k-YARIHALKALAR ÜZERİNDE TANIMLANAN ESNEK k-İDEALLER VE BAZI CEBİRSEL UYGULAMALARI

ÜLKÜ DEVELİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK
Mayıs-2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k-YARIHALKALAR ÜZERİNDE TANIMLANAN ESNEK k-İDEALLER VE BAZI CEBİRSEL UYGULAMALARI

ÜLKÜ DEVELİ

TOKAT
Mayıs-2019

ÜLKÜ DEVELİ tarafından hazırlanan **"k-Yarıhalkalar Üzerinde Tanımlanan Esnek k-İdealler ve Bazı Cebirsel Uygulamaları"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 03 Mayıs 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından Oy Birliği / ~~Oy Çokluğu~~ ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI' nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK	....
Üye Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Güzide ŞENEL Amasya Üniversitesi	....

ONAY

....

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

17/05/2019

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

ÜLKÜ DEVELİ
03 Mayıs 2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k-YARIHALKALAR ÜZERİNDE
TANIMLANAN ESNEK k-İDEALLERVE BAZI CEBİRSEL UYGULAMALARI

ÜLKÜ DEVELİ

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK)

Bu tez çalışmasında ilk olarak esnek kümeler, esnek kesişimsel gruplar ve esnek kesişimsel halkalarla ilgili kısaca bilgi verildi. Sonra, yarıhalkalar üzerinde esnek kesişimsel k-idealler tanımlanarak bazı cebirsel özellikleri incelendi. Daha sonra, k-yarıhalkarın bölüm yapıları tanımlandı. Bölüm yapıları yardımıyla izomorfizma teoremleri incelendi. Son olarak, esnek kesişimsel maksimal k-idealleri tanımlayarak bazı cebirsel özellikleri araştırıldı.

2019, 41 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Esnek küme, esnek k-ideal, esnek k-yarıhalka, esnek maksimal k-ideal, bölüm k-yarıhalka.

ABSTRACT

MASTER THESIS

SOFT k-IDEALS DEFINED ON k-SEMIRING AND SOME ALGEBRAIC APPLICATIONS

ÜLKÜ DEVELİ

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: Asst. Prof. Dr. Filiz ÇITAK)

In this thesis study is researched firstly soft sets, soft intersectional groups and soft intersectional rings. Then, some algebraic properties are examined by describing soft intersectional k-ideals on semirings. Morever, the structures of quotient are defined by k-semirings. Isomorphism theorems are examined by quotient structures. Finally, some algebraic properties are investigated by defining soft intersectional maximal k-ideals.

2019, 41 pages

KEYWORDS: Soft sets, soft k-ideals, soft k-semirings, soft maximal k-ideals, quotient k-semirings.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgiyle yaparak tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan başta babama ve anneme, kardeşlerime herkese sonsuz teşekkür ederim.

ÜLKÜ DEVELİ
Mayıs 2019

1. GİRİŞ

Mühendislik bilimlerinin çoğu alanlarında, belirsizliğe yol açan problemlerin çözümü klasik metodlarla mümkün olmadığından bu tür problemlerin çözümü için klasik metodların dışında farklı metodlar geliştirilmiştir. Bu tür metotlarla ilgilenen teorilerden bazıları olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, kaba kümeler teorisi ve esnek kümeler teorisidir (Zadeh,1965; Pawlak, 1982; Molodtsov, 1999).

İlk olarak Zadeh (1965) bulanık kümeler teorisi ile belirsizliklere farklı bir yaklaşım getirdi. Zadeh, değer kümesini $[0, 1]$ kapalı aralığı alarak bir fonksiyon tanımlayıp bu fonksiyon yardımıyla bir bulanık küme oluşturarak belirsizliğe bir yaklaşımda bulundu. Belirsizliklerle ilgilenen Rosenfeld (1971) bulanık kümelerin cebirsel yapısını oluşturmak amacıyla bulanık grup teorisini geliştirdi.

1982 yılında Pawlak, kaba kümeler teorisini geliştirdi (Pawlak, 1982). Pawlak, alt ve üst yaklaşım yardımıyla bir kaba küme tanımlayarak belirsizliğe farklı bir yaklaşımda bulunmuştur. Biswas ve arkadaşları (1994) ise kaba kümelerin cebirsel özellikleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu teorinin birçok alanda başarılı uygulamaları yapılmıştır.

Esnek küme teorisi ise ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından ortaya atıldı. Maji ve arkadaşları (2003) esnek kümeler üzerinde bazı çalışmalar yaptılar ve esnek küme üzerinde bazı işlemleri tanımladılar. Daha sonra Çağman ve Enginoğlu (2010) esnek küme işlemlerini yeniden tanımladılar. Bununla birlikte bir çok araştırmacı karar verme problemlerinin çözümünde esnek kümeleri kullandı (Maji ve ark., 2002; Çağman ve Enginoğlu, 2010; Ma ve ark., 2017). Bulanık esnek karar verme ile ilgili çalışmalar yapıldı (Çağman ve ark., 2010; Çağman ve ark., 2011a; Çağman ve ark., 2011b). Sonra esnek kümeler kullanılarak esnek bağıntı, esnek fonksiyon, esnek dönüşüm gibi bir çok çalışma literatüre kazandırıldı (Chen ve ark., 2005; Babitha ve Sunil, 2010; Majumdar ve Samanta, 2010; Sezgin ve Atagün, 2011). Aktaş ve Çağman (2007) esnek grubu tanımlayarak bazı cebirsel özelliklerini incelediler. Bu çalışma ile esnek küme teorisi cebir alanında da bir çok çalışmanın önünü açmıştır (Feng ve ark., 2008; Jun, 2008; Jun ve Park, 2008; Ali ve ark., 2009; Jun ve ark., 2009; Kazancı ve ark., 2010; Zhan ve Jun, 2010; Atagün ve Sezgin, 2011; Sezgin ve ark., 2011; Çıtak ve Çağman, 2017; Çıtak, 2018; Sezgin ve ark., 2019). Acar ve arkadaşları (2010) yılında esnek halkarı literatüre kazandırdı. Jun (2008) BCK/BCI cebirleri üzerinde esnek idealleri tanımladı. Feng ve arkadaşları (2008) esnek yarıhalkarı ve esnek yarıhalkalar üzerinde esnek idealleri tanımladı. 2012 yılında Çağman ve arkadaşları esnek kesişimsel grupları tanımladı (Çağman ve ark., 2012). Çıtak ve Çağman (2015) esnek kesişimsel halkları tanımlayarak cebirsel özelliklerini inceledi.

Esnek kümelerle ilgili çalışmalar hızlı bir şekilde devam ederken esnek kümelerle bulanık kümeler ve kaba kümelerin ilişkileri de incelendi ve bu teoriler birleştirilerek yeni çalışmalar yapılmaya başlandı (Xiao ve Zhang, 2006; Aygünoğlu ve Aygün, 2009; Feng ve ark., 2010; Feng, 2011; Feng ve ark., 2011; Meng ve ark., 2011; Shabir ve ark., 2013; Sun ve Ma, 2014; Zhang ve ark., 2016a; Zhan ve ark., 2016b; Zhan ve ark., 2017a; Zhan ve ark., 2017b). Esnek kümelerle ilgili çalışmalar son yıllarda artarak devam etmektedir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezin konusunun tarihine değinildi. Tezin ikinci bölümünde esnek kümelerle ilgili yapılmış, tezin ilerleyen kısımlarında kullanacağımız esnek kümeler ve esnek kümeler üzerindeki işlemler tanıtıldı. Esnek kesişimsel gruplar ve esnek kesişimsel halkalara yer verildi. Esnek kesişimsel idealler incelendi. Tezin üçüncü bölümünde yarıhalkalar üzerinde esnek kesişimsel k-ideallerin tanımı ilk kez yapılarak örneklerle açıklandı ve bazı teoremler ayrıntılı olarak incelendi. Esnek kesişimsel idealler üzerinde k-yarıhalkalarının bölüm yapıları oluşturuldu. Bölüm yapıları yardımıyla izomorfizma teoremleri incelendi. Son olarak esnek kesişimsel maksimal idealleri tanımlandı ve bazı özellikleri araştırıldı.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde cebirdeki bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilecektir. Esnek küme tanımı ve esnek kümeler üzerindeki işlemleri incelenecektir. Esnek kesişimsel gruplar, esnek kesişimsel halkalar ve esnek kesişimsel idealler incelenecektir.

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde yarıhalka, k-yarıhalka, ideal, k-ideal, homomorfizma ve yarıhalka homomorfizması tanımları verilecektir. Ayrıca genişletilmiş yarıhalka homomorfizması incelenecektir.

Tanım 2.1.1. S boştan farklı bir küme ve S üzerinde " $+$ " ve " $\cdot$ " ikili işlemleri tanımlansın.

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. $a + b = b + a$
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
5. $a + 0 = 0 + a = a$ ve $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olacak şekilde $0 \in S$ vardır.

şartlarını sağlayan $(S, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir yarıhalka denir (Chun ve Kim, 1983).

Tanım 2.1.2. R bir yarıhalka olsun. $\forall a, b \in R$ için $b = a + c$ veya $a = b + c$ olacak şekilde bir tek $c \in R$ varsa R yarıhalkasına k-yarıhalka denir (Chun ve Kim, 1983).

Tanım 2.1.3. R bir yarıhalka ve I, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. I, R de ki işlemlere göre bir yarıhalka oluyorsa I ya R nin bir alt yarıhalkası denir (Chun ve Kim, 1983).

Tanım 2.1.4. R bir yarıhalka ve I, R nin bir yarıalthalkası olsun. $\forall a \in I$ ve $r \in R$ için $a \cdot r \in I$ ve $r \cdot a \in I$ oluyorsa I ya R nin bir ideali denir (Chun ve Kim,1983).

Tanım 2.1.5. R bir yarıhalka ve I, R nin bir ideali olsun. $\forall a \in I$ ve $r \in R$ için $a + r \in I$ iken $r \in I$ oluyorsa I ya R nin k-ideali denir (Chun ve Kim, 1983).

Örnek 2.1.6. Negatif olmayan tamsayılar kümesi toplama ve çarpma işlemleri altında bir yarıhalkadır. $A = \{x \in Z : x > 1\}$ şeklinde tanımlanan A kümesi negatif olmayan tamsayılar yarıhalkasının bir k-idealidir.

Tanım 2.1.7. S ve M iki yarıhalka olsun. $\varphi : S \to M$ fonksiyonu $\forall a, b \in S$ için

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

şartlarını sağlayan φ fonksiyonuna yarıhalka homomorfizması denir. Örten yarıhalka homomorfizmasına yarıhalka epimorfizması denir(Chun ve ark., 1985).

Tanım 2.1.8. S ve M iki k-yarıhalka olsun. $\varphi : S \to M$ fonksiyonu $\forall a, b \in S$ için;

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

şartlarını sağlayan φ ye k-yarıhalka homomorfizması denir. Örten k-yarıhalka homomorfizmasına k-yarıhalka epimorfizması denir (Chun ve ark., 1985).

S bir k-yarıhalka olsun. $S \cap S' = \emptyset$ olacak şekilde $S - \{0\}$ ile kendisiyle aynı kardinaliteye sahip küme S' olsun. Bire bir eşleme altında $a \in S - \{0\}$ elemanın görüntüsü a' ile gösterilsin. $\bigoplus$ ve $\bigodot$ aşağıdaki gibi $\overline{S} = S \cup S'$ kümesi üzerinde sırasıyla toplama ve çarpmayı göstersin. c, S de ya $a = y + c$ ya da $a + c = y$ olan bir tek eleman olmak üzere

$$a \oplus b = \begin{cases} a + b, & a, b \in S; \\ (x + y)', & a = x', b = y' \in S'; \\ c, & a \in S, b = y' \in S', a = y + c; \\ c', & a \in S, b = y' \in S', a + c = y. \end{cases}$$

ve

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b, & a, b \in S; \\ (x \cdot y), & a = x', b = y' \in S'; \\ (a \cdot y)', & a \in S, b = y' \in S'; \\ (x \cdot b)', & a = x' \in S', b =\in S. \end{cases}$$

dir (Chun ve ark., 1985).

Teorem 2.1.9. S bir k-yarıhalka ise $(\overline{S}, \bigoplus, \bigodot)$ bir halkadır. Bu halkaya S nin genişletilmiş halkası denir (Chun ve ark., 1985).

Teorem 2.1.10. $\varphi : S \to M$ bir k-yarıhalka homomorfizması olsun. $\overline{S}$ ve $\overline{M}$, sırasıyla S ve M nin genişletilmiş halkaları olsun.
$\overline{\varphi} : \overline{S} \to \overline{M}$ fonksiyonu olsun. $\overline{\varphi}(a) = \begin{cases} \varphi(a), & a \in S \\ \varphi(a)', & a \in S - \{0\} \end{cases}$ ile tanımlansın. $\overline{\varphi}$ bir halka homomorfizmasıdır ve $\overline{\varphi}$ ye genişletilmiş halka homomorfizması denir (Chun ve ark., 1985).

Teorem 2.1.11. $\varphi : S \to M$ bir k-yarıhalka homomorfizması ve $\overline{\varphi} : \overline{S} \to \overline{M}$ bir genişletilmiş halka homomorfizması olsun. Buradan $Ker(\overline{\varphi}) = \overline{Ker(\varphi)}$ dir (Chun ve ark., 1985).

2.2. Esnek Kümeler ve Esnek Kümeler Üzerindeki İşlemler

Bu bölümde ilk olarak esnek küme tanımı verilecektir. Daha sonra esnek kümeler üzerindeki işlemler verilecektir. Bu bölümün tamamında U evrensel küme, E parametre kümesi ve $P(U)$, U kümesinin kuvvet kümesini göstermektedir. Ayrıca $A, B, C \subseteq E$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.2.1. $F : E \to P(U)$ bir fonksiyon olsun.

$$(F, E) = \{(a, F(a)) : a \in E, F(a) \in P(U)\}$$

şeklinde tanımlanan (F, E) kümesine U üzerinde esnek küme denir (Molodtsov, 1999).

Not 2.2.2. Bu tanım çalışmamızda sağlayacağı kolaylıktan dolayı aşağıdaki şekilde kullanılacaktır.

Tanım 2.2.3. $A \subseteq E$ olmak üzere $F : A \to P(U)$ bir fonksiyon olsun. $a \notin A$ için $F(a) = \emptyset$ olacak şekilde (F, A) kümesine esnek küme denir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Örnek 2.2.4. U evrensel kümesi, çiçeklerin kümesi olsun. E parametre kümesi, E={güzel kokan, renkleri güzel olan, pahalı, ucuz} olarak tanımlansın. Burada

esnek küme, güzel kokan çiçek, renklileri güzel olan çiçek ve buna benzer şekilde tanımlanabilir. Daha ayrıntılı olarak $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olmak üzere
$e_1 \longrightarrow$ güzel kokan, $e_2 \longrightarrow$ renkleri güzel olan, $e_3 \longrightarrow$ pahalı, $e_4 \longrightarrow$ ucuz parametrelerini temsil etmektedir.
$F(e_1) = \{u_2, u_4\}$, $F(e_2) = \{u_1, u_3\}$, $F(e_3) = \{u_1, u_3\}$, $F(e_4) = \{u_1\}$ şeklinde tanımlansın. (F, A) esnek kümesi

$$(F, A) = \{(e_1, \{u_2, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_3\}), (e_3, \{u_1, u_3\}), (e_4, \{u_1\})\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.5. (F, A), U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ ise (F, A) esnek kümesine boş esnek küme denir ve (F, Φ) ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Örnek 2.2.6. Evrensel küme $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6,\}$ telefonların kümesi ve parametre kümesi $E = \{$geniş ekran, çift hatlı, suya dayanıklı, kameralı$\}$ şeklinde tanımlansın.
(F, A) esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}
F(\text{geniş ekran}) \longrightarrow &\text{geniş ekranlı telefon} &= \emptyset\\
F(\text{çift hatlı}) \longrightarrow &\text{çift hatlı telefon} &= \emptyset\\
F(\text{suya dayanıklı}) \longrightarrow &\text{suya dayanıklı} &= \emptyset\\
F(\text{kameralı}) \longrightarrow &\text{kameralı telefon} &= \emptyset
\end{aligned}$$

(F, A) esnek kümesi boş esnek kümedir. Böylece $(F, A) = (F, \Phi)$ dir.

Tanım 2.2.7. (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a \in E$ için $F(a) = U$ ise (F, E) esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve $(F, \widetilde{E})$ ile gösterilir (Maji ve ark, 2003).

Örnek 2.2.8. Evrensel küme $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ telefonların kümesi ve parametre kümesi E=$\{$geniş ekran, çift katlı, suya dayanıklı, kameralı$\}$ olan (F, E) esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}
F(\text{geniş ekran}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\
F(\text{çift katlı}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\
F(\text{suya dayanıklı}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\
F(\text{kameralı}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\}
\end{aligned}$$

(F, E) esnek kümesi, evrensel esnek kümedir.

Tanım 2.2.9. $A, B \subseteq E$ olmak üzere (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun. $\forall a \in E$ için $F(a) \subseteq G(a)$ ise (F, A) ya (G, B) nin esnek alt kümesi denir ve $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ ile gösterilir (Çağman, Enginoğlu, 2010).

Örnek 2.2.10. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi olsun. $A = \{e_1, e_2\}$, $B = \{e_1, e_2, e_4\}$ olarak verilsin.

$$(F, A) = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_1, u_3, u_4\})\}$$

ve

$$(G, B) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \}), (e_4, \{u_4, u_6\})\}$$

esnek kümeleri tanımlansın. $\forall a \in E$ için $F(a) \subseteq G(a)$ olduğundan $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ olur.

Önerme 2.2.11. $A, B, C \subseteq E$ olmak üzere (F, A), (G, B) ve (H, C), U üzerinde esnek kümeler olsun.

1. $(F, A)\tilde{\subseteq}(F, \widetilde{E})$

2. $(F, \Phi)\tilde{\subseteq}(F, A)$

3. $(F, A)\tilde{\subseteq}(F, A)$

4. $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ ve $(G, B)\tilde{\subseteq}(H, C)$ ise $(F, A)\tilde{\subseteq}(H, C)$

dir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat. $\forall a \in E$ için

1. $F(a) \subseteq U$ olduğundan $(F, A)\widetilde{\subseteq}(F, \widetilde{E})$ dir.

2. $\emptyset \subseteq F(a)$ olduğundan $(F, \Phi)\widetilde{\subseteq}(F, A)$ dir.

3. $F(a) \subseteq F(a)$ olduğundan $(F, A)\widetilde{\subseteq}(F, A)$

4. $F(a) \subseteq G(a)$ ve $G(a) \subseteq H(a)$ ise $F(a) \subseteq H(a)$ olduğundan $(F, A)\widetilde{\subseteq}(G, B)$ ve $(G, B)\widetilde{\subseteq}(H, C)$ ise $(F, A)\widetilde{\subseteq}(H, C)$ olur.

Tanım 2.2.12. (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun. $\forall a \in E$ için $F(a) = G(a)$ ise (F, A) esnek kümesi (G, B) esnek kümesine eşittir denir ve $(F, A) = (G, B)$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.13. (F, A), U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a \in E$ için $F^c(a) = U \setminus F(a)$ şeklinde tanımlanan esnek kümeye (F, A) nın tümleyeni denir ve $(F, A)^{\widetilde{c}}$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Önerme 2.2.14. (F, A), U üzerinde bir esnek küme olsun.

1. $((F, A)^{\widetilde{c}})^{\widetilde{c}} = (F, A)$

2. $(F, \Phi)^{\widetilde{c}} = (F, \widetilde{E})$

dir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat. $\forall a \in E$ için

1. $(F^c)^c(a) = F(a)$ olduğundan $((F, A)^c)^{\widetilde{c}} = (F, A)$ olur.

2. $F^c(a) = U \setminus F(a) = U \setminus \emptyset = U$ olduğundan $(F, \Phi)^{\widetilde{c}} = (F, \widetilde{E})$ olur.

Tanım 2.2.15. (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun. İki esnek kümenin birleşimi $\forall a \in E$ için $(F \cup G)(a) = F(a) \cup G(a)$ fonksiyonu ile tanımlanır ve $(F, A)\widetilde{\cup}(F, B)$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.16. (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun. İki esnek kümenin kesişimi $\forall a \in E$ için $(F \cap G)(a) = F(a) \cap G(a)$ fonksiyonu ile tanımlanır ve $(F, A)\widetilde{\cap}(G, B)$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Önerme 2.2.17. (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun.

1. $[(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)]^{\tilde{c}} = (F,A)^{\tilde{c}}\widetilde{\cap}(G,B)^{\tilde{c}}$

2. $[(F,A)\widetilde{\cap}(G,B)]^{\tilde{c}} = (F,A)^{\tilde{c}}\widetilde{\cup}(G,B)^{\tilde{c}}$

dir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat. $\forall a \in E$ için

1. $[(F \cup G)(a)]^c = [F(a) \cup G(a)]^c = F^c(a)\widetilde{\cap}G^c(a)$ olduğundan $[(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)]^{\tilde{c}} = (F,A)^{\tilde{c}}\widetilde{\cap}(G,B)^{\tilde{c}}$ elde edilir.

2. $[(F \cap G)(a)]^c = [F(a) \cap G(a)]^c = F^c(a)\widetilde{\cup}G^c(a)$ olduğundan $[(F,A)\widetilde{\cap}(G,B)]^{\tilde{c}} = (F,A)^{\tilde{c}}\widetilde{\cup}(G,B)^{\tilde{c}}$ elde edilir.

Önerme 2.2.18. (F,A), (G,B) ve (H,B), U üzerinde esnek küme olsun.

1. $(F,A)\widetilde{\cup}[(G,B)\widetilde{\cap}(H,B)] = [(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)]\widetilde{\cap}[(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)]$

2. $(F,A)\widetilde{\cap}[(G,B)\widetilde{\cup}(H,B)] = [(F,A)\widetilde{\cap}(G,B)]\widetilde{\cup}[(F,A)\widetilde{\cap}(H,B)]$

Benzer şekilde sağdan dağılma kuralları da sağlanır.

İspat. $\forall a \in E$ için

1.
$$\begin{aligned}
[F \cup (G \cap H)](a) &= F(a) \cup (G \cap H)(a) \\
&= F(a) \cup [G(a) \cap H(a)] \\
&= [F(a) \cup G(a)] \cap [F(a) \cup H(a)] \\
&= (F \cup G)(a) \cap (F \cup H)(a) \\
&= [(F \cup G) \cap (F \cup H)](a)
\end{aligned}$$

olur. Buradan $(F,A)\widetilde{\cup}[(G,B)\widetilde{\cap}(H,B)] = [(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)]\widetilde{\cap}[(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)]$ elde edilir.

2.

$$\begin{aligned}[F \cap (G \cup H)](a) &= F(a) \cap (G \cup H)(a) \\ &= F(a) \cap [G(a) \cup H(a)] \\ &= [F(a) \cap G(a)] \cup [F(a) \cap H(a)] \\ &= (F \cap G)(a) \cup (F \cap H)(a) \\ &= [(F \cap G) \cup (F \cap H)](a)\end{aligned}$$

olur. Buradan $(F, A)\widetilde{\cap}[(G, B)\widetilde{\cup}(H, B)] = [(F, A)\widetilde{\cap}(G, B)]\widetilde{\cup}[(F, A)\widetilde{\cap}(H, B)]$ elde edilir.

2.3. Esnek Kesişimsel Gruplar

Bu bölümde ilk olarak esnek kesişimsel grup tanımı verilecektir. Daha sonra esnek kesişimsel gruplar üzerindeki işlemlere yer verilecektir. Burada U kümesi evrensel küme ve $(G, \cdot)$ grubu da parametre kümesi olarak alınacaktır.

Tanım 2.3.1. (F, G), U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a, b \in G$ için $F(a \cdot b) \supseteq F(a) \cap F(b)$ şartını sağlayan (F, G) esnek kümesine esnek kesişimsel yarıgrup denir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.2. (F, G), U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a, b \in G$ için

1. $F(a \cdot b) \supseteq F(a) \cap F(b)$
2. $F(a) = F(a^{-1})$

şartlarını sağlayan (F, G) esnek kümesine esnek kesişimsel grup denir (Çağman ve ark.,2011).

Örnek 2.3.3. Z evrensel küme ve $G = \{1, -1\}$ çarpım grubu parametre kümesi olsun. Z üzerindeki (F, G) esnek kümesi $F(1) = \{0, 1, 3\}$, $F(-1) = \{0, 1\}$ şeklinde tanımlansın. Buradan
$F(1 \cdot 1) \supseteq F(1) \cap F(1) \Rightarrow F(1) = \{0, 1, 3\} \supseteq \{0, 1\}$
$F(1 \cdot (-1)) \supseteq F(1) \cap F(-1) \Rightarrow F(-1) = \{0, 1\} \supseteq \{0, 1\}$

$F((-1)\cdot(-1)) \supseteq F(-1)\cap F(-1) \Rightarrow F(1)=\{0,1,3\} \supseteq \{0,1\}$
elde edilir. (F,G) esnek kümesi, esnek kesişimsel grubun birinci şartını sağlar.
$F(1)=F(1^{-1})$ ve $F(-1)=f((-1)^{-1})$ olur. Böylece
$\forall a \in Z_6$ için $F(a)=F(a^{-1})$ olduğundan (F,G) esnek kümesi, esnek kesişimsel grubun ikinci şartını sağlar. özelliklerinin ikinci şartını sağlar.
Bu nedenle (F,G), Z üzerinde esnek kesişimsel gruptur.

Teorem 2.3.4. (F,G), U üzerinde esnek kesişimsel grup olsun. $\forall a \in G$ için $F(e) \supseteq F(a)$ dir (Çağman ve ark., 2011).

İspat. (F,G), U üzerinde esnek kesişimsel grup olduğundan $\forall a \in G$ için

$$\begin{aligned} F(e) &= F(a\cdot a^{-1}) \\ &\supseteq F(a)\cap F(a^{-1}) \\ &= F(a)\cap F(a) \\ &= F(a) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.3.5. (F,G), U üzerinde esnek küme olsun. (F,G), U üzerinde esnek kesişimsel grup olması için gerek ve yeter şart $\forall a,b \in G$ için $F(a\cdot b^{-1}) \supseteq F(a)\cap F(b)$ olmasıdır (Çağman ve ark., 2011)

İspat. Varsayalım ki (F,G), U üzerinde esnek kesişimsel grup olsun. $\forall a,b \in G$ için

$$\begin{aligned} F(a\cdot b^{-1}) &\supseteq F(a)\cap F(b^{-1}) \\ &\supseteq F(a)\cap F(b) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan varsayalım ki $\forall a,b \in G$ için $F(a\cdot b^{-1}) \supseteq F(a)\cap F(b)$ olsun.
İlk olarak $a=e$ alalım. $F(b^{-1}) \supseteq F(b)$ ve $F(b)=F((b^{-1})^{-1}) \supseteq F(b^{-1})$ dir.

Dolayısıyla $F(b) = F(b^{-1})$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} F(a \cdot b) &= F(a \cdot (b^{-1})^{-1}) \\ &\supseteq F(a) \cap F(b^{-1}) \\ &= F(a) \cap F(b) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (F, G), U üzerinde esnek kesişimsel grup olur.

2.4. Esnek Kesişimsel Halkalar ve Esnek Kesişimsel İdealler

Bu bölümde esnek kesişimsel halkaların tanımı verilecektir ve esnek kesişimsel halkalar ile ilgili temel teoremler incelenecektir. Ayrıca esnek kesişimsel ideal tanımı verilerek esnek kesişimsel ideallerle ilgili teoremler incelenecektir. Burada U evrensel küme ve $(R, +, \cdot)$ halkası parametre kümesi olarak alınacaktır.

Tanım 2.4.1. (F, R), U üzerinde bir esnek küme olsun. (F, R), "$+$" işlemine göre U üzerinde esnek kesişimsel grup ve (F, R), "$\cdot$" işlemine göre U üzerinde esnek kesişimsel yarıgrup ise (F, R) esnek kümesine U üzerinde esnek kesişimsel halka denir (Çağman ve Çıtak, 2015).

Örnek 2.4.2. Z_4, evrensel küme ve parametre kümesi olarak alınsın. Z_4 üzerindeki (F, Z_4) esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.
$F(0) = \{0, 1, 2, 3\}$, $F(1) = \{0\}$, $F(2) = \{0, 2\}$, $F(3) = \{0\}$.
(F, Z_4) esnek kümesinin "$+$" işlemine göre esnek kesişimsel grup ve "$\cdot$" işlemine göre esnek kesişimsel yarıgrup olduğunu gösterelim.
$F(0+0) \supseteq F(0) \cap F(0)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 1, 2, 3\}$
$F(0+1) \supseteq F(0) \cap F(1)$, $F(1) = \{0, \} \supseteq \{0\}$
$F(0+2) \supseteq F(0) \cap F(2)$, $F(2) = \{0, 2\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(0+3) \supseteq F(0) \cap F(3)$, $F(3) = \{0\} \supseteq \{0\}$
$F(1+1) \supseteq F(1) \cap F(1)$, $F(0) = \{0, 2\} \supseteq \{0\}$
$F(1+2) \supseteq F(1) \cap F(2)$, $F(3) = \{0\} \supseteq \{0\}$
$F(1+3) \supseteq F(1) \cap F(3)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0\}$
$F(2+2) \supseteq F(2) \cap F(2)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 2\}$

$F(2+3) \supseteq F(1) \cap F(2)$, $F(1) = \{0\} \supseteq \{0\}$

$F(3+3) \supseteq F(3) \cap F(3)$, $F(2) = \{0,2\} \supseteq \{0\}$

ve

$F(0) = F(0^{-1}) = \{0,1,2,3\}$

$F(1) = F(1^{-1}) = F_G(3) = \{0\}$

$F(2) = F(2^{-1}) = \{0,2\}$ olur.

Böylece (F, Z_4) esnek kümesi "$+$" işlemine göre Z_4 üzerinde esnek kesişimsel gruptur. Şimdi (F, Z_4) esnek kümesinin "$\cdot$" işlemine göre esnek kesişimsel yarıgrup olup olmadığını araştıracağız.

$F(0 \cdot 0) \supseteq F(0) \cap F(0)$, $F(0) = \{0,1,2,3\} \supseteq \{0,1,2,3\}$

$F(0 \cdot 1) \supseteq F(0) \cap F(1)$, $F(0) = \{0,1,2,3\} \supseteq \{0\}$

$F(0 \cdot 2) \supseteq F(0) \cap F(2)$, $F(0) = \{0,1,2,3\} \supseteq \{0\}$

$F(0 \cdot 3) \supseteq F(0) \cap F(3)$, $F(0) = \{0,1,2,3\} \supseteq \{0\}$

$F(1 \cdot 1) \supseteq F(1) \cap F(1)$, $F(1) = \{0\} \supseteq \{0\}$

$F(1 \cdot 2) \supseteq F(1) \cap F(2)$, $F(2) = \{0,2\} \supseteq \{0\}$

$F(1 \cdot 3) \supseteq F(1) \cap F(3)$, $F(3) = \{0\} \supseteq \{0\}$

$F(2 \cdot 2) \supseteq F(2) \cap F(2)$, $F(0) = \{0,1,2,3\} \supseteq \{0,2\}$

$F(2 \cdot 3) \supseteq F(2) \cap F(3)$, $F(2) = \{0,2\} \supseteq \{0\}$

$F(3 \cdot 3) \supseteq F(3) \cap F(3)$, $F(1) = \{0\} \supseteq \{0\}$

olur. Böylece (F, Z_4) esnek kümesi "$\cdot$" işlemine göre esnek kesişimsel yarıgruptur. O halde (F, Z_4) esnek kümesi Z_4 üzerinde esnek kesişimsel halkadır.

Teorem 2.4.3. (F, R), U üzerinde bir esnek küme olsun. U üzerinde tanımlanan (F, R), esnek kümesinin esnek kesişimsel halka olması için gerek ve yeter şart $\forall a, b \in R$ için

1. $F(a - b) \supseteq F(a) \cap F(b)$
2. $F(a \cdot b) \supseteq F(a) \cap F(b)$

olmasıdır (Çağman ve Çıtak, 2015).

İspat. Kabul edelim ki (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel halka olsun. Bundan dolayı $F(a+b) \supseteq F(a) \cap F(b)$ ve $F(-a) = F(a)$ olur. Böylece $F(a-b) \supseteq F(a) \cap$

$F(-b) = F(a) \cap F(b)$ elde edilir. (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel yarıgrup olduğundan $F(a \cdot b) \supseteq F(a) \cap F(b)$ elde edilir.

Diğer taraftan kabul edelim ki $F(a - b) \supseteq F(a) \cap F(b)$ ve $F(a \cdot b) \supseteq F(a) \cap F(b)$ olsun. $\forall a, b \in R$ için $a = 0_R$ alınırsa $F(0_R - b) = F(-b) \supseteq F(b)$ elde edilir ve $F(b) = F(-(-b)) \supseteq F(-b)$ olur. Böylece $\forall a \in R$ için $F(-b) = F(b)$ olur. Ayrıca $F(a + b) = F(a - (-b)) \supseteq F(a) \cap F(-b) = F(a) \cap F(b)$ elde edilir.

Buradan (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel halkadır.

Tanım 2.4.4. (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel halka olsun. $\forall a, b \in R$ için $F(a \cdot b) \supseteq F(b)$ ise (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel sol ideal denir. $\forall a, b \in R$ için $F(a \cdot b) \supseteq F(a)$ ise (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel sağ ideal denir. (F, R), U üzerinde sol esnek kesişimsel ideal ve sağ esnek kesişimsel ideal ise (F, R) ye U üzerinde esnek kesişimsel ideal denir (Çağman ve Çıtak, 2015).

Örnek 2.4.5. Z_4 evrensel küme ve parametre kümesi olsun. (F, Z_4) esnek kümesini aşağıdaki gibi tanımlasın.

$$F(0) = \{0, 1, 2, 3\}, F(1) = \{0, 2\}, F(2) = \{0, 2\}, F(3) = \{0, 2\}.$$

(F, Z_4) esnek kümesinin esnek kesişimsel ideal olup olmadığını araştıralım.

$F(0 \cdot 1) \supseteq F(1)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(0 \cdot 1) \supseteq F(0)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 1, 2, 3\}$
$F(0 \cdot 2) \supseteq F(2)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(0 \cdot 2) \supseteq F(0)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 1, 2, 3\}$
$F(0 \cdot 3) \supseteq F(3)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(0 \cdot 3) \supseteq F(0)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 1, 2, 3\}$
$F(1 \cdot 1) \supseteq F(1)$, $F(1) = \{0, 2\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(1 \cdot 2) \supseteq F(2)$, $F(2) = \{0, 2\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(1 \cdot 2) \supseteq F(1)$, $F(2) = \{0, 2\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(1 \cdot 3) \supseteq F(3)$, $F(3) = \{0, 2\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(1 \cdot 3) \supseteq F(1)$, $F(0) = \{0, 2\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(2 \cdot 2) \supseteq F(2)$, $F(0) = \{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 2\}$

$F(2 \cdot 3) \supseteq F(2)$, $F(2) = \{0, 2\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(2 \cdot 3) \supseteq F(3)$, $F(2) = \{0, 2\} \supseteq \{0, 2\}$
$F(3 \cdot 3) \supseteq F(3)$, $F(1) = \{0, 2\} \supseteq \{0, 2\}$
Böylece (F, Z_4), Z_4 üzerinde esnek kesişimsel idealdir.

Teorem 2.4.6. (F, R), U üzerinde esnek küme olsun. (F, R) nin U üzerinde esnek kesişimsel ideal olması için gerek yeter şart $\forall x, y \in R$ için

1. $F(x - y) \supseteq F(x) \cap F(y)$
2. $F(x \cdot y) \supseteq F(x) \cup F(y)$

olmasıdır (Çağman ve Çıtak, 2015).

İspat. (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel halka olduğundan $F(x - y) \supset F(x) \cap F(x)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $F(x \cdot y) \supseteq F(x)$ ve $F(x \cdot y) \supseteq F(y)$ olduğundan $F(x \cdot y) \supseteq F(x) \cup F(y)$ elde edelir. Diğer taraftan $\forall x, y \in R$ için $F(x - y) \supseteq F(x) \cap F(y)$ ve $F(x \cdot y) \supseteq F(x) \cup F(y)$ olduğunu kabul edelim.
$F(x \cdot y) \supseteq F(x) \cup F(y) \supseteq F(x)$
$F(x \cdot y) \supseteq F(x) \cup F(y) \supseteq F(y)$
$F(x \cdot y) \supseteq F(x) \cap F(y)$
olur. Böylece (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel idealdir.

Teorem 2.4.7. (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel halka (esnek kesişimsel ideal) olsun. $\forall a \in R$ için $F(0_R) \supseteq F(a)$ dir (Çağman ve Çıtak, 2015).

İspat. Kabul edelim ki $\forall a \in R$ için (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel halka (esnek kesişimsel ideal) olsun. Buradan $F(0_R) = F(a - a) \supseteq F(a) \cap F(a) = F(a)$ elde edilir.

Teorem 2.4.8. R, birimli bir halka olmak üzere (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel halka (esnek kesişimsel ideal) olsun. $\forall a \in R$ için $F(x) \supseteq F(1_R)$ dir (Çağman ve Çıtak, 2015).

İspat. Kabul edelim ki $\forall a \in R$ için, (F, R), U üzerinde esnek kesişimsel halka (esnek kesişimsel ideal) olsun. Buradan $F(a) = F(a \cdot 1_R) \supseteq F(1_R)$ elde edlir.

3. BULGULAR

3.1. Yarıhalkalar Üzerinde Esnek Kesişimsel k-idealler

Bu bölümde yarıhalkalar üzerinde esnek kesişimsel k-idealler tanımlanacaktır ve esnek kesişimsel k-idealler ile ilgili bazı temel teoremler verecektir. Bu bölüm boyunca U evrensel küme ve $(S, +, \cdot)$ yarıhalkası parametre kümesi olarak alınacaktır.

Tanım 3.1.1. (F, S), U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a, b \in S$ için

1. $F(a + b) \supseteq F(a) \cap F(b)$
2. $F(a \cdot b) \supseteq F(a) \cap F(b)$

şartlarını sağlayan (F, S) esnek kümesine U üzerinde esnek kesişimsel yarıhalka denir (Atagün ve Sezgin, 2017).

Tanım 3.1.2. (F, S), U üzerinde bir esnek kesişimsel yarıhalka olsun. $\forall a, b \in S$ için

1. $F(a \cdot b) \supseteq F(b)$ ise (F, S) ye U üzerinde esnek kesişimsel sol ideal denir.
2. $F(a \cdot b) \supseteq F(a)$ ise (F, S) ye U üzerinde esnek kesişimsel sağ ideal denir.

Eğer (F, S) ye U üzerinde esnek kesişimsel sol ideal ve esnek kesişimsel sağ ideal ise (F, S), U üzerinde esnek kesişimsel ideal denir.

Tanım 3.1.3. (F, S), U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal olsun. $\forall a, b \in S$ için $F(a + b) = F(0_S)$ ve $F(b) = F(0_S)$ iken $F(a) = F(0_S)$ oluyorsa (F, S) ye esnek kesişimsel k-ideal denir.

Örnek 3.1.4. Z evrensel küme ve Z_6 parametre kümesi olsun. Z üzerindeki (F, Z_6) esnek kümesi
$F(0) = \{0, 1, 2, 3\}, F(1) = \{0, 1\}, F(2) = \{0, 1, 2, 3\}$
$F(3) = \{0, 1\}, F(4) = \{0, 1, 2, 3\}, F(5) = \{0, 1\}$
şeklinde tanımlansın.
$F(0 \cdot 2) = F(0) \supseteq F(0)$ ve $F(0 \cdot 2) = F(0) \supseteq F(2)$, $F(1 \cdot 4) = F(4) \supseteq F(1)$ ve $F(1 \cdot 4) = F(4) \supseteq F(4)$, $F(2 \cdot 5) = F(4) \supseteq F(2)$ ve $F(2 \cdot 5) = F(4) \supseteq F(5)$,...

Benzer şekilde Z_6 parametre kümesinin tüm elemenları içn bu işlemler uygulanırsa (F, Z_6) esnek kümesinin esnek kesişimsel ideal olduğu görülür. (F, S) nin U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olması için $\forall a, b \in Z_6$ için $F(a+b) = F(0_s)$ ve $F(b) = F(0_s)$ iken $F(a) = F(0_s)$ olduğunu göstermemiz gerekiyor.
$2, 4 \in Z_6$ için $F(2+4) = F(0_S)$ dır.
$F(2) = F(0_S) = \{0, 1, 2, 3\}$ iken $F(4) = \{0, 1, 2, 3\}$ dir.
$3 \in Z_6$ için $F(3+3) = F(0_S)$ dir. $F(3) = F(0_S) = \{0, 1, 2, 3\}$ dir.
Esnek kesişimsel k-ideal tanımından dolayı (F, Z_6), Z_6 üzerinde esnek kesişimsel k-idealdir.

Örnek 3.1.5. $U = \{0, 1\}$ evrensel küme ve Z_6 parametre kümesi olsun. U üzerinde (F, Z_6) esnek kümesi
$F(0) = \{0, 1\}, F(1) = \{0\}, F(2) = \{0, 1\}, F(3) = \{0\}, F(4) = \{0, 1\}, F(5) = \{0\}$
şeklinde tanımlansın.
$F(3 \cdot 4) = F(0) \supseteq F(3)$ ve $F(3 \cdot 4) = F(0) \supseteq F(4)$, $F(1 \cdot 5) = F(5) \supseteq F(1)$ ve $F(1 \cdot 5) = F(5) \supseteq F(5)$, $F(2 \cdot 3) = F(0) \supseteq F(2)$ ve $F(2 \cdot 3) = F(0) \supseteq F(6)$,...
Benzer şekilde Z_6 parametre kümesinin tüm elemenları içn bu işlemler uygulanırsa (F, Z_6) esnek kümesinin esnek kesişimsel ideal olduğu görülür. Burada
$F(2+4) = F(0_s)$ ve $F(2) = F(0_s)$ iken $F(4) = F(0_s)$ olur. Böylece (F, Z_6), U üzerinde esnek kesişimsel k-idealdir.

Tanım 3.1.6. (F, S), U üzerinde bir esnek küme olsun.

$$F_T = \{a \in S : F(a) \supseteq T,\, T \in P(U)\}$$

kümesine (F, S) esnek kümesinin T-seviye kümesi denir.

Teorem 3.1.7. (F, S), U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal olsun. $F(0_S) \supseteq K$ olmak üzere F_K seviye kümesi, S nin bir idealidir.

İspat. $F(0_S) \supseteq K$ olduğundan $0_s \in F_K$ olur. Böylece $F_K \neq \emptyset$ dir. $F_K \subseteq S$ olduğu açıktır. Şimdi $\forall a, b \in F_K$ için $a + b \in F_K$ olduğu gösterilecektir.
$a, b \in F_K$ olduğundan $F(a) \supseteq K$ ve $F(b) \supseteq K$ olur. $F(a+b) \supseteq F(a) \cap F(b) \supseteq K$ olacağından $a + b \in F_K$ elde edilir. Şimdi $\forall a \in F_K$ ve $s \in S$ için $a \cdot s \in F_K$ ve

$s \cdot a \in F_K$ olduğunu gösterelim.

$a \in F_K$ olduğundan $F(a) \supseteq K$ olur. $F(a \cdot s) \supseteq F(a) \supseteq K$ olduğundan $a \cdot s \in F_K$ ve $F(s \cdot a) \supseteq F(a) \supseteq K$ olduğundan $s \cdot a \in F_K$ elde edilir.

Teorem 3.1.8. (F, S), U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. $F(0_S) = K$ olmak üzere F_K seviye kümesi, S nin k-ideali ise (F, S) de esnek kesişimsel k-idealdir.

İspat. F_K, S nin k-ideali olsun. $\forall a, b \in S$ için $F(a+b) = F(0_S)$ ve $F(b) = F(0_S)$ olsun. Burada $a + b \in F_K$ ve $b \in F_K$ olur. F_K, S nin k-ideali olduğundan $a \in F_K$ olur. Bundan dolayı $F(a) \supseteq K$ olur. Böylece $F(a) = F(0_S)$ olur. Buradan (F, S) esnek kesişimsel k-idealdir.

Tanım 3.1.9. I, S yarıhalkasının bir ideali olsun. $\forall a \in S$ için $\lambda_I : S \to P(U)$ olmak üzere

$$\lambda_I(a) = \begin{cases} U, & a \in I; \\ \emptyset, & a \notin I. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona esnek karakteristik fonksiyon denir.

Teorem 3.1.10. I, S yarıhalkasının k-ideali olsun. λ_I esnek karakteristik fonsiyonu, S nin bir esnek kesişimsel k-idealidir.

İspat. İlk olarak λ_I esnek karakteristik fonksiyonun S nin esnek kesişimsel ideali olduğunu olduğunu gösterelim.

$\forall a, b \in I$ için $\lambda_I(a+b) \supseteq \lambda_I(a) \cap \lambda_I(b)$ olduğunu gösterelim.

$\forall a, b \in I$ için I ideal olduğundan $a + b \in I$ olur. O halde $\lambda_I(a) = U$ ve $\lambda_I(b) = U$ ve $\lambda_I(a+b) = U$ olur. Böylece $\lambda_I(a+b) \supseteq \lambda_I(a) \cap \lambda_I(b)$ elde edilir.

$\forall a, b \notin I$ için $\lambda_I(a) = \emptyset$ ve $\lambda_I(b) = \emptyset$ olur. Buradan $\lambda_I(a) \cap \lambda_I(b) = \emptyset$ olacağından $\lambda_I(a+b) \supseteq \lambda_I(a) \cap \lambda_I(b)$ elde edilir.

$\forall a \in I, b \notin I$, için $\lambda_I(a) = U$ ve $\lambda_I(b) = \emptyset$ olur. Buradan $\lambda_I(a) \cap \lambda_I(b) = \emptyset$ olacağından $\lambda_I(a+b) \supseteq \lambda_I(a) \cap \lambda_I(b)$ elde edilir.

Tüm durumlarda esnek kesişimsel idealin ilk şartı sağlanır. Şimdi $\forall a, b \in S$ için $\lambda_I(a \cdot b) \supseteq \lambda_I(a)$ ve $\lambda_I(a \cdot b) \supseteq \lambda_I(b)$ olduğunu gösterelim.

$\forall a, b \in I$ için I ideal olduğundan $a \cdot b \in I$ olur. O halde $\lambda_I(a) = U$ ve $\lambda_I(b) = U$ ve $\lambda_I(a \cdot b) = U$ olur. Böylece $\lambda_I(a \cdot b) \supseteq \lambda_I(a)$ ve $\lambda_I(a \cdot b) \supseteq \lambda_I(b)$ elde edilir.
$\forall a, b \notin I$ için I ideal olduğundan $a \cdot b \in I$ ve $a \cdot b \in I$ olur. O halde $\lambda_I(a \cdot b) = U$ ve $\lambda_I(a) = U$ ve $\lambda_I(b) = \emptyset$ olur. Böylece $\lambda_I(a \cdot b) \supseteq \lambda_I(a)$ ve $\lambda_I(a \cdot b) \supseteq \lambda_I(b)$ elde edilir.

Son olarak λ_I karakteristik fonksiyonun S nin esnek kesişisel k-ideal olduğunu gösterelim.

$\forall a, b \in S$ için $\lambda_I(a + b) = \lambda_I(0_S)$ ve $\lambda_I(b) = \lambda_I(0_S)$ iken $\lambda_I(a) = \lambda_I(0_S)$ olduğunu gösterelim.
$\lambda_I(a + b) = \lambda_I(0_S)$ ve $\lambda_I(b) = \lambda_I(0_S)$ olsun. Esnek karakteristik fonksiyonun tanımından dolayı $a + b \in I$ ve $b \in I$ elde edilir. I, S nin bir k-ideali olduğundan $a + b \in I$ ve $b \in I$ iken $a \in I$ olur. Böylece $\lambda_I(a) = U$ olur. Buradan $\lambda_I(a) = \lambda_I(0_S)$ elde edilir.
Sonuç olarak λ_I, S nin esnek kesişimsel k-idealidir.

Tanım 3.1.11. $\varphi : S \to M$ bir yarıhalka homomorfizması olsun. (G, M), U üzerinde esnek küme olsun. U üzerinde $(\varphi^{-1}(G), S)$ esnek kümesi $\forall a \in S$ için $\varphi^{-1}(G(a)) = G(\varphi(a))$ ile tanımlanır. Bu kümeye (G, M) nin esnek ters görüntü kümesi denir.

Teorem 3.1.12. $\varphi : S \to M$ bir yarıhalka epimorfizması olsun. (G, M), U üzerinde esnek küme olsun. (G, M) nin esnek kesişimsel k-ideal olması için gerek ve yeter şart $(\varphi^{-1}(G), S)$ nin esnek kesişimsel k-ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (G, M) esnek kesişimsel k-ideal olsun. İlk olarak $(\varphi^{-1}(G), S)$ nin esnek kesişimsel ideal olduğunu gösterelim. $\forall a, b \in S$ için

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(G)(a+b) &= G(\varphi(a+b)) \\
&= G(\varphi(a) + \varphi(b)) \\
&\supseteq G(\varphi(a)) \cap G(\varphi(b)) \\
&= \varphi^{-1}(G)(a) \cap \varphi^{-1}(G)(b)
\end{aligned}$$

Buradan $\varphi^{-1}(G)(a+b) \supseteq \varphi^{-1}(G)(a) \cap \varphi^{-1}(G)(b)$ elde edilir. $\forall a, b \in S$ için

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(G)(a \cdot b) &= G(\varphi(a \cdot b)) \\
&= G(\varphi(a) \cdot \varphi(b)) \\
&\supseteq G(\varphi(a)) \\
&= \varphi^{-1}(G)(a)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(G)(a \cdot b) &= G(\varphi(a \cdot b)) \\
&= G(\varphi(a) \cdot \varphi(b)) \\
&\supseteq G(\varphi(b)) \\
&= \varphi^{-1}(G)(b)
\end{aligned}$$

Buradan $\varphi^{-1}(G)(a \cdot b) \supseteq \varphi^{-1}(G)(a)$ ve $\varphi^{-1}(G)(a \cdot b) \supseteq \varphi^{-1}(G)(b)$ elde edilir. Böylece $(\varphi^{-1}(G), S)$, U üzerinde esnek kesişimsel idealdir. Şimdi $(\varphi^{-1}(G), S)$ nın esnek kesişimsel k-ideal olduğunu gösterelim.

$\forall a, b \in S$ için $\varphi^{-1}(G)(a+b) = \varphi^{-1}(G)(0_S)$ ve $\varphi^{-1}(G)(b) = \varphi^{-1}(G)(0_S)$ olsun. Buradan $G(\varphi(a+b)) = G(0_M)$ ve $G(\varphi(b)) = G(0_M)$ olur. φ homomorfizma olduğundan $G(\varphi(a)+\varphi(b)) = G(0_M)$, $G(\varphi(b)) = G(0_M)$ ve (G, M) esnek kesişimsel k-ideal olduğundan $G(\varphi(a)) = G(0_M) = \varphi(0_S)$ elde edilir. Böylece $\varphi^{-1}(G)(a) = \varphi^{-1}(G)(0_S)$ elde edilir.

O halde $(\varphi^{-1}(G), S)$, U üzerinde esnek kesişimsel k-idealdir.
Karşıt olarak $(\varphi^{-1}(G), S)$, U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olsun. İlk olarak (G, M) nin esnek kesişimsel k-ideal olduğunu gösterelim. φ, örten olduğundan

$\forall x, y \in M$ için $x = \varphi(a)$ ve $y = \varphi(y)$ olacak şekilde $a, b \in S$ vardır.

$$\begin{aligned}
G(x+y) &= G(\varphi(a)+\varphi(b)) \\
&= G(\varphi(a+b)) \\
&= \varphi^{-1}(G)(a+b) \\
&\supseteq \varphi^{-1}(G)(a) \cap \varphi^{-1}(G)(b) \\
&= G(\varphi(a)) \cap G(\varphi(b)) \\
&= G(x) \cap G(y)
\end{aligned}$$

Buradan $G(x+y) \supseteq G(x) \cap G(y)$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
G(x \cdot y) &= G(\varphi(a) \cdot \varphi(b)) \\
&= G(\varphi(a \cdot b)) \\
&= \varphi^{-1}(G)(a \cdot b) \\
&\supseteq \varphi^{-1}(G)(a) \\
&= G(\varphi(a)) \\
&= G(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
G(x \cdot y) &= G(\varphi(a) \cdot \varphi(b)) \\
&= G(\varphi(a \cdot b)) \\
&= \varphi^{-1}(G)(a \cdot b) \\
&\supseteq \varphi^{-1}(G)(b) \\
&= G(\varphi(b)) \\
&= G(y)
\end{aligned}$$

Buradan $G(x \cdot y) \supseteq G(x)$ ve $G(x \cdot y) \supseteq G(y)$ elde edilir. Böylece (G, M), U üzerinde esnek kesişimsel idealdir.

Şimdi (G, M) nin U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olduğunu gösterelim. $\forall x, y \in$

M için $G(x+y)=G(0_M)$ ve $G(y)=G(0_M)$ olsun. φ örten olduğundan $\forall x,y\in M$ için $x=\varphi(a)$ ve $y=\varphi(b)$ olacak şekilde $a,b\in S$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}G(x+y) &= G(\varphi(a)+\varphi(b))\\ &= G(\varphi(a+b))\\ &= \varphi^{-1}(G)(a+b)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}G(0_M) &= G(\varphi(0_S))\\ &= \varphi^{-1}(G)(0_S)\end{aligned}$$

olur. Böylece $\varphi^{-1}(G)(a+b)=\varphi^{-1}(G)(0_S)$ olur. Ayrıca

$$G(y)=G(\varphi(b))=\varphi^{-1}(G)(b)$$

ve buradan

$$\varphi^{-1}(G)(b)=\varphi^{-1}(G)(0_S)$$

olur. $(\varphi^{-1}(G),S)$, U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olduğundan $\varphi^{-1}(G)(a+b)=\varphi^{-1}(G)(0_S)$ ve $\varphi^{-1}(G)(b)=\varphi^{-1}(G)(0_S)$ iken $\varphi^{-1}(G)(a)=\varphi^{-1}(G)(0_S)$ elde edilir. O halde

$$\varphi^{-1}(G)(a)=\varphi^{-1}(G)(0_S)$$
$$G(\varphi(a))=G(\varphi(0_S))$$
$$G(x)=G(0_M)$$

elde edilir. Böylece (G,M), U üzerinde bir esnek kesişimsel k-idealdir.

Tanım 3.1.13. $\varphi: S\to M$ bir yarıhalka homomorfizması olsun. (F,S), U üzerinde bir esnek küme olsun. U üzerinde $(\varphi(F),M)$ esnek kümesi

$$\varphi(F)(x)=\begin{cases}\cup\{F(a): a\in S, \varphi(a)=x\}, & \varphi^{-1}(x)\neq\emptyset\\ \emptyset, & \text{aksi halde.}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu kümeye (F, S) nin esnek görüntü kümesi denir.

Tanım 3.1.14. A ve B herhangi iki küme ve $\varphi : A \to B$ bir fonksiyon olsun. (F, A), U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall a, b \in A$ için $\varphi(a) = \varphi(b)$ iken $F(a) = F(b)$ oluyorsa (F, A) ya φ-sabit denir.

Teorem 3.1.15. $\varphi : S \to M$ bir yarıhalka epimorfizması olsun. (F, S), U üzerinde φ-sabit esnek kesişimsel ideal olsun. $(\varphi(F), M)$, U üzerinde esnek kesişimsel idealdir.

İspat. φ örten olduğundan $\forall x, y \in M$ için $\varphi(a) = x$ ve $\varphi(b) = y$ olacak şekilde $a, b \in S$ vardır. Buradan $x+y = \varphi(a)+\varphi(b) = \varphi(a+b)$ ve $x \cdot y = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$ elde edilir. (F, S) φ-sabit olduğundan

$$
\begin{aligned}
x + y = \varphi(a + b) &\Rightarrow \varphi^{-1}(x + y) = a + b \\
&\Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(x + y)) = \varphi(a + b) \\
&\Rightarrow F(\varphi^{-1}(x + y)) = F(a + b) \\
&\Rightarrow \varphi(F)(x + y) = F(a + b)
\end{aligned}
$$

$\varphi(F)(x) = F(a)$ ve $\varphi(F)(y) = F(b)$ ve

$$
\begin{aligned}
x \cdot y = \varphi(a \cdot b) &\Rightarrow \varphi^{-1}(x \cdot y) = a \cdot b \\
&\Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(x \cdot y)) = \varphi(a \cdot b) \\
&\Rightarrow F(\varphi^{-1}(x \cdot y)) = F(a \cdot b) \\
&\Rightarrow \varphi(F)(x \cdot y) = F(a \cdot b)
\end{aligned}
$$

$\varphi(F)(x) = F(a)$ ve $\varphi(F)(y) = F(b)$
elde edilir. Buradan
$\varphi(F)(x + y) = F(a + b) \supseteq F(a) \cap F(b) = \varphi(F)(x) \cap \varphi(F)(y)$
ve
$\varphi(F)(x \cdot y) = F(a \cdot b) \supseteq F(a) = \varphi(F)(x)$
$\varphi(F)(x \cdot y) = F(a \cdot b) \supseteq F(b) = \varphi(F)(y)$
elde edilir. Sonuç olarak $(\varphi(F), M)$, U üzerinde bir esnek kesişimsel idealdir.

Teorem 3.1.16. $\varphi : S \to M$ bir yarıhalka epimorfizması ve (F,S), U üzerinde φ-sabit esnek kesişimsel ideal olsun. (F,S) nin esnek kesişimsel k-ideal olması için gerek ve yeter şart $(\varphi(F),M)$ nin U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (F,S), U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olsun. Teorem 3.1.15 den $(\varphi(F),M)$ nin U üzerinde esnek kesişimsel ideal olduğunu biliyoruz. Şimdi $(\varphi(F),M)$ nin U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olduğunu gösterelim. $\forall x,y \in M$ için $\varphi(F)(x+y) = \varphi(F)(0_M)$ ve $\varphi(F)(y) = \varphi(F)(0_M)$ olsun. φ örten olduğundan $\forall x,y \in M$ için $\varphi(a) = x$ ve $\varphi(b) = y$ olacak şekilde $a,b \in S$ vardır.

$$\begin{aligned} \varphi(F)(x+y) = \varphi(F)(\varphi(a)+\varphi(b)) &= \varphi(F)(\varphi(a+b)) \\ &= F(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(F)(y) &= \varphi(F)(\varphi(b)) \\ &= F(b) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca (F,S), φ-sabit olduğundan $\varphi(F)(0_M) = F(0_S)$ olur. Buradan $\varphi(F)(x+y) = \varphi(F)(0_M)$ olduğundan $F(a+b) = F(0_S)$ ve $\varphi(F)(y) = \varphi(F)(0_M)$ olduğundan $F(b) = F(0_S)$ elde edilir. (F,S), U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olduğundan $F(a+b) = F(0_S)$ ve $F(b) = F(0_S)$ iken $F(a) = F(0_S)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi(F)(x) &= \varphi(F)(\varphi(a)) \\ &= F(a) \\ &= F(0_S) \\ &= \varphi(F)(0_M) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(\varphi(F),M)$, U üzerinde esnek kesişimsel k-idealdir.

Karşıt olarak $(\varphi(F),M)$, U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olsun. $\forall a,b \in S$ için $F(a+b) = F(0_S)$ ve $F(b) = F(0_S)$ olsun. φ örten olduğundan $\forall x,y \in M$ için

$\varphi(a) = x$ ve $\varphi(b) = y$ olacak şekilde $a, b \in S$ vardır.

$$\begin{aligned} \varphi(F)(x+y) &= \varphi(F)(\varphi(a+b)) \\ &= F(a+b) \\ &= F(0_S) \\ &= \varphi(F)(0_M) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(F)(y) &= \varphi(F)(\varphi(b)) \\ &= F(b) \\ &= F(0_S) \\ &= \varphi(F)(0_M) \end{aligned}$$

olur. $(\varphi(F), M)$, U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olduğundan
$\varphi(F)(x+y) = \varphi(F)(0_M)$ ve $\varphi(F)(y) = \varphi(F)(0_M)$ iken $\varphi(F)(x) = \varphi(F)(0_M)$ olur.

$$\varphi(F)(x) = \varphi(F)(0_M)$$

$$\varphi(F)(\varphi(a)) = \varphi(F)(0_M)$$

$$F(a) = F(0_S)$$

elde edilir. Böylece (F, S), U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olur.

3.2. Esnek Kesişimsel İdealler Üzerinde k-Yarıhalkaların Bölüm Yapıları

Bu bölümde k-yarıhalkaların bölüm yapılarını tanımlayacağız. Bölüm yapıları ile ilgili temel teoremlere yer vereceğiz.

S bir yarıhalka ve $\overline{S}$, S nin genişletilmiş halkası olsun. Bütün seviye alt kümeleri S nin k-ideali olacak şekilde U üzerindeki (F, S) esnek kesişimsel idealini alalım.

Buradan $S = \bigcup_{K \in ImF} F_K$, $\overline{S} = \bigcup_{K \in ImF} \overline{F_K}$ ve $T \supset K$ olması için gerek ve yeter şart $F_T \subset F_K$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{F_T} \subset \overline{F_K}$ olmasıdır.

Tanım 3.2.1. S bir yarıhalka ve $\overline{S}$, S nin genişletilmiş halkası olsun. Bütün seviye kümeleri S nin k-idealleri olacak şekilde (F, S), U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. $(\overline{F}, \overline{S})$ esnek kümesi $\forall a \in \overline{S}$ için $\overline{F}(a) = \bigcup\{K : a \in \overline{F_K}, K \in ImF\}$ şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan $(\overline{F}, \overline{S})$ esnek kümesine U üzerinde genişletilmiş esnek küme denir.

Teorem 3.2.2. $(\overline{F}, \overline{S})$, U üzerinde genişletilmiş esnek küme olsun. $(\overline{F}, \overline{S})$, U üzerinde esnek kesişimsel idealdir.

İspat. (F, S), U üzerinde esnek keişimsel ideal olduğundan $(\overline{F}, \overline{S})$, U üzerinde esnek kesişimsel idealdir.

Teorem 3.2.3. $(\overline{F}, \overline{S})$, U üzerinde genişletilmiş esnek küme olsun. $(\overline{F}, \overline{S})$, (F, S) nin bir genişlemesidir.

İspat. $a \in S$ ve $F(a) = K$ olsun. Buradan $\forall T \subseteq K$ için $a \in F_T$ olur. Bazı $T \subset K$ için $F(a) \supseteq T \supset K$. Bu ise $F(a) = K$ olması ile çelişir. O halde $\forall T \supset K$ için $a \notin F_T$ dir. $\forall T \supset K$ için $a \in F_K \subseteq \overline{F_K}$ ve $a \notin F_T$ olduğundan $\overline{F}(a) = K = F(a)$ olur. $a \in S'$ ve bazı $b \in S$ için $a = b'$ olsun.$\overline{F}(a) = \bigcup\{K : a \in \overline{F_K}, K \in ImF\} = V$ Buradan $\forall K \subseteq V$ için $a = b' \in \overline{F_K}$ ve $\forall K \supset V$ için $a = b' \notin \overline{F_K}$ olur. Böylece $\forall K \subseteq V$ için $b \in \overline{F_K}$ ve $K \supset V$ için $b \notin \overline{F_K}$ olur. Bundan dolayı $\overline{F}(b) = V$ ve buradan $\overline{F}(a) = \overline{F}(b') = \overline{F}(b) = F(b)$ olur. Böylece $(\overline{F}, \overline{S})$, (F, S) nin bir genişlemesidir.

Teorem 3.2.4. $(\overline{F}, \overline{S})$, U üzerinde genişletilmiş esnek küme olsun. (F, S) nin U üzerindeki esnek kesişimsel k-ideal olması için gerek ve yeter şart $(\overline{F}, \overline{S})$ nin U üzerinde esnek kesişimsel ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (F, S), U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olsun. Teorem 3.2.2 den $(\overline{F}, \overline{S})$ U üzerinde esnek kesişimsel idealdir. Diğer taraftan kabul edelim ki $(\overline{F}, \overline{S})$ U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. Buradan $\forall a, b \in S$ için $F(a+b) = F(0_S)$ ve $F(b) = F(0_S)$ olsun. (F, S), esnek kesişimsel ideal olduğundan $(\overline{F}, \overline{S})$,

(F, S) nin bir genişlemesidir. Böylece

$$\begin{aligned} F(a) = \overline{F}(a) &= \overline{F}(a \oplus 0_S) \\ &= \overline{F}(a \oplus b \oplus b^{'}) \\ &\supseteq \overline{F}(a \oplus b) \cap \overline{F}(b^{'}) \\ &= F(a + b) \cap F(b) \\ &= F(0_S) \cap F(0_S) \\ &= F(0_S) \end{aligned}$$

olur. Buradan $F(a) \supseteq F(0_S)$ dir. $\forall a \in S$ için $F(0_S) \supseteq F(a)$ olduğundan $F(0_S) = F(a)$ bulunur. Böylece (F, S), U üzerinde esnek kesişimsel ideal k-idealdir.

Tanım 3.2.5. $(\overline{F}, \overline{S})$, U üzerinde genişletilmiş esnek küme olsun. $x + (F, S) : S \to P(U)$ esnek kümesi $\forall a \in S$ için $(x + F)(a) = \overline{F}(a \oplus x^{'})$ ile tanımlansın. $x + (F, S)$ esnek kümesine (F, S) esnek kesişimsel idealinin yan kümesi denir.

Teorem 3.2.6. $(\overline{F}, \overline{S})$, (F, S) nin bir genişlemesi olsun. $\forall x, y \in S$ için $x + (F, S) = y + (F, S)$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{F}(x \oplus y^{'}) = F(0_S)$ olmasıdır.

İspat. $x, y \in S$ için $x + (F, S) = y + (F, S)$ olsun.

$$\begin{aligned} \overline{F}(x \oplus y^{'}) &= (y + F)(x) \\ &= (x + F)(x) \\ &= \overline{F}(x \oplus x^{'}) \\ &= \overline{F}(0_S) \end{aligned}$$

Böylece $\overline{F}(x \oplus y^{'}) = \overline{F}(0_S)$ elde edilir. Karşıt olarak $x, y \in R$ için $\overline{F}(x \oplus y^{'}) = F(0_S)$ olsun. $\forall a \in S$ için

$$\begin{aligned}(x+F)(a) &= \overline{F}(a \oplus x^{'})\\ &\supseteq \overline{F}(a \oplus x^{'} \oplus y \oplus y^{'})\\ &= \overline{F}(a \oplus y^{'}) \cap \overline{F}(x^{'} \oplus y^{'})\\ &= \overline{F}(a \oplus y^{'}) \cap \overline{F}(0_S)\\ &= \overline{F}(a \oplus y^{'})\\ &= (y+F)(a)\end{aligned}$$

olur. Buradan $x+(F,S) \supseteq y+(F,S)$ elde edilir. Benzer olarak $y+(F,S) \supseteq x+(F,S)$ elde edilir. Bundan dolayı $x+(F,S) = y+(F,S)$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.7. $(\overline{F}, \overline{S})$, U üzerinde genişletilmiş esnek küme olsun. $x, y, a, b \in S$ için $x+(F,S) = a+(F,S)$ ve $y+(F,S) = b+(F,S)$ ise

1. $x+y+(F,S) = a+b+(F,S)$
2. $x \cdot y+(F,S) = a \cdot b+(F,S)$

dir.

İspat. $x, y, a, b \in S$ için $x+(F,S) = a+(F,S)$ ve $y+(F,S) = b+(F,S)$ olsun.

1. $\overline{F}(x \oplus a^{'}) = F(0_S)$ ve $\overline{F}(y \oplus b^{'}) = F(0_S)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}\overline{F}(x \oplus y \oplus a^{'} \oplus b^{'}) &\supseteq \overline{F}(x \oplus a^{'}) \cap \overline{F}(y \oplus b^{'})\\ &= F(0_S) \cap F(0_S)\\ &= F(0_S)\\ &= \overline{F(0_S)}\end{aligned}$$

dir. Böylece $\overline{F}(x \oplus a^{'}) \cap \overline{F}(y \oplus b^{'}) = \overline{F(0_S)}$ olur. Buradan $x+y+(F,S) = a+b+(F,S)$ elde edilir.

2.

$$\begin{aligned}
\overline{F}(a\cdot b\oplus (x\cdot y)^{'}) &= \overline{F}(a\cdot b\oplus (a\cdot y)^{'}\oplus a\cdot y\oplus (x\cdot y)^{'})\\
&= \overline{F}(a\odot (b\oplus y^{'})\oplus (a\oplus x^{'})\odot y)\\
&\supseteq \overline{F}(a\odot (b\oplus y^{'})\cap F((a\oplus x^{'})\odot y))\\
&\supseteq \overline{F}(b\oplus y^{'})\cap F((a\oplus x^{'}))\\
&= F(0_S)\cap F(0_S)\\
&= F(0_S)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\overline{F}(y\oplus b^{'}) = F(0_S)$ olur. Burada $a\cdot b+(F,S) = x\cdot y+(F,S)$ elde edilir.

(F,S) esnek kesişimsel idealin yan kümelerinin kümesi $S/(F,S)$ üzerindeki "+" ve "·" ikili işlemleri sırasıyla

$$x+(F,S)+y+(F,S) = x+y+(F,S)$$

ve

$$[x+(F,S)]\cdot[y+(F,S)] = x\cdot y+(F,S)$$

ile tanımlansın. $S/(F,S)$ bu işlemler altında bir k-yarıhalkadır ve birimi $1_S+(F,S)$ dir.

Tanım 3.2.8. (F,S) esnek kesişimsel idealin yan kümelerinin kümesi $S/(F,S)$ halkasına bölüm halkası denir.

3.3. Esnek Kesişimsel İdealler Üzerinde İzomorfizma Teoremleri

Bu bölümde esnek kesişimsel idealler üzerindeki izomorfizma teoremleri inceleyecelenecektir.

Teorem 3.3.1. $\varphi : S\to M$ bir k-yarıhalka epimorfizması olsun. $(\overline{F},\overline{S})$, U üzerinde genişletilmiş esnek küme ve $F_S\subseteq Ker(\varphi)$ olsun. $\forall x\in S$ için $g(x) = x+(F,S)$ olmak üzere $\varphi = f\circ g$ olacak şekilde $f : S/(F,S)\to M$ bir tek epimorfizma vardır.

İspat. $\forall x\in S$ için $f : S/(F,S)\to M$ fonksiyonu $f(x+(F,S)) = \varphi(x)$ şeklinde tanımlansın. Şimdi f nin iyi tanımlılığını gösterelim. $\forall x+(F,S), y+(F,S)\in$

$S/(F,S)$ için $x+(F,S) = y+(F,S)$ olsun. Teorem 3.3.2 den $\overline{F}(x \oplus y^{'}) = F(0_S) = \overline{F}(0_S)$ elde edilir. Buradan $x+y^{'} \in \overline{F_{\overline{S}}}$ dir. $\overline{F_{\overline{S}}} = \overline{F_S} \subseteq \overline{Ker(\varphi)} = Ker\overline{\varphi}$ olduğundan $\overline{\varphi}(x+y^{'}) = 0_{\overline{S}}$ dır. O halde $\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}(y)$ olur. Buradan $\varphi(x) = \varphi(y)$ olur. Böylece $f(x+(F,S)) = f(y+(F,S))$ elde edilir. φ örten olduğundan f de örtendir. f nin bir homomorfizma olduğu kolayca gösterilir. Ayrıca $\forall x \in S$ için $\varphi(x) = f(x+(F,S)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ dir. Son olarak, f nin tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $h : S/(F,S) \to M$ olacak şekilde $\varphi = h \circ g$ olsun.$\forall x \in S$ için $f(x+(F,S)) = \varphi(x) = (h \circ g)(x) = h(x+(F,S))$ olur. Böylece $f = h$ elde edilir.

Lemma 3.3.2. $\varphi : S \to M$ bir k-yarıhalka epimorfizması olsun. (F,S) ve (G,M), U üzerinde iki esnek kesişimsel ideal olsun. (F,S) ve (G,M) nin seviye kümeleri sırasıyla S ve M nin k-ideali olsun. $(\varphi(F), M)\widetilde{\subset}(G,M)$ olsun. $(\overline{\varphi}(\overline{F}), \overline{M})\widetilde{\subseteq}(\overline{G}, \overline{M})$ dir.

İspat. İspat kolaylıkla gösterilir.

Teorem 3.3.3. $\varphi : S \to M$ bir k-yarıhalka homomorfiması olsun. (F,S) ve (G,M) Lemma 3.3.2 de ki gibi tanımlansın.
$F(0_S) = G(0_M)$ ise diyagramı değişmeli olacak şekilde $\varphi^* : S/(F,S) \to M/(G,M)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ S/(F,S) \arrow[r, "\varphi^*"] & M/(G,M) \end{tikzcd}$$

homomorfizması vardır.

İspat. $\varphi^* : S/(F,S) \to M/(G,M)$ fonksiyonu $\varphi^*(x+(F,S)) = \varphi(x) + (G,M)$ şeklinde tanımlansın. Buradan $x+(F,S) = y+(G,M)$ ise Teorem 3.2.6 dan

$\overline{F}(x \oplus y') = F(0_S)$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\overline{G}(\overline{\varphi}(x) \oplus (\overline{\varphi}(y))') &= \overline{G}(\overline{\varphi}(x \oplus y')) \\
&= \overline{\varphi}^{-1}(\overline{G})(x \oplus y') \\
&= \overline{F}(x \oplus y') \\
&= F(0_S) \\
&= G(0_M)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\overline{G}(\overline{\varphi}(x) \oplus (\overline{\varphi}(y))') = \overline{G}(\varphi(x) \oplus \varphi(y)') = G(0_M)$$

olur ve bundan dolayı $\varphi(x)+(F,S) = \varphi(y)+(G,M)$ olur. Böylece φ^* iyi tanımlıdır. $\forall x + (F,S), Y + (F,S) \in S/(F,S)$ için

$$\begin{aligned}
\varphi^*((x + (F,S) + y + (F,S)) &= \varphi^*((x + y + (F,S)) \\
&= \varphi(x + y) + (G,M) \\
&= \varphi(x) + \varphi(x) + (G,M) \\
&= \varphi(x) + (G,M) + \varphi(y) + (G,M) \\
&= \varphi^*(x + (F,S)) + \varphi^*(y + (F,S))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi^*((x + (F,S) \cdot y + (F,S)) &= \varphi^*((x \cdot y + (F,S)) \\
&= \varphi(x \cdot y) + (G,M) \\
&= \varphi(x) \cdot \varphi(x) + (G,M) \\
&= \varphi(x) + (G,M) + \varphi(y) + (G,M) \\
&= \varphi^*(x + (F,S)) \cdot \varphi^*(y + (F,S))
\end{aligned}$$

olduğundan φ^* bir homomorfizmadır.

Sonuç 3.3.4. $\varphi : S \to M$ bir k-yarıhalka epimorfizması olsun. φ^* homomorfizmasının bir izomorfizma olması için gerek ve yeter şart $\mu : M \to M/(G, M)$, $\mu(z) = z + (G, M)$ olmak üzere (F, S) nin $\mu \circ \varphi$-sabit olmasıdır.

Lemma 3.3.5. $\varphi : S \to M$ bir k-yarıhalka epimorfizması ve (G, M), U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. $(\varphi^{-1}(G), S) = (F, S)$ olsun. (G, S) bütün seviye kümelerinin k-ideal olması için gerek ve yeter şart $(\varphi^{-1}(G), S)$ nin bütün seviye kümelerinin k-ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (G, M) esnek kesişimsel idealinin bütün seviye kümeleri k-ideal olsun. $\forall K \in P(U)$ olmak üzere $a, b \in S$ için $a + b \in F_K$ ve $b \in F_K$ olsun.$F(a + b) \supseteq K$ ve $F(b) \supseteq K$ dir. $(\varphi^{-1}(G), S) = (F, S)$ olduğundan $G(\varphi(a + b)) \supseteq K$ ve $G(\varphi(b)) \supseteq K$ olur. (G, M) nin tüm seviye kümeleri k-ideal olduğundan $G(\varphi(a)) \supseteq K$ elde edilir. Buradan $F(a) \supseteq K$ dir ve $a \in F_K$ olur. Böylece F_K, S nin bir k-idealidir.

Kabul edelim ki $(\varphi^{-1}(G), S)$ esnek kesişimsel idealinin tüm seviye kümeleri k-ideal olsun. $\forall K \in P(U)$ için $G(a + b) \supseteq K$ ve $G(b) \supseteq K$ $x, y \in M$ olsun. φ örten olduğundan $\varphi(a) = x$ ve $\varphi(b) = y$ olacak şekilde $a, b \in S$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} G(x + y) &= G(\varphi(a) + \varphi(b)) \\ &= G(\varphi(a + b)) \\ &= \varphi^{-1}(G)(a + b) \\ &\supseteq K \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G(y) &= G(\varphi(b)) \\ &= \varphi^{-1}(G)(b) \\ &\supseteq K \end{aligned}$$

olur. Buradan $\varphi^{-1}(G)(a+b) \supseteq K$ ve $\varphi^{-1}(G)(b) \supseteq K$ elde edilir. Kabulümüzden $\varphi^{-1}(G)(x) \supseteq K$ olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} G(x) &= G(\varphi(a) \\ &= \varphi^{-1}(G)(a) \\ &\supseteq K \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece G_K, M nin bir k-idealidir.

Lemma 3.3.6. φ ve (G, M), Lemma 3.3.5 de ki gibi tanımlansın. $(\varphi^{-1}(G), S) = (F, S)$ olsun. Buradan $(\overline{F}, \overline{S}) = (\overline{\varphi}^{-1}(\overline{G}), \overline{S})$ dir.

İspat. İspat kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.3.7. φ ve (G, M), Lemma 3.3.5 de ki gibi tanımlansın. $(\varphi^{-1}(G), S) = (F, S)$ olsun. Buradan $S/(F, S) \cong M/(G, M)$ dir.

İspat. $(\varphi(F), M) = (\varphi(\varphi^{-1}(G)), M) = (G, M)$ ve $F(0_S) = G(0_M)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\forall z \in M$ için $\mu(z) = z + (G, M)$ olmak üzere $\forall a, b \in S$ için $(\mu \circ \varphi)(a) = (\mu \circ \varphi)(b)$ olsun. Lemma 3.3.6 den

$$\begin{aligned} \varphi(a) + (G, M) = \varphi(b) + (G, M) &\Rightarrow \overline{G}(\varphi(a) \oplus \varphi(b)') = G(0_M) = F(0_S) \\ &\Rightarrow \overline{G}(\overline{\varphi}(a) \oplus \overline{\varphi}(b)') = G(0_M) = F(0_S) \\ &\Rightarrow \overline{G}(\overline{\varphi}(a + b')) = G(0_M) = F(0_S) \\ &\Rightarrow (\overline{\varphi})^{-1}(\overline{G})(a + b') = G(0_M) = F(0_S) \\ &\Rightarrow \overline{F}(a + b') = F(0_S) \\ &\Rightarrow a + (F, S) = b + (F, S) \end{aligned}$$

Böylece (F, S), $\mu \circ \varphi$-sabit olur. Sonuç 3.3.4 den $S/(F, S) \cong M/(G, M)$ dir.

3.4. Esnek Kesişimsel Maksimal k-İdealler

Bu bölümde k-yarıhalkalar üzerinde esnek kesişimsel maksimal idealleri tanımlanacak ve bazı özelliklerini araştırılacaktır.

Tanım 3.4.1. S bir k-yarıhalkası olsun. S nin bütün alt kümeleri k-ideal olmak üzere (F, S), U üzerinde bir esnek kesişimsel k-ideal olsun.

1. $F(0_S) = U$

2. $F(1_S) \subset F(0_S)$

3. Bazı $a \in S$ için $F(a) \subset F(0_S)$ olduğu zaman bazı $s \in S$ için $\overline{F}(1_S \oplus (s \cdot a)^{'}) = F(0_S)$

şartlarını sağlayan (F, S) esnek kesişimsel idealine esnek kesişimsel maksimal k-ideal denir.

Teorem 3.4.2. S yarıhalkasının bütün alt kümeleri k- ideal olmak üzere (F, S), U üzerinde bir esnek kesişimsel k-ideal olsun. (F, S), U üzerinde bir esnek kesişimsel maksimal k-ideal olması için gerek ve yeter şart $(\overline{F}, \overline{S})$ nin U üzerinde esnek kesişimsel maksimal k-ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (F, S),U üzerinde bir esnek kesişimsel maksimal k-ideal olsun. O halde

1. $\overline{F}(0_S) = F(0_S) = U$

2. $\overline{F}(1_S) = F(1_S) \subset F(0_S) = \overline{F}(0_S)$

şartlarını sağlar. Şimdi üçüncü şartının sağlandığını gösterelim. $\overline{F}(a) \subset \overline{F}(0_S)$ olsun. Buradan $a \in \overline{S}$ olduğundan ya $a \in S$ ya da $a \in S^{'}$ olur. $\overline{F}(a) = F(a)$ ve $\overline{F}(a) \subset \overline{F}(0_S) = F(0_S)$ olduğundan $F(a) \subset F(0_S)$ olur. O halde bazı $s \in S$ için $\overline{F}(1_S \oplus (s \cdot a)^{'}) = F(0_S) = \overline{F}(0_S)$ elde edilir. $a \in S^{'}$ ise $a = x^{'}$ olacak şekilde $x \in S$ vardır ve böylece $\overline{F}(a) = \overline{F}(x^{'}) = \overline{F}(x) = F(x) \subset F(0_S)$ olur. Buradan bazı $s \in S$ için $\overline{F}(1_S \oplus (s \cdot a)^{'}) = F(0_S) = \overline{F}(0_S)$ elde elde edilir. O halde 3. özelliği de sağlanır. Bundan dolayı $(\overline{F}, \overline{S})$ nin U üzerinde esnek kesişimsel maksimal k-idealdir.
Diğer taraftan kabul edelim ki $(\overline{F}, \overline{S})$, U üzerinde esnek kesişimsel maksimal k-ideal olsun.

1. $\overline{F}(0_S) = F(0_S) = U$

2. $\overline{F}(1_S) = F(1_S) \subset F(0_S) = \overline{F}(0_S)$

şartları sağlansın. Şimdi 3. özelliğin sağlandığını gösterelim.

$F(a) \subset F(0_S)$ olsun. Buradan $F(a) = \overline{F}(a) \subset F(0_S) = \overline{F}(0_S)$ olur. O halde $\overline{F}(a) \subset \overline{F}(0_S)$ elde edilir. Böylece $\overline{F}(1_S \oplus (s \cdot a)') = F(0_S)$ sağlanır. Bundan dolayı (F, S), U üzerinde bir esnek kesişimsel maksimal k-idealdir.

Teorem 3.4.3. $\varphi : S \to M$ bir k-yarıhalka endomorfizması olsun. (G, M), U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal olsun.(G, M), U üzerinde bir esnek kesişimsel maksimal k-ideal olması için gerek ve yeter şart $(\varphi^{-1}(G), S)$, U üzerinde esnek kesişimsel maksimal k-ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (G, M), U üzerinde esnek kesişimsel maksimal k-ideal olsun. Teorem 3.1.12 den $(\varphi^{-1}(G), S)$, U üzerinde esnek kesişimsel k-ideal olduğunu biliyoruz. Şimdi esnek kesişimsel maksimal k-ideal olduğunu gösterelim.

1. $\varphi^{-1}(G)(0_S) = G(\varphi(0_S)) = G(0_M) = U$

2. $\varphi^{-1}(G)(1_S) = G(\varphi(1_S)) = G(1_M) \subset G(0_M) = F(\varphi(0_S)) = \varphi^{-1}(G)(0_S)$ olur. Buradan $\varphi^{-1}(G)(1_S) \subset \varphi^{-1}(G)(0_S)$ elde edilir.

3. Bazı $a \in S$ için $\varphi^{-1}(G)(a) \subset \varphi^{-1}(G)(0_S)$ olsun. Buradan $G(\varphi(a)) \subset G(\varphi(0_S)) = G(0_M)$ elde edilir. Yani $G(\varphi(a)) \subset G(0_M)$ dir.

(G, M) esnek kesişimsel maksimal k-ideal olduğundan

$$\overline{G}(1_M \oplus (\varphi(s) \cdot \varphi(a))') = G(0_M)$$
$$\overline{G}(\varphi(1_S) \oplus \varphi(s \cdot a)') = G(0_M)$$
$$\overline{G}(\overline{\varphi}(1_S \oplus s \cdot a)') = G(\varphi(0_S))$$
$$\overline{\varphi}^{-1}(\overline{G}(1_S) \oplus (s \cdot a)' = \varphi^{-1}(G)(0_M)$$

olur. Böylece $(\varphi^{-1}(G), S)$, U üzerinde bir esnek kesişimsel maksimal k-idealdir.

Diğer taraftan $(\varphi^{-1}(G), S)$, U üzerinde bir esnek kesişimsel maksimal k-ideal olsun. Teorem 3.1.12 den (G, M), U üzerinde esnek kesişimsel k-idealdir.

1. $G(0_M) = G(\varphi(0_S)) = \varphi^{-1}(G)(0_S) = U$

2. $G(1_M) = G(\varphi(1_S)) = \varphi^{-1}(G)(1_S) \subset \varphi^{-1}(G)(0_S) = G(\varphi(0_S)) = G(0_M)$ buradan $G(1_{S'}) \subset G(0_M)$ elde edilir.

3. $x \in M$ için $G(x) \subset G(0_M)$ olsun. $\varphi(a) = x$ olacak şekilde bir $a \in S$ vardır.Böylece $G(x) = G(\varphi(a)) = \varphi^{-1}(G)(a) \subset G(0_S)$ olduğundan $\varphi^{-1}(G)(1_S \oplus (a \cdot s)^{'}) = \varphi^{-1}(G)(0_s) = G(\varphi(0_S)) = G(0_M)$ elde edilir.

Buradan $\varphi(s) = k$ olmak üzere Teorem 3.2.6 ile

$$
\begin{aligned}
G(0_M) &= (\overline{\varphi})^{-1}(\overline{G}(1_S \oplus (a \cdot s)^{'}) \\
&= \overline{G}(\overline{\varphi}(1_S \oplus (a \cdot s)^{'}) \\
&= \overline{G}(\overline{\varphi}(1_S) \oplus \overline{\varphi}(a \cdot s)^{'}) \\
&= \overline{G}(\varphi(1_S) \oplus (\varphi(a) \cdot \varphi(s))^{'}) \\
&= \overline{G}(1_M \oplus (x \cdot k)^{'}))
\end{aligned}
$$

olur. Sonuç olarak (G, M), U üzerinde bir esnek kesişimsel maksimal k-idealdir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak esnek kümeler, esnek kesişimsel gruplar ve esnek kesişimsel halkalarla ilgili kısaca bilgi verildi. Sonra, yarıhalkalar üzerinde esnek kesişimsel k-idealler tanımlanarak bazı cebirsel özellikleri incelendi. Daha sonra, k-yarıhalkarın bölüm yapıları tanımlandı. Bölüm yapıları yardımıyla izomorfizma teoremleri incelendi. Son olarak, esnek kesişimsel maksimal k-idealleri tanımlayarak bazı cebirsel özellikleri araştırıldı.

Bu çalışma genişletilerek bulanık esnek kümeler yardımıyla yarıhalkalar üzerinde bulanık esnek kesişimsel k-idealler tanımlanarak bazı cebirsel özellikleri araştırılabilir. Sonra, bölüm yapıları yardımıyla bulanık esnek kümeler üzerinde izomorfizma teoremleri incelenebilir. Daha sonra ise bulanık esnek kesişimsel maksimal k-idealleri tanımı kullanılarak cebirsel özellikleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F. ve Tanay, B., 2010. Soft sets and soft rings. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3458-3463.

Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007. Soft sets and soft groups. Informations Sciences, 177, 2726-2735.

Ali, M.I, Feng, F., Liu, X. Min, W.K ve Shabir M., 2009. One some new operation in soft theory, Computers and Mathematics with Applications, 57 (9), 1547-1553.

Ali, M.I., Shabir, M., ve Naz M., 2011, Algebratic structures of soft sets associated with new operations. Computers and Mathematics with Applications 61, 2647-2654.

Alimoradi, M.R., Rezaei, R. ve Rahimi M., 2012. Some note on ideal in soft rings. Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 6 (3), 717-721.

Atagün, A. O. ve Sezgin, A., 2011. Soft substructures of rings, fields and modules. Computers and Mathematics with Applications, 61 (3), 592-601.

Aygünoğlu, A. ve Aygün, H., 2009. Indroduction to fuzzy soft groups. Computers and Mathematics with Applications, 58, 1279-1286.

Babitha, K.V. ve Sunil, J.J., 2010. Soft set relations and functions, Computers and Mathematics with Applications, 60 (7), 1840-1849.

Burton, D.M, 1970. A First Course in Rings and İdeals, Addison-Wesleyi Reading, MA.

Chen, D., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S. ve Wang X., 2005. The parameterization reduction of sets and its application. Computers and Mathematics with Applications. 49, 757-763.

Chun, Y. B., Kim, H. S., 1983. A study on the structure of semiring, J. Natural Sei.Res.Inst., 11, 69-74.

Chun , Y. B., Kim H.S., 1985. Isomorphism theoremin k-semiring, Yonsei Nonchong 21, 1-9.

Çağman N., Çıtak, F. ve Aktaş, H., 2012. Soft int-group and its applications to group theory. Neural Computing and Applications, 21 (1), 151-158.

Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S., 2010. Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. Turkish Journal of Fuzzy Systems, 1 (1), 21-35.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010a. Soft matrix theory and decision making, Computers and Mathematics with Application, 59, 3308-3314.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010b. Soft set theory and uni-int decision making, Eur. J. Oper. Res., 207, 847-855.

Çağman, N., Enginoğlu, S. ve Çıtak, F. 2011a. Fuzzy soft set theory and its applications. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 8 (3), 137-147.

Çağman, N., Enginoğlu, S. ve Çıtak, F., 2011b. FP-soft set theory and its applications. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2 (2), 219-226.

Çıtak, F., 2018. Soft k-uni ideals of semirings and its algebraic applications. Journal of the Institute of Science and Technology, 8 (4), 281-294.

Çıtak, F. ve Çağman, N., 2015. Soft int-rings and its algebraic applications. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 28, 1225-1233.

Çıtak, F. ve Çağman N., 2017. Soft k-int-ideals of semiring and its algebraic structures. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 13 (4), 531-538.

Feng, F.,2011. Soft rough sets applied to multicriteria group decision making. Ann. Fuzzy Math. Inform., 2, 69-80.

Feng, F., Li C.X., Davvas, B., Leoreanu-Fotea, V. ve Ali, M.İ., 2010, 2011. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach, Soft Computing, 14, 899-911.

Feng, F., Li C.X., Davvas, B., Leoreanu-Fotea, V. ve Jun, Y.B., 2011. Soft sets and softs rough sets, Infor. Sci., 181 (6), 1125-1137.

Feng, F., Jun, Y. B. ve Zhao, X., 2008. Soft semiring. Computers and Mathematics with Applications, 10, 10-16.

Henriksen, M., 1958. İdeals in semiring with commutative addition. Amer. Math. Soc. Notices, 5, 321.

Golan, J.S., 1992. The theory of semirings with applications in mathematics and theoritical. Computer Science and Tecnical, U.K.

Jana, C. ve Pal, M., 2016. Application of new soft intersection set on groups. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 11 (6), 923-944.

Jun, Y. B., 2008. Soft BCK/BCI-algebras. Computer and Mathematics with Applications, 56 1408-1413.

Jun, Y. B. ve Park, C. H., 2008. Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras, Information Sciences, 178, 2466-2475.

Jun, Y.B., Lee, K,J. ve Zhan, J., 2009. Soft p-ideals of soft BCI-algebras. Comput. Math. Appl., 58, 2060-2068 .

Kazancı, 0., Yılmaz, Ş. ve Yamak S., 2010. Soft sets and soft BCH-algebras. Hacet. J. Math. Stat., 39, 205-2017.

La Torre, DR., 1965. On h-ideals and k-ideals in Hemirings, Publicationes Mathematicae Debrecen, 12, 219-226.

Lee, J. H., Kong, I. S. ve Jung J. U. 2014. Generalized int-soft subsemigroups. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 8 (6), 869-887.

Ma, X., Liu, Q.ve Zhan, J., 2017. A survey of decision making methods based on certain hybrid of set models. Artificial İntelligence Review, 47, 507-530 .

Ma, X., Zhan, J. ve Ali, M.İ.,2017. Application of a Kind of Novel Z-soft Fuzzy rough ideals to hemirings. Journal of İntelligent and Fuzzy Systems, 32(3), 1-12.

Maji, P.K., Biswas R. ve Roy, A.R., 2003. Soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 45, 555-562.

Majumdar, P.ve Samanta, S.K., 2010. On soft mapping. Computers and Mathematics with Applications, 60 (9), 2666-2672.

Meng, D., Zhang, X. ve Qin, K., 2011.Soft rough fuzzy sets and soft fuzzy rough sets Comput. Math. Appl., 62, 4635-4645.

Molodtsov, D., 1999. Soft set theory-first result. Computers and Mathematics with Applications, 37, 19-31.

Molodtsov, D.A.,Yu., V., Leonov ve Kovkov, D.V., 2006. Soft sets technique and its application.Nechetkie Sistemi i Myakic Vychisleniya, 1 (1), 8-39.

Pawlak Z., 1982. Rough sets. Int. J. Inf. Comp. Sci., 11, 341-356.

Shabir, M., M.İ., Ali ve Shaheen T., 2013. Another approach to soft rough sets. Knowl-Based Syst., 40, 72-80.

Sezgin, A., 2017. Characterizations of certain classes of semigroups via soft intersection ideals. Italian Journal of Pure and Applied Mafhematics, 38 (1).

Sezgin, A., Atagün, A.O., and Çağman, N., 2012. Union soft substructures of near-rings and N-groups. Neural Computing and Application, 21 (1), 133-143.

Sezgin, A., Çağman, N. ve Çıtak, F., 2018. α-inclusions applied to group theory via soft and logic. Faculty of Scienses Universty of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics, 68 (1), 334-352.

Sezgin, Sezer. A., 2012. Soft union rings, ideal and bi-ideals; a new approach to ring theory I, Knowledge-Based Systems, 36, 300-314.

Steinfeld, O., 1978.Quasi-ideals in ring and semigroup. Akademia Kiado, Budabest, 1978.

Sezgin, A. ve Atagün, A.O., 2011. On operations of soft sets. Comput. Math. Appl., 61 (5), 1457-1467.

Sezgin, A., Atagün, A.O. ve Aygün E., 2011. A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings. Filomat, 25, 53-68.

Sun, B. ve Ma, W., 2014. Soft fuzzy rough sets and its applications in decision making. Artificial Intelligence Review, 41, 67-80.

Sun, Q. M., Zhang, Z.L. ve Liu, J., 2008. Soft sets and soft modules. Lecture Notes in Computer Science, 5009, 403-409.

Tuncay, M. ve Sezgin A., 2016. Soft union ring and its applications to ring theory. International Journal of Computer Application, 151 (9), 7-13.

Xiao, Q.M. ve Zhang, G., 2006. Rough prime ideals and rough fuzzy prime ideals in the semigroups. Inform. Sci., 176, 725-733.

Zou. Y. ve Xiao Z., 2008. Data analysis approaches of soft sets under incomplete information. Knowledge Based Systems, 21, 941-945.

Zhan J. Liu. Q. ve Herawan. T., 2017. A novel soft rough set: soft rough hemirings and its multicriteria group decision making. Applied Soft Computing, 54, 393-402.

Zhan, J. ve Zhu, K., 2017. Z- soft rough fuzzy ideals of hemirings and corresponding decision making. Soft Computing, 21, 1923-1936.

Zhan, J., Ali, M.I ve Mehmood, N., 2017. On a novel uncertain of set model: Z-soft fuzzy rough set model and corresponding decision making methods. Applied Soft Computing, 56, 446-457.

Zhang, G., Li, Z. ve Qin, B., 2016. A method for multi attribute decision making appling soft rough sets. J. Intell. Fuzzy Systems 30 1803-1815

Zhang J., Zhou X. ve Xiang, D.,2016. Roughness in-ary semigroups based on fuzzy ideals. J. Intell. Fuzzy Syst., 30, 2833-2841.

Zhan, J., Jun, Y.B., 2010.Soft BL-algebras based on fuzzy sets. Computers and Mathematics with Applications, 59 (6) 2037-2046.

Zhan, J., ve Xu Y, 2011. Soft lattice implications algebras based on fuzzy sets. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40 (4), 483-492.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ülkü DEVELİ

Doğum Tarihi : 03.12.1990

Doğum Yeri : Reşadiye/TOKAT

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 05539551060

E-posta : ulku-dvl@hotmail.com

Eğitim:

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2013
Lise	Reşadiye Fatih Anadolu Lisesi	2009