doğru*) ve çelişki (*kesin yanlış*) denir. Birincinin manası, bir önerme ya yanlıştır ya da doğrudur ve ikincinin manası ise bir önerme aynı anda hem yanlış hem de doğru olamaz.

Şu halde, bir önermeyi doğru yapan değerler bir *A* kümesini oluşturuyorsa, doğru yapmayanlar (*yanlış yapanlar*) da bu *A* kümesinin tümleyeni A' kümesini oluştururlar. Böylece bir küme, üzerinde işlem yapılan *E* evrensel kümenin elemanlarını, kümeye ait olanlar ve ait olmayanlar diye ikiye ayırır.

Bu ayırımdan dolayı, *E* evrensel kümesinde tanımlı herhangi bir *A* kümesi için,

$$A \cup A' = E \text{ ve } \quad A \cap A' = \varnothing$$

elde edilir.

Klasik Aristo mantığında bir önermenin doğruluk değeri, yanlışlar için 0 ve doğrular için 1 kullanılırsa, *E* evrensel kümesindeki bir *A* kümesi, matematiksel olarak,

$$\chi_A : E \rightarrow \{0,1\}$$

fonksiyonu ile oluşturulmuş olur. Burada, *A* kümesine ait olmayan elemanlara 0 değerini, *A* kümesine ait elemanlara da 1 değerini veren, χ_A fonksiyonuna *A* kümesinin *karakteristik fonksiyonu* denir. Bu sayede, bilgisayarlarca algılanabilir olan ikili sayı sistemine geçiş yapılmış olunur.

Öte taraftan, yaşadığımız gerçek dünya sadece siyah ve beyazdan ibaret değildir, orada siyahla beyazın arasında, sonsuz renk tonu vardır. Konuşma dilimizde ifade ettiğimiz ve üzerinde çalıştığımız çoğu sınıflandırmalarda kullandığımız, kesin sınırlarla tarif edilemeyen ve kişiden kişiye değişik yorumlanan "*fazla uzun*", "*çok güzel*", "*biraz tatlı*", "*hafif pahalı*", "*aşırı sıcak*" gibi muallak kavramlar, klasik mantık metotları ile incelenemezler. Bu tür terimlerle ifade edilen "*Hava aşırı soğuk.*", "*Fatma çok güzel.*", "*Dayım epeyce yaşlı.*" gibi ifadeleri, kesin hüküm belirtmediğinden, klasik mantık önerme olarak kabul etmez ve bu kavramlarla da klasik anlamda küme inşa edilemez.

İşte, bu tür önermelere *bulanık önermeler* ve bunları kullanan mantığa da *bulanık mantık* denir.

Bulanık küme kavramı, belirsizliğin bir tür formüllendirilmesi durumudur.

Bulanık önermelerin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında kesin bir şey söylenemediğinden dolayı bunların doğruluk değeri, $[0,1] = \{x: 0 \leq x \leq 1, x \in R\}$ kümesinden, bir değerle derecelendirilir.

Bir bulanık önerme derecesine göre hem yanlış ve hem de doğru olabilir. Bulanık bir önerme için "yanlış değildir" denmiş ise bu "doğrudur" anlamına gelmez. Bir önerme 0.7 derecesinde doğru ise aynı önerme 0.3 derecesinde de yanlıştır.

Anlaşılacağı üzere, klasik önermelerdeki totoloji ve çelişme burada geçerli değildir. Bundan dolayı, klasik mantıktaki paradokslar, hem "doğru" hem "yanlış", ya da ne "doğru" ne de "yanlış" doğruluk değerine sahip önermeler, bulanık mantıkta doğruluk değerleri alarak biraz da olsa doğrulara indirgenmiş olurlar.

Bir bulanık önermenin oluşturduğu bir bulanık küme, çalışma yapılan alana ait her bir elemana matematiksel olarak kümedeki üyelik derecesini temsil eden [0,1] aralığındaki gerçel sayılardan bir değer atayarak tanımlanır. Bu değer, elemanın bulanık küme tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini verir.

Tam üye olma ve üye olmama durumu, bulanık kümede de sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle değerlendirilir. Bu yüzden, klasik küme kavramı bulanık küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir durumudur.

Bu sebeple, bulanık kümelerin matematiksel ifadesi, klasik kümelerin karakteristik fonksiyonunun {0,1} değer kümesinin, [0,1] gerçel sayılar aralığına genelleştirilmesi suretiyle yapılır.

O halde, nasıl ki, Rasyonel sayıların keşfi tam sayılara alternatif değil, onu da içine alan daha kapsamlı bir sayı kümesi ise bulanık kümeler de klasik kümeleri kapsayan daha geniş kümelerdir ve bulanık kümelerin klasik kümelere bir alternatif değil, onların genelleştirilmişi olduğu söylenebilir.

Bulanık kümelerde üye olma ve üye olmama ilişkisini ifade etmek için özel bir fonksiyon olan *üyelik fonksiyonu* kullanılır.

Tanım 2.1.1. X bir evrensel küme olmak üzere A bulanık kümesi,

$$A = \{x / \mu_A(x) \mid x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

şeklinde tanımlanır.

A bulanık kümesi, sıralı çiftlerden oluşan iki değişkenli bir bağıntı olarak tanımlanır. Burada $\mu_A(x)$'e de *üyelik değeri*, μ_A 'ya da *üyelik fonksiyonu* (*membership function*) denir.

Örnek 2.1.1. X evrensel kümesi, isimleri a,b,c,d,e, f ve yaşları sırasıyla 5,10,30,50,70,95 olan insanlardan oluşsun. Yani X={ a,b,c,d,e,f } olsun.

Burada gençlerin kümesini A, yaşlıların kümesini B ile gösterelim.

Bunun için önce A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonlarını inşa edelim. Eğer A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 10 \\ (90-x)/80, & 10 \leq x < 90 \\ 0, & 90 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 10 \\ (x-10)/80, & 10 \leq x < 90 \\ 1, & 90 \leq x < \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa A ve B bulanık kümeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

A = { a/1, b/1, c/0.75, d/0.5, e/0.25}

B = { c/0.25, d/0.5, e/0.75, f/1}

Tanım 2.1.2. Bir *X* evrensel kümesi üzerinde *A* herhangi bir bulanık küme ve μ_A da onun üyelik fonksiyonu olmak üzere, *A* kümesinin *destek kümesi* (*support of fuzzy set A*) aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\sup(A)=\{ x \in X: \mu_A(x)>0 \}.$$

Örnek 2.1.2. Örnek 2.1.1'deki A ve B bulanık kümelerinin destek kümeleri aşağıdaki şekilde olur.

$$\sup(A) =\{ a,b,c,d,e\}.$$

(Burada $\mu_A(f)=0$ olduğundan f, sup(A)'nın elemanı değildir.)

$$\sup(B) = \{ c,d,e,f\}.$$

(Burada $\mu_B(a)=0$ ve $\mu_B(b)=0$ olduğundan a ve b, sup(B)'nın elemanı değildir.)

Tanım 2.1.3. *X* evrensel küme olmak üzere,

$$A=\{(x/\mu_A(x)) \mid x \in X,\ \mu_A(x) \in [0,1]\} \text{ ve } B=\{(x/\mu_B(x)) \mid x \in X,\ \mu_B(x) \in [0,1]\}$$

bulanık kümeleri göz önüne alınsın.

$$\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

ise *A ve B* bulanık kümeleri *eşittir* denir ve *A* = *B* şeklinde gösterilir.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

olur.

Tanım 2.1.4. Bir *X* evrensel kümesi üzerinde,

$A = \{(x/\mu_A(x)) \mid x \in X,\ \mu_A(x) \in [0,1]\}$ ve $B = \{(x/\mu_B(x)) \mid x \in X,\ \mu_B(x) \in [0,1]\}$

bulanık kümeleri göz önüne alınsın. *A* ve *B* bulanık kümeleri için,

$$\forall x \in X, \mu_A(x) \le \mu_B(x)$$

ise *A* 'ya *B*'nin *alt kümesi* denir ve $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.3. Evrensel küme X={ a,b,c,d,e, f } olsun. Bu X evrensel kümesi üzerinde *A* ve *B* bulanık kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.

A={a/0.3, b/0.5, e/0.7} ve B={a/0.4, b/0.7,d/0.1, e/1}

Burada A ve B bulanık kümeleri için, $\forall x \in X, \mu_A(x) \le \mu_B(x)$ olduğundan A, B'nin alt kümesidir yani $A \subseteq B$ 'dir.

Tanım 2.1.5. Bir *X* evrensel kümesi üzerinde *A* bulanık küme olsun. *A* kümesinin *tümleyeni* olan A^C bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

veya

$$\mu_{A^C}(x) + \mu_A(x) = 1$$

biçimde tanımlanır.

Örnek 2.1.4. Evrensel küme X={ a,b,c,d,e, f } olsun. Bu X evrensel kümesi üzerinde A bulanık kümesi A={a/0.3, b/0.5, e/0.7} şeklinde verilsin.

Bu takdirde, A kümesinin tümleyeni olan A^C bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$A^C = \{ a/0.7 ,b/0.5, c/1, d/1, e/0.3, f/1\}$$

Tanım 2.1.6. Bir X evrensel kümesi üzerinde A ve B bulanık kümeleri verilsin. $A \cap B$ *kesişim kümesi*,

$$A \cap B = \{x / \mu_{A \cap B}(x) \mid x \in X\}, \quad \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.7. Bir X evrensel kümesi üzerinde A ve B bulanık kümeleri verilsin. $A \cup B$ *birleşim kümesi*,

$$A \cup B = \{x / \mu_{A \cup B}(x) \mid x \in X\}, \quad \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.8. Bir X evrensel kümesi üzerinde A ve B bulanık kümeleri verilsin. $A - B$ *fark kümesi*,

$$A - B = \{(x / \mu_{A-B}(x)) \mid x \in X\}, \quad \mu_{A-B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{B^C}(x))$$

olur. Ayrıca buradan

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A \cap B^C}(x)$$

eşitliği yazılabilir.

Teorem 2.1.1. Bir X evrensel kümesi üzerinde A, B ve C bulanık kümeleri verilsin.

i. $A \cap A = A, \; A \cup A = A$

ii. $A \cap (X \times [0,1]) = A, \; A \cup \phi = A$

iii. $A \cap \phi = \phi, \; A \cup (X \times [0,1]) = X \times [0,1]$

iv. $A \cap B = B \cap A, \; A \cup B = B \cup A$

v. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

vi. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ve $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

vii. $\left(A^C\right)^C = A$

viii. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Burada $A \cap A^C \neq \phi$ *ve* $A \cup A^C \neq X$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek 2.1.5. X={ a,b,c,d,e,f } evrensel kümesi üzerinde A ve B bulanık kümeleri aşağıdaki şekilde verilsin.

A={ a/0.8, b/1, c/0.2, d/0.5, e/0.7 }

B={ b/0.4, c/0.6, d/0.5, e/0.8, f/1 }

Buna göre $A \cap B$, $A \cup B$, A^C ,B^C ve *A-B* bulanık kümelerini elde edelim.

i. $A \cap B = \{x / \mu_{A \cap B}(x) \mid x \in X\}$,
$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

olduğundan, $A \cap B$= { b/0.4, c/0.2, d/0.5, e/0.7 } elde edilir.

ii. $A \cup B = \{x / \mu_{A \cup B}(x) \mid x \in X\}$,
$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

olduğundan, $A \cup B$={ a/0.8, b/1, c/0.6, d/0.5, e/0.8, f/1 } elde edilir.

iii. A^C bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu,

$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)$ veya $\mu_{A^C}(x) + \mu_A(x) = 1$

biçimde olduğundan,

A^C ={ a/0.2, c/0.8, d/0.5, e/0.3, f/1 },

B^C ={ a/1, b/0.6, c/0.4, d/0.5, e/0.2 } elde edilir.

iv. $A - B = \{(x / \mu_{A-B}(x)) \mid x \in X\}$,
$\mu_{A-B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{B^C}(x))$

olduğundan, *A-B*= { a/0.8, b/0.6, c/0.2, d/0.5, e/0.2} elde edilir.

2.2. Esnek Kümeler

Bu bölümde, bu tezde kullanacağımız esnek kümeler ile ilgili temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Molodtsov, ‘‘*Soft set theory- First results, Competers & Mathematics with Applications*’’ isimli eserinde bir esnek kümeyi aşağıdaki gibi tanımlıyor.

Tanım 2.2.1. U bir başlangıç evrensel küme, E değişkenler kümesi, P(U), U’nun kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun.

Burada $F:A \rightarrow P(U)$ dönüşümü ile elde edilen (F,A) ikilisi, U üzerinde bir esnek kümedir.

Daha kolay bahsetmek için, genellikle *P.K.Maji, R.Biswas ve A.R.Roy’* un ‘‘*Soft set theory, Competers & Mathematics with Applications*’’ adlı eserlerinden alıntı örnekler aktaracağız.

Örnek 2.2.1. Bir (F,E) esnek kümesi düşünelim. Bu esnek küme, satın almayı düşündüğümüz eve ait bazı sıfatları değişkenler kabul edecek şekilde tanımlansın.

Farz edelim ki, U evrensel kümesinde altı adet ev var. $U=\{h_1,h_2,\ldots,h_6\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_5\}$ olsun. Burada e_1=pahalılık, e_2=güzellik, e_3=ahşap, e_4=ucuzluk, e_5=bahçe ile çevrili olma kavramlarını ifade etsin. Burada $F(e_1)$, pahalı evlerin kümesini verir yani

$$F(e_1) = \{h \in U: h \text{ bir pahalı evdir}\} = \{ h_2, h_4\}$$

kümesi olur. Eğer diğer parametreler için,

$$F(e_2) = \{ h_1, h_3\},$$
$$F(e_3) = \{ h_3, h_4, h_5\},$$
$$F(e_4) = \{ h_1, h_3, h_5\},$$
$$F(e_5) = \{ h_1\}$$

ise (F,E) esnek kümesi, U kümesinin alt kümeleri olan değişkenler ailesi $\{F(e_i), i=1,2,\ldots,5\}$ yaklaşımlarının bir derlemesi olarak görülebilir.

Bu durumda (F,E) esnek kümesi,

$$(F,E) = \{(e_1,\{ h_2, h_4\}),\ (e_2, \{ h_1, h_3\}), (e_3, \{ h_3, h_4,h_5\}), (e_4, \{ h_1, h_3, h_5\}), (e_5, \{ h_1\}) \}$$

şeklinde yazılır.

Örnek 2.2.2. Bir (F,E) esnek kümesi düşünelim. Bu esnek küme, bir bankacı olarak kredi vermeyi düşündüğümüz müşterimize ait bazı özellikleri değişkenler olarak kabul edecek şekilde tanımlansın.

Farz edelim ki, U evrensel kümesinde on adet müşteri var. $U=\{h_1,h_2,\ldots,h_{10}\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_5\}$ olsun.

Burada verimli (e_1), karlı (e_2), borçlanması az (e_3), riski düşük (e_4) ve ödemeleri düzenli (e_5) olma kavramlarını ifade etsin.

O halde $F(e_1)$, verimli müşterilerin kümesini gösterir, eğer verimli müşterilerimiz h_3 ve h_5 ise,

$$F(e_1) = \{ h_3, h_5\}$$

olur ve benzer şekilde diğerlerini

$$F(e_2)=\{ h_2, h_3,h_4\},$$

$$F(e_3)=\{ h_4,h_5,h_8\},$$

$$F(e_4)=\{ h_2, h_3, h_{10}\},$$

$$F(e_5)=\{ \}$$

şeklinde varsayarsak,

$$(F,E) = \{(e_1,\{ h_3, h_5\}),\ (e_2, \{ h_2, h_3, h_4\},\ (e_3, \{ h_4, h_5, h_8\}, (e_4, \{ h_2, h_3, h_{10}\}) \}$$

(F,E) esnek kümesi elde ederiz. Burada dikkat edilirse $F(e_5)$ boş küme olduğu için esnek kümenin içine yazılmamıştır.

Tanım 2.2.2. Ortak U evrensel kümesi üzerindeki iki esnek küme (F,A) ve (G,B) olsun. Bu taktirde eğer $A\subseteq B$ ve $\forall\varepsilon\in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ özdeş yaklaşımlar ise hem (F,A), (G,B)'nin esnek alt kümesi, hem de (G,B), (F,A)'nın esnek alt kümesidir. $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ veya benzer olarak $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.2.3. Ortak U evrensel kümesi üzerindeki iki esnek küme (F,A) ve (G,B) olsun. Bu takdirde eğer (F,A), (G,B)'nin esnek alt kümesi ve (G,B) , (F,A)'nın esnek alt kümesi ise (F,A) ve (G,B) eşit esnek kümeler olarak adlandırılır. $(F,A) \tilde{=} (G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ bir değişkenler kümesi olsun. E'nin olumsuzu $\neg E$ ile gösterilir ve $\neg E=\{\neg e_1,\neg e_2,\ldots,\neg e_n \}$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.5. (F,A) esnek kümesinin tümleyeni $(F,A)^c$ ile gösterilir. $(F,A)^c = (F^c, \neg A)$ 'dir. Burada $F^c : \neg A \rightarrow P(U)$ fonksiyonunda $\forall\ \alpha \in \neg A$ için,

$$F^c(\alpha) = U - F(\alpha)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.6. (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun. Bu taktirde; (F,A) ve (G,B) esnek kümesi, $(F,A) \wedge (G,B) = (H, AxB)$ şeklindedir. Burada $\forall\ \alpha,\beta \in AxB$ için,

$$H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.7. (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun. Bu taktirde; (F,A) veya (G,B) esnek kümesi, $(F,A) \vee (G,B) = (O, AxB)$ şeklindedir. Burada $\forall\ \alpha,\beta \in AxB$ için,

$$O(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.8. Ortak U evrensel kümesi üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi (H,C) esnek kümesi olsun.

Burada $C = A \cup B$ ve $\forall\ e \in C$ olmak üzere,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & \text{eğer } e \in A-B \\ G(e), & \text{eğer } e \in B-A \\ F(e) \cup G(e), & \text{eğer } e \in B \cap A \end{cases}$$

$$(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H,C)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.9. Ortak U evrensel kümesi üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kesişimi (H,C) esnek kümesi olsun. Burada $C=A\cap B$ ve $\forall\ e\in C$ için, H(e)=F(e) veya H(e)=G(e) olmasından dolayı,

$$(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C)$$

ile gösterilir.

Aşağıda, iki esnek kümenin kesişimi tanımını açıklamak üzere bir örnek vereceğiz. Bu örnekte Maji'nin teorisine göre bir çelişki bulunmaktadır ve düzeltilmelidir.

Örnek 2.2.3. Kabul edelim ki, (F,A) ve (G,B) iki esnek küme iken $U=\{h_1,h_2,\ldots,h_6\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_5\}$ olsun ve e_1=pahalılık, e_2=güzellik, e_3=ahşap, e_4=ucuzluk, e_5=bahçe ile çevrili olma kavramlarını ifade etsin.

Burada U evrensel kümesinde altı adet ev var. Ɛ'a yaklaşık elemanların kişiden kişiye farklılık arz edebileceğini de göz önüne alarak A={ahşap,güzel}ve B={güzel}olduğunu varsayalım.
F(ahşap)={ h_1,h_3}, F(güzel)={ h_2,h_4}, G(güzel)={ h_4}.

H(C) esnek kümesini (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kesişimi olarak düşünelim. 'güzel'$\in A\cap B$ fakat H(güzel)= F(güzel)={ h_2,h_4} ve H(güzel)= G(güzel)={h_4}olduğundan bu bir çelişkidir.

Aşağıdaki önermede *Maji, Biswas ve Roy* 'un ''*Soft set theory, Competers & Mathematics with Applications*'' eserlerinden alıntı yapacağız ve önermeyi problemli olarak göstereceğiz.

Önerme 2.2.1. Ortak U evrensel kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun.

i. $[(F,A)\tilde{\cup}(G,B)]^C= (F,A)^C\tilde{\cup}(G,B)^C$
ii. $[(F,A)\tilde{\cap}(G,B)]^C= (F,A)^C\tilde{\cap}(G,B)^C$

Önerme 2.2.1. (i)'nin uygun olmadığını ispatlamak için aşağıda bir önerme daha vereceğiz.

Önerme 2.2.2. Eğer $\alpha \in A \cap B$ ve $F(\alpha) \neq G(\alpha)$ ise, $[(F,A) \underset{\sim}{\cup} (G,B)]^C \neq (F,A)^C \underset{\sim}{\cup} (G,B)^C$, dir.

İspat: Kabul edelim ki,

$$(H, A \cup B) = (F,A) \underset{\sim}{\cup} (G,B) \text{ ve } (K, \neg A \cup \neg B) = (F,A)^C \underset{\sim}{\cup} (G,B)^C$$

olsun.

$$\alpha \in A \cap B \text{ için } (H,\alpha) = F(\alpha) \cup (G,\alpha)$$

ve

$$\neg\alpha \in \neg A \cap \neg B \text{ için } H^c(\neg\alpha) = U - (H,\alpha),$$

$$H^c(\neg\alpha) = U - [\, F(\alpha) \cup (G,\alpha)].$$

$F(\alpha)$ ve (G,α), U'nun alt kümesi olduklarından,

$$H^c(\neg\alpha) = (U - F(\alpha)) \cap (U - G(\alpha)),$$

$$H^c(\neg\alpha) = F^c(\neg\alpha) \cap G^c(\neg\alpha)$$

elde edilir. Fakat diğer taraftan, $\alpha \in A \cap B$ için

$$\neg\alpha \in \neg A \cap \neg B,$$

$$K(\neg\alpha) = F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\alpha)$$

bulunur. Eğer $\alpha \in A \cap B$ için $F(\alpha) \neq (G,\alpha)$ ise,

$$F^c(\neg\alpha) \cap G^c(\neg\alpha) \neq F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\alpha)$$

ve

$$H^c(\neg\alpha) \neq K(\neg\alpha).$$

Bu nedenle, eğer $\exists\ \alpha \in A \cap B$ ve $F(\alpha) \neq G(\alpha)$ için

$$[(F,A) \underset{\sim}{\cup} (G,B)]^C \neq (F,A)^C \underset{\sim}{\cup} (G,B)^C$$

olur.

Yukarıda ispatı verilen çelişki nedeniyle, iki esnek küme için daha önce verilen kesişim kavramının aşağıdaki gibi tekrardan tanımlanması gerekmektedir.

<u>Tanım 2.2.10.</u> Ortak U evrensel kümesi üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi (H,C) esnek kümesi olsun.

Burada $C=A\cup B$ ve $\forall\, e\in C$ olmak üzere,

$$H(e)=\begin{cases} F(e), & \text{eğer } e\in A-B \\ G(e), & \text{eğer } e\in B-A \\ F(e)\cap G(e), & \text{eğer } e\in B\cap A \end{cases}$$

$$(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C)$$

ile gösterilir.

Esnek kümelerin kesişiminin yeni tanımına dayalı olarak aşağıdaki önermeyi elde edebiliriz.

<u>Önerme 2.2.3.</u> Ortak U evrensel kümesi üzerinde (F,A) ve G,B) iki esnek küme olsun.
Bu taktirde,

i. $[(F,A)\tilde{\cup}(G,B)]^C= (F,A)^C\tilde{\cup}(G,B)^C$ ve
ii. $[(F,A)\tilde{\cap}(G,B)]^C= (F,A)^C\tilde{\cap}(G,B)^C$ ‘dir.

İspat: i. Kabul edelim ki, $((F,A)\tilde{\cup}(G,B) = (H, A\cup B)$ olsun.

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \text{eğer } \alpha\in A-B \\ G(\alpha), & \text{eğer } \alpha\in B-A \\ F(\alpha)\cup G(\alpha), & \text{eğer } \alpha\in A\cap B \end{cases}$$

$$[(F,A)\tilde{\cup}(G,B)]^C=(H, A\cup B)^c = (H^c, \neg A\cup\neg B).$$

Dolayısıyla,

$$\forall \neg\alpha \in \neg A \cup \neg B \text{ için } H^c(\neg\alpha) = U - H(\alpha),$$

$$\alpha \in A \cap B \text{ için } H(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha),$$

$$\forall \neg\alpha \in \neg A \cap \neg B,\ H^c(\neg\alpha) = U - H(\alpha),$$

$$H^c(\neg\alpha) = U - [F(\alpha) \cup G(\alpha)].$$

F(α) ve G(α), U’nun iki alt kümesi olduğundan,

$$H^c(\neg\alpha) = [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\alpha)].$$

Dolayısıyla,

$$H^c(\neg\alpha) = \begin{cases} F^c(\neg\alpha), & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A - \neg B \\ G^c(\neg\alpha), & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg B - \neg A \\ F^c(\neg\alpha) \cap G^c(\neg\alpha), & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A \cap \neg B \end{cases}$$

Aynı şekilde,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A - \neg B \\ G(\alpha), & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg B - \neg A \\ F(\alpha) \cap G(\alpha), & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A \cap \neg B \end{cases}$$

Benzer olarak, önermenin (ii)’nci bölümünü de ispat edebiliriz.

<u>Önerme 2.2.4.</u> Ortak U evrensel kümesi üzerinde (F,A) bir esnek küme, ϕ boş esnek küme ve $\underset{\sim}{A}$ mutlak esnek küme olsun. O halde aşağıdaki eşitliklerden bahsedilebilir.

i. $(F,A) \underset{\sim}{\cup} (F,A) = (F,A)$,

ii. $(F,A) \underset{\sim}{\cap} (F,A) = (F,A)$,

iii. $(F,A) \underset{\sim}{\cup}\ \phi = (F,A)$,

iv. $(F,A) \underset{\sim}{\cap}\ \phi = \phi$,

v. $(F,A) \underset{\sim}{\cup}\ \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$,

vi. $(F,A) \underset{\sim}{\cap}\ \underset{\sim}{A} = (F,A)$.

2.3. Belirsiz Kümeler

Bu bölümde belirsiz kümelerle ilgili temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

$U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ kümesi başlangıç evrensel küme olsun. U üzerinde, doğruluk üyelik fonksiyonu t_v ve yanlışlık üyelik fonksiyonu f_v şeklinde iki esnek küme tanımlayalım.

$$t_v: U\rightarrow[0,1] \text{ ve } f_v: U\rightarrow[0,1]$$

Burada u_i için bir alt sınır $t_v(u_i)$ ve u_i'nin olumsuzu için bir alt sınır $f_v(u_i)$ olmak üzere,

$$t_v(u_i)+ f_v(u_i) \leq 1$$

şartını sağlar.

Belirsiz kümedeki u_i'nin üyelik derecesi, [0,1]'in bir alt aralığı olan $[t_v(u_i),1-f_v(u_i)]$ ile sınırlandırılmıştır.

Burada u_i'nin bilinemeyen $\mu_v(u_i)$ üyeliğinin gerçek derecesinin sınırları aşağıdaki gibidir.

$$t_v(u_i) \leq \mu_v(u_i) \leq 1- f_v(u_i).$$

U evrensel kümesi sürekli olduğunda, bir belirsiz A kümesi,

$$A= \int_u [t_A(u_i),1- f_A(u_i)] /u_i, \quad u_i\in U,$$

U evrensel kümesi süreksiz olduğunda, bir belirsiz A kümesi,

$$A= \sum_{i=1}^{n} [t_A(u_i),1- f_A(u_i)] /u_i, \; u_i\in U.$$

şeklinde yazılabilir.

Bu bölümdeki kavramların tanımları verilirken, *W.I.Gau ve D.J.Buehrer*' in ''*Vague sets, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*'' eserinden yararlanılacaktır.

Tanım 2.3.1. X bir belirsiz küme ve $X = [t_x, 1-f_x]$ olsun. Burada

$$t_x, f_x \in [0,1] \text{ ve } 0 \leq t_x \leq 1-f_x \leq 1$$

Eğer,

$t_x=1$ ve $f_x=0$ ise, $X=[1,1]$ olacağından X'e bir ‘‘birim belirsiz küme’’,
$t_x=0$ ve $f_x=1$ ise, $X=[0,0]$ olacağından X'e bir ‘‘sıfır belirsiz küme’’,

denir.

Tanım 2.3.2. X ve Y, iki belirsiz küme olsunlar. $X=[t_x,1-f_x]$ ve $Y=[t_y,1-f_y]$ olsun. Eğer

$$t_x = t_y \text{ ve } f_x = f_y \text{ ise } [t_x,1-f_x]=[t_y,1-f_y]$$

olacağı için X ve Y belirsiz kümeleri eşittir.

A ve B, $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ evrensel kümesinin iki belirsiz kümesi olsun.

$$A = \{ [t_A(u_1),1-f_A(u_1)] / u_1+[t_A(u_2),1-f_A(u_2)]/ u_2+...+[t_A(u_n),1-f_A(u_n)]/ u_n \},$$
$$B = \{ [t_B(u_1),1-f_B(u_1)] / u_1+[t_B(u_2),1-f_B(u_2)]/ u_2+...+[t_B(u_n),1-f_B(u_n)]/ u_n \}.$$

Tanım 2.3.3. U evrensel kümesinin bir belirsiz kümesi A olsun.

$1 \leq i \leq n$ iken $\forall u_i \in U$, $t_A(u_i) = 1$ ve $f_A(u_i) = 0$ ise A bir ‘‘birim belirsiz küme’’ ,

$1 \leq i \leq n$ iken $\forall u_i \in U$, $t_A(u_i) = 0$ ve $f_A(u_i) = 1$ ise A bir ‘‘sıfır belirsiz küme’’ ,

denir.

Tanım 2.3.4. U evrensel kümesinin bir belirsiz kümesi A olsun. Belirsiz A kümesinin tümleyeni A^c ile gösterilir ve şöyle tanımlanır.

$$t_A{}^c = f_A,\ 1-f_A{}^c = 1-t_A.$$

Tanım 2.3.5. A ve B ,U evrensel kümesinde iki belirsiz küme olsun. Eğer,

$$1 \leq i \leq n \text{ iken } \forall u_i \in U,\ [t_A(u_i), 1- f_A(u_i)] = [t_B(u_i), 1- f_B(u_i)]$$

ise A ve B belirsiz kümeleri eşittir.

Tanım 2.3.6. A ve B ,U evrensel kümesinde iki belirsiz küme olsun. Eğer,

$$1 \leq i \leq n \text{ iken } \forall u_i \in U,\ t_A(u_i) \leq t_B(u_i) \text{ ve } 1- f_A(u_i) \leq 1- f_B(u_i)$$

ise ''A belirsiz kümesi, B belirsiz kümesi tarafından kapsanır'' ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.7. A ve B belirsiz kümelerinin birleşimi belirsiz C kümesi olsun. A ve B ile ilgili $C=A \cup B$'de, doğru üyelik ve yanlış üyelik fonksiyonları şöyle yazılır.

$$t_C = \max(t_A, t_B),$$
$$1-f_C = \max(1- f_A, 1- f_B) = 1-\min(f_A, f_B).$$

Tanım 2.3.8. A ve B belirsiz kümelerinin kesişimi belirsiz C kümesi olsun. A ve B ile ilgili $C=A \cap B$'de, doğru üyelik ve yanlış üyelik fonksiyonları şöyle yazılır.

$$t_C = \min(t_A, t_B),$$
$$1-f_C = \min(1- f_A, 1- f_B)=1-\max(f_A, f_B).$$

Örnek2.3.1. Belirsiz Kümeler, *Lui, Wang ve Feng* tarafından 2008 yılında verilen seçim örneği ile basit bir şekilde yorumlanabilir.

Oy kullanacak 10 insan ele alınsın. A belirsiz kümesi için belirsiz değerler [0.6,0.8] olsun.

Burada doğruluk üyelik fonksiyonu $t_A(u) = 0.6$'dır.

Benzer şekilde yanlışlık üyelik fonksiyonu $f_A(u) = 1-0.8 = 0.2$' dir.

O halde, 6 kişi seçim için destek vermiş, 2 kişi destek vermemiş ve 2 kişi de çekimser kalmıştır.

2.4. Belirsiz Esnek Kümeler

Daha önce verildiği üzere, bir esnek küme, değişkenler kümesinden evrensel kümenin kuvvet kümesi üzerine bir fonksiyondur. Ancak esnek küme, tanımında da verildiği üzere, birleştirilmiş değişkenlerin belirsizliğini tanımlamak için yeterli değildir.

Bu bölümde esnek küme teorisi ve belirsiz küme teorisine dayalı olarak, belirsiz esnek küme kavramına giriş yapacağız. Belirsiz esnek kümelerin temel özelliklerini vereceğiz.

Bu bölümde vereceğimiz tanımlar, W. Xu, J. Ma, S. Wan ve G. Hao 'nun ''Vague soft sets and their properties, Computers & Mathematics with Applications'' eserinden faydalanılarak yazılmıştır.

U bir evrensel küme, E bir değişkenler kümesi, U üzerindeki belirsiz esnek kümelerin kuvvet kümesi V(U) ve $A \subseteq E$ olsun. Bu taktirde belirsiz esnek kümelerin tanımını aşağıdaki gibi verebiliriz.

<u>Tanım 2.4.1.</u> $(\underset{\sim}{F},A)$ ikilisi, U evrensel kümesi üzerinde bir belirsiz esnek küme ise $\underset{\sim}{F}$, şöyle bir fonksiyondur.

$$\underset{\sim}{F}: A \rightarrow V(U).$$

Diğer bir deyişle, U üzerinde bir belirsiz esnek küme, U evrenselinin belirsiz kümelerinin değişkenler ailesidir.

$\varepsilon \in A$ için, $\mu_{\underset{\sim}{F}(\varepsilon)}: U \rightarrow [0,1]$, $(\underset{\sim}{F},A)$ belirsiz esnek kümesinin ε'a yaklaşık elemanlarının kümesi olarak kabul edilir.

Düşünceyi daha iyi anlayabilmek için, daha önce verilen 'ev' örneğini tekrar inceleyelim.

<u>Örnek 2.4.1.</u> Kabul edelim ki, U evrensel kümesinde altı adet ev var. ε'a yaklaşık elemanların kişiden kişiye farklılık arz edebileceğini de göz önüne alarak, bu evleri satın almak için karar verme standartları bulunsun.

$$U=\{h_1,h_2,\ldots,h_6\},\ \ E=\{e_1,e_2,\ldots,e_5\}$$

olsun ve e_1=pahalılık, e_2=güzellik, e_3=ahşap, e_4=ucuzluk, e_5=bahçe ile çevrili olma kavramları ile tanımlansın.

$(\underset{\sim}{F},E)$ belirsiz esnek kümesi, ev alınırken karar vermek için 'evlerin alımlılığı'nı ifade etsin.

Farz edelim ki,

$\underset{\sim}{F}(e_1) = ([.1,.2]/h_1, [.9,1]/h_2, [.3,.5]/h_3, [.8,.9]/h_4, [.2,.4]/h_5, [.4,.6]/h_6)$,

$\underset{\sim}{F}(e_2) = ([.9,1]/h_1, [.2,.7]/h_2, [.6,.9]/h_3, [.2,.4]/h_4, [.3,.4]/h_5, [.1,.6]/h_6)$,

$\underset{\sim}{F}(e_3) = ([0,0]/h_1, [0,0]/h_2, [1,1]/h_3, [1,1]/h_4, [1,1]/h_5, [0,0]/h_6)$,

$\underset{\sim}{F}(e_4) = ([.8,.9]/h_1, [0,.1]/h_2, [.5,.7]/h_3, [.1,.2]/h_4, [.6,.8]/h_5, [.4,.6]/h_6)$,

$\underset{\sim}{F}(e_5) = ([.9,1]/h_1, [.2,.3]/h_2, [.1,.4]/h_3, [.1,.2]/h_4, [.2,.4]/h_5, [.7,.9]/h_6)$.

$(\underset{\sim}{F},E)$ belirsiz esnek kümesi, U üzerindeki belirsiz esnek kümelerin değişkenleştirilmiş ailesi olsun. $\{\ \underset{\sim}{F}(e_i),\ i=1,2,...,5\}$

$(\underset{\sim}{F},E) = \{$ pahalı evler $= ([.1,.2]/h_1, [.9,1]/h_2, [.3,.5]/h_3, [.8,.9]/h_4, [.2,.4]/h_5, [.4,.6]/h_6)$,
güzel evler $= ([.9,1]/h_1, [.2,.7]/h_2, [.6,.9]/h_3, [.2,.4]/h_4, [.3,.4]/h_5, [.1,.6]/h_6)$,
ahşap evler $= ([0,0]/h_1, [0,0]/h_2, [1,1]/h_3, [1,1]/h_4, [1,1]/h_5, [0,0]/h_6)$,
ucuz evler $= ([.8,.9]/h_1, [0,.1]/h_2, [.5,.7]/h_3, [.1,.2]/h_4, [.6,.8]/h_5, [.4,.6]/h_6)$,
bahçeli evler $= ([.9,1]/h_1, [.2,.3]/h_2, [.1,.4]/h_3, [.1,.2]/h_4, [.2,.4]/h_5, [.7,.9]/h_6)\ \}$.

<u>Tanım 2.4.2.</u> Aynı U evrensel kümesi üzerindeki $(\underset{\sim}{F},A)$ ve $(\underset{\sim}{G},B)$ belirsiz esnek kümeleri için, eğer $A\subseteq B$ ve $\forall \varepsilon\in A$ iken, $\underset{\sim}{F}(\varepsilon)$ ve $\underset{\sim}{G}(\varepsilon)$ özdeş yaklaşımlar ise, $(\underset{\sim}{F},A)$, $(\underset{\sim}{G},B)$'nin belirsiz esnek alt kümesidir ve $(\underset{\sim}{F},A)\underset{\sim}{\subseteq}(\underset{\sim}{G},B)$ ile gösterilir.

Benzer olarak, eğer $(\underset{\sim}{G},B)$ de $(\underset{\sim}{F},A)$'nin belirsiz esnek alt kümesi ise, $(\underset{\sim}{F},A)$, $(\underset{\sim}{G},B)$'nin ''belirsiz esnek süper kümesi'' diyebiliriz.

<u>Örnek 2.4.2.</u> $A=\{\ e_1,e_2\}$ ve $B==\{\ e_1,e_2,e_3\}$ yani $A\subseteq B$ olsun. $(\underset{\sim}{F},A)$ ve $(\underset{\sim}{G},B)$, aynı U evrensel kümesi üzerindeki belirsiz esnek kümeler olsun.

$\underset{\sim}{F}(e_1)$= ([.1,.2]/h_1, [.9,1]/h_2, [.3,.5]/h_3, [.8,.9]/h_4, [.2,.4]/h_5, [.4,.6]/h_6),

$\underset{\sim}{F}(e_2)$= ([.9,1]/h_1, [.2,.7]/h_2, [.6,.9]/h_3, [.2,.4]/h_4, [.3,.4]/h_5, [.1,.6]/h_6),

$\underset{\sim}{G}(e_1)$= ([.1,.2]/h_1, [.9,1]/h_2, [.3,.5]/h_3, [.8,.9]/h_4, [.2,.4]/h_5, [.4,.6]/h_6),

$\underset{\sim}{G}(e_2)$= ([.9,1]/h_1, [.2,.7]/h_2, [.6,.9]/h_3, [.2,.4]/h_4, [.3,.4]/h_5, [.1,.6]/h_6),

$\underset{\sim}{G}(e_3)$= ([0,0]/h_1, [0,0]/h_2, [1,1]/h_3, [1,1]/h_4, [1,1]/h_5, [0,0]/h_6).

Tanım 2.4.2.'yi takip ederek, $(\underset{\sim}{F},A)\subseteq(\underset{\sim}{G},B)$ 'yi elde edebiliriz.

Tanım 2.4.3. Eğer aynı U evrensel kümesi üzerinde $(\underset{\sim}{F},A)$, $(\underset{\sim}{G},B)$'nin belirsiz esnek alt kümesi ve $(\underset{\sim}{G},B)$ de $(\underset{\sim}{F},A)$'nın belirsiz esnek alt kümesi ise, $(\underset{\sim}{F},A)$ ve $(\underset{\sim}{G},B)$, U evrensel kümesi üzerinde ''iki eşit belirsiz esnek küme'' olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.4. E={$e_1,e_2,\ldots,e_n$} bir değişken kümesi olsun. E'nin olumsuzu kümesi,

$$\neg E=\{\neg e_1,\neg e_2,\ldots,\neg e_n\}$$

ile tanımlanır. ($\neg e_i$= e_i'nin olumsuzu.)

Tanım 2.4.5. $(\underset{\sim}{F},A)$ belirsiz esnek kümesinin tümleyeni $(\underset{\sim}{F},A)^c$ olsun.

$$(\underset{\sim}{F},A)^c=(\underset{\sim}{F}^c,\neg A)$$

ile tanımlanır.

$\underset{\sim}{F}^c$: $\neg A\rightarrow V(U)$ şöyle bir fonksiyondur.

$$\forall\alpha\in\neg A,\ x\in U \text{ için, } t_{\underset{\sim}{F}^c(\alpha)}(x)= f_{\underset{\sim}{F}^c(\neg\alpha)}(x),\ 1- f_{\underset{\sim}{F}^c(\alpha)}(x)=1- t_{\underset{\sim}{F}^c(\neg\alpha)}(x).$$

Örnek 2.4.3. Örnek 2.4.2. için, $(\underset{\sim}{F},E)$ belirsiz esnek kümesinin tümleyeni aşağıdaki gibidir.

$(\underset{\sim}{F},E)^c$={ pahalı olmayan evler = ([.8,.9]/h_1, [0,.1]/h_2, [.5,.7]/h_3, [.1,.2]/h_4, [.6,.8]/h_5, [.4,.6]/h_6),

güzel olmayan evler = ([0,.1]/h_1, [.3,.8]/h_2, [.1,.4]/h_3, [.6,.8]/h_4, [.6,.7]/h_5, [.4,.9]/h_6),

ahşap olmayan evler = ([1,1]/h_1, [1,1]/h_2, [0,0]/h_3, [0,0]/h_4, [0,0]/h_5, [1,1]/h_6),

ucuz olmayan evler = ([.1,.2]/h_1, [.9,1]/h_2, [.3,.5]/h_3, [.8,.9]/h_4, [.2,.4]/h_5, [.4,.6]/h_6),

bahçeli olmayan evler = ([0,.1]/h_1, [.7,.8]/h_2, [.6,.9]/h_3, [.8,.9]/h_4, [.6,.8]/h_5, [.1,.3]/h_6)}.

Tanım 2.4.6. Eğer U evrensel kümesinde bir $(\underset{\sim}{F},A)$ belirsiz esnek kümesi için,

$$\forall \varepsilon \in A \text{ ve } x \in U \text{ iken } t_{\underset{\sim}{F}(\varepsilon)}(x)=0,\ 1-\ t_{\underset{\sim}{F}(\varepsilon)}(x)=0$$

oluyorsa, U üzerinde $(\underset{\sim}{F},A)$ belirsiz esnek kümesi ‘‘boş belirsiz esnek küme’’ olarak adlandırılır ve $\underset{\sim}{\phi}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.7. Eğer U evrensel kümesinde bir $(\underset{\sim}{F},A)$ belirsiz esnek kümesi için,

$$\forall \varepsilon \in A \text{ ve } x \in U \text{ iken } t_{\underset{\sim}{F}(\varepsilon)}(x)=1,\ 1-\ t_{\underset{\sim}{F}(\varepsilon)}(x)=1$$

oluyorsa, U üzerinde $(\underset{\sim}{F},A)$ belirsiz esnek kümesi ‘‘mutlak belirsiz esnek küme’’ olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.8. Aynı U evrensel kümesi üzerindeki $(\underset{\sim}{F},A)$ ve $(\underset{\sim}{G},B)$ belirsiz esnek kümeleri için,

$$(\underset{\sim}{F},A) \text{ ve } (\underset{\sim}{G},B),\ (\underset{\sim}{F},A)\wedge(\underset{\sim}{G},B)$$

ile gösterilir ve $\forall \alpha,\beta \in AxB$ ve $x \in U$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\underset{\sim}{F},A)\wedge(\underset{\sim}{G},B)= (\underset{\sim}{H},AxB),$$

$$t_{\underset{\sim}{H}(\alpha,\beta)}(x)= \min\{\ t_{\underset{\sim}{F}(\alpha)}(x),\ t_{\underset{\sim}{G}(\beta)}(x)\},$$

$$1-f_{\underset{\sim}{H}(\alpha,\beta)}(x)= \min\{1-\ f_{\underset{\sim}{F}(\alpha)}(x),\ 1-f_{\underset{\sim}{G}(\beta)}(x)\}.$$

Tanım 2.4.9. Aynı U evrensel kümesi üzerindeki $(\underset{\sim}{F},A)$ ve $(\underset{\sim}{G},B)$ belirsiz esnek kümeleri için,

$$(\underset{\sim}{F},A) \text{ veya } (\underset{\sim}{G},B),\ (\underset{\sim}{F},A)\vee(\underset{\sim}{G},B)$$

ile gösterilir. $\forall \alpha,\beta \in AxB$ ve $x \in U$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\underset{\sim}{F},A)\vee(\underset{\sim}{G},B)= (\underset{\sim}{O},AxB),$$

$$t_{\underset{\sim}{O}(\alpha,\beta)}(x)= \max\{\ t_{\underset{\sim}{F}(\alpha)}(x),\ t_{\underset{\sim}{G}(\beta)}(x)\},$$

$$1-f_{\underset{\sim}{O}(\alpha,\beta)}(x)= \max\{1-\ f_{\underset{\sim}{F}(\alpha)}(x),\ 1-f_{\underset{\sim}{G}(\beta)}(x)\}.$$

Önerme 2.4.1. $(\underset{\sim}{F},A)$ ve $(\underset{\sim}{G},B)$, U evrenseli üzerinde iki belirsiz esnek küme olsun.

i. $[(\underset{\sim}{F},A)\vee(\underset{\sim}{G},B)]^{C}= (\underset{\sim}{F},A)^{C}\wedge(\underset{\sim}{G},B)^{C}$,

ii. $[(\underset{\sim}{F},A)\wedge(\underset{\sim}{G},B)]^{C}= (\underset{\sim}{F},A)^{C}\vee(\underset{\sim}{G},B)^{C}$.

İspat: i. $(\underset{\sim}{F},A)\vee(\underset{\sim}{G},B)= (\underset{\sim}{O},AxB)$, $[(\underset{\sim}{F},A)\vee(\underset{\sim}{G},B)]^{C}= (\underset{\sim}{O},AxB)^{c}=[\underset{\sim}{O}^{c}, \neg(AxB)]$.

$$(\underset{\sim}{F},A)^{C}\wedge(\underset{\sim}{G},B)^{C}= (\underset{\sim}{F}^{C},\neg A)\wedge(\underset{\sim}{G}^{C},\neg B)= (\underset{\sim}{J},\neg Ax\neg B)= [\underset{\sim}{J},\neg(AxB)],$$

$$\forall(\neg\alpha, \neg\beta)\in \neg Ax\neg B \text{ ve } x\in U,$$

$$t_{\underset{\sim}{J}(\neg\alpha,\neg\beta)}(x)= \min\{ t_{\underset{\sim}{F}^{c}(\neg\alpha)}(x), t_{\underset{\sim}{G}^{c}(\neg\beta)}(x)\},$$

$$1- f_{\underset{\sim}{J}(\neg\alpha,\neg\beta)}(x)= \min\{1- t_{\underset{\sim}{F}^{c}(\neg\alpha)}(x),1- t_{\underset{\sim}{G}^{c}(\neg\beta)}(x)\}.$$

$$(\neg\alpha, \neg\beta)\in \neg(AxB),$$

$$\begin{aligned}
t_{\underset{\sim}{O}(\neg\alpha,\neg\beta)}(x) &= f_{\underset{\sim}{O}(\alpha,\beta)}(x)\\
&= 1- \max\{1- f_{\underset{\sim}{F}(\alpha)}(x), 1-f_{\underset{\sim}{G}(\beta)}(x)\}\\
&=\min\{f_{\underset{\sim}{F}(\alpha)}(x),f_{\underset{\sim}{G}(\beta)}(x)\}\\
&=\min\{ t_{\underset{\sim}{F}^{c}(\neg\alpha)}(x), t_{\underset{\sim}{G}^{c}(\neg\beta)}(x)\}\\
&= t_{\underset{\sim}{J}(\neg\alpha,\neg\beta)}(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1- f_{\underset{\sim}{O}(\neg\alpha,\neg\beta)}(x) &= 1- t_{\underset{\sim}{O}(\alpha,\beta)}(x)\\
&= 1- \max\{1- f_{\underset{\sim}{F}(\alpha)}(x), 1-f_{\underset{\sim}{G}(\beta)}(x)\}\\
&= \min\{1- t_{\underset{\sim}{F}(\alpha)}(x),1- t_{\underset{\sim}{G}(\beta)}(x)\}\\
&= \min\{1- f_{\underset{\sim}{F}^{c}(\neg\alpha)}(x),1- f_{\underset{\sim}{G}^{c}(\neg\beta)}(x)\}\\
&= 1\text{-}1- f_{\underset{\sim}{J}(\neg\alpha,\neg\beta)}(x).
\end{aligned}$$

O halde, $\underset{\sim}{O}^{c}$ ve $\underset{\sim}{J}$ operatörleri aynıdır. Dolayısıyla, önermenin (i) bölümü ispatlanmış olur. Benzer şekilde, (ii) bölümünü de ispatlayabiliriz.

Önerme 2.4.2. $(\underset{\sim}{F},A)$,$(\underset{\sim}{G},B)$ ve $(\underset{\sim}{H},C)$, U evrensel kümesi üzerinde üç belirsiz esnek küme ise aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

i. $(\underset{\sim}{F},A)\vee[(\underset{\sim}{G},B)\vee(\underset{\sim}{H},C)]= [(\underset{\sim}{F},A)\vee(\underset{\sim}{G},B)]\vee(\underset{\sim}{H},C)$,

ii. $(\underset{\sim}{F},A)\wedge[(\underset{\sim}{G},B)\wedge(\underset{\sim}{H},C)]= [(\underset{\sim}{F},A)\wedge(\underset{\sim}{G},B)]\wedge(\underset{\sim}{H},C)$.

Tanım 2.4.10. Aynı U evrensel kümesi üzerindeki $(\underset{\sim}{F},A)$ ve $(\underset{\sim}{G},B)$ belirsiz esnek kümelerinin birleşimi olan $(\underset{\sim}{H},C)$ belirsiz esnek kümesi,

$C=A\cap B$ ve $\forall e\in C$ olmak üzere, $(\underset{\sim}{F},A)\underset{\sim}{\cup}(\underset{\sim}{G},B)= (\underset{\sim}{H},C)$ şöyle tanımlanabilir.

$$t_{\underset{\sim}{H}(e)}(x) = \begin{cases} t_{\underset{\sim}{F}(e)}(x), & \text{eğer } e\in A\text{-}B,\ x\in U, \\ t_{\underset{\sim}{G}(e)}(x), & \text{eğer } e\in B\text{-}A,\ x\in U, \\ \max[t_{\underset{\sim}{F}(e)}(x),\ t_{\underset{\sim}{G}(e)}(x)], & \text{eğer } e\in A\cap B,\ x\in U. \end{cases}$$

$$1\text{-}f_{\underset{\sim}{H}(e)}(x) = \begin{cases} 1\text{-}f_{\underset{\sim}{F}(e)}(x), & \text{eğer } e\in A\text{-}B,\ x\in U, \\ 1\text{-}f_{\underset{\sim}{G}(e)}(x), & \text{eğer } e\in B\text{-}A,\ x\in U, \\ \max[1\text{-}f_{\underset{\sim}{F}(e)}(x),1\text{-}\ f_{\underset{\sim}{G}(e)}(x)], & \text{eğer } e\in A\cap B,\ x\in U. \end{cases}$$

Tanım 2.4.11. Aynı U evrensel kümesi üzerindeki $(\underset{\sim}{F},A)$ ve $(\underset{\sim}{G},B)$ belirsiz esnek kümelerinin kesişimi olan $(\underset{\sim}{H},C)$ belirsiz esnek kümesi, $C=A\cup B$ ve $\forall e\in C$ olmak üzere, $(\underset{\sim}{F},A)\underset{\sim}{\cap}(\underset{\sim}{G},B)= (\underset{\sim}{H},C)$ şöyle tanımlanabilir.

$$t_{\underset{\sim}{H}(e)}(x) = \begin{cases} t_{\underset{\sim}{F}(e)}(x), & \text{eğer } e\in A\text{-}B,\ x\in U, \\ t_{\underset{\sim}{G}(e)}(x), & \text{eğer } e\in B\text{-}A,\ x\in U, \\ \min[t_{\underset{\sim}{F}(e)}(x),\ t_{\underset{\sim}{G}(e)}(x)], & \text{eğer } e\in A\cap B,\ x\in U. \end{cases}$$

$$1\text{-}f_{\underset{\sim}{H}(e)}(x) = \begin{cases} 1\text{-}f_{\underset{\sim}{F}(e)}(x), & \text{eğer } e\in A\text{-}B,\ x\in U, \\ 1\text{-}f_{\underset{\sim}{G}(e)}(x), & \text{eğer } e\in B\text{-}A,\ x\in U, \\ \min[1\text{-}f_{\underset{\sim}{F}(e)}(x),1\text{-}\ f_{\underset{\sim}{G}(e)}(x)], & \text{eğer } e\in A\cap B,\ x\in U. \end{cases}$$

Önerme 2.4.3. Ortak U evrensel kümesi üzerinde $(\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})$ bir belirsiz esnek küme, ϕ boş belirsiz esnek küme ve $\underline{A}$ mutlak belirsiz esnek küme olsun. O halde aşağıdaki eşitliklerden bahsedebiliriz.

i. $(\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})\cup(\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A}) = (\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})$

ii. $(\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})\cap(\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A}) = (\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})$

iii. $(\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})\cup \phi= (\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})$

iv. $(\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})\cap \phi= \phi$

v. $(\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})\cup \underline{A}= \underline{A}$

vi. $(\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})\cap \underline{A}= (\underset{\sim}{F},\underset{\sim}{A})$

Önerme 2.4.4. $(\underset{\sim}{F},A)$ ve $(\underset{\sim}{G},B)$, U evrensel kümesi üzerinde iki belirsiz esnek küme olsun.

i. $[(\underset{\sim}{F},A)\cup(\underset{\sim}{G},B)]^C= (\underset{\sim}{F},A)^C\cap(\underset{\sim}{G},B)^C$,

ii. $[(\underset{\sim}{F},A)\cap(\underset{\sim}{G},B)]^C= (\underset{\sim}{F},A)^C\cup(\underset{\sim}{G},B)^C$.

Önerme 2.4.5. $(\underset{\sim}{F},A),(\underset{\sim}{G},B)$ ve $(\underset{\sim}{H},C)$, U evrensel kümesi üzerinde üç belirsiz esnek küme olsun. O halde aşağıdaki eşitliklerden bahsedebiliriz.

i. $(\underset{\sim}{F},A)\cup[(\underset{\sim}{G},B)\cup(\underset{\sim}{H},C)] = [(\underset{\sim}{F},A)\cup(\underset{\sim}{G},B)]\cup(\underset{\sim}{H},C)$,

ii. $(\underset{\sim}{F},A)\cap[(\underset{\sim}{G},B)\cap(\underset{\sim}{H},C)] = [(\underset{\sim}{F},A)\cap(\underset{\sim}{G},B)]\cap(\underset{\sim}{H},C)$,

iii. $(\underset{\sim}{F},A)\cup[(\underset{\sim}{G},B)\cap(\underset{\sim}{H},C)] = [(\underset{\sim}{F},A)\cup(\underset{\sim}{G},B)]\cap[(\underset{\sim}{F},A)\cup(\underset{\sim}{H},C)]$,

iv. $(\underset{\sim}{F},A)\cap[(\underset{\sim}{G},B)\cup(\underset{\sim}{H},C)] = [(\underset{\sim}{F},A)\cap(\underset{\sim}{G},B)]\cup[(\underset{\sim}{F},A)\cap(\underset{\sim}{H},C)]$.

3. BANKACILIK SEKTÖRÜNDE MÜŞTERİ KREDİBİLİTESİNİN DEĞERLENDİRİLMESİNDE BELİRSİZ ESNEK KÜME UYGULAMASI

Bu bölümde, belirsiz esnek kümelerin bankacılık sektörü üzerine bir uygulaması verilecektir.

3.1. Uygulama İçin Ön Bilgiler

Bu kısmın ilk bölümünde, müşterilerin kredibilitesinin değerlendirilmesinde belirsiz esnek kümeleri kullanan yeni bir yöntem sunulacaktır. İkinci bölüm, bu yöntemin algoritmasını ifade eder. Son bölümde, önerilen yöntemi kullanan varsayımsal bir vaka çalışması tartışılır.

Müşteri kredibilitesinin belirlendirilmesinde, istenen kriterleri daha esnek ve daha adil değerlendirebilmek amacıyla, *R.Biswas*'ın ''*Fuzzy Sets and Systems*'', *P.K.Maji, R.Biswas ve A.R.Roy*'un ''*The Journal of Fuzzy Mathematics''* ve ''*Competers & Mathematics with Applications''* eserlerinde bahsedilen *Biswas yaklaşımı* ile belirsiz esnek küme teorisini uygulayalım.

Kabul edelim ki, bir müşteri kredibilitesini değerlendirmek için, *verimli* (e_1), *karlı* (e_2), *borçlanması az* (e_3), *riski düşük* (e_4) ve *ödemeleri düzenli* (e_5) olarak 5 farklı yeterlilik derecesi alınsın. Bunların oluşturduğu küme,

$$X= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

olsun.

$$S=\{ \%0, \%20, \%40, \%60, \%80, \%100 \}$$

kümesi müşteri kredibilitesinin değerlendirilmesinde belirli bir kriterin yeterlilik derecelerini ifade etsin. Kabul edelim ki, 100 puanlı belirli bir müşteri için bir kriter kümesi Q olsun. Burada X' i evrensel küme ve S' yi de parametreler kümesi olarak düşünebiliriz.
Burada ayrıca isteğimize uygun kategorizasyon işlemi ekleyebiliriz.

F bir belirsiz esnek küme F: S→V(X) ve V(X), X' de belirsiz kümelerin kuvvet kümesi olmak üzere, bu bağıntı ''*esnek değerlendirme bilgisi*'' olarak adlandırılan R matrisini versin.

Benzer şekilde F_1 bir belirsiz esnek küme F_1: $X \rightarrow V(Q)$ ve $V(Q)$, Q'de belirsiz kümelerin kuvvet kümesi olmak üzere, bu bağıntı ''*esnek kredibilite bilgisi*'' olarak adlandırılan R_1 matrisini versin.

Ardından yeni bir bağıntı elde ediyoruz.

Bu bağıntı ''*yeterlilik kriter matrisi*'' olan $T= R_1 o R$ matrisidir.

Burada $\vee$=max ve $\wedge$=min olmak üzere,

$$t_T(Q_i,S_k) = \vee \{t_{R1} (Q_i,e_j) \wedge t_R (e_j,S_k) \}$$

$$(1-f_T)(Q_i, S_k) = \vee \{(1-f_{R1}) (Q_i,e_j) \wedge (1-f_R) (e_j,S_k) \}$$

eşitliklerinden faydalanılır.

Kabul edelim ki, müşteri kredibilitesinin değerlendirilmesinde en yüksek değer olan *optimizm indeksi* $\lambda \in [0,1]$ şeklinde olsun.

O halde S_T şu şekilde hesaplanabilir.

$$S_T = [(1- \lambda) \text{ x } t_{ij} + \lambda \text{x } (1-f_{ij})].$$

T matrisinde, müşterileri değerlendirirken her Q_i kriteri uygun olduğunda Q_i kriterinin yeterlilik derecesinin %100x_i olduğunu belirten

$$Q_i \; x_i = (1- \lambda) \text{ x } t_{ij} + \lambda \text{x } (1-f_{ij})$$

değerini en yüksek değer olarak alırız. O halde, Q_i sorusunun en yüksek puanı,

$$H(Q_i)=\% \; 100 \; x_i$$

şeklindedir.

Eğer $M(Q_i)$, Q_i kriterine dağıtılan bir derece ise müşterinin toplam kredi puanı,

$$S_T =1/100 \; \Sigma\{ H(Q_i) \text{ x } M(Q_i) \}$$

formülü ile hesaplanır.

3.2. Algoritma

- İsteğe uygun kategorizasyon işlemi oluştur.
- Yeterlilik derecelerinin X kümesi üzerinde belirsiz esnek kümesi olan (F,S) girişini yap ve (F,S)'nin temsil ettiği bağıntı olan esnek değerlendirme bilgisi matrisi R'yi yaz.
- Benzer şekilde, X belirli bir müşterilerin kriterlerinin yeterlilik derecesi kümesi olduğunda, yeterlilik derecelerinin X kümesi üzerinde belirsiz esnek küme (Q,X) girişini yap ve belirsiz esnek küme (Q,X)'nin temsil ettiği bağıntı olan esnek kredibilite bilgisi matrisi R_1'i yaz.
- Yeterlilik kriter matrisi olan $T= R_1 o R$ matrisini hesapla.
- T matrisinden S_T'yi hesapla.
- Her kriter için müşterinin toplam kredi puanını hesapla.

3.3. Vaka Çalışması

Toplamda 4 kriterin puanlandığı, 100 puanlık bir müşteri değerlendirilmesi düşünelim. Burada, müşterinin kredibitesinin değerlendirilmesinde 0 ile 1 arasındaki toplam puanını aşağıdaki gibi kategorize edelim.

$0 \leq S_T < 0.50$ ise müşteri kredi talebi ret edilecek,
$0.50 \leq S_T < 0.70$ ise gayrimenkul ipoteği veya maddi teminat karşılığı kredi açılabilecek,
$0.70 \leq S_T < 0.85$ ise gerçek kişi kefaleti karşılığı kredi açılabilecek,
$0.85 \leq S_T \leq 1$ ise müşteriye imza karşılığı kredi açılabilecek.

Kabul edelim ki, bir müşteri kredibilitesini değerlendirmek için, *verimli*(e_1), *karlı*(e_2), *borçlanması az*(e_3), *riski düşük*(e_4) ve *ödemeleri düzenli*(e_5) olarak 5 farklı yeterlilik derecesi alınsın. Bunların oluşturduğu küme X olsun. Yani $X= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olur.

Değerlendicinin parametreler kümesi olan S={ %0, %20, %40, %60, %80, %100 } kümesi müşteri kredibilite değerlendirilmesinde belirli bir kriterin yeterlilik derecelerini aşağıdaki gibi ifade ettiğini varsayalım.

$F(\%0) \ \ \ = \{ [0,.1] /e_1, [0,.1]/e_2, [0,.1]/e_3, [.4,.5]/e_4, [1,1]/e_5 \}$

$F(\%20) \ = \{ [0,0] /e_1, [0,0]/e_2, [.1,.2]/e_3, [.4,.5]/e_4, [1,1]/e_5 \}$

$F(\%40) \ = \{ [.6,.6] /e_1, [.5,.6]/e_2, [.5,.6]/e_3, [.4,.5]/e_4, [.4,.5]/e_5 \}$

$F(\%60) \ = \{ [.8,.9] /e_1, [.8,.8]/e_2, [.7,.9]/e_3, [.6,.7]/e_4, [.2,.3]/e_5 \}$

$F(\%80) \ = \{ [1,1] /e_1, [.9,.9]/e_2, [.4,.5]/e_3, [.2,.3]/e_4, [0,0]/e_5 \}$

$F(\%100) = \{ [1,1] /e_1, [.8,.9]/e_2, [.2,.3]/e_3, [0,1]/e_4, [0,0]/e_5 \}$

$F: S \rightarrow V(X)$**.**

İnşa edilen (F,S) belirsiz esnek kümesi, $X=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ kümesinin { F(%0), F(%20), F(%40), F(%60), F(%80), F(%100) } parametrik bir ailesidir.

Böylece (F,S) belirsiz esnek kümesi, 4 kriter ve onların yeterlilik derecesinin esnek değerlendirme bilgisinin yaklaşık tanımını verir ve bu R matrisi tarafından temsil edilir.

$$R = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{cccccc} 0\% & 20\% & 40\% & 60\% & 80\% & 100\% \\ \hline [0,.1] & [0,0] & [.6,.6] & [.8,.9] & [1,1] & [1,1] \\ [0,.1] & [0,0] & [.5,.6] & [.8,.8] & [.9,.9] & [.8,.9] \\ [0,.1] & [.1,.2] & [.5,.6] & [.7,.9] & [.4,.5] & [.2,.3] \\ [.4,.5] & [.4,.5] & [.4,.5] & [.6,.7] & [.2,.3] & [0,1] \\ [1,1] & [1,1] & [.4,.5] & [.2,.3] & [0,0] & [0,0] \end{array}$$

Müşteri kredibilitesinde Q_1 ,Q_2 ,Q_3 ve Q_4 olarak 4 kriter olduğunu düşünelim. Burada

$$Q = \{ Q_1,Q_2,Q_3,Q_4\}$$

evrensel küme ve

$$S=\{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

parametreler kümesidir.

Bankalarda müşteri değerlendiricinin müşteriler için yeterlilik seviyesi sırasıyla aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$F_1(e_1) = \{ [.5,.7]/Q_1, [1,1]/Q_2, [.5,.7]/Q_3, [.8,.9]/Q_4\}$

$F_1(e_2) = \{ [.8,.8]/Q_1, [.8,.9]/Q_2, [.6,.7]/Q_3, [.5,.7]/Q_4\}$

$F_1(e_3) = \{ [.6,.7]/Q_1, [.4,.5]/Q_2, [.4,.5]/Q_3, [.1,.3]/Q_4\}$

$F_1(e_4) = \{ [0,0]/Q_1, [0,0]/Q_2, [.2,.3]/Q_3, [0,0]/Q_4\}$

$F_1(e_5) = \{ [0,0]/Q_1, [0,0]/Q_2, [0,0]/Q_3, [.5,.6]/Q_4\}$

(F_1,X), S kümesi üzerindeki $\{ F_1(e_1), F_1(e_2), F_1(e_3), F_1(e_4), F_1(e_5)\}$ olacak şekildeki bütün belirsiz kümelerin parametrik ailesidir ve belirli bir müşterinin değerlendirilen yeterliliğinden oluşturulmuştur.

Burada (F_1,X), 4 soru ve onların yeterlilik derecesinin belirsiz esnek inceme bilgisinin yaklaşık tanımını verir. $F_1:X\rightarrow V(Q)$**.** Bu (F_1,X) belirsiz esnek kümesi, inceleme bilgisi matrisi olarak adlandırılan R_1 bağıntı matrisi olarak gösterilir.

$$R_1 = \begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline [.5,.7] & [.8,.8] & [.6,.7] & [0,0] & [0,0] \\ [1,1] & [.8,.9] & [.4,.5] & [0,0] & [0,0] \\ [.5,.7] & [.6,.7] & [.4,.5] & [.2,.3] & [0,0] \\ [.8,.9] & [.5,.7] & [.1,.3] & [0,0] & [.5,.6] \end{array}$$

Şimdi $T=RoR_1$ bağıntı matrisini hesaplayalım.

$\vee$=max ve $\wedge$=min. olmak üzere,

$$t_T(Q_i,S_k) = \vee \{t_{R1} (Q_i,e_j) \wedge t_R (e_j,S_k) \}$$

$$(1-f_T)(Q_i, S_k) = \vee \{(1-f_{R1}) (Q_i,e_j) \wedge(1-f_R) (e_j,S_k) \}$$

$$T = RoR_1 = \begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} \begin{array}{cccccc} 0\% & 20\% & 40\% & 60\% & 80\% & 100\% \\ \hline [0,.1] & [.1,.2] & [.5,.6] & [.8,.8] & [.8,.8] & [.8,.8] \\ [0,.1] & [.1,.2] & [.6,.6] & [.8,.9] & [1,1] & [1,1] \\ [.2,.3] & [.2,.3] & [.5,.6] & [.6,.7] & [.6,.7] & [.6,.7] \\ [.5,.6] & [.5,.6] & [.6,.6] & [.8,.9] & [.8,.9] & [.8,.9] \end{array}$$

Kabul edelim ki, müşteri kredibilitesinin değerlendirilmesinde en yüksek değer olan optimizm indeksi λ=0,60 ϵ [0,1] şeklinde olsun.
O halde S_T şu şekilde hesaplanabilir.

$$S_T = \begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} \begin{array}{cccccc} 0\% & 20\% & 40\% & 60\% & 80\% & 100\% \\ \hline .06 & .16 & .68 & .8 & .8 & .8 \\ .06 & .16 & .6 & .86 & 1 & 1 \\ .26 & .26 & .66 & .66 & .66 & .66 \\ .56 & .56 & .86 & .86 & .86 & .86 \end{array}$$

Bu yüzden Q_1 için en yüksek puan .8'dir. Bu bize Q_1 kriterinin müşteri için yeterlilik derecesi %80 olduğunu gösterir. Benzer şekilde Q_2 kriterinin müşteri için yeterlilik derecesi %100, Q_3 kriterinin müşteri için yeterlilik derecesi %66 ve Q_4 kriterinin müşteri için yeterlilik derecesi de %86 'dır. Bu nedenle,

$$H(Q_1) = 80,$$
$$H(Q_2) = 100,$$
$$H(Q_3) = 66,$$
$$H(Q_4) = 86$$

olur. Tekrar varsayalım ki Q_1 20 değer, Q_2 30 değer, Q_3 25 değer ve Q_4 25 değer alsın.

Böylece müşterinin toplam puanı S_T aşağıdaki gibi hesaplanmış olur.

$$\begin{aligned} S_T &= 1/100\ \Sigma\ \{ H(Q_i) \text{ x } M(Q_i) \} \\ &= 1/100\ \{ (80\text{x}20)+(100\text{x}30)+(66\text{x}25)+(86\text{x}25) \} \\ &= 1/100\ \{ 1600+3000+1650+2150 \} \\ &= 0.84. \end{aligned}$$

Burada $0.70 \leq S_T < 0.85$ çıktığından müşteriye gerçek kişi kefaleti karşılığı kredi açılabilecektir.

Sonuç olarak, müşteri kredibilitesinin değerlendirilmesinde, belirsiz esnek küme kavramını kullandık ve bu tekniğin kolaylığını göstermek amacıyla bir vaka çalışması yaptık.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, , ilk olarak bulanık kümeler, esnek kümeler ve belirsiz kümeler hakkında literatürde var olan tanım ve teoremler incelenmiştir.

Belirsiz esnek kümenin, esnek kümelerin bir genişletmesi olarak gösterilmesinden sonra belirsiz esnek kümeler hakkındaki tanım ve teoremler incelenmiştir.

Bu yeni genişletme sadece eldeki kararsızlıklar için var olan teorilere önemli bir ekleme değil, aynı zamanda farklı alanlardaki araştırmalar ve ilgili uygulamalar için yol gösterici niteliktedir.

Belirsiz esnek kümelerin temel özellikleri sunulup tartışıldıktan sonra son olarak da belirsiz esnek kümeler üzerine bazı uygulamalar yapılmıştır.

Çalışmamızı genişletmek için esnek küme, sert küme ve belirsiz esnek küme arasındaki ilişki konularına dair yeni araştırmalar yapılabilir ve elde edilecek teoriler kararsızlıklarla uğraşmada birleştirilebilir.

Ayrıca belirsiz esnek küme kullanılarak yapılan yeni araştırma uygulamalarıyla gerçek dünya problemlerinin çözümüne yaklaşılabilir.

5. KAYNAKLAR

A.I.Ali, F.Feng, S.Liu, W.K.Win ve M.Shabir, On some new operations in soft set theory,Competers & Mathematics with Applications 57 (9) (2009) 1547-1553.

A.Kumar, S.P.Yadav ve S.Kumar, Fuzzy reliability of a marine power plant using intervalvalued vague sets, International Journal of Applied Science and Engineering 4 (1)(2006) 71-88.

A.Kumar, S.P.Yadav ve S.Kumar, Fuzzy system reliability analysis using T(i) based arithmeticoperations on L-R type interval valued vague sets, International Journal ofQuality& Reliability Management 24 (8) (2007) 846-860.

A.R.Roy ve P.K.Maji, A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems, Journalof Computational and Applied Mathematics 203 (2007) 412-418.

B. Chetia ve P.K.Das, Application of Vague Soft Sets in students' evaluation, 2011, 2(6): 418-423.

B.K.Saikia, Int. Journal of Mathematical Archive 2 (10) (2011) 1916-1919.

C.Y.Yan, A note on soft set theory, Competers & Mathematics with Applications 56 (7)(2008) 1899-1900.

Çağman, N., Bulanık mantık, Bilim ve Teknik, Sayı:463, Sayfa:50-51, (Haziran 2006).

Çagman, N. ve Aktas, H. Soft sets and soft groups, Information Science 177 (13) (2007) 2726-2735.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S. Soft set theory and uni-int decision making. European Journal of Operational Research, 207 (2010) 848-855.

D.Chen, E.C.C.Tsang, D.S.Yeung ve X.Wang, The parameterization reduction of soft sets andits applications, Competers & Mathematics with Applications 49 (2005) 757-763.

D.H.Hong ve C.H.Choi, Multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague settheory, Fuzzy Set and Systems 114 (2000) 103-113.

D.Molodtsov, Soft set theory- First results, Competers & Mathematics with Applications 37(4-5) (1999) 19-31.

D.Molodtsov, The Theory of Soft Sets, URSS Publishers, Moscow,2004,(in Russian).

Dubois, D. ve Prade, H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press,New York. 1980.

Elmas, Ç., Bulanık Mantık Denetleyiciler, Seçkin, Ankara, 2003.

H.Bustince ve P.Burillo, Vague sets are intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 79(1996) 403-405.

İbrahim, A, Gömülü Sistemlerle Bulanık Mantık (Çeviri: N. Çervatoğlu), BileşimYayınevi, İstanbul, 2004.

J.Wang,S.Y.Liu, J.Zhang ve S.Y.Wang, On the parameterized OWA operators for fuzzyMCDM based on vague set theory, Fuzzy Optimization and Decision Making 5 (2006) 5-20.

K.Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986) 87-96.

K.Atanassov, Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems64 (1994) 159-174.

Klir, J. G ve Folger, T. A., Fuzzy Sets, And Information, New Jersey, 1988.

L.A.Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338-353.

L.Zhou ve W.Z.Wu, On generalized intuitionistic fuzzy rough approximation operators,Information Science 178 (11) (2008) 2448-2465.

M.B.Gorzalzany, A method of inference in approximate reasoning based on İntervalvalued fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 21 (1987) 1-17.

P.K.Maji, R.Biswas ve A.R.Roy, The Journal of Fuzzy Mathematics 9 (3) (2001) 677-692.

P.K.Maji, R.Biswas ve A.R.Roy, Competers & Mathematics with Applications 44 (2002)

1077-1083.
P.K.Maji, R.Biswas ve A.R.Roy, Soft set theory, Competers & Mathematics with Applications45 (2003) 555-562.
R.Biswas, Fuzzy Sets and Systems 104 (1999) 209-218.
S.M.Bai ve S.M.Chen, Expert Systems with Applications 38 (2008) 399-410, 1408-1414.
S.M.Chen, Similarity measures between vague sets and between elements, IEEE Transactionson Systems, Man and Cybernetics 27 (1) (1997) 153-158.
S.M.Chen ve C.H.Lee, Fuzzy Sets and Systems 104 (1999) 209-218.
S.M.Chen, Analyzing fuzzy system reliability using vague set theory, International Journal of Applied Science and Engineering 1 (1) (2003) 82-88.
S.M.Chen ve H.Y.Wang, Expert Systems with Applications 36 (2009) 9839-9846.
Şen, Z., Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri, Bilge Kültür Sanat, İstanbul, 2001.
Şen, Z., Modern Mantık, Bilge Kültür Sanat, İstanbul, 2003.
W.H.Y. ve S.M.Chen, Educational Technology&Society 10 (4) 224-241.
W.L.Gau ve D.J.Buehrer, Vague sets, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics (1993) 23, 610-614.
W. Xu, J. Ma, S. Wang ve G. Hao, Vague soft sets and their properties, Computers & Mathematics with Applications, 59 (2010) 787-794.
Z.Kong,L.Gao, L.Wang ve S.Li, The normal parameter of soft sets and its algorithm, Competers& Mathematics with Applications 56 (12) (2008) 3029-3037.
Z.Pawlak, Rough sets, Internatinal journal of Information and Computer Sciences 11 (1982)341-356.
Zimmermann, H.J., Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer, 1991.

6. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Murat KIRCA

Doğum Yeri : Turhal

Doğum Tarihi : 08.12.1980

Medeni Durumu : Evli

Yabancı dil : İngilizce

Askerlik durumu : 01.08.2007-31.01.2008 tarihleri arasında askerlik görevini tamamlamıştır

Telefon : 0 533 341 08 41

E-posta : mkirca@ziraatbank.com.tr

.

EĞİTİM:

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Tezli Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü, Matematik Anabilim Dalı, Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Bilim Dalı	2019
Tezsiz Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Öğretmenliği	2006
Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	2003
Lise	Artova Lisesi	1998