PERİYODİK STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ

HAMDİ TAPAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABILIM DALI
Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU
2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PERİYODİK STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ

HAMDİ TAPAR

TOKAT
2019

Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU danışmanlığında, Hamdi TAPAR tarafından hazırlanan bu çalışma 26/04/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU Imza:
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR Imza:
Tokat Gaziosmanpaşa Universitesi
Üye: Prof. Dr. Zülfigar AKDOĞAN İmza:
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Üye : Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR İmza:
Amasya Üniversitesi
Üye : Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ İmza:
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ

Enstitü Müdürü

10/05/2019

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

HAMDİ TAPAR
26/04/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PERİYODİK STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ

HAMDİ TAPAR

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABILIM DALI

Danışman : **Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU**
İkinci Danışman : **Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR**

Bu tez çalışmasında; Periyodik Sturm-Liouville problemi çalışışmıştır. Bu tez çalışma sı dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, Sturm-Liouville teorisinin öneminden, kullanım alanlarından ve bu konuda literatürde yer alan çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, bu tez çalışması ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümünde Periyodik Sturm-Liouville probleminin temel özellikleri incelenmiştir.

2019, 38 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Sturm-Liouville Problemleri, Özdeğerler, Özfonksiyonlar, Periyodik sınır şartları.

ABSTRACT

M. Sc. THESIS

PERIODIC STURM-LIOUVILLE PROBLEMS

HAMDİ TAPAR

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL of NATURAL and APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : **Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU**
Co-Supervisor : **Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR**

In this thesis, the Periodic Sturm-Liouville problem were studied. This present work has consisted of four chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, the importance and use of the theory of Sturm-Liouville field and studies in the literature are mentioned briefly. In the third chapter, basic definitions and theorems concerning of this thesis are given. In the fourth chapter, the main characteristics of the periodic Sturm-Liouville problem are investigated.

2019, 38 pages

KEYWORDS: Sturm-Liouville Problems, Eigenvalues, Eigenfunctions, Periodic boundary conditions

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmamın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Oktay MUHTAROĞLU' na minnettar lığımı sunarım. Yüksek lisans çalışmalarımda bana yardımcı olan sayın Hayati OLĞAR hocama özellikle teşekkür etmeyi kendime borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen bölümümüzün değerli hocalarına şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan kıymetli anne ve babama, beni bu tarz çalışmalara teşvik eden ve sonsuz desteklerini benden esirgemeyen sevgili eşime teşekkür ederim.

HAMDİ TAPAR

Nisan 2019

1. GİRİŞ

Fizikte ve diğer doğa bilimlerinde ortaya çıkan yeni yeni problemlerin Fourier yöntemi ile çözebilmek için uygun Sturm Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının araştırılması ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle Sturm-Liouville teorisi iki asra yakın bir süredir önemini git-gide daha da arttırmaktadır. Başlangıçta ısı yayılımı sürecinin incelenmesinde ortaya çıkan Sturm-Liouville problemi günümüzde fiziğin neredeyse her alanında başarılı bir biçim de uygulama alanı bulmaktadır. Sturm-Liouville teorisinin temelleri ondokuzuncu yüzyılın ortalarında bu teoriye ismini veren C. Sturm ve J. Liouville tarafından atılmıştır. Örneğin ℓ uzunluğundaki bir çubuğu, başlangıcı orijinde olmak kaydı ile apsis ekseninin pozitif yönüne yerleştire lim. Koordinatı x olan$(0 \leq x \leq \ell)$ noktada t anındaki $(t \geq 0)$ sıcaklığını $u(x,t)$ ile gösterelim. Çubuğun, ekseni dik kesen A alanlı düzgün bir kesitinin olduğunu ve homojen malzemeden yapıldığını kabul edelim. Ayrıca çubuğun dik kesitinin oldukça küçük alanlı olduğu, u sıcaklığının her bir dik kesit üzerinde sabit olduğu, çubuğun yüzeyinin ise ısı geçirmeyen bir malzeme ile yalıtıldığı durumunu göz önüne alalım. Bu durumda ısı akışı x ekseni yönünde olacaktır. Santimetrekaredeki saniye başına kaloriyi temsil eden ısı akışını $F(x,t)$ ile gösterirsek, fiziksel yasalar gereği

$$F(x,t) \;=\; -K\frac{\partial u}{\partial x}$$

formülü elde edilir. Burada K ile çubuğun oluştuğu homojen malzemenin termik iletkenliği gösterilmiştir. Ayrıca δ ile bu malzemenin yoğunluğunu, c ile öz ısısını (yani $1gr$ malzemenin sıcaklığını 1^0 artırmak için gerekli ısı miktarı (kalori)) gösterir sek, çubuğun yeteri kadar küçük $[x, x+\Delta x]$ parçasının ısı içeriği (sıfır sıcaklıktan $u(x,t)$ sıcaklığına kadar yükseltmek için ısı miktarı) için

$$Q(t) = \int_{x}^{x+\Delta x} c\delta A u(x,t)dx \tag{1.0.1}$$

formülü elde edilir. Bu küçük parçadaki ısının R akış oranı

$$R = A\Phi(x,t) - A\Phi(x+\Delta x,t) = KA\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. (1.0.1) eşitliğinde; ısı, parçaya sadece iki uçtan girip çıktığı için $Q'(t) = R$ eşitliği sağlanır. Diğer taraftan (1.0.1) deki integralin türevini alırsak

$$Q'(t) = \int_{x}^{x+\Delta x} c\delta A \, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx$$

elde edilir. Malzemenin ısı yayılımını $K = \frac{K}{c\delta}$ ile gösterirsek ve de $Q'(t) = R$ olduğunu dikkate alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

kısmi diferensiyel denklemini elde ederiz. Başlangıç $t = 0$ anında çubuğun x nokta sındaki sıcaklığını $f(x)$ ile gösterirsek

$$u(x,0) = f(x)$$

başlangıç şartını elde ederiz.

Çubuğun uç noktalarındaki sıcaklığı hep sıfır olarak kabul edersek (bunun için uç noktaları buz bloğuna bağlayabiliriz)

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0$$

sınır şartları elde edilir. Böylece bir fiziksel sürecin

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad t = 0 \; , \quad 0 \le x \le \ell \tag{1.0.2}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{1.0.3}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \tag{1.0.4}$$

biçiminde matematiksel modeli kurulmuş olur.

Basit durum olan $K = 1$ durumunu araştıralım. Bu problemi Fourier yöntemi ile çözersek, yani çözümü

$$u(x,t) = y(x)z(t)$$

biçiminde ararsak (1.0.2) denklemi gereği

$$z'(t)y(x) \;=\; z(t)y''(x) \tag{1.0.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} \tag{1.0.6}$$

biçiminde yazalım. (1.0.6) denkleminin sol tarafı sadece t değişkenine sağ tarafı ise sadece x değişkenine bağlı olduğu için (1.0.6) nın hem sol hemde sağ tarafı sabit fonksiyondur. Bu sabiti λ ile gösterelim.

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} \;=\; \lambda \tag{1.0.7}$$

Böylece iki tane adi diferansiyel denklem elde edilmiş oldu:

$$z'(t) \;=\; \lambda z(t) \qquad \text{ve} \qquad y''(x) \;=\; \lambda y(x).$$

(1.0.4) sınır şartından

$$z(t)y(0) = 0 \qquad \text{ve} \qquad z(t)y(l) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$y(0) = y(l) = 0$$

elde edilir. Böylece $y \;=\; y(x)$ fonksiyonu için

$$-y''(x) \;=\; \lambda y(x) \tag{1.0.8}$$

$$y(0) \;=\; 0 \quad , \quad y(\ell) \;=\; 0 \tag{1.0.9}$$

biçiminde en basit Sturm-Liouville problemi elde edilir. Burada λ ayırma sabitidir ve spektral parametre ve ya özdeğer parametresi olarak bilinmektedir.
(1.0.8)-(1.0.9) probleminin sıfırdan farklı çözümü ancak ve ancak λ nın

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, ...$$

değerleri için mevcuttur ve bu çözümler

$$y_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad , \quad n = 1, 2, 3, ...$$

biçimindedir. λ_n lere özdeğerler, $y_n(x)$ çözüm fonksiyonlarına ise özfonksiyonlar denir. $z_n = z_n(t)$ fonksiyonu için uygun diferensiyel denklemler

$$z_n' + \frac{n^2\pi^2 K}{\ell^2} z_n = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, ...$$

biçiminde elde edilir. Bununda çözümü

$$z_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{\ell^2}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, ...$$

biçimindedir. O halde

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{\ell^2}} . \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

fonksiyonu hem (1.0.2) denklemini hem de (1.0.4) sınır koşullarını sağlar. Bunu (1.0.3) de yazarsak

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

Fourier serisi elde edilir. O halde Fourier serisi teorisinden yararlanarak

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x). \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Fourier katsayıları bulunur. Sonuç olarak (1.0.2)-(1.0.4) probleminin çözümünü aşağıdaki seri biçiminde bulmuş oluruz.

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x).\sin(\frac{n\pi x}{\ell})dx\right)e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{\ell^2}}.\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

Sonuç olarak görüyoruz ki, somut bir fiziksel problemi çözmek için uygun Sturm - Liouville probleminin aşağıdaki özelliklerini elde etmek ihtiyacı ortaya çıkmaktadır.

1. Özdeğerlerini bulmak,
2. Özfonksiyonlarını bulmak,
3. Verilmiş fonksiyonu özfonksiyonların serisine açmak.

Bu örnek bile Sturm-Liouville Teorisinin ne kadar büyük bir öneme sahip olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.
Matematiksel fiziğin birçok probleminin Fourier yöntemi ile çözümünü seri biçiminde elde etmek için uygun spektral problemin en temel spektral özelliklerinin bulunması gerekir. Fiziksel süreçlerin matematiksel modeli kurulurken genellikle ikinci mertebe den kısmi türevli lineer diferensiyel denklemlerin ortaya çıktığı iyi bilinmektedir. Böyle problemlere uygun spektral problemler ise Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılmaktadır. Son yıllarda farklı doğa bilimlerinde ortaya çıkan süreçlerin matematiksel modeli kurulurken yeni tipten, yani klasik olmayan kısmi türevli denk lemler için başlangıç ve sınır-değer problemleri ile karşılaşılmaktadır (Atkinson, 1964; Belinsky ve Dauer, 1997; Birkhoff, 1908; Rodman, 1989). Bu durum beraber inde Sturm-Liouville problemlerinin de farklı yollarda genelleştirilmesi ihtiyacını ortaya çıkarmaktadır

2. LİTERATÜR ÖZETİ

C. Sturm ve J. Liouville'nin (Sturm ve Liouville, 1837), 19. yüzyılın ortalarında yaptıkları çok önemli çalışmalardan sonra bu konu birçok matematikçi ve fizikçinin dikkatini çekmiştir. Özellikle de kuantum mekaniğinde ortaya çıkan ünlü Schrödinger denkleminin araştırılması ihtiyacı Sturm-Liouville teorisinin gelişmesinde önemli bir etken olmuştur. H. Weyl'in 1910'uncu yılda yaptığı çalışma ile Sturm-Liouville teorisinin yeni bir dalının singular (tekil) Sturm-Liouville problemleri teorisinin temeli atılmıştır.

20. Yüzyılın ilk yarısında (Dixon, 1912; Stone, 1932; Weyl, 1910; Titchmarsh, 1962) çalışmaları bu teorinin farklı yönlerde gelişmesinde etkili olmuştur. Bu teori sonraki yıllarda da yüzlerce matematikçi ve fizikçi tarafından yoğun bir biçimde geliştirilmiştir. Çünkü fizikte ve başka doğa bilimlerinde ortaya çıkan yeni-yeni problemlerin araştırılması neticesinde bu teoride yeni-yeni sonuç ve yöntemler elde edilir. Bu tür problemlerden tez çalışmamızla ilgili olan bazıları hakkında kısaca bilgi verelim. Birçok fizik problemlerinde zamana göre türev sadece diferensiyel denklemde değil, aynı zamanda sınır şartlarında da ortaya çıkmaktadır. Böyle problemlerle ilgili bir çok örneği (Fulton, 1977) çalışmasında bulabiliriz. Böyle problemlere uygun olan Sturm-Liouville problemlerinde özdeğer parametresi sadece diferensiyel denklemde değil, hem de sınır şartlarında bulunur. Bu tür Sturm - Liouville problemleri farklı yöntemlerle (Binding ve ark., 1993; Binding ve Volkmer, 2001; Hinton and Shaw, 1990; Kandemir ve Mukhtarov, 2016; Kerimov ve Mirzoyev, 2003; Langer, 1932; Mukhtarov, 1994; Mukhtarov ve Kandemir, 2002; Mukhtarov ve ark., 2015; Mukhtarov ve Yakubov, 2002; Olğar ve Mukhtarov, 2017; Schneider, 1974; Shkalikov, 1982; Walter, 1973; Wang ve ark., 2009; Zhang ve ark., 2013) ve başkaları tarafından araştırılarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

"Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in Boundary Condition, Math. Z. 133(1973), 301",

$$TU := \frac{1}{r}\{-(pu')' + qu\} = \lambda u, \ on[a_1, a_2] \tag{2.0.10}$$

$$-(\beta_{i1}u(a_i)) = \lambda(\alpha_{i1}u(a_i) - \alpha_{i2}u'(a_i)) \ (i = 1, 2) \tag{2.0.11}$$

künyeli çalışmasında Walter, bu problemin bir operatör teorik formülasyonunu vermiş tir. Yazar aynı zamanda

$$\rho = \beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2' > 0 \tag{2.0.12}$$

şartını sağlayan hem denkleminde hemde sınır şartlarının her ikisinde özdeğer para metresi bulunduran (2.0.10)−(2.0.11) sınır değer probleminin uygun Hilbert uzayında tanımlı A operatörünün self-adjoint olduğunu göstermiştir.

"A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Cond itions, Math. Z. 1974",

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu &= \lambda ru && (2.0.13)\\ u(a) &= 0 && (2.0.14)\\ -(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) &= \lambda(\alpha_1 u(b) - \alpha_2 u'(b)) && (2.0.15) \end{aligned}$$

isimli çalışmasında Schneider (2.0.13)−(2.0.15) probleminin $S-$ hermityan sınır-değer problemlerinin teorisi çerçevesinde kabul edilebileceğini göstermiştir. Aynı zamanda Schneider bu çalışmasında, özfonksiyonlar sistemi üzerine açılımın mutlak ve düzgün yakınsaklığı ile ilgili koşullar vermiştir.

"Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Roy. Soc. Edinburg 77a (1977),293-308",

$$\begin{aligned} TU := -u'' + qu &= \lambda u && (2.0.16)\\ \cos\alpha u(a) + \sin\alpha u'(a) &= 0,\ \ \alpha \in [0,\pi) && (2.0.17)\\ -[\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)] &= \lambda[\beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b)] && (2.0.18) \end{aligned}$$

künyeli makalesinde Fulton, Titchmarsh'ın 1962 yılında yayımlanmış olan "Eigen function Expansions Associated with Second-Order Differential Equations" adlı kitab ındaki regüler Sturm-Liouville problemleri için yer alan incelemelerin (2.0.16) − (2.0.18) sınır-değer problemleri üzerine devam ettirilebileceğini göstermiştir. Ayrıca Fulton; Fourier tipi şartlar altında noktasal yakınsaklık şartlarını içeren bir takım yakınsaklık teoremleri elde etmiş, özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller bulmuş ve aynı zamanda, problemin ele alınacağı aralığın sonsuz ve yarı sonsuz olması durumlarını da incelemiştir.

"An Expansion Theorem For An Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Quart J. Math. Oxford (2) (1979), 33-42",

$$TU := \frac{1}{r}\{-(pu')' + qu\} = \lambda u \tag{2.0.19}$$

$$\cos\alpha u(a) + \sin\alpha(pu')(a) = 0, \ \alpha \in [0, \pi) \tag{2.0.20}$$

$$-[\beta_1 u(b) - \beta_2(pu')(b)] = \lambda[\beta_1' u(b) - \beta_2'(pu')(b)] \tag{2.0.21}$$

adlı çalışmada Hinton, daha önceki yazarlar (Fulton, 1977; Schneider, 1974) tarafın dan Hilbert uzayı metodunu kullanarak dikkate aldıkları fonksiyonların daha geniş bir sınıfı için düzgün yakınsaklık teorisini elde etmiştir. Özdeğerlerin negatif olmaması durumunda bu sınıf, $A^{\frac{1}{2}}$ operatörünün tanım bölgesidir. Buradaki A operatörü, $(2.0.19)-(2.0.21)$ problemi ile bağlantılı self-adjoint operatördür.

D. B. Hinton and J. K. Shaw'ın 1987 ve 1990 yıllarında yayımlamış oldukları makale lerinde $(2.0.19)-(2.0.21)$ tipinde Sturm-Liouville problemini incelemişlerdir. Onlar, $M(\lambda)$ Titchmarsh-Weyl katsayısının varlığını kanıtlamışlar ve bu katsayıyı Green fonksiyonu ile Rezolvent operatörünü inşa etmek için kullanmışlardır.

Diğer taraftan fizikte sadece sürekli problemler değil, bazı süreksizliklere sahip olan sınır-değer problemleri de ortaya çıkmaktadır. Böyle durumlarda doğal olarak sürek sizlik noktalarında geçiş şartları olarak adlandırılan ek şartlar da ortaya çıkmaktadır. Geçiş şartları ile verilen regular Sturm-Liouville problemleri O. Sh. Mukhtarov ve çalışma arkadaşları tarafından son yıllarda sistemli bir biçimde araştırılmış ve önemli sonuçlar bulunmuştur [bkz., örneğin, (Akdoğan ve ark., 2005; Aydemir ve Mukhtarov, 2016, 2017; Kandemir ve Mukhtarov, 2016; Mukhtarov, 1994; Mukhtarov ve Kandemir, 2002; Mukhtarov ve ark., 2015; Mukhtarov ve Yakubov, 2002; Olğar ve Mukhtarov, 2017; Olğar ve ark., 2018)]. Bu çalışmalardan esinlenerek dünyadaki bir çok matematikçi de son yıllarda bu konuya yoğun ilgi göstermiş ve göstermektedir (bkz., örneğin, (Allahverdiev ve ark., 2013; Ao, Sun ve Zhang 2012; Bairamov ve

Uğurlu, 2011; Chanane, 2007; Lancia, 2004; Wang ve ark., 2009; Zhang ve ark., 2013) ve onların kaynaklarına).

Peryodik Sturm-Liouville problemlerinin matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğ inin birçok alanında ortaya çıktığı biliniyor. Örneğin klasik mekanik problemleri, elektro manyetik teori, kuantum fiziği, termodinamik problemleri ve özellikle dalga denklemlerinde bu problemlere sıkça rastlanmaktadır. İlk olarak 19. yüzyılın ortaları nda Sturm tarafından ısı iletimi problemlerinin incelenmesiyle ortaya çıkan bu tipten problemler günümüzde güncelliğini daha da arttırarak yoğun bir şekilde incelenmekte dir. Bu konuda çok sayıda kitap ve makale yayımlanmasına rağmen periyodik Sturm - Liouville problemleri hem diferansiyel denklemler teorisinin hem de uygulamalı matematiğin en önemli ve en güncel konusu olmaya devam etmektedir. Matematik fiziğin ortaya koyduğu yeni ve güncel problemlerin araştırılma ihtiyacı periyodik sınır-değer problemleri teorisinin daha da geliştirilmesi ihtiyacını ortaya koymaktadır. İncelenen bu tip problemlerin çözümleri birçok matematikçi tarafından incelenmiştir (Hermann,1985; Webb, 1980).

Yirminci yüzyılın başlarından itibaren pek çok çalışmaya konu olmuş farklı türden sınır-değer problemlerinin incelemeleri arasına periyodik sınır-değer problemleride girmiştir ((Lin ve Jiang, 1987) , Lin ve Jiang, 1987; Cai, 2010; Amiraliyev ve Duru, 2003; Cen,2011). Zamana bağlı problemlerin incelenmesi ise Amiraliyev (1988) ve Gülle (1995) tarafın dan yapılmıştır. Amiraliyev ve Çakır'ın 2000 yılında yayımlanan çalışmalarında, konvektif terim ve sıfırıncı mertebe indirgenmiş denklemlere sahip düzgün yakınsak fark metodu geliştirilerek singüler pertürbe periyodik sınır-değer problemi için fark şemaları verilmiş ve nümerik çözümleri incelenmiştir.

Genel olarak periyodik katsayılı diferensiyel operatörler Hill operatörü olarak bilinir. Bu operatörle ilgili çalışmaların büyük bir kısmı 1952 yılında Mangus ve Winkler tarafından özetlenmiş ve bu çalışmada denklemin karakteristik değerleri ve diskrimi nantı incelenmiş, kararlılık ve kararsızlık aralıkları tespit edilmiştir.

Yukarıda bahsettiğimiz bütün çalışmalarda sınır - değer problemleri, geçiş şartları içermeyen sınır - değer problemleri için incelenmiştir. Muhtarov ve arkadaşları

(Muhtarov, 1994; Muhtarov ve Kandemir, 2002; Muhtarov ve Aydemir, 2017; Muhtarov ve Aydemir, 2016; Muhtarov ,Olğar ve Aydemir, 2015) çalışmalarında ise süreksiz katsayılı adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemler için Sturm - Liouville problemleri araştırılmıştır. Bu çalışmalarda esasen diferensiyel ve özdeğer parametresine bağlı olan sınır - değer geçiş problemleri için izomorfluk, hem uzay değişkenine hem de özdeğer parametresine göre koersitivlik, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotiklerinin bulunması, rezolvent operatörünün değerlendirilmesi, tamlık ve iki kat tamlık, Abel bazlığı v.s. hakkında teoremler ispatlanmış ve uygun parabolik tipten kısmi türevli diferensiyel denklemler için sturm-liouville problemleri incelenmiştir. Yaptığımız tez çalışmasında Muhtarov' un çalışmalarından ve kaynaklar kısmında verilen kitap ve makalelerden yararlanılmıştır.

Bizim yaptığımız bu tez çalışmasında periyodik sınır şartları ile verilmiş bir Sturm - Liouville probleminin bazı temel spektral özellikleri incelenmiştir. Araştırdığımız problem bir sıra somut fizik probleminin spektral yöntemle incelenmesi sonucunda ortaya çıkan sınır-değer-geçiş problemi biçiminde olacaktır.

3. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda tez çalışmamızda istifade edeceğimiz temel kavram ve sonuçlar ile ilgili gerekli olan öz bilgilere yer verilmiştir.

3.1. Lineer Operatörler

$\mathbb{H}$ kümesi ve bu $\mathbb{H}$ kümesi üzerinde takip eden koşulları sağlayan $+ : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ işlemi tanımlansın:

1. $\forall f, g \in \mathbb{H}$ için $f + g = g + f$
2. $\forall f, g, h \in \mathbb{H}$ için $(f + g) + h = f + (g + h)$
3. 0 ile gösterilen ve $\forall f \in \mathbb{H}$ için $f + 0 = f$ şartını sağlayan bir tek $0 \in \mathbb{H}$ elemanı mevcuttur.
4. Her $f \in \mathbb{H}$ için $-f$ ile gösterilen ve $f + (-f)$ şartını sağlayan bir tek $-f \in \mathbb{H}$ elemanı mevcuttur. (Yani her $f \in \mathbb{H}$ için f + g = 0 olacak şekilde bir tek $g \in \mathbb{H}$ mevcuttur. Bu durumda g elemanı $-f$ ile gösterilir.)

   Ayrıca bir K cismi (genel olarak $K = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olarak düşünülür, sayı cismi olarak da adlandılır) için K ile $\mathbb{H}-$ nin elemanları arasında "**.**" ile gösterilen **.** : $K\mathbf{x}\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ işlemi tanımlansın ve bu işlem için aşağıdaki özellikler sağlansın:
5. $\forall \lambda, \mu \in K$ ve $\forall f \in \mathbb{H}$ için $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$
6. $\forall \lambda \in K$ ve $\forall f, g \in \mathbb{H}$ için $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$
7. $\forall \lambda, \mu \in K$ ve $\forall f \in \mathbb{H}$ için $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$
8. $\forall f \in \mathbb{H}$ için $1.f = f$ ('1' ile K cisminin birim elemanı gösterilmiştir.)

Bu şartları (aksiyomları) sağlayan $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, K, +, .)$ kümesi K cismi üzerinde lineer uzay olarak adlanır. Yani $\mathbb{H}$ lineer uzaydır.

$\mathbb{H}$ lineer uzayının herhangi D alt kümesinin elemanları $\mathbb{H}$ lineer uzayında tanımlı $'+'$ ve $'.'$ işlemlerine göre bir lineer uzay oluşturuyorsa, $D-$ ye $\mathbb{H}$ lineer uzayının lineer alt uzayı denir.

$\mathbb{H}$ lineer uzayı, bu uzayın bir D lineer alt uzayı ve bir $A : D \to \mathbb{H}$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall f, g \in D$ ve $\forall \mu \in K$ için

$$A(f+g) = Af + Ag \quad , \quad A(\mu f) = \mu Af$$

şartları sağlanıyorsa, A dönüşümü lineer operatör olarak adlandırılır $D-$ye A lineer operatörünün tanım bölgesi denir (Naimark, 1967).

3.2. Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları

$p_i(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$, sürekli fonksiyonlar, $x \in (a, b)$ ve $\forall x$ için $p_0(x) \neq 0$ olmak üzere

$$A(f) := p_0(x)f^{(n)}(x) + p_1(x)f^{(n-1)}(x) + ... + p_n(x)f(x) \tag{3.2.1}$$

biçimindeki ifadeye n. mertebeden lineer diferansiyel ifade,

$$\begin{aligned} P(f) \quad := \quad & \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f'(a) + ... + \alpha_{n-1} f^{(n-1)}(a) \\ & +\beta_0 f(b) + \beta_1 f'(b) + ... + \beta_{n-1} f^{(n-1)}(b) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

şeklindeki ifadeye ise sınır değer ifadesi denir. $P_i(f)$, $i = 1, 2, ..., m$ ifadeleri sınır değer ifadeleri olduğunda ise

$$P_i(f) = 0 \ , \ i = 1, 2, ..., m \tag{3.2.3}$$

şeklindeki eşitlikler sınır koşulları olarak adlandırılır.

Bilindiği üzre $C[a, b]$ ile, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı gösterilmektedir. $\{f \in C[a, b] \ : \ f', f'', ..., f^{(n)} \in C[a, b]\}$ lineer uzayı ise $C^{(n)}[a, b]$ biçiminde gösterilir.

$$\begin{aligned} D(A) &= \{f \in C^{(n)}[a, b] \ : P_i(f) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m\} \\ A(f) &= p_0(x)f^{(n)}(x) + p_1(x)f^{(n-1)}(x) + ... + p_n(x)f(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanan $A : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ lineer operatörüne lineer diferansiyel operatör veya $A(f)$ diferansiyel ifadesi ile

$$P_i(f) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m$$

sınır şartlarının ürettiği lineer diferansiyel operatör denir (Naimark, 1967).

3.3. Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

$$p_0(x)f^{(n)}(x) + p_1(x)f^{(n-1)}(x) + ... + p_n(x)f(x) = \mu_0 f(x) \qquad (3.3.4)$$

lineer diferansiyel denkleminin (3.2.3) sınır şartlarının her birini sağlayan $f_0 \neq 0$ çözümü varsa, μ_0 değerine sınır değer probleminin özdeğeri, $f_0 \neq 0$ çözümüne ise bu özdeğere uygun özfonksiyon denir (Naimark, 1967).

3.4. Metrik Uzaylar

$\mathbb{H}$ kümesi ve $d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \rightarrow d(f, g)$ dönüşümü için

1. $\forall f, g \in \mathbb{H}, \quad d(f, g) \geq 0 \quad , \quad d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$
2. $\forall f, g \in \mathbb{H}, \quad d(f, g) = d(g, f)$
3. $\forall f, g, h \in \mathbb{H}, \quad d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$

özelikleri sağlanırsa $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ uzayı metrik uzay olarak tanımlanır.

Tanım 3.4.1. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ metrik uzayında bir $\{f_n\}$ dizisi ve bir f_0 noktası verilsin. Eğer $d(f_n, f_0) \rightarrow 0$ $(n \rightarrow \infty)$ ise, $\{f_n\}$ dizisi f_0 noktasına yakınsıyor denir.

Tanım 3.4.2. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ metrik uzayında bir $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer $d(f_n, f_0) \rightarrow 0$ $(n \rightarrow \infty)$ olacak biçimde $f_0 \in H$ mevcutsa $\{f_n\}$ dizisine yakınsak dizi denir.

Tanım 3.4.3. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ metrik uzayı ve bu uzayda $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer $d(f_n, f_m) \rightarrow 0$ $(n, m \rightarrow \infty)$ ise bu durumda $\{f_n\}$ dizisi Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 3.4.4. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Tam Metrik Uzay denir.

(Yakubov, 1994)

3.5. Normlu Uzaylar ve Banach Uzayları

$\mathbb{H}$ reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. $\mathbb{H}$ lineer uzayı üzerinde tanımlı $\|.\| : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanan negatif olmayan reel değerli fonksiyondur.

i. $\forall f \in \mathbb{H}$ için $\|f\| \geq 0$ ve $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ $(\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0)$

ii. $\forall f \in \mathbb{H}, \forall \alpha \in R$, $\|\alpha f\| = |\alpha|.\|f\|$

iii. $\forall f, g \in \mathbb{H}$, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Bu durumda $\mathbb{H}$ lineer uzayında bir norm tanımlanmıştır denir, $\|f\|-$ ye f elemanının normu denir. $\mathbb{H}$ üzerinde $(i.) - (iii.)$ koşullarıyla belirlenen norm ile birlikte $\mathbb{H}$ vektör uzayına normlu lineer uzay denir. Lineer normlu uzayda $d(f, g) = \|f - g\|$ eşitliği bir metrik tanımlar. Bu nedenle her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzay kabul edilir. Eğer lineer normlu uzay tam ise (lineer normlu uzay $d(f, g) = \|f - g\|$ metriğine göre metrik uzay olarak kabul edildiği için metrik uzaylardaki bütün kavramlar lineer normlu uzaylar için de tanımlanmış olur) bu uzay Banach Uzayı olarak adlandırılır (Yakubov, 1994).

3.6. İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları

$\mathbb{H}$ reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. $\mathbb{H}$ lineer uzayında $\forall f, g \in \mathbb{H}$ eleman çiftine $\langle f, g\rangle$ ile gösterilen bir tek kompleks sayı karşılık getirilmişse ve de

i. $\forall f, g \in \mathbb{H}, \quad \langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$

ii. $\forall f, g, h \in \mathbb{H}, \quad \langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle,$

iii. $\forall f, g \in \mathbb{H},\ \forall \mu \in \mathbb{C}, \quad \langle \mu f, g\rangle = \mu\langle f, g\rangle,$

iv. $\forall f \in \mathbb{H}, \quad \langle f, f\rangle \geq 0,$

v. $\forall f \in \mathbb{H}, \quad \langle f, f \rangle = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$

koşulları sağlanırsa, $\mathbb{H}-$ da bir iç çarpım tanımlanmıştır denir, $\langle f, g \rangle$ sayısına f ve g elemanlarının iç çarpımı denir, $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, \langle ., . \rangle)$ ise iç çarpım uzayı olarak adlandırılır. $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ formülü $\mathbb{H}$ iç çarpım uzayı üzerinde bir norm tanımlar. Bu nedenle her iç çarpım uzayı bir normlu uzay, dolayısıyla bir metrik uzay olarak kabul edilir. Eğer $\mathbb{H}$ iç çarpım uzayı bu norma göre tam ise ve de sonsuz boyutlu ise (yani sonlu boyutlu değilse), $\mathbb{H}$ uzayı bir Hilbert uzayı olarak adlandırılır (Yakubov, 1994).

3.7. $L_2[a, b]$ Uzayı

$f(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir bir fonksiyonu olsun. Eğer$|f(x)|^2$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ise, $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir ve $\forall x \in [a, b]$ için $L_2[a, b]$ uzayı,

$$L_2[a, b] = \left\{ f(x) : \int_a^b |f(x)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise $\forall x \in [a, b]$, $\forall f, g \in L_2$ için

$$\langle f(x), g(x) \rangle_{L_2[a,b]} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

biçiminde tanımlanır. Bu iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzaya aynı zamanda Lebesgue Uzayı' da denir (Kreyszig, 1978).

3.8. Sturm-Liouville Problemleri

$\mathbb{H}$ bir Hilbert uzayı ve A' da $A : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ biçiminde tanımlı olan bir lineer operatör olsun. Eğer $\mathbb{H}$ uzayının cisminden alınmış her hangi μ_0 skaleri için $Af_0 = \mu_0 f_0$ olacak biçimde $f_0 \in \mathbb{H}$, $f_0 \neq 0$ elemanı bulunursa, μ_0 sayısına A operatörünün özdeğeri, f_0 elemanına ise bu özdeğere uygun olan özeleman (veya özvektör) denir.

Uygulamalarda sık sık rastlanan diferansiyel operatörlerden biri de

$$A \equiv -\frac{d}{dx^2} + q(x)$$

biçiminde ifade edilen operatördür (bu operatör genelde $\mathbb{H} = L_2(a,b)$ biçimindeki Hilbert uzaylarında incelenmektedir). A operatörü için en önemli sınır şartları

$$f(a)\cos\alpha + f'(a)\sin\alpha = 0$$

$$f(b)\cos\beta + f'(b)\sin\beta = 0 \tag{3.8.5}$$

$(\alpha, \beta \in [0,\pi))$ biçiminde veya

$$f(a) = f(b)$$

$$f'(a) = f'(b) \tag{3.8.6}$$

biçiminde verilmiş sınır şartlarıdır.

$$Af(x) = -f''(x) + q(x)f(x) = \lambda f(x) \tag{3.8.7}$$

denkleminin (3.8.5) veya (3.8.6) tipindeki sınır şartlarını sağlayan çözümlerinin bulun ması problemi Klasik Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılır.
Eğer (3.8.5),(3.8.7) veya (3.8.6),(3.8.7) Sturm-Liouville özdeğer probleminde;

1. $[a,b]$ aralığı sınırlı , $q(x)$ fonksiyonu integrallenebilir ise o halde (3.8.5),(3.8.7) veya (3.8.6),(3.8.7) problemleri Regüler Sturm-Liouville özdeğer problemleri olarak adlandırılır.

2. Regüler olmayan Sturm-Liouville problemine Singüler Sturm-Liouville özdeğer problemi denir.

Daha genel olan

$$f''(x) + p(x)f'(x) + (l(x) + \mu r(x))f(x) = 0 \tag{3.8.8}$$

biçimindeki diferensiyel denklemler (burada $r(x)$ ikinci mertebeden sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $r(x) > 0$; $p(x)$ ise birinci mertebeden sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere)

$$u'' + q(t)u = -\lambda u$$

şeklindeki kanonik denkleme indirgenebilir. Bunun için x ve f değişkenlerinden

$$\begin{aligned} t &= \int_a^x \sqrt{r(s)}ds \\ u(t) &= (r(x))^{\frac{1}{4}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_a^x p(s)ds\right\} f(x) \end{aligned}$$

Laplace dönüşümü ile t ve u değişkenlerine geçilir. Ayrıca bu durumda $[a,b]$ aralığı da $[0,1]$ aralığına dönüşmüş olur. Bu dönüşüm literatürde Liouville dönüşümü olarak geçmektedir (Levitan ve Sargsyan, 1988).

4. BULGULAR VE SONUÇ

4.1. Periyodik Sınır Şartları

Bu kesimde

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx}\{K\frac{dy}{dx}\} - Gy = 0 \quad , \quad x \in [a,b] \tag{4.1.1}$$

diferansiyel denklemleminde ve

$$y(a) = y(b) \tag{4.1.2}$$

$$y'(a) = y'(b) \tag{4.1.3}$$

sınır şartlarından oluşan sınır-değer problemini ele alacağız. (4.1.2)-(4.1.3) sınır şartları peryodik sınır şartları olarak adlandırımaktadır. Burada $K = K(x,\lambda)$, $G = G(x,\lambda)$ fonksiyonları $\{(x,\lambda)|\ a \le x \le b, \Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2\}$ bölgesinde sürekli fonksiyonlar ve de her iki fonksiyon λ değişkeninin azalan fonksiyonlarıdır. Problemin kendine eşleniklik şartı olan $K(a) = K(b)$ şartının da sağladığını kabul edeceğiz.
(4.1.1)-(4.1.3) sınır değer problemleminin en önemli özel durumlarından biri $G(x,\lambda) = \ell - \lambda g$, $g > 0$ durumudur. Bu durumu da kapsayabilmesi için daha ağır şart olan

$$\frac{\partial G(x,\lambda)}{\partial \lambda} < 0 \tag{4.1.4}$$

koşulunu da sağladığını kabul edeceğiz. Bu koşulların yanında

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_1} \frac{-\widetilde{g}}{\widetilde{k}} = -\infty, \tag{4.1.5}$$

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_1} \frac{-\widetilde{G}}{\widetilde{K}} = +\infty \tag{4.1.6}$$

şartlarını da sağladığını kabul edeceğiz.
Burada $\widetilde{g}$ ve $\widetilde{G}$ ile sırası ile G fonksiyonunun x değişkenine göre $[a,b]$ aralığındaki minimum ve maksimum değerleri, $\widetilde{k}$ ve $\widetilde{K}$ ile sırasıyla K fonksiyonunun aynı aralıktaki minimum ve maksimum değerleri gösterilmiştir.

(4.1.1) nolu diferensiyel denkleminin

$$y_1(a,\lambda) = 1 \quad , \quad y_1'(a,\lambda) = 0 \tag{4.1.7}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $y_1(x,\lambda)$ ile aynı denklemin

$$y_2(a,\lambda) = 0 \quad , \quad y_2'(a,\lambda) = 1 \tag{4.1.8}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü ise $y_2(x,\lambda)$ ile gösterelim .
Bu durumda $y_1(x,\lambda)$ ve $y_2(x,\lambda)$ çözümleri için

$$W(y_1, y_2\ ;\ a)\ \neq\ 0 \tag{4.1.9}$$

olacağından bu çözümler lineer bağımsız olacak. Lineer bağımsız oldukları için (4.1.1) nolu denklemin temel çözüm sistemini oluşturacaklardır. Buna ek olarak Abel formulünden yararlanılarak kolayca

$$y_1(b,\lambda)y_2'(b,\lambda) - y_2(b,\lambda)y_1'(b,\lambda) = \frac{K(a)}{K(b)} = 1 \tag{4.1.10}$$

özdeşliği elde edilebilir.
(4.1.1) nolu denklemin genel çözümünü

$$y(x,\lambda)\ =\ C_1y_1(x,\lambda)\ +\ C_2y_2(x,\lambda) \tag{4.1.11}$$

biçiminde elde ederiz. (4.1.11) ifadesini (4.1.2) ve (4.1.3) sınır şartlarında yerine yazarsak C_1 ve C_2 değişkenlerine göre aşağıdaki homojen lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{cases} C_1(y_1(a,\lambda) - y_1(b,\lambda)) + C_2(y_2(a,\lambda) - y_2(b,\lambda)) = 0 \\ C_1(y_1'(a,\lambda) - y_1'(b,\lambda)) + C_2(y_2'(a,\lambda) - y_2'(b,\lambda)) = 0 \end{cases} . \tag{4.1.12}$$

(4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümünün mevcut olması için (4.1.12) denklem sisteminin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu nedenle karakteristik denklem

$$\begin{vmatrix} y_1(a,\lambda) - y_1(b,\lambda) & y_2(a,\lambda) - y_2(b,\lambda) \\ y_1'(a,\lambda) - y_1'(b,\lambda) & y_2'(a,\lambda) - y_2'(b,\lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.1.13}$$

biçiminde elde edilir. (4.1.7) ve (4.1.8) eşitliklerini (4.1.13) de yerine koyarsak (4.1.13) karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1 - y_1(b,\lambda) & -y_2(b,\lambda) \\ -y_1'(b,\lambda) & 1 - y_2'(b,\lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.1.14}$$

biçiminde sadeleşir. Burada (4.1.10) özdeşliği de dikkate alındığında

$$F(\lambda) \equiv y_1(b,\lambda) + y_2'(b,\lambda) - 2 = 0 \tag{4.1.15}$$

biçiminde karakteristik denklem elde edilir.

Tanım 4.1.1. Eğer $\lambda = \lambda_0$ sayısı için $F(\lambda) = 0$ fakat (4.1.14) determinantının en az bir elemanı sıfırdan farklı olursa o halde $\lambda = \lambda_0$ sayısına basit karakteristik sayı denir.

Tanım 4.1.2. Eğer $\lambda = \lambda_0$ için (4.1.14) determinantının tüm elemanları sıfır oluyorsa o halde bu sayıya ikikat karakteristik sayı denir.
Yani, eğer

$$y_1(b,\lambda) = 1 \quad , \quad y_2(b,\lambda) = 0 \quad , \quad y_1'(b,\lambda) = 0 \quad , \quad y_2'(b,\lambda) = 1 \tag{4.1.16}$$

olduğu durumda λ_0 sayısına ikikat karakteristik sayı denir.

Lemma 4.1.3. $\lambda = \lambda_0$ sayısı ikikat karakteristik sayı ise, o halde λ nın bu değeri için (4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin iki tane lineer bağımsız çözümü bulunur.

İspat. (4.1.16) gereği (4.1.12) lineer denklem sisteminin matrisinin rankı sıfıra eşit olacağından bu sistemin iki tane lineer bağımsız çözümü (c_1, c_2) dekişkenlerine göre bulunur. Bunlara uygun $y = C_1y_1 + C_2y_2$ çözümleride lineer bağımsız olacaktır. İspat bitti.

Şimdi (4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin karakteristik sayısının mevcut olup olmadığını, sonlu sayıdamı yoksa sonsuz sayıdamı olduğunu ve de reel mi, yoksa kompleks mi olduğunu araştıracağız.
Bunun için

$$\begin{aligned} L(u) &= 0 \qquad (4.1.17) \\ u(a) = u(b) &= 0 \qquad (4.1.18) \end{aligned}$$

yardımcı sınır-değer problemini göz önüne alalım. Bu problem basit bir Sturm - Liouville problemidir ve bilinmektedir ki bu problemin sayılabilir sonsuz sayıda $\lambda = \mu_i$ $(i = 1, 2, ...)$ karakterestik değeri mevcuttur. Ve de $\lambda = \mu_i$ karakteristik değerine uygun $u = u_i(x)$ karakterestik fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ aralığında tam i tane sıfır yeri bulunur.
Tabiki, (4.1.17)-(4.1.18) probleminin karakteristik sayıları (bu sayılara karakteristik değerler veya özdeğerler de denir; uygun karakteristik fonksiyonlara ise özfonksiyonlar denir) genel olarak (4.1.1)-(4.1.3) sınır-değer probleminin karekteristik sayıları değil dir. Fakat $u_i(x)$ fonksiyonları $y_2(x, \mu_i)$ fonksiyonları ile özdeşleştirilebilir. Çünkü bu durumda

$$y_2(b, \mu_i) = 0 \qquad (4.1.19)$$

eşitliği sağlanır. O halde bu fonksiyon için (4.1.10) özdeşliği

$$y_1(b, \mu_i) y_2'(b, \mu_i) = 1 \qquad (4.1.20)$$

biçiminde yazılır.Buradan

$$F(\mu_i) = y_1(b, \mu_i) - 2 + \frac{1}{y_1(b, \mu_i)} = \frac{\{y_1(b, \mu_i) - 1\}^2}{y_1(b, \mu_i)} = \frac{\{y_2'(b, \mu_i) - 1\}^2}{y_2'(b, \mu_i)} \qquad (4.1.21)$$

elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki durumlar olabilir;

1. Eğer $y_1(b, \mu_i) > 0$ fakat $y_1(b, \mu_i) \neq 1$ ise $F(\mu_i) > 0$ olur,

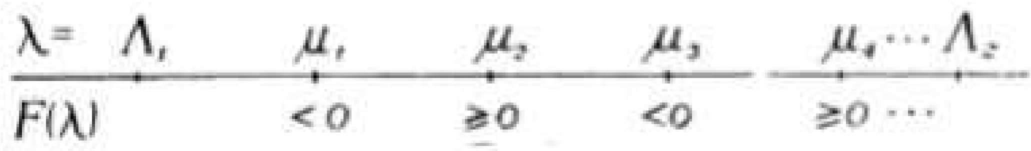
2. Eğer $y_1(b, \mu_i) = y_2'(b, \mu_i) = 1$ ise $F(\mu_i) = 0$ olur,

3. Eğer $y_1(b, \mu_i) < 0$ veya $y_2'(b, \mu_i) < 0$ ise $F(\mu_i) < 0$ olur.

$y_2'(a, \mu_i) = 1$ ve $y_2(b, \mu_i) = y_2(a, \mu_i) = 0$ olduğu için $y_2(x, \mu_i)$ fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ aralığında çift sayıda mı yoksa tek sayıda mı sıfır yerinin mevcut olmasına bağlı olarak $y_2'(b, \mu_i)$ sayısı sırası ile pozitif veya negatif olacaktır.
Bu nedenle i indisinin çift sayı olduğu durumlarda $F(\mu_i) \geq 0$ olacak ve bu durumda μ_i sayısı (4.1.15) nolu karakteristik denklemin kökü olabilir (bu durumda probleminde karekteristik değeri olabilir).
i indisi tek sayı olduğu durumda ise $F(\mu_i) < 0$ olacağından bu durumda μ_i sayısı (4.1.15) karekteristik denkleminin kökü olamaz (dolayısıyla problemin de karekteristik sayısı olamaz).

Not 4.1.4. Daha hassas hesaplamalarla i indisinin tek sayı olduğu durumlarda $F(\mu_i) \leq -4$ olduğu gösterilebilir.

$F(\lambda)$ karekteristik fonksiyonun $\mu_1, \mu_2, \mu_3, ...$ noktalarındaki işareti aşağıdaki resimle tasvir edilebilir.



Şekil 4.1.1

Bu resimden kolayca anlaşılabilir ki, $F(\lambda) = 0$ karekteristik denkleminin (μ_1, μ_3) , $(\mu_3, \mu_5), ...$ aralıklarının her birinde çift sayıda kök (iki kat kökler de iki tane olarak hesap edilmez kaydı ile) vardır. Böylece ispat edilmiş olundu ki (4.1.1) - (4.1.3) probleminin sonsuz sayıda reel karekteristik değeri mevcuttur. Şimdi başka bir yardımcı sınır-değer problemi olan

$$L(v) = 0 \tag{4.1.22}$$

$$v'(a) = v'(b) = 0 \tag{4.1.23}$$

problemini gözönüne alalım. Bu problemin de sayıda $v_i (i \geq 0)$ karekteristik değeri mevcuttur. v_i karekteristik değerine uygun $v_i(x)$ karekteristik fonksiyonunun $a \leq$

$x \leq b$ aralığında tam i sayıda sıfırı (kökü) mevcuttur. $v_i(x)$ fonksiyonunu $y_1(x, v_i)$ fonksiyonu ile özdeşleştirirsek yukarıdakine benzer olarak

$$y_1(b, v_i) y_2'(b, v_i) = 1, \tag{4.1.24}$$

$$F(v_i) = \frac{\{y_1(b, v_i) - 1\}^2}{y_1(b, v_i)} \tag{4.1.25}$$

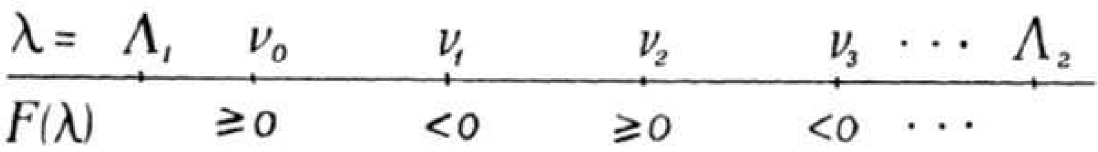
eşitliklerini elde ederiz. Bu nedenle aşağıdaki durumlar söz konusu olabilir;

1. Eğer $y_1(b, v_i) > 0$ fakat $y_1(b, v_i) \neq 1$ ise $F(v_i) > 0$ olur,

2. Eğer $y_1(b, v_i) = 1$ ise $F(v_i) = 0$ olur,

3. Eğer $y_1(b, v_i) < 0$ ise $F(v_i) < 0$ olur.

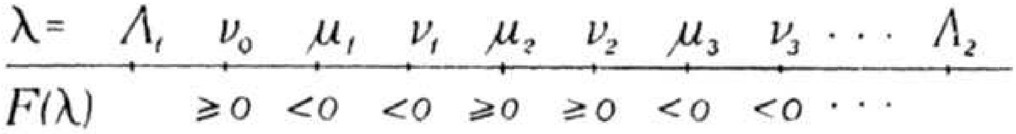
Bu nedenle i indisi çift sayı ise $y_1(x, v_i)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında çift sayıda sıfır yerine sahiptir, i indisi tek sayı ise $y_1(x, v_i)$ fonksiyonu aynı aralıkta tek sayıda sıfır yerine sahiptir. Ayrıca $y_1(a, v_i) = 1$ olduğunu da dikkate alırsak kolayca görürüz ki i indisi çift ise $y_1(b, v_i) > 0$ olur i indisi tek sayı olduğu durumda ise $y_1(b, v_i) < 0$ olur. Bu nedenle i indisi çift sayı olduğunda $F(v_i) \geq 0$ oluyor ve bu durumda v_i sayısı (4.1.15) karekteristik denleminin kökü olabilir. i indisinin tek olduğu durumda ise $F(v_i) < 0$ olacağından bu durumda v_i sayısı (4.1.15) karekteristik denkeleminin kökü olamaz. Grafiksel olarak bu durumlar aşağıdaki biçimde tasvir edilebilir.



Şekil 4.1.2

Dolayısı ile $F(\lambda)$ karekteristik fonksiyonu $(\Lambda_1, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_5), ...$ aralıklarının her birinde çift sayıda sıfır yerine sahiptir. Ayrıca λ büyüdüğünde $a \leq x \leq b$ aralığındaki sıfır yerlerimiz sayıca büyüdüğünden $v_i < \mu_{i+1} < v_{i+2}$, $\mu_i < v_{i+1} < \mu_{i+2}$ eşitsizliklerinin sağlandığı da kolayca anlaşılabilir.

Diğer taraftan μ_i ve v_i sayılarının birbirine göre durumları hakkında herhangi birşey bilinmemektedir. Eğer $\mu_i < v_i$ olduğunu kabul edersek $F(\lambda)$ fonksiyonunun işaret değişimini aşağıdaki resimle tasvir edebiliriz.



Şekil 4.1.3

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 4.1.5. Eğer $\mu_i < v_i$ $(i = 1, 2, ...)$ ise o halde $(\mu_i, \mu_{i+1}), (v_i, v_{i+1})$ aralıklarının her birinde (4.1.1) - (4.1.3) probleminin en az bir karekteristik değeri mevcuttur.

Şimdi daha net olan aşağıdaki teoremi ispat edeceğiz.

Teorem 4.1.6. Önceki teoremin şartları altında (4.1.1)-(4.1.3) probleminin (μ_i, μ_{i+1}), (v_i, v_{i+1}) araklarının her birinde bir tek karekteristik değeri bulunur.

İspat. Her bir aralıkta $F(\lambda) = 0$ denkleminin her bir kökünde $F'(\lambda)$ nın aynı işarete sahip olduğunu ispat etmenin yeterli olacağı kolayca anlaşılabilir. Bunun anlaşılabilmesi için sürekli fonksiyonlarının grafiklerinin artan ve azalan parçalarının bir birini takip etmesi gerektiğini hatırlamak yeterli olur. Basitlik hatırına K nın λ dan bağımsız olduğunu kabul edeceğiz (genel durum benzer biçimde araştırılabilir). Bu durumda

$$F(\lambda = y_1(b, \lambda) + y_2'(b, \lambda) - 2 \tag{4.1.26}$$

olur. Türev alırsak

$$F'(\lambda) = \frac{\partial y_1(b, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial y_2'(b, \lambda)}{\partial \lambda} \tag{4.1.27}$$

bulunur. α ve α' reel sayıları verilsin. Kabul edelim ki, $u = u(x, \lambda)$

$$L(u) = 0 \tag{4.1.28}$$

$$u(a) = \alpha \quad , \quad u'(a) = \alpha' \tag{4.1.29}$$

sınır değer problemlerinin çözümüdür bu çözümün mevcut olduğu ve tek olduğu dijeransiyel denklemler teorisinden iyi bilinmektedir. O halde $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ fonksiyonu aşağıdaki homejen olmayan diferansiyel denklemi sağlar.

$$\frac{d}{dx}\{K\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial \lambda}\} - G\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial G}{\partial \lambda}u. \tag{4.1.30}$$

$y_1(x,\lambda)$ $y_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarının tanımı gereği

$$\frac{d}{dx}\{K\frac{d}{dx}\frac{\partial v}{\partial \lambda}\} - G\frac{\partial v}{\partial \lambda} = 0 \tag{4.1.31}$$

homojen denkleminin iki tane lineer bağımsız

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = y_1(x,\lambda),\ \frac{\partial v}{\partial \lambda} = y_2(x,\lambda) \tag{4.1.32}$$

çözümü mevcuttur. Her λ için

$$u(a,\lambda) = \alpha, u'(a,\lambda) = \alpha' \tag{4.1.33}$$

eşitliklerinin sağlandığını ve dolayısıyla

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}u(a,\lambda) = 0,\ \frac{\partial}{\partial \lambda}u'(a,\lambda) = 0 \tag{4.1.34}$$

eşitliklerinin de sağlandığı dikkate alarak paremetrelerin değişi yöntemi ile aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz.

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{1}{K(a)}\int_a^x \frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial \lambda}u(t,\lambda)\{y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)\ -\ y_2(t,\lambda)y_1(x,\lambda)\}dt, \tag{4.1.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{du}{dx} = \frac{1}{K(a)}\int_a^x \frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial \lambda}u(t,\lambda)\{y_1(t,\lambda)y_2'(x,\lambda)\ -\ y_2(t,\lambda)y_1'(x,\lambda)\}dt, \tag{4.1.36}$$

Şimdi (4.1.35) eşitliğinde $x = b$ ve $u = y_1$ yazarsak

$$\frac{\partial y_1(b,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{K(a)}\int_a^b \frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial \lambda}y_1(t,\lambda)\{y_2(b,\lambda)\ -\ y_2(t,\lambda)y_1(b,\lambda)\}dt, \tag{4.1.37}$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer biçimde (4.1.36) eşitliğinde $x = b, u = y_2$ yazarsak

$$\frac{\partial y_2'(b,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{K(a)} \int_a^b \frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial \lambda} y_2(t,\lambda)\{y_1(t,\lambda)y_2'(b,\lambda) \; - \; y_2(t,\lambda)y_1'(b,\lambda)\}dt, \tag{4.1.38}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} F'(\lambda) \;&=\; \frac{1}{K(a)} \int_a^b \frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial \lambda} y_2(b,\lambda) y_1^2(t,\lambda)dt \\ &+\; \frac{1}{K(a)} \int_a^b \frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial \lambda} [y_2'(b,\lambda) \; - \; y_1(b,\lambda)] y_1(t,\lambda) y_2(t,\lambda)dt \\ &-\; \frac{1}{K(a)} \int_a^b \frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial \lambda} y_1'(b,\lambda) y_2^2(t,\lambda)dt \end{aligned} \tag{4.1.39}$$

eşitliği bulunur. $K(a) > 0$ ve $\frac{\partial G}{\partial \lambda} < 0$ oldugu için $F'(\lambda)$ işareti ile $\xi = y_1(t,\lambda), \eta = y_2(t,\lambda)$ degişkenlerinin

$$\Phi(\xi,\eta) = y_2(b,\lambda)\xi^2 + [y_2'(b,\lambda) - y_1(b,\lambda)]\xi\eta - y_1'(b,\lambda)\xi^2 \tag{4.1.40}$$

kuadratik formunun işareti birbirinin tersi olacak. Bu kuadratik formun diskiminantı

$$[y_2'(b,\lambda) - y_1(b,\lambda)]^2 + 4y_2(b,\lambda)y_1'(b,\lambda) \tag{4.1.41}$$

ifadesine eşittir. O halde Abel formülü gereği

$$y_1(b,\lambda)y_2'(b,\lambda) - y_2(b,\lambda)y_1'(b,\lambda) = 1 \tag{4.1.42}$$

eşitliği sağlanır. Bunu dikkate alırsak dikriminant için

$$[y_2'(b,\lambda) + y_1(b,\lambda)]^2 - 4 \tag{4.1.43}$$

ifadesi elde edilir. Bu nedenle

$$y_1(b,\lambda) + y_2'(b,\lambda) = 2 \tag{4.1.44}$$

eşitliğini sağlayan $\lambda-$ lar için verilmiş kuadratik formun diskiminantı sıfıra eşit olur. $\lambda-$ nın böyle değeri için kuadratik form için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \Phi(\xi,\eta) &= \frac{\{y_2\ \xi + \frac{1}{2}(y_2' - y_1)\eta\}^2}{y_2(b,\lambda)} \\ &= -\frac{\{y_1'\ \eta - (1-y_1)\ \xi\}^2}{y_1'(b,\lambda)} \end{aligned} \tag{4.1.45}$$

Eğer λ karakteristik değeri basit karakteristik değer ise o halde

$$y_2\xi + \frac{1}{2}(y_2' - y_1)\eta\ ,\ y_1'\eta - (1-y_1)\xi \tag{4.1.46}$$

ifadelerinin her ikisi sıfıra eşit olamaz. Bu durumda $F'(\lambda) \neq 0$ olur ve de onun işareti $y_1'(b,\lambda)$ veya $y_2(b,\lambda)$ - nın işareti ile aynı oluyor. Dolayısıyla $F\lambda$ fonksiyonu basit karakteristik değerlerde işareti değişiyor. O halde eğer λ - nın her özel değeri için

$$y_2(b,\lambda) = y_1'(b,\lambda) = 0 \tag{4.1.47}$$

eşitlikleri sağlandıgında Abel formülü

$$y_1(b,\lambda) = y_2'(b,\lambda) = 0 \tag{4.1.48}$$

biçiminde dönüşüyor. Bu durumda

$$y_1(b,\lambda) + y_2'(b,\lambda) = 2 \tag{4.1.49}$$

karakteritik denkleminde

$$y_1(b,\lambda) + y_2'(b,\lambda) = 1 \tag{4.1.50}$$

elde edilir. Böyle λ degerleri ikikatlı karakteristik değer oluyor ve bu değerler için

$$F(\lambda) = 0 \qquad , \qquad F'(\lambda) = 0 \tag{4.1.51}$$

eşitlikleri sağlanır. $F'(\lambda)$ ifadesini elde ederken uyguladığımız yönteme benzer olarak ispat edebiliriz ki,

$$F''(\lambda) = -\frac{2}{\{K(a)\}^2}\int_a^b\int_a^b \frac{\partial G(s,\lambda)}{\partial\lambda}.\frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial\lambda}\{y_1(s,\lambda)y_2(t,\lambda)-y_2(s,\lambda)y_1(t,\lambda)\}^2 dtds \tag{4.1.52}$$

eşitliği sağlanır. y_1 ve y_2 fonksiyonları (4.1.1) nolu diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri oldukları için ve de s ve t bağımsız değişkenler olduğundan

$$y_1(s,\lambda)y_2(t,\lambda) - y_2(s,\lambda)y_1(t,\lambda) \tag{4.1.53}$$

ifadesi özdeşlik olarak sıfıra eşit değil. Dolayısıyla λ sayısı ikikat karakteristik değer olduğunda $F''(\lambda)$ fonksiyonu her ikikat karakteristik değerin yakın komşuluğunda da negatf işaretini koruyor. $F(\lambda)$ fonksiyonu μ_{2m-1} ve μ_{2m+1} noktalarında negatif olduğu için ve de μ_{2m} nktalarında pozitif veya sıfır oldugu için $(\mu_{2m-1}\ ,\ \mu_{2m-1})$ en az iki tane $\lambda_p\ ve \lambda_q$ karakteristik değeri mevcuttur. Bu durumda

$$\mu_{2m-1} < \lambda_p \leq \mu_{2m} \leq \lambda_q < \mu_{2m+1} \tag{4.1.54}$$

bağıntısı sağlanır.

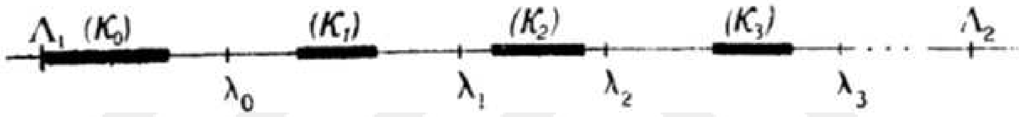
Kolayca görülür ki, bu aralıkta $\mu_{2m}-$ den farklı olan hiç bir ikikat karakteristik değer bulunmaz. Eğer (μ_{2m-2}, μ_{2m}) aralığında başka karakteristik değerler de mevcut ise o halde onların her biri basit karakteristik değer olmaları gerekir ve de sayılarının çift sayı olması gerekir. Fakat böyle λ değerleri için $F'(\lambda)-$ nın işaretinin $y_2(b,\lambda)-$ nın işaretinin tersi olması gerekiyor ki, bu da imkansızdır. Çünkü $y_2(b,\lambda)$ aralığın her hangi bir noktasında işaretini değiştirmez. Bu nedenle (μ_{2m-1}, μ_{2m+1}) ikili aralığında λ_p ve λ_q- nun dışında başka bir karakteristik değer bulunamaz. Benzer biçimde ispat edilebilir ki, (v_{2m-1}, v_{2m+1}) ikili aralığında sadece iki tane karakteristik değer bulunur ve bu karakteristik değerlerin λ_p ve λ_q olduğu da kolayca görülür. Böylece

$$v_{2m-1} < \lambda_p \leq v_{2m} \leq \lambda_q < v_{2m+1} \tag{4.1.55}$$

elde edilir. Bu nedenle $(\lambda_{2m} v_{2m})$ açık aralığında ve $[\lambda_{2m+1} v_{2m+1}]$ kapalı aralığında hiç bir karakteristik değer bulunamaz ((4.1.54) ve (4.1.55) - e bak). Benzer biçimde ispat edilebilir ki $\bigwedge_1 < \lambda < v_0$ aralığında $F(\lambda) > 0$ dır ve bu nedenle bu aralıkta karakteristik değer bulunmaz.

Şimdi karakteristik fonksiyonların sıfır yerlerini araştıralım.

λ_p ve λ_q karakteristik değerleri (μ_{2m-1}, μ_{2m+1}) ikili aralığının iç noktaları oldukları için y_p ve y_q karakteristik fonksiyonlarının $a \leq x < b$ aralığındaki sıfır yerlerinin sayısı $2m - 1$ den az ve de $2m + 1$ den çok olamaz. Fakat sınır şartları periyodik olduğu için sıfır yerlerinin sayısı çift sayı olmak zorundadır. Dolayısıyla y_p ve y_q karakteristik fonksiyonlarının her birinin $a \leq x < b$ aralığında tam $2m$ sayıda sıfır yeri mevcuttur. Şimdi $(\bigwedge_1, v_0)$ aralığını (K_0) ile, $(\mu_1, v_1), (\mu_2, v_2), ...$ aralıklarını ise sırası ile $(K_1), (K_2), ...$ ile gösterelim. Bu durumda hiç bir karakteristik değer hiç bir



Şekil 4.1.4

(K_i) aralığının iç noktası olamaz. Buna ilaveten, iki ardışık K_i ve K_{i+1} aralığının arasında sadece bir tane karakteristik değer bulunur (ikikat karakteristik değerler için bunun her zaman doğru olmayacağı aşikardır). Bu karakteristik değeri λ_i ile, uygun karakteristik fonksiyonu ise $y_i(x)$ ile gösterelim. O halde $y_0(x)$ fonksiyonunun $a \leq x < b$ aralığında sıfır yeri bulunmaz; $y_1 x$ ve $y_2 x$ -in her birinin bu aralıkta ikişer tane sıfır yeri bulunur; $y_3 x$ ve $y_4 x$ -in her birinin bu aralıkta dörter tane sıfır yeri bulunur ve bu kural ile devam eder. Böylece aşağıdaki salınım teoremi ispat edilmiş oldu.

Teorem 4.1.7. (4.1.1) $-$ (4.1.3) sınır-değer probleminin sayılabilir sonsuz sayıda $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_i, ...$ karakteristik değeri mevcuttur ve bu karakteristik değerlere uygun karakteristik fonsiyonları $y_0(x), y_1(x), ..., y_i(x), ...$ ile gösterirsek her $i = 0, 1, 2, ...$ için $y_i(x)$ karakteristik fonksiyonunun $a \leq x < b$ aralığındaki sıfır yerlerinin sayısı

μ_i ile gösterirsek

$$\mu_i = \begin{cases} i & , \quad i \text{ çift ise} \\ i+1 & , \quad i \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

4.2. Katsayıları Periyodik olan ve Periyodik Sınır Şartları ile Verilmiş Sturm-Liouville Problemi

Periyodik sınır şartları ile verilmiş Sturm-Liouville probleminin en önemli özel hali katsayılarının da aynı periyodlu periyodik fonksiyonlar olması durumudur. Bu özel durumun fizik ve mühendislikte geniş uygulama alanı mevcuttur. Genelliği azaltmadan periyodun 2π olması durumunu inceleyebiliriz. Yani

$$L(y) = \frac{d}{dx}(K(x)\frac{dy}{dx}) - G(x)y = 0, \tag{4.2.56}$$

Sturm-Lioville denkleminden

$$y(-\pi) = y(\pi) \tag{4.2.57}$$

$$y'(-\pi) = y'(\pi) \tag{4.2.58}$$

periyodik sınır şartlarında oluşan problemi göz önüne alalım ve $K(x),\ G(x)$ katsayı fonksiyonlarının çift fonksiyon olduklarını ve π periyodlu olduklarını kabul edelim. O halde her y_1 ve $y_2$karekteristik fonksiyonlarının her biri (4.2.56) nolu denklemi de sağlayacağından

$$y_i(-\pi) \;=\; y_i(\pi) \quad , \quad y_i'(-\pi) \;=\; y_i'(\pi) \quad , \qquad i = 1, 2 \tag{4.2.59}$$

şartlarını da sağlamış olacak y_1 ve y_2 karekteristik fonksiyonlarını aşağıdaki başlangıç şartlar ile tamamlayalım:

$$y_1(0, \lambda) = 1,\ y_1'(0, \lambda) = 0 \tag{4.2.60}$$

$$y_2(0,\lambda) = 0, \;\; y_2'(0,\lambda) = 1. \tag{4.2.61}$$

Teorem 4.2.1. $y_1(x,\lambda)$ çözümü çift fonksiyon, $y_2(x,\lambda)$ çözümü ise tek fonksiyondur.

İspat. Eğer $y_1(x,\lambda)$ fonksiyonunun çift fonksiyon olmadığını kabul edersek, o halde

$$y_3(x,\lambda) = y_1(x,\lambda) - y_1(-x,\lambda) \tag{4.2.62}$$

eşitliği ile tanımlanmış $y_3(x,\lambda)$ fonksiyonu hem (4.2.56) denklemini hem de

$$y_3(0,\lambda) = 0 \;, \;\; y_3'(0,\lambda) = 0 \tag{4.2.63}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözüm olur. Fakat (4.2.56) denkleminin (4.2.63) şartlarını sağlayan bir tek aşikar $y_3(x,\lambda) = 0$ çözümünün mevcut olduğu diferansiyel denklemler teorisinden iyi bilinmektedir. Bu durumda (4.2.62) eşitliği gereği

$$y_1(x,\lambda) = y_1(-x,\lambda) \tag{4.2.64}$$

elde edilir. Bu ise $y_1(x,\lambda)$ nın çift fonksiyon olmadığı kabülümüzle çelişki oluştur maktadır. Böylece $y_1(x,\lambda)$ çözümünün çift fonksiyon olduğu ispat edilmiş oldu. Şimdi $y_2(x,\lambda)$ çözümünün tek fonksiyon olduğunu ispat edelim. Bunun ispatını da aksini kabul etme yöntemi ile yapalım. Yani $y_2(x,\lambda)$ fonksiyonun tek olmadığını kabul edelim.

$$y_4(x,\lambda) = y_2(x,\lambda) + y_2(-x,\lambda) \tag{4.2.65}$$

eşitliği ile de $y_4(x,\lambda)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun (4.2.56) nolu denklemi sağladığı apaçıktır. Ayrıca (4.2.61) eşitliği gereği

$$y_4(0,\lambda) = y_2(0,\lambda) + y_2(0,\lambda) = 0 \tag{4.2.66}$$

$$y_4'(0,\lambda) = y_2'(0,\lambda) - y_2'(0,\lambda) = 1 - 1 = 0 \tag{4.2.67}$$

eşitlikleri sağlanır. Yani $y_4(x,\lambda)$ fonksiyonu hem (4.2.56) nolu denklemini hem de

$$y_4(0,\lambda)=0,\ y_4'(0,\lambda)=0 \tag{4.2.68}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümdür. Fakat diferansiyel denklemler teorisinden iyi bilinen çözümün varlığı ve tekliği hakkında teorem gereği her $x\in[-\pi,\pi]$ için

$$y_4(0,\lambda)=0 \tag{4.2.69}$$

elde edilir. (4.2.65) ve (4.2.69) dan

$$y_2(x,\lambda)=-y_2(-x,\lambda),\ x\in[-\pi,\pi] \tag{4.2.70}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı da tamamlanmış oldu.

Teorem 4.2.2. Eğer $\lambda=\lambda_0$ sayısı için $y_1(-\pi,\lambda_0)=0$ şartı sağlanıyorsa, o halde $\lambda=\lambda_0$ sayısı karekteristik sayı değildir.

İspat. $y_1(-\pi,\lambda_0)=0$ olduğu durumda $y_1(x,\lambda)$ çözümünün $[-\pi,\pi]$ kapalı aralığında ki sıfırlarının sayısı çift sayı oluyor. Bu durumda

$$y_1'(-\pi,\lambda_0).y_1'(\pi,\lambda_0)<0$$

oluyor, yani $y_1'(-\pi,\lambda_0)$ ve $y_1'(\pi,\lambda_0)$ değerleri sıfırdan farklı ve ters işaretli oluyor. Fakat (4.2.58) şartı gereği

$$y_1'(-\pi,\lambda_0).y_1'(\pi,\lambda_0)>0$$

şartı sağlanır. Böylece çelişki elde edilir. Dolayısıyla $\lambda=\lambda_0$ sayısının özdeğer olduğu kabulü ile çelişki elde edilmiş oldu. İspat bitti.
Şimdi $y_1(-\pi,\lambda)\neq 0$ durumunu araştıralım. Bu durumda

$$y_1(-\pi,\lambda)=y_1(\pi,\lambda) \tag{4.2.71}$$

şartı sağlanmış olacak. Ayrıca $\lambda-$ nın $\lambda = \gamma_{2m}$ değeri için $y_1(x,\lambda)$ çözümünün

$$y'(-\pi) = y'(\pi) = 0 \tag{4.2.72}$$

şartlarını sağlayacağı apaçıktır.

Benzer biçimde gösterebiliriz ki, $\lambda = \mu_{2m}$ değerleri için $y_2(x,\lambda)$ çözümü

$$y'(-\pi) = y'(\pi)$$

ve

$$y(-\pi) = y(\pi)$$

şartlarını sağlar. Ayrıca $\lambda = \mu_{2m}$ için $y_2'(-\pi) \neq 0$ ve $y_2'(\pi) \neq 0$ olacağını kolayca gösterebiliriz. Dolayısıyla $\lambda = \lambda_i$ karekteristik değerleri i -nin çift değerleri için γ_i , i -nin tek değerleri için ise μ_{i+1} ile özdeştirilebilir.

KAYNAKLAR

Akdoğan, Z., Demirci, M. ve Mukhtrov, O. Sh., 2005. Sturm-Liouville Problem with eigenparameter-Dependent Boundary and Transmission conditions, Acta Appliancandae Mathematicae 86, 329 - 344.

Allahverdiev, B. P., Bairamov, E. ve Ugurlu, E., 2013. Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boudary conditions with transmission conditions, J. Math. Anal. Appl. 401, 388-396.

Amiraliyev, G. ve Cakir, M., 2000. A uniformly convergent finite difference scheme for a singularly perturbed problem with convective term and zeroth order reduced equation. Int. J. Appl. Math., 2(12): 1407-1419.

Amiraliyev, G., 1988. Towards the numerical solition of the periodical on time problem for pseudo-parabolic equation. Numerical Methods of Analysis BAKU State University, 3-8.

Amiraliyev, G., Duru, H., 2003. A uniformly convergent difference method for the periodical boundary value problem. Comput. Math. Appl., 46:695- 703.

Ao, J., Sun, J. ve Zhang, M., 2012. Matrix representations of Sturm-Liouville problems with transmission conditions, Comput. Appl. Math, 63, 1335-1348.

Atkınson, F. V., 1964. Discrete and continous boundary problems, Academic pres New York London.

Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh. , 2016. Variational principles for spectral analysis of one Sturm-Liouville problem with transmission conditions, Advances in Difference Equations 2016:76 DOI 10.1186/s13662-016-0800-z.

Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2017. On the zeros of eigen functions of discontinuous Sturm-Liouville problems, Journal of Computational Analysis and Applications, Vol. 23, Issue 1, pp. 417-423.

Bairamov, E. ve Uğurlu, E., 2011. The determinants of dissipative Sturm-Liouville operators with transmission conditions, Math. Comput. Modelling, Vol. 53, Nr. 5-6, 805-813.

Boyce, W. E. ve Diprima, R. C., 1969. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Willey and Sons, New York.

Belinsky, B. P. ve Dauer, J. P, 1997. On a Regular Sturm-Liouville Problem on a Finite Interval with the Eigenvalue Parameter Appearing Linearly in the Boundary Conditions, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Spectral Theory and Computational Methods of Sturm-Liouville Problems.,183-196.

Binding, P. A., Browne, P. J. ve Seddighi, K., 1993. Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, Proc. Edinburgh Math. Soc., 2(37), 57-72.

Binding, P. A. ve Volkmer, H., 2001. Oscillation theory for Sturm-Liouville problems with indefinite coefficients, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 131A, 989-1002.

Birkhoff, G. D., 1908a. On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter, Strans. Amer. Math. Soc., 9, pp. 219-231.

Birkhoff, G.D., 1908b. Boundary Value and Expantion Problems of Ordinary Linear Differential Equations, Trans. Amer. Math. Soc., p.373-399.

Cai, X., 2010. An Effective computational method for periodical model with small parametre. 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control Conference, 27- 29 March 2010, Shenyang- China, 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control (ICACC 2010) (Editor: Xu,H.). Vol.3: 414-417pp.

Cen,Z., 2011. Uniformly convergent second- order difference scheme for a singularly periodical boundary value problem. International Journal of Computer Mathematics. 88(1):196-206.

Chanane, B., 2007. Eigenvalues Of Sturm-Liouville Problems With Discontinuity Conditions Inside A Finite Interval, Applied Mathematics and computation 188, 1725-1732.

Dixon, A., 1912. On the series of Sturm and Liouville as derived from a pair of fundamental integral equations instead of a di?erential equation, Phil. Trans. Royal Soc. London Ser. A 211, 411-432

Eastham, M.S.P., 1973. The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Edinburgh-London: Scottish Academic Press.

Fulton, C.T., 1977. Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Roy. Soc. Edinburg 77a .

Fulton, C.T., 1980. Singular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburg 87A .

Hermann, L., 1985. Periodic solitions to a one-dimentional strongly none linear wave equation with strong dissipation. Czechosl. Math. J. V. 35, 110; 278-293.

Hinton, D.B., 1977. On The Eigen function Expansion of Singular Ordinary Differential Equations, Jour. Dif. Eqs. 24, 282-308.

Hinton, D.B., 1979. An Expansion Theorem For An Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Quart J. Math. Oxford (2), 282-308.

Hinton, D. B. and Shaw,J. K., 1987. Spectrum of a Hamiltonian system wit spectral parameter in a boundary condition, Canad. Math. Soc. Proc.

Hinton, D. B. and Shaw, J. K., 1990. Differential operators with spectral parameter in completely in the boundary conditions, Funkcial. Ekvac.

Kandemir, M. and Mukhtarov, O. Sh., 2016. Nonlocal Sturm-Liouville Problems with Integral Terms in the Boundary Conditions, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 11, pp. 1-12.

Kerimov N.B., Mirzoyev V.S., 2003. On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition, (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 44, no.5, pp. 1041-1045.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis Whit Application, New-York.

Lancia, M. R., 2004. On Some Second Order Transmission Problems, The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 29, Number 2C, p. 85-100.

Langer, R. E., 1932. A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid, Japan. Tohoku Math. J. 35, 360-375.

Levitan and Sargsyan, 1988. Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.

Lin, P., Jiang, B., 1987. A. Singular perturbation problem for periodic boundary differential equantions. Appl. Math. And Mech.,8(10):929-937.

Magnus, W. ve Winkler, S., 1996. Hill's Equation, New York : Dover Publications.

Mukhtarov, O.Sh., 1994. Discontinuous Boundary Value Problem with Spectral Parameter in Boundary Condition, Tr.J. of Mathematics,18,183-192..

Mukhtarov, O. Sh. ve Kandemir, M., 2002. Asymptotic behaviour of eigenvalues for the discontinuous boundary- value problem with Functional-Transmissin conditions, Acta Mathematica Scientia vol 22 B(3), pp. 335-345.

Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H. ve Aydemir, K., 2015. Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems, Filomat, 29:7, 1671-1680.

Mukhtarov, O. Sh. ve Yakubov,S., 2002. Problems for ordinary Differential Equations with Transmission Conditions, Applicable Analysis,81,1033-1064.

Olğar, H., Mukhtarov, O. Sh., 2017. Weak Eigenfunctions Of Two-Interval Sturm-Liouville Problems Together With Interaction Conditions, Journal of Mathematical Physics, 58, 042201 DOI: 10.1063/1.4979615.

Olğar, H, Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H. ve Aydemir, K., 2018. Some properties of eigenvalues and generalized eigenvectors of one boundary value problem, Filomat, 32:3, 911-920.

Naimark, M.A., 1967. Linear Differantial Operators , Ungar, New York.

Rasulov, M. L., 1967. Methods of Contour integration, Amsterdam, North Holland Publishing Company.

Rodman, L., 1989. An Introduction to Operator Polynomials, Birkhauser Verlag, Boston, Massachusetts.

Schneider, A., 1974. A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Math. Z.

Shkalikov, A. A., 1982. Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions, Functional Analysis and Its Applications, Volume 16, Issue 4, pp. 324 - 326.

Stone, M. H., 1932. Linear transformations in Hilbert space, American Mathematical Society Colloquium Publications 15, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Sturm, C. ve Liouville, J., 1837. Extract from a brief on the development of functions in the different terms are subject to the same differing equation. Linear, containing a variable parameter, Appl. flight. 2, p. 220-233.

Walter, J., 1973. Regular Eigenvalue Problems With Eigenvalue Parameter In The Boundary Conditions, Math. Z., 133, 301-312.

Wang, A., Sun, J., Hao, X. ve Yao, S., 2009. Completeness of eigenfunctions of Sturm - Liouville problems with transmission conditions, Methods and Application of Analysis, 16(3) , 299-312.

Weyl, H., 1910. On ordinary differential equations with singularities and the associated expansions of arbitrary functions, Math. Ann. 68, 220-269.

Titchmarsh, E. C.,1962. Eigenfunction expensions associated with second order diferential equations I,(2nd edn) London:Oxford Univ. Press.

Yakubov, S. Y., 1994. Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators, Longman, Scientific and Technical.

Zhang, M., Sun, J. and Zettl, A., 2013. The spectrum of singular Sturm - Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions and its approximation, Results Math., 63, 1311-1330.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Hamdi TAPAR

Doğum Tarihi :30.01.1982

Doğum Yeri :Reşadiye

Medeni Hali :Evli

Yabancı Dili :İngilizce

Telefon :0554 711 09 77

E-posta :hamditapar@hotmail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Azerbaycan Devlet Pedagoji Üniversitesi	30.06.2006
Lise	Niksar Sağlık Meslek Lisesi	18.06.2000