ARİTMETİK FONKSİYONLAR VE ÜZERİNDEKİ

TRİGONOMETRİK OPERATÖRLER

ÜZERİNE

MÜZEYYEN DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DOÇ. DR. ADEM ŞAHİN
Haziran - 2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARİTMETİK FONKSİYONLAR VE ÜZERİNDEKİ TRİGONOMETRİK OPERATÖRLER ÜZERİNE

MÜZEYYEN DEMİR

TOKAT
Haziran - 2019

Müzeyyen DEMİR tarafından hazırlanan "**Aritmetik Fonksiyonlar ve Üzerindeki Trigonometrik Operatörler Üzerine**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 13 HAZİRAN 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / ~~Oy Çokluğu~~ ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANA BİLİM DALI nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Adem ŞAHİN	....
Üye Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Üye Dr. Ögr. Üyesi Filiz ÇITAK Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....

ONAY

....

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
21/06/2019

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MÜZEYYEN DEMİR

13 Haziran 2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARİTMETİK FONKSİYONLAR VE ÜZERİNDEKİ TRİGONOMETRİK OPERATÖRLER ÜZERİNE

MÜZEYYEN DEMİR

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ADEM ŞAHİN)

Bu tez çalışmasında, ilk olarak David Rearick tarafından tanımlanan logaritma ve üstel operatörlerin tanımları verilerek bu operatörler arasındaki ilişkiler anlatılmıştır. Bu logaritma ve üstel operatörler kullanılarak elde edilen trigonometrik operatörler ailesinin özellikleri incelenmiştir. Trigonometrik operatörler ailesi ile elementer trigonometrik ve hiperbolik trigonometrik fonksiyonların sağladığı özdeşlikler dikkate alınarak yeni trigonometrik operatörler ailesi için özdeşlikler elde edilmiştir. Daha sonra, Trueman MacHenry tarafından izobarik polinomlar üzerine tanımlanan logaritmik ve üstel operatörler detaylı olarak anlatılarak Trueman MacHenry tarafından tanımlanan Fibonacci ve Lucas polinomlarının birbirleriyle olan ilişkileri bu operatörler kullanılarak incelenmiştir. Son olarak bu operatörler ve elementer hiperbolik trigonometrik özdeşlikler kullanılarak yeni bazı özdeşlikler elde edilmiştir.

2019, 76 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Aritmetik Fonksiyonlar, Trigonometrik Fonksiyonlar, Hiperbolik Trigonometrik Fonksiyonlar, Logaritma Operatörü, Üstel Operatörü, İzobarik Polinomlar, Genelleştrilmiş Fibonacci Polinomu, Genelleştirilmiş Lucas Polinomu.

ABSTRACT

MASTER THESİS

ON ARİTHMETİC FUNCTİONS AND THE TRİGONOMETRİC OPERATORS ON THEM

MÜZEYYEN DEMİR

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR:)ASSOC. PROF. DR. ADEM ŞAHİN

In this thesis, firstly the definitions of logarithm and exponential operators defined by David Rearick were given and the relationships between these operators were explained. Then the features of the family of trigonometric operators were obtained by using these logarithms and exponential operators. New identity for the family of new trigonometric operators were obtained considering the these trigonometric operators and elementary trigonometric and hyperbolic trigonometric function. Then logarithm and exponential operators defined by Trueman MacHenry for isobaric polynomials were described in detail and relationships between Fibonacci and Lucas polynomials defined by Trueman MacHenry was investigated by using these operators. Finally, some new identities were obtained by using these operators and hyperbolic trigonometric identities.

2019, 76 PAGE

KEYWORDS: Trigonometric Functions, Hyperbolic Trigonometric Functions, Logarithm Operator, Exponential Operator, Isobaric Polynomials, Generalized Fibonacci Polynomials, Generalized Lucas Polynomial.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakinen ilgilenerek, tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirilmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Adem ŞAHİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Aynı zamanda değerli tavsiyeleri ve yol gösterici katkılarıyla destek olan Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR'e, süreç boyunca desteklerini esirgemeyip yanımda olan aileme, ev arkadaşım Yasemin BİRCAN'a ve değerli mesai arkadaşlarım olmak üzere herkese çok teşekkür ederim.

MÜZEYYEN DEMİR

13 Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

Simgeler	Açıklamalar
A	Aritmetik fonksiyonlar kümesi
P	A kümesinin tersinir elemanlarının kümesi
M	Çarpımsal fonksiyonların kümesi
μ	Möbius fonksiyonu
δ	Birim eleman
φ	Euler fonksiyonu
σ	Bölen fonksiyon
ζ	Zeta fonksiyonu
Λ	Mangoldt fonksiyonu
L	Logaritma operatörü
E	Üstel operatörü
S	Sinüs operatörü
C	Cosinüs operatörü
T	Tanjant operatörü
F	Fibonacci polinomu
G	Lucas polinomu
$\mathcal{L}$	Derecelendirilmiş Logaritma operatörü
$\mathcal{E}$	Derecelendirilmiş Üstel operatörü

1. GİRİŞ

Özel bir fonksiyon türü olan aritmetik fonksiyonlar, pozitif tam sayılar kümesinden reel veya kompleks sayılar kümesine tanımlanan fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar kümesi A ile gösterilmektedir. (Amitsur, 1956-57; Cashwell ve Everrett, 1959; Hardy ve Wrigh, 1954; McCarthy, 1986). Bu çalışmada sadece reel değerli aritmetik fonksiyonlarla ilgilenilmiştir. Bu fonksiyonlar kümesi üzerinde $\forall g, h \in A$ için $(g * h)(n) = \sum_{d|n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)$ şeklinde tanımlanan Dirichlet çarpımında toplam, n pozitif tam sayısının pozitif bölenleri üzerinden yapılmaktadır. Bu işlemde birim eleman $\delta(1) = 1$ ve 1' den büyük her tam sayı için $\delta(n) = 0$ olarak tanımlı aritmetik fonksiyondur. Elde edilen $(A, *)$ cebirsel yapısı bir Abel monoid yapısı olup her elemanın tersi yoktur. A nın tersinir elemanları $P = \{g \in A : g(1) > 0\}$ kümesi olup buradaki fonksiyonların tersi Dirichlet ters (g^{-1}) olarak gösterilmektedir. Aritmetik fonksiyonlar kümesi üzerindeki toplama ile birlikte $(A, +, *)$ birimli ve değişmeli bir halkadır. Birimli ve değişmeli halka olan aritmetik fonksiyonlar halkasına skaler ile çarpım da eklenirse $(A, +, *, \cdot)$ bir cebir olur.(Apostol, 1971; Carroll ve Gioia, 1975; Ferrero, 1980; MacHenry, 2000; MacHenry ve Tudose, 2005; Shapiro, 1972) Bu cebir içindeki $(P, *)$ ve $(A, +)$ grupları izomorf olup bunun için $L : P \to A$ dönüşümü $\forall f, t \in P$ için $L(f * t) = L(f) + L(t)$ operatörü tanımlanmıştır. L logaritma operatörü; $\forall f \in P$ için ve $n > 1$ için

$$Lf(n) = \sum_{d|n} f(d) f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \log d$$

şeklindedir. (Elliott, 2008; Rearick, 1968)

Bu L operatörü kullanılarak ters operatör olan üstel operatör (E) tanımlanmış böylece yeni bir trigonometrik operatör ailesi ortaya çıkmıştır. Analizdeki elementer hiperbolik trigonometrik fonksiyonların tanımına paralel olarak A-dan A-ya içine bir dönüşümle sinüs (S), kosünüs (C) ve tanjant (T) operatörleri $\forall g \in A$ için

$$Sg = \frac{1}{2}\left(Eg - E(-g)\right)$$

$$Cg = \frac{1}{2}\left(Eg + E(-g)\right)$$

ve

$$Tg = Sg * (Cg)^{-1}$$

olarak tanımlanır. $\forall g \in A$ için $Cg(1) = \cosh g(1) > 0$ olduğundan Tg de $(Cg)^{-1}$ tanımlıdır ve kullanılmıştır. (Rearick, 1968)

(Stakhov ve Rozin, 2005) de, $x \in \mathbb{R}$ ve α Altın oran olmak üzere, sinüs Fibonacci hiperbolik ve cosinüs Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için

$$\begin{aligned} sF(x) &= \frac{\alpha^{2x} - \alpha^{-2x}}{\sqrt{5}} \\ cF(x) &= \frac{\alpha^{2x+1} + \alpha^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

tanımlarını vermiş ve sinüs Lucas hiperbolik ve cosinüs Lucas hiperbolik fonksiyonları için,

$$\begin{aligned} sL(x) &= \alpha^{2x+1} - \alpha^{-(2x+1)} \\ cL(x) &= \alpha^{2x} + \alpha^{-2x} \end{aligned}$$

tanımlarını vermiştir. Daha sonra klasik hiperbolik fonksiyonların ve Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin özelliklerini birleştiren yeni bir hiperbolik fonksiyon ailesi üzerine yapılan bazı çalışmaların sonuçlarını sunmuştur. Bu tanımlanan fonksiyon ailesi kullanılarak klasik hiperbolik fonksiyon özdeşliklerinin hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları için ayrı bir analojisine dikkat çekerek özdeşliklerin sağlanıp sağlanmadığını incelemişlerdir.

Aynı zamanda (Stakhov ve Rozin, 2005) de, $x \in \mathbb{R}$ ve α Altın oran olmak üzere, simetrik sinüs Fibonacci hiperbolik ve simetrik cosinüs Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için,

$$\begin{aligned} sFs(x) &= \frac{2}{\sqrt{5}} sh\left(\ln(\alpha) \cdot x\right) \\ cFs(x) &= \frac{2}{\sqrt{5}} ch\left(\ln(\alpha) \cdot x\right) \end{aligned}$$

tanımlanmış ve simetrik sinüs Lucas hiperbolik ve simetrik cosinüs Lucas hiperbolik fonksiyonları için,

$$\begin{aligned} sLs(x) &= 2sh\left(\ln(\alpha)\cdot x\right) \\ cLs(x) &= 2ch\left(\ln(\alpha)\cdot x\right) \end{aligned}$$

tanımlarını vermiştir. Bu fonksiyon ailesi kullanılarak klasik hiperbolik fonksiyon özdeşliklerinin simetrik Fibonacci ve Lucas hiperbolik fonksiyonları için ayrı bir analojisine dikkat çekerek özdeşliklerin sağlanıp sağlanmadığını incelemişlerdir.

(Stakhov ve Aranson, 2011)' de hiperbolik Fibonacci ve Lucas λ- fonksiyonların üstteki (Stakhov ve Rozin, 2005) çalışmasının devam niteliğinde yapmıştır. Burada $x \in \mathbb{R}$ ve ϕ Altın oran olmak üzere Fibonacci λ- fonksiyonları

$$\begin{aligned} sF\ (x) &= \frac{\phi^{\mathsf{x}} - \phi\ \ ^{\mathsf{x}}}{\sqrt{4+\lambda^2}} \\ cF\ (x) &= \frac{\phi^{\mathsf{x}} + \phi\ \ ^{\mathsf{x}}}{\sqrt{4+\lambda^2}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıp Lucas λ- fonksiyonları da

$$\begin{aligned} sL\ (x) &= \phi^{\mathsf{x}} - \phi\ \ ^{\mathsf{x}} \\ sL\ (x) &= \phi^{\mathsf{x}} + \phi\ \ ^{\mathsf{x}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu operatörler yardımıyla klasik hiperbolik fonksiyon özdeşliklerin bu yeni Fibonacci ve Lucas λ- fonksiyonları için de benzer özdeşliklerin sağladığı gösterilmiştir.

(Guncan ve Erbil, 2014)' de (Stakhov ve Rozin, 2005; Stakhov ve Aranson, 2011) makalerinden yararlanılarak Burada $x \in \mathbb{R}$ ve ϕ Altın oran olmak üzere hiperbolik

Fibonacci q- fonksiyonlarını

$$
\begin{aligned}
\sin F_q h(x) &= \frac{\phi_q^{2x} - \phi_q^{\;2x}}{\sqrt{1+4q^{n\;2}}} \\
\cos F_q h(x) &= \frac{\phi_q^{2x+1} + \phi_q^{\;(2x+1)}}{\sqrt{1+4q^{n\;2}}}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu operatörler yardımıyla klasik hiperbolik fonksiyon özdeşliklerin bu yeni Fibonacc q- fonksiyonları için de benzer özdeşliklerin sağladığı gösterilmiştir.

(Falcon ve Plaza, 2008)' de klasik hiperbolik fonksiyonların bir uzantısı tanıtılmış ve çalışmalar sonucunda $x \in \mathbb{R}$ ve σ Altın oran olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
sF(x) &= \frac{\sigma_k^{2x} - \sigma_k^{\;2x}}{\sqrt{k^2+4}} \\
cF(x) &= \frac{\sigma_k^{(2x+1)} + \sigma_k^{\;(2x+1)}}{\sqrt{k^2+4}}
\end{aligned}
$$

şeklinde yeni operatörler tanımlanarak genelleştirilmiş k- Fibonacci hiperbolik fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir. Bunların yanında (Stakhov ve Rozin, 2005, 2006) makalelerde benzer çalışmalar yapılmıştır.

(Azman, 2014)' de (Falcon ve Plaza, 2008) makalesinden yararlanarak k - Lucas hiperbolik fonksiyonların bazı rekürans ve hiperbolik özelliklerinden, yarı- sinüs k - Lucas fonksiyonlarından ve k -Lucas hiperbolik fonksiyonları için 3 boyutlu eğri ve yüzeylerden bahsedilmiştir. Sonra hiperbolik fonksiyon tanımını üçüncü mertebeden rekürans dizilerine genişletmeye çalışmıştır. Daha sonra, yeni yarı-hiperbolik Tribonacci fonksiyonlarının

$$
\begin{aligned}
sTh(x) &= \lambda p^x - r^x(\psi \cos x\theta + \gamma \sin x\theta) \\
cTh(x) &= \lambda p^x + r^x(\psi \cos x\theta + \gamma \sin x\theta)
\end{aligned}
$$

ve yarı- hiperbolik Tribonacci- Lucas fonksiyonlarının

$$\begin{aligned} sTLh(x) &= \lambda' p^{\mathsf{x}} - r^{\mathsf{x}}(\psi' \cos x\theta + \gamma' \sin x\theta) \\ cTLh(x) &= \lambda' p^{\mathsf{x}} + r^{\mathsf{x}}(\psi' \cos x\theta + \gamma' \sin x\theta) \end{aligned}$$

tanımlarını verip, benzer şekilde, bu fonksiyonların rekürans ve hiperbolik özelliklerinden bahsetmiştir.

Bu çalışmada (Rearick, 1968)' de tanımları verilen logaritmik trigonometrik ve hiperbolik trigonometrik operatörlerin özellikleri incelendi ve analizdeki elementer trigonometrik ve elementer hiperbolik fonksiyonların sağladığı özdeşliklerin benzerlerinin bu yeni operatör ailesi içinde sağlanıp sağlanmadığının kontrolü yapıldı. Daha sonra bu operatörler kullanılarak yeni özdeşlikler elde edildi.
Hiperbolik tigonometrik operatörlerin analizdeki klasik hiperbolik fonksiyonlar ile olan ilişkilerinin veya onların kendi aralarındaki ilişkilere benzer ilişkilerin varlığının tespit edilmesi sayılar teorisi ve sayı dizileri için de çok önemlidir. Çünkü aritmetik fonksiyonlar olan Fibonacci ve Lucas polinomları yukarıda tanımlanan operatörlere göre biri diğerinin logaritmasıdır. Bu dönüşüm kullanılarak sayı dizilerin yeni bazı özelliklerinin de ortaya çıkabileceği düşünülmektedir.

Tezin Yapısı

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kısa olarak tezde işlenecek konulardan bahsedilerek tezin yapısı ve işleyişi anlatılmıştır. İkinci bölüm de aritmetik fonksiyon tanımı yapılarak aritmetik fonksiyon örneklerine yer verilmiş ve üzerinde çalışılacak aritmetik fonksiyonlar kümesine açıklık getirilmiştir. Daha sonra aritmetik fonksiyonların Dirichlet çarpımı ve aritmetik fonksiyonlar üzerinde bazı operatörlerin çeşitli uygulamalarından bahsedilmiştir. Rearick tarafından aritmetik fonksiyonlar üzerinde tanımlanan logaritma operatörü tanımına ve bu logaritma operatörü kullanılarak ters operatör olan üstel operatör tanımlarına yer verilmiştir. Logaritma ve üstel operatörler kullanılarak yeni bir trigonometrik operatörler ailesini elde etmek için logaritmik ve üstel operatörlerin birbirleriyle olan ilişkilerinden yararlanarak aritmetik fonksiyonların genel kuvvetlerin özellikleri ve örneklerine yer verilmiştir. Ardından Rearick tarafından tanımlanan analizdeki elementer hiperbolik trigonometrik fonksiyonların tanımına paralel olan yeni trigonometrik operatörler ailesi tanıtılmış ve bu operatörlerin temel tanım, teorem ve özellikleri üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde Rearick tarafından elde edilen trigonometrik operatörleri kullanılarak, hiperbolik trigonometrik operatörlerin analizdeki klasik hiperbolik fonksiyonlarla olan ilişkilerinden yararlanılarak yeni bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde Huilan Li ve Trueman MacHenry'i tarafından tanımlanan bir aritmetik fonksiyon olan izobarik polinomlar üzerinde LOG ve EXP operatörleri tanımlarına yer verilmiştir. LOG ve EXP operatörlerin anlaşılırlığını kolaylaştırmak adına izobarik polinomun, Core polinomun, Companion matrisin ve Convolisyon çarpımın tanımlarına yer verilmiştir.

Beşinci bölümde izobarik halkalarda Log ve Exp operatörleri tanıtılmıştır ve bu operatörler yardımıyla Fibonacci ve Lucas polinomları biri diğerinin logaritması olması durumuna dikkat çekilmiştir. Ardından Huilan Li ve Trueman MacHenry'i tarafından tanımlanan Log ve Exp operatörleri arasındaki ilişkiden yararlanılarak yeni hiperbolik trigonometrik fonksiyonların varlığı tespit edilmiştir. Sonuç kısmında ise elde edilen özdeşliklerin öneminden bahsedilmiştir ve uygulanabileceği yeni bazı ilişkilerin varlığı gösterilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Aritmetik Fonksiyonlar

Matematiğin tüm alanlarında temel oluşturan fonksiyon konusu sayılar teorisinde de aritmetik fonksiyon olarak ele alınmıştır. Özel bir fonksiyon türü olan aritmetik fonksiyonun tanımı verilerek bazı temel aritmetik fonksiyonlar ve bunlarla ilgili örneklere bakılacaktır.

Tanım 2.1.1. Pozitif tam sayılar kümesinden reel veya kompleks sayılar kümesine tanımlanan fonksiyonlara aritmetik fonksiyon denir. (Apostol, 1976)

Burada $f(n)$'nin bir aritmetik özelliği göstermesi gerekmez. Tüm reel değerli aritmetik fonksiyonlar cümlesini A ile gösterelim. Yani, A cümlesi $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı tüm fonksiyonlar cümlesi olsun. Bu çalışmada değer kümesi $\mathbb{R}$ olarak alınacak ve karmaşık sayılarla çalışılmayacaktır. Ayrıca $f(1) > 0$ olacak şekildeki tüm aritmetik fonksiyonlar cümlesini P ile gösterilir. Bunun bir alt cümlesi olan ve $f(1) = 1$ ve $(m,n) = 1$ olmak üzere $f(mn) = f(m)f(n)$ şartını sağlayan aritmetik fonksiyonlar cümlesine de çarpımsal fonksiyonlar cümlesi denir ve M ile gösterilir. Sonuç olarak $M \subset P \subset A$ olur.

Tanım 2.1.2. $p_1, p_2, \cdots, p_k$ asal sayılar olmak üzere her $n = p_1^{a_1}, \cdots, p_k^{a_k}$ pozitif tam sayısı için

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona μ Möbius fonksiyonu denir. (Apostol, 1976)

Tanımdan da anlaşılacağı gibi n pozitif tam sayısının çarpanlarından en az biri tam kare içeriyorsa $\mu(n) = 0$ olacaktır.

İlk 10 sayının μ Möbius fonksiyonu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Tanım 2.1.3. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n den küçük veya eşit, n ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısını veren fonksiyona Euler fonksiyonu denir ve φ ile gösterilir. (Apostol, 1976)
Yani $A = \{d : (d, n) = 1,\ 0 < d < n\}$ olmak üzere $\varphi(n) = s(A)$ dır.

İlk 10 sayının Euler φ fonksiyonu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Tanım 2.1.4. k, negatif olmayan bir tam sayı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n nin bütün pozitif bölenlerinin k. kuvvetlerinin toplamı olarak tanımlanan fonksiyona bölen fonksiyon denir ve σ_k ile gösterilir. Yani $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

olur. Özel olarak $\sigma(n) = \sigma_1(n)$, n nin bölenlerinin toplamı ve $\tau(n) = \sigma_0(n)$, n nin bölenlerinin sayısını veren fonksiyondur. (Apostol, 1976)

Örnek 2.1.5. $n = 12$ için $\tau(n)$, $\sigma(n)$, $\sigma_2(n)$ değerlerini bulalım:

$$\begin{aligned}
\tau(12) &= \sigma_0(12) = \sum_{d|12} d^0 = \sum_{d|12} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6 \\
\sigma(12) &= \sigma_1(12) = \sum_{d|12} d^1 = 1+2+3+4+6+12 = 28 \\
\sigma_2(n) &= \sum_{d|12} d^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+6^2+12^2 = 210
\end{aligned}$$

Tanım 2.1.6. k, negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere $\zeta_k(n) = n^k$ biçiminde tanımlanan aritmetik fonksiyona kuvvet fonksiyonu denir. Özel olarak $k = 0$ olması durumunda $\zeta = \zeta_0$ ile gösterilir ve Zeta fonksiyonu adını alır. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\zeta(n) = 1$ dir. (Apostol, 1976)

Tanım 2.1.7. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^m \quad (m \geq 1) \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyona Mangoldt fonksiyonu denir. (Apostol, 1976)

2.2. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımı

Aritmetik fonksiyonlar üzerine tanımlanan Dirichlet çarpım yardımıyla yeni bir aritmetik fonksiyon elde edilmektedir. Böylece aritmetik fonksiyonlar üzerinde tanımlı Dirichlet çarpım ile Dirichlet terse sahip aritmetik fonksiyonların kümesi bir grup yapısı teşkil etmektedir. Ayrıca çarpımsal fonksiyonlar kümesi bu grup için alt grup tanımlayacaktır.

Tanım 2.2.1. f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

biçiminde tanımlı h fonksiyonuna f ile g nin Dirichlet çarpımı (Dirichlet konvolusyon) denir ve $h = f * g$ ile gösterilir. (Apostol, 1976)

h fonksiyonu da $n \in \mathbb{Z}^+$ için tanımlı olduğundan bir aritmetik fonksiyondur ve A nın bir elemanıdır. Tanımın sağ tarafı elementer toplam ve çarpım olduğundan konvolusyon işlemi iyi tanımlıdır.

Örnek 2.2.2. $n = 20$ olsun.

$$\begin{aligned} (f * g)(20) &= \sum_{d|20} f(d)g\left(\frac{20}{d}\right) \\ &= f(1)g(20) + f(2)g(10) + f(4)g(5) \\ &\quad + f(5)g(4) + f(10)g(2) + f(20)g(1) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Örnek 2.2.3. Tanım 2.1.6 de verilen ζ fonksiyonu için

$$(\zeta_k * \zeta)(n) = \sum_{d|n} \zeta_k(d)\zeta(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} d^k \cdot 1 = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

olup buradan $\sigma_k = \zeta_k * \zeta$ olduğu görülür.

Şimdi Aritmetik fonksiyonlar kümesinin bazı özelliklerini inceleyelim.

Teorem 2.2.4. $(A, *)$ cebirsel yapısı değişmelidir.

İspat. Fonksiyonlar yer değişince sadece toplamdaki terimlerin sırası değişir. Bu nedenle değişme özelliği vardır.

Teorem 2.2.5. $(A, *)$ cebirsel yapısı birleşmelidir.

İspat. $f, g, h \in A$ için $f * g = F$ ve $g * h = G$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](n) &= [F * h](n) = \sum_{dd_3=n} F(d)h(d_3) \\ &= \sum_{dd_3=n} \Big(\sum_{d_1d_2=d} f(d_1)g(d_2)\Big)h(d_3) \\ &= \sum_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} [f * (g * h)](n) &= [f * G](n) = \sum_{d_1d=n} f(d_1)G(d) \\ &= \sum_{d_1d=n} f(d_1) \left[\sum_{d_2d_3=d} g(d_2)h(d_3) \right] \\ &= \sum_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

olup (2.2.1) ve (2.2.2) ifadeleri eşit olduğundan birleşme özelliği vardır.

Teorem 2.2.6. A kümesi üzerinde $*$ işleminin toplama üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

İspat. Her $f, g, h \in A$ için

$$\begin{aligned}
[f*(g+h)](n) &= \sum_{d|n} f(d)(g+h)(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{d|n} f(d)\left[g(\frac{n}{d}) + h(\frac{n}{d})\right] \\
&= \sum_{d|n} \left[f(d)g(\frac{n}{d}) + f(d)h(\frac{n}{d})\right] \\
&= \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) + \sum_{d|n} f(d)h(\frac{n}{d}) \\
&= (f*g)(n) + (f*h)(n) \\
&= [(f*g)+(f*h)](n)
\end{aligned}$$

olup dağılma özelliği vardır ve sağdan dağılma özelliğide benzer şekilde görülür.

Teorem 2.2.7. $(A, *)$ cebirsel yapısının birim elemanı

$$\delta = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyondur.

İspat. $\forall f \in A$ için,

$$(f*\delta)(n) = \sum_{d|n} f(d)\delta\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)\delta(1) + 0 + ... + 0 = f(n)$$

ve bu işlem değişmeli olduğundan δ birim elemandır.

Sonuç 2.2.8. $(A, *)$ cebirsel yapısı değişmeli monoiddir.

Teorem 2.2.9. $(A, *)$ cebirsel yapısında $f(1) \neq 0$ olan her fonsiyonun tersi vardır. Bu ters f^{-1} ile gösterilir ve

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & n = 1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(\frac{n}{d}) f^{-1}(d), & n > 1 \end{cases}$$

eşitliği ile bulunur. Buna f fonksiyonunun Dirichlet tersi denir.

İspat. Teorem 2.2.7 eşitliğini dikkate alırsak, $n = 1$ için

$$\sum_{d|1} f(1) f^{-1}(\frac{1}{d}) = \delta(1) = 1$$

dir. Burada

$$f(1) f^{-1}(1) = 1$$

olup

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

elde edilir. Şimdi n den küçük tüm tam sayı değerleri için eşitliğin doğruluğunu kabul edelim. O halde n için yazılan

$$\sum_{d|n} f(n) f^{-1}(\frac{n}{d}) = \delta(n) = 0$$

ifadesi açılırsa

$$f(1) f^{-1}(n) + \cdots + f(n) f^{-1}(1) = 0$$

olur. Bu eşitlikte $f^{-1}(n)$ yanlız bırakılırsa

$$f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(\frac{n}{d}) f^{-1}(d)$$

olup kabulümüzle birlikte eşitliğin sağındaki her değer bilindiğinden ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $(P, *)$ ve $(M, *)$ cebirsel yapılarını inceleyelim.

Teorem 2.2.10. $(P, *)$ bir gruptur.

İspat. Grup şartlarının sağlandığını gösterelim:

1. $\forall f, t \in P$ için $f * t \in P$ olduğunu gösterelim. $f(1) > 0$, $t(1) > 0$ olsun.

$$\begin{aligned} (f * t)(1) &= \sum_{d|1} f(d) t\left(\frac{1}{d}\right) \\ &= f(1)t(1) > 0 \end{aligned}$$

olup $f * t \in P$ dir.

2. Teorem 2.2.7 de gösterildiği üzere δ birim elemandır.

3. Teorem 2.2.9 belirtildiği gibi $f(1) \neq 0$ olan her aritmetik fonksiyonun tersi bulunduğu ve P kümesinin her f elemanı için $f(1) > 0$ olduğundan P kümesinin her elemenın tersi vardır.

4. $(A, *)$ birleşmeli ve $P \subset A$ olduğundan $(P, *)$ birleşmelidir.

Şimdi de $(M, *)$ cebirsel yapısını inceleyelim.
Tanımda da verildiği gibi her f çarpımsal fonksiyonu için $f(1) = 1$ dir. Çünkü, her $n \in Z$ için $(n, 1) = 1$ olup f çarpımsal fonksiyon olduğundan

$$f(n) = f(n.1) = f(n)f(1) \Rightarrow f(n) - f(n)f(1) = 0 \Rightarrow f(n)(1 - f(1)) = 0$$

olur. Ayrıca f çarpımsal olduğundan $\forall n \in Z$ için $f(n) \neq 0$ olup $1 - f(1) = 0$ ve $f(1) = 1$ bulunur.

Teorem 2.2.11. $(M, *)$ cebirsel yapısı bir gruptur.

İspat. Grup şartlarının sağlandığını gösterelim:

1. $f, t \in M \Longrightarrow f * t \in M$ olduğunu gösterelim. $k = f * t$ ve $(m, n) = 1$ olmak üzere $k(mn) = \sum_{c|mn} f(c)t(\frac{mn}{c})$ olup burada mn nin her c böleni $c = ab$ biçiminde ve $a|\,m$ ve $b|\,n$ dir. Ayrıca $(a, b) = 1$ ve $(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}) = 1$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} k(mn) &= \sum_{ab|mn} f(ab)t(\frac{mn}{ab}) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a)f(b)t(\frac{m}{a})t(\frac{n}{b}) \\ &= \sum_{a|m} f(a)t(\frac{m}{a}) \sum_{b|n} f(b)t(\frac{n}{b}) = k(m)k(n) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$(f * t)(mn) = [(f * t)(m)][(f * t)(n)]$$

elde edilir.

2. Teorem 2.2.7 de gösterildiği üzere δ birim elemandır.

3. Teorem 2.2.9 dan ve $f(1) = 1 \neq 0$ olduğundan her elemanın tersi vardır.

4. $(A, *)$ birleşmeli ve $M \subset A$ olduğundan $(M, *)$ birleşmelidir.

Tanım 2.2.12. A kümesi üzerindeki toplama ve çarpma ve bir K cisminin elemanlarıyla çarpma işlemine göre aşağıdaki şartları sağlıyorsa, A ya K cismi üzerinde bir cebir denir.

1. A kümesi toplama ve K cisminin elemanları ile skaler çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır.

2. A kümesi toplama ve çarpma işlemi ile bir halkadır.

3. Her $\lambda \in K$ ve $a, b \in A$ için $\lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$ eşitliği sağlanır. (Vinberg, 1999)

Teorem 2.2.13. A kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebirdir.

Yani $(A, +, *, \cdot)$ cebirsel yapısında

1. $(A, +)$ kümesi $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

2. $(A, +, *)$ bir halkadır.

3. A ve $\mathbb{R}$ nin elemanları arasında $\mathbb{R} \times A \longrightarrow A$ işlemini $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $h \in A$ için $(\lambda, h) \longrightarrow \lambda h$ olarak tanımlarsak her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $h, g \in A$ için

$$\lambda(h * g) = h * (\lambda g) = (\lambda h) * g$$

şartları sağlanır. (Rearick, 1968)

İspat. Cebir şartlarının sağlandığını gösterelim:

1. A kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

   (a) $\forall h, g \in A$ için $h + g \in A$ olup kapalılık özelliği sağlanır.

   (b) $\forall h, g \in A$ için $h + g = g + h$ olduğundan değişme özelliği vardır.

(c) $\forall r, g, h \in A$ için $(r+g)+h = r+(g+h)$ şartını sağladığından birleşme özelliği vardır.

(d) $\forall h \in A$ için $h+e = e+h = h$ olacak şekilde $e \in A$ mevcut olup $e = 0$ fonksiyonu birim elemandır.

(e) $\forall h \in A$ için $h + h^{'} = h^{'} + h = 0$ olacak şekilde $h^{'} = -h \in A$ olup $-h$ fonksiyonu h nin toplamsal tersidir.

(f) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall h \in A$ için $\alpha \cdot h \in A$ olup kapalıdır.

(g) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall h, g \in A$ için $\alpha(h+g) = \alpha h + \alpha g$ dır.

(h) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall h \in A$ için $(\alpha+\beta)\,h = \alpha h + \beta h$ dir.

(i) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall h \in A$ için $(\alpha\beta)\,h = \alpha\,(\beta h)$ dir.

(j) $\forall h \in A$ için $1 \cdot h = h$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{R}$ mevcut olup bu reel 1 sayısıdır.

2. $(A, +)$ nın değişmeli bir grup olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan $\forall h, g \in A$ için $h * g \in A$ olduğundan kapalılık özelliği sağlanır. Teorem 2.2.5, 2.2.6 ve 2.2.4 dan birleşme, dağılma ve değişme özellikleri sağlanır. Ayrıca Teorem 2.2.7 den birim de mevcuttur. O halde A kümesi fonksiyonlarda toplama ve Dirichlet çarpım ikili işlemleri ile değişmeli ve birimli bir halkadır.

3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $h, g \in A$ için $\lambda(h*g) = h*(\lambda g) = (\lambda h)*g$ olduğunu gösterelim. Her n pozitif tamsayısı için

$$\begin{aligned}
[\lambda(h*g)]\,(n) &= \lambda \sum_{d|n} h(d)g(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{d|n} \lambda h(d)g(\frac{n}{d}) \\
&= [(\lambda h)*g]\,(n)
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\lambda(h*g)]\,(n) &= \lambda \sum_{d|n} h(d)g(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{d|n} h(d)\lambda g(\frac{n}{d}) \\
&= [h*(\lambda g)]\,(n)
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

olup (2.2.3) ve (2.2.4) den istenilen eşitliğin sağlandığı görülür. O halde $(A,+,*,\cdot)$ bir cebirdir.

Örnek 2.2.14. $(\mathbb{R},+,\cdot)$ reel sayılar halkası $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olup skalerle çarpma ve çarpma $\mathbb{R}$ 'deki tanımlanan çarpma olarak alınırsa o takdirde $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebirdir.

2.3. Logaritma Operatörü

Bu bölümdeki ilk amacımız P ve M çarpımsal grupların izomorf yapılar olduğunu göstererek yukarıdaki $(A,+,*,\cdot)$ cebir yapısına katkı sağlamaktır.

Teorem 2.3.1. $(P,*) \approxeq (M,*) \approxeq (A,+)$ dır.

Bu teoremin ispatı daha sonra tamamlanacaktır. Bu teoremin ispatı için alt yapı hazırlayalım.
$(P,*)$ ve $(A,+)$ gruplarının izomorfluğunu göstermek için $L : P \to A$ dönüşümü her $f,t \in P$ için

$$L(f*t) = Lf + Lt$$

şartını sağlayacak şekilde bir operatör gereklidir. Burada operatör ifadesi dönüşümün A nın bir alt kümesinden A ya tanımlı olduğu için kullanılmıştır. Bu L operatörü kullanılarak üstel ve trigonometrik operatörler tanımlanmış, böylece Teorem 2.3.1 ile benzer sonuçların ispatlanması mümkün olmuştur. (Rearick, 1968)

Tanım 2.3.2. $f \in P$ olmak üzere

$$Lf(n) = \begin{cases} \sum\limits_{d|n} f(d) f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \log d, & n > 1 \\ \log f(1), & n = 1 \end{cases} \tag{2.3.5}$$

operatörüne logaritma operatörü denir. (Rearick, 1968)

Örnek 2.3.3. Her n tam sayısı için $f(n) = 1$ olsun. Bu takdirde Lf fonksiyonunu bulalım. Fonksiyonun bazı değerlerindeki tersleri

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} = 1$$

$$f^{-1}(2) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|2 \\ d<2}} f(\frac{2}{d}) f^{-1}(d) = -\frac{1}{f(1)}[f(2)f^{-1}(1)] = -1$$

$$f^{-1}(3) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|3 \\ d<3}} f(\frac{3}{d}) f^{-1}(d) = -\frac{1}{f(1)}[f(3)f^{-1}(1)] = -1$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(4) &= -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|4 \\ d<4}} f(\frac{4}{d}) f^{-1}(d) = -\frac{1}{f(1)}[f(4)f^{-1}(1) + f(2)f^{-1}(2)] \\ &= -1[1.1 + 1.(-1)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(6) &= -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|6 \\ d<6}} f(\frac{6}{d}) f^{-1}(d) \\ &= -\frac{1}{f(1)}[f(6)f^{-1}(1) + f(3)f^{-1}(2) + f(2)f^{-1}(3)] \\ &= -1[1.1 + 1.(-1) + 1.(-1)] = 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$Lf(1) = \log f(1) = \log 1 = 0$$

$$Lf(2) = f(1)f^{-1}(2)\log 1 + f(2)f^{-1}(1)\log 2 = 0 + 1.1.\log 2 = \log 2$$

$$Lf(3) = f(1)f^{-1}(3)\log 1 + f(3)f^{-1}(1)\log 3 = 0 + 1.1.\log 3 = \log 3$$

$$\begin{aligned} Lf(4) &= f(1)f^{-1}(4)\log 1 + f(2)f^{-1}(2)\log 2 + f(4)f^{-1}(1)\log 4 \\ &= 0 + 1.(-1)\log 2 + 1.1.2\log 2 = \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Lf(6) &= f(1)f^{-1}(6)\log 1 + f(2)f^{-1}(3)\log 2 \\ &\quad + f(3)f^{-1}(2)\log 3 + f(6)f^{-1}(1)\log 6 \\ &= 0 + 1\cdot(-1)\cdot\log 2 + 1\cdot(-1)\cdot\log 3 + 1\cdot 1\cdot\log 6 \\ &= -\log 2 - \log 3 + \log 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu değerlerin ilk 10 tanesi

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Lf(n)$	0	$\log 2$	$\log 3$	$\log 2$	$\log 5$	0	$\log 7$	$\log 2$	$\log 3$	0

olup alışılmış Λ-Mangoldt fonksiyonu elde edilmiş olur. Dolayısıyla $Lf(n) = \Lambda(n)$ dir. (Rearick, 1968)

Örnek 2.3.4. Şimdi ϕ fonksiyonunu için $L\phi$ logaritmasını inceleyelim.

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(2) &= -\frac{1}{\phi(1)} \sum_{\substack{d|2 \\ d<2}} \phi\left(\frac{2}{d}\right)\phi^{-1}(d) \\ &= -\frac{1}{\phi(1)}\phi(2)\phi^{-1}(1) = (-1)\cdot 1 \cdot 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(4) &= -\frac{1}{\phi(1)} \sum_{\substack{d|4 \\ d<4}} \phi\left(\frac{4}{d}\right)\phi^{-1}(d) \\ &= -\ \phi(4)\phi^{-1}(1) + \phi(2)\phi^{-1}(2) \\ &= -[2 + 1\cdot(-1)] = -1 \end{aligned}$$

Şimdi bu değerleri kullanarak logaritmalarını hesaplayalım.

$$L\phi(1) = \log\phi(1) = \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} L\phi(2) &= \sum_{d|2} \phi(d)\phi^{-1}\left(\frac{2}{d}\right)\log d \\ &= \phi(1)\phi^{-1}(2)\log 1 + \phi(2)\phi^{-1}(1)\log 2 \\ &= 0 + 1\cdot\log 2 = \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\phi(4) &= \sum_{d|4} \phi(d)\phi^{-1}(\frac{4}{d}) \log d \\ &= \phi(1)\phi^{-1}(4)\log 1 + \phi(2)\phi^{-1}(2)\log 2 + \phi(4)\phi^{-1}(1)\log 4 \\ &= 0 + 1\cdot(-1)\log 2 + 2\cdot 1\cdot \log 4 \\ &= -\log 2 + 4\log 2 = 3\log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\phi(8) &= \sum_{d|8} \phi(d)\phi^{-1}(\frac{8}{d}) \log d \\ &= \phi(1)\phi^{-1}(8)\log 1 + \phi(2)\phi^{-1}(4)\log 2 \\ &\quad +\phi(4)\phi^{-1}(2)\log 4 + \phi(8)\phi^{-1}(1)\log 8 \\ &= 0 + 1\cdot(-1)\log 2 + 2\cdot(-1)\cdot\log 4 + 4\cdot 1\cdot\log 8 \\ &= -\log 2 - 4\log 2 + 12\log 2 \\ &= 7\log 2 \end{aligned}$$

Teorem 2.3.5. $\forall f, t \in P$ için

$$L(f * t) = Lf + Lt \tag{2.3.6}$$

dir. (Rearick, 1968)

İspat. $n = 1$ iken

$$L(f*t)(1) = \log(f*t)(1) = \log(f(1)t(1)) = \log f(1) + \log t(1) = Lf(1) + Lt(1)$$

olup eşitlik sağlanır. Diğer durumlarda yukarıdaki eşitliği gösterebilmek için $n > 1$ iken $\lambda f(n) = f(n)\log n$ olacak şekilde $\lambda : A \to A$ operatörü tanımlayıp işlemlerimizde kullanalım. Burada

$$[f^{-1} * \lambda f](n) = \sum_{d|n} f^{-1}(\frac{n}{d})\lambda f(d) = \sum_{d|n} f^{-1}(\frac{n}{d}) f(d)\log d = Lf(n)$$

olduğundan $L(f)(n) = [f^{-1} * \lambda f](n)$ dir.

Ayrıca

$$\lambda(f * t) = t * \lambda f + f * \lambda t \tag{2.3.7}$$

eşitliğinin de sağlandığını şöyle gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
[(t * \lambda f) + (f * \lambda t)](n) &= (t * \lambda f)(n) + (f * \lambda t)(n) \\
&= \sum_{d|n} t(d)\lambda f(\frac{n}{d}) + \sum_{d|n} f(d)\lambda t(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{d|n} t(d) f(\frac{n}{d}) \log \frac{n}{d} + \sum_{d|n} f(d) t(\frac{n}{d}) \log \frac{n}{d}
\end{aligned}$$

Son ifadede $\sum_{d|n} t(d)f(\frac{n}{d}) \log \frac{n}{d} = \sum_{d|n} f(d)t(\frac{n}{d}) \log d$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&= \sum_{d|n} f(d)t(\frac{n}{d}) \log d + \sum_{d|n} f(d)t(\frac{n}{d}) \log \frac{n}{d} \\
&= \sum_{d|n} f(d)t(\frac{n}{d})[\log d + \log \frac{n}{d}] \\
&= \sum_{d|n} f(d)t(\frac{n}{d}) \log n \\
&= (f * t)(n) \log n \\
&= \lambda(f * t)(n)
\end{aligned}$$

olur. Eğer $f, t \in P$ için (2.3.7) eşitliğinin her iki tarafını $(f^{-1} * t^{-1})$ ile Dirichlet çarpımı ile çarparsak

$$(f * t)^{-1} * \lambda(f * t) = (f^{-1} * t^{-1}) * [(t * \lambda f) + (f * \lambda t)] \tag{2.3.8}$$

eşitliği elde edilir, Dirichlet çarpımı değişmeli ve $(A, +, *, \cdot)$ cebir olduğundan

$$\begin{aligned}
(f * t)^{-1} * \lambda(f * t) &= (f^{-1} * t^{-1}) * (t * \lambda f) \\
&+ (f^{-1} * t^{-1}) * (f * \lambda t) \\
&= f^{-1} * \lambda f + t^{-1} * \lambda t
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

olur. Şimdi $(f * t) = k$ olsun. Bu durumda (2.3.8) ifadesi

$$k^{-1} * \lambda k = f^{-1} * \lambda f + t^{-1} * \lambda t$$

şekline gelir. Buradan

$$Lk(n) = Lf(n) + Lt(n)$$

olup

$$L(f * t)(n) = Lf(n) + Lt(n)$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

L operatörünün örtenliğini göstermek için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.3.6. Her bir $h \in A$ için $h = Lf$ olacak şekilde tek bir $f \in P$ vardır. (Rearick, 1968)

İspat. Bu ispatı tümevarım metodu kullanarak yapalım.
$L : P \to A$ nın bir operatör olduğunu biliyoruz. Bir ters operatör tanımlayarak L nin birebir ve örten olduğunu göstereceğiz. Bu operatöre daha sonra *exp* operatörü diyeceğiz.
$f(1) = \exp h(1) = Eh(1)$ olarak tanımlayalım. Kabul edelim ki $n > 1$ olsun ve $\forall v < n$ için tümevarımla $f(v)$ nın tanımlı olsun. Buradan $\forall v < n$ için,

$$\delta(v) = (f * f^{-1})(v) = \sum_{d|v} f^{-1}(d) f(\frac{v}{d}) \tag{2.3.10}$$

eşitliği kullanılarak rekürans ilişkisi yardımıyla $f^{-1}(v)$ hesaplanabilir.
Bu durumda $\forall\ v < n$ için $f(v)$ ve $f^{-1}(v)$ bilinmekte olup bunları kullanarak n tam sayısı için $h = Lf$ şartını sağlayacak bir $f(n)$ bulalım. Bunun için

$$\begin{aligned} h &= Lf \Rightarrow h(n) = Lf(n) \\ &\Rightarrow h(n) = \sum_{d|n} f(d) f^{-1}(\frac{n}{d}) \log d \end{aligned}$$

ifadesinden

$$h(n) = f(1) f^{-1}(n) \log 1 + ... + f(n) f^{-1}(1) \log n$$

elde edilir. Son eşitlikte $f(n)$ yi yalnız bırakırsak her h için f bulunmuş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Bu tümevarım bize f nin nasıl üretilebileceğini gösteriyor. Aynı zamanda da f nin tekliğini garanti ediyor. Çünkü $f(n)$ her basamakta tek şekilde elde edilmektedir. Böylece birebir L operatörünün olduğu da gösterilmiş olur. Dolayısıyla Teorem 2.3.5 ve Teorem 2.3.6 den

$$L(f * t) = L(f) + L(t)$$

olup $(P, *) \cong (A, +)$ izomorfizması ispat edilmiş olur.
Şimdi P kümesinin $f(1) > 0$ olan tüm aritmetik fonksiyonlar kümesi olduğunu hatırlatarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.3.7. p bir asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $f \in P$ nin çarpımsal olması için gerek ve yeter şart $N \neq p^k$ iken $Lf(N) = 0$ olmasıdır. (Rearick, 1968)

İspat. $\Rightarrow$) f çarpısal olsun. Öyleyse $f(1) = 1$ ve $Lf(1) = \log f(1) = \log 1 = 0$ olur. Şimdi $N > 1$ olsun. $k \in \mathbb{Z}$ için $N \neq p^k$ alalım. Bu durumda $N = mn, (m, n) = 1, m > 1, n > 1$ olarak yazılabilir. Burada $Lf(N) = 0$ olduğunu gösterelim. $N = mn$ nin her d böleni $d_1 d_2 = d$ ve $d_1|m$, $d_2|n$ şeklinde ifade edilebilir ki burada $(d_1, d_2) = (\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}) = 1$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} Lf(N) &= \sum_{d|N} f(d) f^{-1}(\frac{N}{d}) \log d \\ &= \sum_{d_1 d_2 | mn} f(d_1 d_2) f^{-1}(\frac{mn}{d_1 d_2}) \log(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1) f(d_2) f^{-1}(\frac{m}{d_1}) f^{-1}(\frac{n}{d_2}) (\log d_1 + \log d_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1)f(d_2)f^{-1}(\frac{m}{d_1})f^{-1}(\frac{n}{d_2})(\log d_1) \\
&\quad + \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1)f(d_2)f^{-1}(\frac{m}{d_1})f^{-1}(\frac{n}{d_2})(\log d_2) \\
&= \sum_{d_1|m} f(d_1)f^{-1}(\frac{m}{d_1})(\log d_1)\sum_{d_2|n} f(d_2)f^{-1}(\frac{n}{d_2}) \\
&\quad + \sum_{d_1|m} f(d_1)f^{-1}(\frac{m}{d_1})\sum_{d_2|n} f(d_2)f^{-1}(\frac{n}{d_2})(\log d_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= Lf(m)\sum_{d_2|n} f(d_2)f^{-1}(\frac{n}{d_2}) + \sum_{d_1|m} f(d_1)f^{-1}(\frac{m}{d_1})Lf(n) \\
&= Lf(m)\delta(n) + \delta(m)Lf(n) \\
&= Lf(m).0 + 0.Lf(n) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Diğer taraftan $N \neq p^{k}$ için $Lf(N) = 0$ olduğunu kabul edip f nin çarpımsal olduğunu gösterelim. Kabulden $1 \neq p^{k}$ için $Lf(1) = 0$ olduğundan $\log f(1) = 0$ olup $f(1) = 1$ olur ki f nin çarpımsallığı bunu gerektirir.

$N > 1$ alalım, $p^{r}|N$ ve $p^{r+1} \nmid N$ olacak şekildeki p asalları için $t(N) = \prod_{p|N} f(p^{r})$ fonksiyonunu tanımayalım ve $t(1) = 1$ olduğunu kabul edelim. Burada t nin çarpımsal bir fonksiyon ve $f = t$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

Önce ispatımızı p, q asal ve $N = p^{k}$ için yapalım;

$$t(p^{k}) = \prod_{q|p^{k}} f(q^{r}) = f(p^{k})$$

olup

$$t(p^{k}) = f(p^{k}) \tag{2.3.11}$$

elde edilir. Yani asalların kuvvetleri için t ve f fonksiyonları eşittir.

Şimdi $t^{-1}(p^{k}) = f^{-1}(p^{k})$ olduğunu tümevarımla gösterelim.

Öncelikle $n = p^0 = 1$ için $t(1) = f(1)$ olup

$$t^{-1}(1) = \frac{1}{t(1)} = \frac{1}{f(1)} = f^{-1}(1)$$

olur. Sonra $n = p$ için $t^{-1}(p)$ yi hesaplayalım. (2.3.11) den $f(p) = t(p)$ ve Teorem 2.2.9 den $n > 1$ için

$$f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(\frac{n}{d}) f^{-1}(d)$$

olduğundan

$$t^{-1}(p) = -\frac{1}{t(1)} t(p) t^{-1}(1) = -\frac{1}{f(1)} f(p) f^{-1}(1) = f^{-1}(p)$$

eşitliğinden

$$t^{-1}(p) = f^{-1}(p)$$

elde edilir. Tümevarım için p^k dan küçük her tamsayı için eşitliğin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda kabulden ve (2.3.11) den

$$t^{-1}(p^k) = -\frac{1}{t(1)} \sum_{\substack{d|p^k \\ d<p^k}} t(\frac{n}{d}) t^{-1}(d) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|p^k \\ d<p^k}} f(\frac{n}{d}) f^{-1}(d) = f^{-1}(p^k)$$

olur ve $N = p^k$ için

$$f^{-1}(N) = t^{-1}(N)$$

bulunur.

Şimdi t fonksiyonunun çarpımsal olduğunu gösterelim. $N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$ için

$$t(p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}) = \prod_{p|N} f(p^r) = f(p_1^{k_1}) f(p_2^{k_2}) ... f(p_r^{k_r}) = t(p_1^{k_1}) t(p_2^{k_2}) ... t(p_r^{k_r})$$

olup t çarpımsaldır. O zaman son olarak $\forall N$ için $f(N) = t(N)$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakmalıyız. Teoremin hipotezini t fonksiyonu için uygularsak ki t fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyon olduğundan, t çarpımsal ise $N \neq p^k$ için $Lt(N) = 0$ dır. Kabulde $N \neq p^k$ için $Lt(N) = 0$ idi. O halde bu iki fonksiyon her durumda eşittir. Yani $N \neq p^k$ için

$$Lf(N) = Lt(N)$$

olduğundan Teorem 2.3.6 den dolayı her durumda

$$f = t$$

elde edilir.

Şimdi Lf operatörünü çalıştırarak anlamaya çalışalım.

Örnek 2.3.8. f çarpımsal olsun. Bu durumda $f(1) = 1 = f^{-1}(1)$ olup buradan

$$\begin{aligned} L(f(2)) &= \sum_{d|2} f(d) f^{-1}(\frac{2}{d}) \log d \\ &= f(1) f^{-1}(2) \log 1 + f(2) f^{-1}(1) \log 2 \\ &= f(2) \log 2 \neq 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} L(f(5)) &= \sum_{d|5} f(d) f^{-1}(\frac{5}{d}) \log d \\ &= f(1) f^{-1}(5) \log 1 + f(5) f^{-1}(1) \log 5 \\ &= f(5) \log 5 \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca ispat metodunu kullanarak

$$
\begin{aligned}
Lf(10) &= \sum_{d|10} f(d)f^{-1}(\frac{10}{d})\log d \\
&= \sum_{d_1|2}\sum_{d_2|5} f(d_1)f(d_2)f^{-1}(\frac{2}{d_1})f^{-1}(\frac{5}{d_2})(\log d_1+\log d_2) \\
&= \sum_{d_1|2}[\; f(d_1)f(1)f^{-1}(\frac{2}{d_1})f^{-1}(5)(\log d_1+\log 1) \\
&\quad + \; f(d_1)f(5)f^{-1}(\frac{2}{d_1})f^{-1}(1)(\log d_1+\log 5)\;] \\
&= f(1)f(1)f^{-1}(2)f^{-1}(5)(\log 1+\log 1) \\
&\quad +f(1)f(5)f^{-1}(2)f^{-1}(5)(\log 1+\log 5) \\
&\quad +f(2)f(1)f^{-1}(1)f^{-1}(5)(\log 2+\log 1) \\
&\quad +f(2)f(5)f^{-1}(1)f^{-1}(5)(\log 2+\log 5) \\
&= f(2)f^{-1}(1)\log 2(f(1)f^{-1}(5)+f(5)f^{-1}(1)) \\
&\quad +f(5)f^{-1}(1)\log 5(f(1)f^{-1}(2)+f(2)f^{-1}(1)) \\
&= L(f(2))\delta(5)+L(f(5))\delta(2) \\
&= L(f(2))\cdot 0+L(f(5))\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Daha basit olarak Teorem 2.2.9 den p asalı için $f^{-1}(p) = -f(p)$ olup

$$
\begin{aligned}
Lf(10) &= \sum_{d|10} f(d)f^{-1}(\frac{10}{d})\log d \\
&= f(1)f^{-1}(10)\log 1+f(2)f^{-1}(5)\log 2 \\
&\quad +f(5)f^{-1}(2)\log 5+f(10)f^{-1}(1)\log 10 \\
&= f(2)f^{-1}(5)\log 2+f(5)f^{-1}(2)\log 5+f(10) \\
&= f(2)(-f(5))\log 2+f(5)(-f(2))(1-\log 2)+f(10) \\
&= -f(2)f(5)\log 2+f(2)f(5)\log 2-f(5)f(2)+f(10) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.9. $K = \{h \in A; h(n) = 0, n \neq p^{\mathsf{k}}\}$ olacak şekilde bütün reel aritmetik h fonksiyonların cümlesi ise Teorem 2.3.7, $(M, *)$ grubunun logaritma operatörü altında $(K, +)$ grubuna izomorf olduğunu gösterir. Yani, $(M, *)$ ve $(K, +)$ grupları için $L : M \to K$ dönüşümü $L(f * t) = L(f) + L(t)$ bir izomorfizmadır.

Bu grup $H(n) = h(k_{\mathsf{n}})$ ($\{k_{\mathsf{n}}\}$ artan sırada asal kuvvetlerin dizisi) olacak şekilde ki $h \leftrightarrow H$ eşleşmesi altında $(A, +)$ grubuna izomorftur.

$$\begin{aligned} (K,+) &\cong (A,+) \\ h &\leftrightarrow H \\ \{k_{\mathsf{n}}\} &= 2^0, 2^1, 2^3 \cdots \end{aligned}$$

Dolayısıyla $(M, *) \cong (A, +)$ dır.
$(M, *) \cong (A, +)$ için kullanılan metotla $(P, *) \cong (M, *) \cong (A, +)$ elde edilir. Böylece Teorem 2.3.1 in ispatı tamamlanmış olur. (Rearick, 1968)

Tanım 2.3.10. Eğer $g \in A$ ise $g = Lf$ olacak şekilde ifade edilen P nin tek türlü belirli f elemanı Eg olarak tanımlanır. Yani

$$g = Lf \Leftrightarrow f = Eg$$

dır. Bu dönüşüme Üstel operatör denir. (Rearick, 1968)

Teorem 2.3.5 i kullanarak $E(g + h) = Eg * Eh$ olduğunu gösterelim. Her $g, h \in A$ için $g = Lf$ ve $h = Lt$ olacak şekilde $f, t \in P$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda Tanım 2.3.10 gereği $f = Eg$ ve $t = Eh$ olur. Teorem 2.3.5 den $L(f * t) = Lf + Lt$ olup buradan

$$E(L(f * t)) = E(Lf + Lt)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \; f * t = E(g + h) \\ &\Rightarrow \; Eg * Eh = E(g + h) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani L homomorfizma ise L nin tersi olan E dönüşümü de homomorfizmadır. Teorem 2.3.6 ve Tanım 2.3.10 dan dolayı $\forall f \in P$ için $L : P \to A$ dönüşümü altında $E(Lf) = f$ dır ve $\forall g \in A$ için $E : A \to P$ dönüşümü altında $L(Eg) = g$ dır. Ayrıca $z = 0$ fonksiyonu ve E homomorfizma olduğundan $Ez = \delta$ ve $L(\delta) = z$ olur. (Rearick, 1968)

2.4. Aritmetik Fonksiyonların Genel Kuvvetleri

Bu kısımda ilk olarak cebirde çok iyi bilinen bir tanımı vererek aritmetik fonksiyonların kuvvetlerine geçelim.

Tanım 2.4.1. F, p asal karakteristikli sonlu bir cisim olsun. $\varphi_{\mathsf{p}} : F \to F$ her $a \in F$ için $\varphi_{\mathsf{p}} = a^{\mathsf{p}}$ biçiminde tanımlı dönüşüm F nin bir otomorfizmasıdır. Bu dönüşüme Frobenius otomorfizması denir. (Fraleigh, 1994)

Örnek 2.4.2. $(\mathbb{Z}_5, +, .)$ cismi üzerinde $\varphi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ dönüşümünü alalım. $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_5$ için $\varphi(\bar{a}) = (\bar{a})^5$ dönüşümü bir otomorfizmadır, gösterelim.

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{a} + \bar{b}) &= \varphi(\overline{a+b}) = (\overline{a+b})^5 \\
&= (\bar{a})^5 + 5(\bar{a})^4\bar{b} + 10(\bar{a})^3(\bar{b})^2 + 10(\bar{a})^2(\bar{b})^3 + 5(\bar{a})(\bar{b})^4 + (\bar{b})^5 \\
&= (\bar{a})^5 + (\bar{b})^5 = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})
\end{aligned}$$

ve

$$\varphi(\bar{a} \odot \bar{b}) = \varphi(\overline{a \cdot b}) = (\overline{a \cdot b})^5 = (\bar{a})^5 \cdot (\bar{b})^5 = \varphi(\bar{a}) \cdot \varphi(\bar{b})$$

olup φ bir halka homomorfizmasıdır. Ayrıca

$\varphi(\overline{0}) = \overline{0}^5 = \overline{0}$

$\varphi(\overline{1}) = \overline{1}^5 = \overline{1}$

$\varphi(\overline{2}) = \overline{2}^5 = \overline{2}$

$\varphi(\overline{3}) = \overline{3}^5 = \overline{3}$

$\varphi(\overline{4}) = \overline{4}^5 = \overline{4}$

elde edilir. Burada Fermat teoreminden her a tam sayısı için $a^5 \equiv a(5)$ olduğu da görülmektedir. Hesaplamadan φ fonksiyonunun örten ve birebir olduğu açıktır. Bu nedenle φ bir otomorfizmadır.

Tanım 2.4.3. $f \in P$ ve $r \in \mathbb{R}$ ise $f^{\mathsf{r}} = E(rLf)$ olarak tanımlanır.

$f^{\ \mathsf{r}} = E(rLf)$ ifadesini analizdeki $e^{\mathsf{r}\log \mathsf{f}} = e^{\log \mathsf{f}^r} = f^{\ \mathsf{r}}$ eşitliğine benzetebiliriz. Logaritma ve üstel fonksiyonlar düşünüldüğünde bu tanımın anlamlı olduğu ve benzerliği görülmektedir. (Rearick, 1968)

Teorem 2.4.4. Her bir $r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ için $\varphi : P \to P$, $\varphi(f) = f^{\ \mathsf{r}}$ dönüşümü $(P, *)$ den $(P, *)$ ye bir izomorfizmadır. Bu bir Frobenius otomorfizasıdır. (Rearick, 1968)

$(A, +, *, \cdot)$ cebirinin cebirsel özellikleri bize üstel fonksiyondakilere benzer özellikler verir. Mesela,

$$\begin{aligned} (f^{\mathsf{r}})^{\mathsf{s}} &= f^{\mathsf{rs}} \\ f^{\mathsf{r+s}} &= f^{\mathsf{r}} * f^{\mathsf{s}} \\ (f * t)^{\mathsf{r}} &= f^{\mathsf{r}} * t^{\mathsf{r}} \end{aligned}$$

ve $r \in \mathbb{Z}^{+}$ için

$$\begin{aligned} f^{\mathsf{r}} &= E(rLf) \\ &= E(Lf + \cdots + Lf) \quad (r \text{ tane}) \\ &= E(Lf) * \cdots * E(Lf) \\ &= f * \cdots * f \end{aligned}$$

olur.

$r = -1$ için,

$$\begin{aligned} f * f^{\ \ 1} &= E(L(f * f^{\ \ 1})) = E(Lf + Lf^{\ \ 1}) = E(Lf) * E(Lf^{\ \ 1}) \\ &= E(Lf) * E(-Lf) = E(Lf + (-Lf)) \\ &= E(Lf - Lf) = Ez = \delta \end{aligned}$$

olur. Bu da bize $f^{\ \ 1}$ operatörünün önceden tanımlanmış olan konvolisyon tersi ile aynı olduğunu gösterir. Ayrıca $f \in P$ için $f^{\mathsf{r}} \in P$ olur. Verilecek herhangi bir $r \neq 0$

ve herhangi bir $f \in P$ için $t^{\mathsf{r}} = f$ ise t için tek bir çözüm vardır ve $t = f^{\frac{1}{r}}$dir. Çünkü φ otomorfizması 1-1 ve örtendir.
Özel olarak $f \in P$ tek karaköke sahiptir ve bu kök $f^{\frac{1}{2}} \in P$ şeklinde gösterilir.
Diğer yandan f çarpımsal bir fonksiyon ise $r \in \mathbb{Z}$ için f^{r} nin de çarpımsal olduğu şöyle gösterilebilir. f çarpımsal ise $(m,n) = 1$ için $f(mn) = f(m) * f(n)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
f^{\mathsf{r}}(mn) &= E\left(rLf(mn)\right) \\
&= E\left(Lf(mn) + Lf(mn) + \cdots + Lf(mn)\right) \;\; (r \text{ tane}) \\
&= E\left(Lf(mn)\right) * E\left(Lf(mn)\right) * \cdots * E\left(Lf(mn)\right) \\
&= f(mn) * f(mn) * \cdots * f(mn) \\
&= f(m) * f(n) * f(m) * f(n) * \cdots * f(m) * f(n) \\
&= f^{\mathsf{r}}(m) * f^{\mathsf{r}}(n)
\end{aligned}$$

olup f^{r} çarpımsaldır. (Rearick, 1968)

Teorem 2.4.5. $f \in M$ ise her r reel sayısı için $f^{\mathsf{r}} \in M$ dir. (Rearick, 1968)

İspat. İspatımızı Teorem 2.3.7 den yararlanılarak yapacağız.
$f \in M$ ise $n \neq p^{\mathsf{k}}$ için $Lf(n) = 0$ idi. Bu nedenle $rLf(n) = 0$ olup rLf fonksiyonu da Teorem 2.3.7 den dolayı çarpımsaldır ve yine aynı teoremin tersinden $E(rLf)$ de çarpımsaldır. $E(rLf) = f^{\mathsf{r}}$ olduğundan f^{r} fonksiyonu da çarpımsal olur.

Sonuç 2.4.6. $(P, *)$ ve $(A, +)$ grupları izomorftur ve bu izmorfluk $L : P \to A$, her $f, t \in P$ için

$$L(f * t) = Lf + Lt$$

operatörü ile gerçekleşir. Ayrıca E bunun ters operatörüdür. (Rearick, 1968)

2.5. Trigonometrik Operatörler

Aritmetik fonksiyonlar üzerinde A dan A ya dönüşüm altında tanımlanan hiperbolik trigonometrik fonksiyonlar olan sinüs (S), kosünüs (C) ve tanjant (T) operatörleri, analizdeki elementer hiperbolik trigonometrik fonksiyonların tanımına analoji yapılarak tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.1. Her $g \in A$ için sinüs (S), kosünüs (C) ve tanjant (T) operatörleri sırasıyla

$$Sg = \frac{1}{2}\left(Eg - E(-g)\right), \tag{2.5.12}$$

$$Cg = \frac{1}{2}\left(Eg + E(-g)\right) \tag{2.5.13}$$

ve

$$Tg = Sg * (Cg)^{\quad 1} \tag{2.5.14}$$

şeklinde tanımlanır.

$\forall g \in A$ için $Cg(1) = \cosh g(1) > 0$ olduğundan (2.5.14)' de (Cg) in değeri sıfırdan farklı olup Tg operatörü her zaman iyi tanımlıdır. (Rearick, 1968)

Teorem 2.5.5 nin ispatı için önce iki tane Lemma verelim.

Lemma 2.5.2. Her $h \in A$ için

$$Sh + \quad (Sh)^{\,2} + \delta^{\quad \frac{1}{2}} = Eh \tag{2.5.15}$$

eşitliği sağlanır. (Rearick, 1968)

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\begin{aligned}
Sh + \left[(Sh)^2 + \delta\right]^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right) + \left[\left(\frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right)\right)^2 + \delta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right) \\
&\quad + \left[\frac{Eh * Eh - 2Eh * E(-h) + E(-h) * E(-h)}{4} + \delta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right) + \left[\frac{E(2h) - 2E(h-h) + E(-2h)}{4} + \delta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right) + \left[\frac{E(2h) - 2Ez + E(-2h)}{4} + \delta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right) + \left[\frac{E(2h) - 2\delta + E(-2h)}{4} + \delta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right) + \left[\frac{E(2h) - 2\delta + E(-2h) + 4\delta}{4}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right) + \left[\frac{E(2h) + 2\delta + E(-2h)}{4}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right) + \left[\left(\frac{E(h) + E(-h)}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(Eh - E(-h)\right) + \frac{E(h) + E(-h)}{2} \\
&= \frac{2E(h)}{2} \\
&= E(h)
\end{aligned}
$$

olur ki bu da Lemmada istenendir.

Teorem 2.5.3. Her $h, g \in A$ için

$$S(h+g) = Sh * Cg + Sg * Ch$$

ve

$$C(h+g) = Ch * Cg + Sh * Sg$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$Sh * Cg + Sg * Ch = \frac{Eh - E(-h)}{2} * \frac{Eg + E(-g)}{2} + \frac{Eg - E(-g)}{2} * \frac{Eh + E(-h)}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left[(Eh * Eg + Eh * E(-g) - E(-h) * Eg - E(-h) * E(-g))\right. \\
&\quad \left. + Eh * Eg + Eg * E(-h) - E(-g) * Eh - E(-g) * E(-h)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[E(h+g) + E(h-g) - E(-h+g) - E(-h-g)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[E(h+g) + E(g-h) - E(-g+h) - E(-g-h)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[2E(h+g) - 2E(-h-g)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[E(h+g) - E(-h-g)\right] \\
&= S(h+g)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
& Ch * Cg + Sh * Sg \\
& = \frac{Eh + E(-h)}{2} * \frac{Eg + E(-g)}{2} + \frac{Eh - E(-h)}{2} * \frac{Eg - E(-g)}{2} \\
= \ & \frac{Eh * Eg + Eh * E(-g) + E(-h) * Eg + E(-h) * E(-g)}{4} \\
& + \frac{Eh * Eg - Eh * E(-g) - E(-h) * Eg + E(-h) * E(-g)}{4} \\
= \ & \frac{E(h+g) + E(h-g) + E(-h+g) + E(-h-g)}{4} \\
& + \frac{E(h+g) - E(h-g) - E(-h+g) + E(-h-g)}{4} \\
= \ & \frac{2E(h+g) + 2E(-h-g)}{4} \\
= \ & \frac{E(h+g) + E(-(h+g))}{2} \\
= \ & C(h+g)
\end{aligned}$$

ile ispat tamamlanır.

Lemma 2.5.4. Her $h, g \in A$ için

$$S(h+g) = Sh * \left((Sg)^2 + \delta \right)^{\frac{1}{2}} + Sg * \left((Sh)^2 + \delta \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği sağlanır. (Rearick, 1968)

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$\begin{aligned}
& Sh * \left((Sg)^2 + \delta \right)^{\frac{1}{2}} + Sg * \left((Sh)^2 + \delta \right)^{\frac{1}{2}} \\
= \;& Sh * (Eg - Sg) + Sg * (Eh - Sh) \\
= \;& Sh * \left(Eg - \frac{Eg - E(-g)}{2} \right) + Sg * \left(Eh - \frac{Eh - E(-h)}{2} \right) \\
= \;& Sh * \left(\frac{Eg + E(-g)}{2} \right) + Sg * \left(\frac{Eh + E(-h)}{2} \right) \\
= \;& Sh * Cg + Sg * Ch \\
= \;& S(h+g) \qquad \text{(Teorem 2.5.3 den)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.5.5. Her $h, g \in A$ için $\oplus$ işlemi

$$h \oplus g = h * \left(g^2 + \delta \right)^{\frac{1}{2}} + g * \left(h^2 + \delta \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanırsa $(A, \oplus)$ grubu ile $(A, +)$ grubu izomorf olur. (Rearick, 1968)

İspat. $\forall h \in A$ için $h \to Sh$ kuralı ile tanımlanan $S : (A, \oplus) \to (A, +)$ dönüşümünün izomorfizma olduğunu gösterelim.

a)S birebirdir, gösterelim. Her $h, g \in A$ için

$$\begin{aligned}
Sh &= Sg \\
&\Rightarrow (Sh)^2 = (Sg)^2 \\
&\Rightarrow (Sh)^2 + \delta = (Sg)^2 + \delta \\
&\Rightarrow \left((Sh)^2 + \delta \right)^{\frac{1}{2}} = \left((Sg)^2 + \delta \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; Sh + \left((Sh)^2 + \delta\right)^{\frac{1}{2}} = Sg + \left((Sg)^2 + \delta\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (Sh = Sg \text{ idi})$$

$$\Rightarrow \; Eh = Eg \qquad (\text{Lemma 2.5.2 den})$$

$$\Rightarrow \; h = g \qquad (E \text{ birebir})$$

b)S örtendir, gösterelim. $\forall g \in A$ için $Sh = g$ olacak şekilde en az bir $h \in A$ vardır ki bu $h = L\left(g + (g^2 + \delta)^{\frac{1}{2}}\right)$ dir. Şöyle ki

$$\begin{aligned} h &= L\left(g + \left(g^2 + \delta\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\Rightarrow Eh = E\left(L\left(g + \left(g^2 + \delta\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &\Rightarrow Eh = g + \left(g^2 + \delta\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Burada (2.5.15) eşitliğini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Sh + \left((Sh)^2 + \delta\right)^{\frac{1}{2}} = g + \left(g^2 + \delta\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow Sh = g \end{aligned}$$

bulunur ki bu da S fonksiyonunun örtenliğini gösterir.
c)S fonksiyonu homomorfizmadır. Yani $S(h + g) = Sh \; Sg$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned} S(h+g) &= Sh * \left((Sg)^2 + \delta\right)^{\frac{1}{2}} + Sg * \left((Sh)^2 + \delta\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Lemma 2.5.4}) \\ &= Sh \; Sg \qquad (\text{Tanımdan}) \end{aligned}$$

Böylece S izomorfizma olur.

Benzer düşünce ile T operatöründen de bir sonuç elde edilir. Önce iki tane Lemma verelim.

Lemma 2.5.6. Her $h \in A$ için $E(2h) = (\delta + Th) * (\delta - Th)^{-1}$ dir.
(Rearick, 1968)

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\begin{aligned}
(\delta+Th)*(\delta-Th)^{-1} &= E\left(L\left((\delta+Th)*(\delta-Th)^{-1}\right)\right)\\
&= E\left(L(\delta+Th)+L\left((\delta-Th)^{-1}\right)\right)\\
&= E\left[L(\delta+Th)-L(\delta-Th)\right]\\
&= E\left(L\left(\delta+\frac{Sh}{Ch}\right)-L\left(\delta-\frac{Sh}{Ch}\right)\right)\\
&= E\left(L\left(\frac{Ch+Sh}{Ch}\right)-L\left(\frac{Ch-Sh}{Ch}\right)\right)\\
&= E\left[L(Ch+Sh)-L(Ch)-L(Ch-Sh)+L(Ch)\right]\\
&= E\left[L(Ch+Sh)-L(Ch-Sh)\right]\\
&= E\left[\begin{array}{l} L\left(\frac{1}{2}(Eh+E(-h))+\frac{1}{2}(Eh-E(-h))\right)\\ -L\left(\frac{1}{2}(Eh+E(-h))-\frac{1}{2}(Eh-E(-h))\right)\end{array}\right]\\
&= E\left[L(E(h)-L(E(-h))\right]\\
&= E(h-(-h))\\
&= E(2h)
\end{aligned}
$$

olur.

Lemma 2.5.7. T operatörü birebirdir. (Rearick, 1968)

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$
\begin{aligned}
Th &= Tg \\
&\Rightarrow Sh * (Ch)^{\;\;1} = Sg * (Cg)^{\;\;1} \\
&\Rightarrow Sh * Cg = Sg * Ch \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}(Eh - E(-h)) \;\; * \;\; \frac{1}{2}(Eg + E(-g)) \\
&= \frac{1}{2}(Eh + E(-h)) \;\; * \;\; \frac{1}{2}(Eg - E(-g)) \\
&\Rightarrow Eh * Eg + Eh * E(-g) - E(-h) * Eg - E(-h) * E(-g) \\
&= Eh * Eg - Eh * E(-g) + E(-h) * Eg - E(-h) * E(-g) \\
&\Rightarrow Eh * E(-g) - E(-h) * Eg = -Eh * E(-g) + E(-h) * Eg \\
&\Rightarrow E(h - g) - E(-h + g) = -E(h - g) + E(-h + g) \\
&\Rightarrow 2E(h - g) = 2E(-h + g) \\
&\Rightarrow E(h - g) = E(-h + g) \Rightarrow h - g = -h + g \Rightarrow h = g
\end{aligned}
$$

olup T operatörü birebirdir.

Teorem 2.5.8. $V = \{h \in A : -1 < h(1) < 1\}$ olsun. V üzerinde $\triangle$ işlemi her $h, g \in V$ için

$$h \triangle g = (h + g) * (\delta + h * g)^{\;\;1}$$

şeklinde tanımlanırsa $(V, \triangle)$ grubu ile $(A, +)$ grubu izomorf olur. (Rearick, 1968)

İspat. $\forall h \in V$ için $h \to Th$ kuralı ile tanımlanan $T : (V, \triangle) \to (A, +)$ dönüşümünün izomorfizma olduğunu gösterelim.

Şimdi T operatörünün bir homomorfizma olduğunu gösterelim. Her $h, g \in A$ için

$$
\begin{aligned}
T(h + g) &= S(h + g) * C(h + g)^{\;\;1} = \frac{S(h + g)}{C(h + g)} \\
&= \frac{Sh * Cg + Sg * Ch}{Ch * Cg + Sh * Sg} \quad \text{(Teorem 2.5.3 den)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \frac{Sh * Cg + Sg * Ch}{Ch * Cg} \quad * \quad \frac{Ch * Cg}{Ch * Cg + Sh * Sg} \\
&= \quad \frac{Sh * Cg + Sg * Ch}{Ch * Cg} \quad * \quad \frac{Ch * Cg + Sh * Sg}{Ch * Cg} \quad ^{1} \\
&= \quad \frac{Sh}{Ch} + \frac{Sg}{Cg} \quad * \quad \delta + \frac{Sh}{Ch} * \frac{Sg}{Cg} \quad ^{1} \\
&= \quad (Th + Tg) * (\delta + Th * Tg) \quad ^{1} = Th \triangle Tg
\end{aligned}
$$

olup T homomorfizmadır.

$T : A \to V$ operatörünün Lemma 2.5.7 den birebir olduğunu biliyoruz. Şimdi örten olduğunu ispatlayalım:

$\forall g \in V$ için $Th = g$ olacak şekilde en az bir $h \in A$ vardır. Bu h, $2h = L(\delta + g) - L(\delta - g)$ eşitliğini sağlayan dönüşümdür, gösterelim. $\forall g \in V$ için

$$
\begin{aligned}
2h \quad &= \quad L(\delta + g) - L(\delta - g) \\
&\Rightarrow \quad 2h = L(\delta + g) + L(\delta - g) \quad ^{1} \\
&\Rightarrow \quad 2h = L \;\; (\delta + g) * (\delta - g) \quad ^{1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad E\,(2h) = E \;\; L \;\; (\delta + g) * (\delta - g) \quad ^{1} \\
&\Rightarrow \quad E\,(2h) = (\delta + g) * (\delta - g) \quad ^{1}
\end{aligned}
$$

olur. Lemma 2.5.6 den

$$
(\delta + Th) * (\delta - Th) \quad ^{1} = (\delta + g) * (\delta - g) \quad ^{1}
$$

olup buradan $Th = g$ elde edilir. Dolayısıyla T operatörü örtendir.

Sonuç olarak T operatörü birebir, örten bir homomorfizma olduğundan bir izomorfizmadır.

3. HİPERBOLİK TRİGONOMETİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, klasik analizdeki bazı özdeşliklere benzer olan ve hiperbolik trigonometrik operatörler arasında geçerli bazı özdeşlikleri inceleyeceğiz.

3.1. Hiperbolik Trigonometrik Fonksiyonlar Arasındaki Bazı Özdeşlikler

Teorem 3.1.1. Her $h \in A$ için $Ch^{\,2} - Sh^{\,2} = \delta$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\begin{aligned}
Ch^{*2} - Sh^{\,2} &= \frac{Eh + E(-h)}{2}^{\,2} - \frac{Eh - E(-h)}{2}^{\,2} \\
&= \frac{Eh * Eh + 2Eh * E(-h) + E(-h) * E(-h)}{4} \\
&\quad - \frac{Eh * Eh - 2Eh * E(-h) + E(-h) * E(-h)}{4} \\
&= \frac{E(2h) + 2E(h-h) + E(-2h)}{4} \\
&\quad - \frac{E(2h) - 2E(h-h) + E(-2h)}{4} \\
&= \frac{E(2h) + 2Ez + E(-2h) - E(2h) + 2Ez - E(-2h)}{4} \\
&= \frac{E(2h) + 2\delta + E(-2h) - E(2h) + 2\delta - E(-2h)}{4} \\
&= \delta
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. Her $h \in A$ için $S(2h) = 2(Sh * Ch)$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\begin{aligned}
2(Sh * Ch) &= 2\left(\frac{Eh - E(-h)}{2} * \frac{Eh + E(-h)}{2}\right) \\
&= 2\left(\frac{Eh * Eh + Eh * E(-h) - E(-h) * Eh - E(-h) * E(-h)}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(E(2h) + E(h-h) - E(-h+h) - E(-2h)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(E(2h) - E(-2h)\right) \\
&= S(2h)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3. Her $h \in A$ için $C(2h) = 2(Ch)^2 - \delta$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\begin{aligned}
2(Ch)^2 - \delta &= 2\left(\frac{Eh + E(-h)}{2}\right)^2 - \delta \\
&= 2\left(\frac{Eh * Eh + 2Eh * E(-h) + E(-h) * E(-h)}{4}\right) - \delta \\
&= 2\frac{E(2h) + 2E(h-h) + E(-2h)}{4} - \delta \\
&= \frac{1}{2}\left(E(2h) + 2Ez + E(-2h)\right) - \delta \\
&= \frac{1}{2}\left(E(2h) + 2\delta + E(-2h)\right) - \delta \\
&= \frac{E(2h) + 2\delta + E(-2h) - 2\delta}{2} \\
&= \frac{E(2h) + E(-2h)}{2} \\
&= C(2h)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4. Her $h \in A$ için $C(2h) = Ch^2 + Sh^2$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$\begin{aligned}
Ch^{2} + Sh^{2} &= \left(\frac{Eh + E(-h)}{2}\right)^{2} + \left(\frac{Eh - E(-h)}{2}\right)^{2} \\
&= \frac{Eh * Eh + 2Eh * E(-h) + E(-h) * E(-h)}{4} \\
&\quad + \frac{Eh * Eh - 2Eh * E(-h) + E(-h) * E(-h)}{4} \\
&= \frac{E(2h) + 2E(h-h) + E(-2h)}{4} \\
&\quad + \frac{E(2h) - 2E(h-h) + E(-2h)}{4} \\
&= \frac{E(2h) + 2Ez + E(-2h) + E(2h) - 2Ez + E(-2h)}{4} \\
&= \frac{E(2h) + E(-2h) + E(2h) + E(-2h)}{4} \\
&= \frac{2E(2h) + 2E(-2h)}{4} \\
&= C(2h)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5. Her $h \in A$ için $C(2h) = 2(Sh)^{2} + \delta$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$\begin{aligned}
2(Sh)^{2} + \delta &= 2\left(\frac{Eh - E(-h)}{2}\right)^{2} + \delta \\
&= 2\left(\frac{Eh * Eh - 2Eh * E(-h) + E(-h) * E(-h)}{4}\right) + \delta \\
&= 2\frac{E(2h) - 2E(h-h) + E(-2h)}{4} + \delta \\
&= \frac{E(2h) - 2Ez + E(-2h)}{2} + \delta \\
&= \frac{E(2h) - 2\delta + E(-2h)}{2} + \delta \\
&= \frac{E(2h) - 2\delta + E(-2h) + 2\delta}{2} \\
&= \frac{E(2h) + E(-2h)}{2} \\
&= C(2h)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$S(h+g) = Sh * Cg + Ch * Sg$ ve $C(h+g) = Ch * Cg + Sh * Sg$ nin ispatları Teorem 2.5.3 de verilmişti, şimdi benzer diğer özdeşlikleri verelim.

Teorem 3.1.6. Her $h, g \in A$ için $S(h-g) = Sh * Cg - Ch * Sg$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$\begin{aligned}
& Sh * Cg - Ch * Sg \\
= \; & \frac{Eh - E(-h)}{2} * \frac{Eg + E(-g)}{2} - \frac{Eh + E(-h)}{2} * \frac{Eg - E(-g)}{2} \\
= \; & \frac{Eh * Eg + Eh * E(-g) - E(-h) * Eg - E(-h) * E(-g)}{4} \\
& - \frac{Eh * Eg - Eh * E(-g) + E(-h) * Eg - E(-h) * E(-g)}{4} \\
= \; & \frac{E(h+g) + E(h-g) - E(-h+g) - E(-h-g)}{4} \\
& - \frac{E(h+g) - E(h-g) + E(-h+g) - E(-h-g)}{4} \\
= \; & \frac{2E(h-g) - 2E(-h+g)}{4} \\
= \; & \frac{E(h-g) - E(-(h-g))}{2} \\
= \; & S(h-g)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.7. Her $h, g \in A$ için $C(h-g) = Ch * Cg - Sh * Sg$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$
\begin{aligned}
& Ch * Cg - Sh * Sg \\
= \; & \frac{Eh + E(-h)}{2} * \frac{Eg + E(-g)}{2} - \frac{Eh - E(-h)}{2} * \frac{Eg - E(-g)}{2} \\
= \; & \frac{Eh * Eg + Eh * E(-g) + E(-h) * Eg + E(-h) * E(-g)}{4} \\
& - \frac{Eh * Eg - Eh * E(-g) - E(-h) * Eg + E(-h) * E(-g)}{4} \\
= \; & \frac{E\,(h+g) + E(h-g) + E(-h+g) + E(-h-g)}{4} \\
& - \frac{E\,(h+g) - E(h-g) - E(-h+g) + E(-h-g)}{4} \\
= \; & \frac{2E\,(h-g) + 2E(-h+g)}{4} \\
= \; & C(h-g)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.8. Her $h, g \in A$ için $Sh + Sg = 2\left(S\left(\frac{h+g}{2}\right) * C\left(\frac{h-g}{2}\right)\right)$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$
\begin{aligned}
& 2\left(S\left(\frac{h+g}{2}\right) * C\left(\frac{h-g}{2}\right)\right) \\
= \; & 2\left(\frac{E\left(\frac{h+g}{2}\right) - E(-\frac{h-g}{2})}{2} * \frac{E\left(\frac{h-g}{2}\right) + E(-\frac{h+g}{2})}{2}\right) \\
= \; & 2\left(\begin{array}{l} \frac{1}{4}\left(E\left(\frac{h+g}{2}\right) * E\left(\frac{h-g}{2}\right) + E\left(\frac{h+g}{2}\right) * E(-\frac{h+g}{2})\right) \\ + \frac{1}{4}\left(-E(-\frac{h-g}{2}) * E\left(\frac{h-g}{2}\right) - E(-\frac{h-g}{2}) * E(-\frac{h+g}{2})\right) \end{array}\right) \\
= \; & 2\left(\begin{array}{l} \frac{1}{4}\left(E\left(\frac{h+g}{2} + \frac{h-g}{2}\right) + E(\frac{h+g}{2} + -\frac{h+g}{2})\right) \\ + \frac{1}{4}\left(-E(-\frac{h-g}{2} + \frac{h-g}{2}) - E(-\frac{h-g}{2} + -\frac{h+g}{2})\right) \end{array}\right) \\
= \; & 2\left(\frac{E(h) + E(g) - E(-g) - E(-h)}{4}\right) \\
= \; & \frac{E(h) + E(g) - E(-g) - E(-h)}{2} \\
= \; & \frac{E(h) - E(-h)}{2} + \frac{E(g) - E(-g)}{2} \\
= \; & Sh + Sg
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.9. Her $h, g \in A$ için $Sh - Sg = 2\left(C\left(\frac{h+g}{2}\right) * S\left(\frac{h-g}{2}\right)\right)$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$
\begin{aligned}
& 2\left(C\left(\frac{h+g}{2}\right) * S\left(\frac{h-g}{2}\right)\right) \\
= \; & 2\left(\frac{E\left(\frac{h+g}{2}\right) + E(\frac{-h-g}{2})}{2} * \frac{E\left(\frac{h-g}{2}\right) - E(\frac{-h+g}{2})}{2}\right) \\
= \; & 2\left(\begin{array}{c} \frac{1}{4}\left[E\left(\frac{h+g}{2}\right) * E\left(\frac{h-g}{2}\right) - E\left(\frac{h+g}{2}\right) * E(\frac{-h+g}{2})\right] \\ +\frac{1}{4}\left[E(\frac{-h-g}{2}) * E\left(\frac{h-g}{2}\right) - E(\frac{-h-g}{2}) * E(\frac{-h+g}{2})\right] \end{array}\right) \\
= \; & 2\left(\frac{1}{4}\left[\begin{array}{c} E\left(\frac{h+g}{2} + \frac{h-g}{2}\right) - E(\frac{h+g}{2} + \frac{-h+g}{2}) \\ +E(\frac{-h-g}{2} + \frac{h-g}{2}) - E(\frac{-h-g}{2} + \frac{-h+g}{2}) \end{array}\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{E(h) - E(g) + E(-g) - E(-h)}{4}\right) \\
&= \frac{E(h) - E(-h)}{2} - \frac{E(g) - E(-g)}{2} \\
&= Sh - Sg
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.10. Her $h, g \in A$ için $Ch + Cg = 2\left(C\left(\frac{h+g}{2}\right) * C\left(\frac{h-g}{2}\right)\right)$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$
2\left(C\left(\frac{h+g}{2}\right) * C\left(\frac{h-g}{2}\right)\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{E\left(\frac{h+g}{2}\right)+E\left(\frac{-h-g}{2}\right)}{2}*\frac{E\left(\frac{h-g}{2}\right)+E\left(\frac{-h+g}{2}\right)}{2}\right)\\
&= 2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4}\left(E\left(\frac{h+g}{2}\right)*E\left(\frac{h-g}{2}\right)+E\left(\frac{h+g}{2}\right)*E\left(\frac{-h+g}{2}\right)\right)\\ +\frac{1}{4}\left(E\left(\frac{-h-g}{2}\right)*E\left(\frac{h-g}{2}\right)+E\left(\frac{-h-g}{2}\right)*E\left(\frac{-h+g}{2}\right)\right)\end{array}\right)\\
&= 2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4}\left(E\left(\frac{h+g}{2}+\frac{h-g}{2}\right)+E\left(\frac{h+g}{2}+\frac{-h+g}{2}\right)\right)+\\ \frac{1}{4}\left(E\left(\frac{-h-g}{2}+\frac{h-g}{2}\right)+E\left(\frac{-h-g}{2}+\frac{-h+g}{2}\right)\right)\end{array}\right)\\
&= 2\left(\frac{E(h)+E(g)+E(-g)+E(-h)}{4}\right)\\
&= \frac{E(h)+E(-h)}{2}+\frac{E(g)+E(-g)}{2}\\
&= Ch+Cg
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.11. Her $h, g \in A$ için $Ch - Cg = 2\left(S\left(\frac{h+g}{2}\right)*S\left(\frac{h-g}{2}\right)\right)$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$
2\left(S\left(\frac{h+g}{2}\right)*S\left(\frac{h-g}{2}\right)\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{E\left(\frac{h+g}{2}\right)-E\left(\frac{-h-g}{2}\right)}{2}*\frac{E\left(\frac{h-g}{2}\right)-E\left(\frac{-h+g}{2}\right)}{2}\right)\\
&= 2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4}\left(E\left(\frac{h+g}{2}\right)*E\left(\frac{h-g}{2}\right)-E\left(\frac{h+g}{2}\right)*E\left(\frac{-h+g}{2}\right)\right)\\ +\frac{1}{4}\left(-E\left(\frac{-h-g}{2}\right)*E\left(\frac{h-g}{2}\right)+E\left(\frac{-h-g}{2}\right)*E\left(\frac{-h+g}{2}\right)\right)\end{array}\right)\\
&= 2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4}\left(E\left(\frac{h+g}{2}+\frac{h-g}{2}\right)-E\left(\frac{h+g}{2}+\frac{-h+g}{2}\right)\right)\\ +\frac{1}{4}\left(-E\left(\frac{-h-g}{2}+\frac{h-g}{2}\right)+E\left(\frac{-h-g}{2}+\frac{-h+g}{2}\right)\right)\end{array}\right)\\
&= 2\left(\frac{E(h)-E(g)-E(-g)+E(-h)}{4}\right)\\
&= \frac{E(h)+E(-h)}{2}-\frac{(E(g)+E(-g))}{2}\\
&= (Ch-Cg)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.12. Her $h, g \in A$ için $T(h+g) = \frac{Th+Tg}{1+Th\,Tg}$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$\frac{Th + Tg}{\delta + Th * Tg} = \frac{\frac{Sh}{Ch} + \frac{Sg}{Cg}}{\delta + \frac{Sh}{Ch} * \frac{Sg}{Cg}} = \frac{\frac{Sh\ Cg+Sg\ Ch}{Ch\ Cg}}{\delta + \frac{Sh\ Sg}{Ch\ Cg}} = \frac{\frac{Sh\ Cg+Sg\ Ch}{Ch\ Cg}}{\frac{Ch\ Cg+Sh\ Sg}{Ch\ Cg}}$$

$$= \frac{Sh * Cg + Sg * Ch}{Ch * Cg + Sh * Sg} = \frac{S(h+g)}{C(h+g)} = T(h+g)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.13. Her $h, g \in A$ için $T(h-g) = \frac{Th\ \ Tg}{\ \ Th\ Tg}$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$\frac{Th - Tg}{\delta - Th * Tg} = \frac{\frac{Sh}{Ch} - \frac{Sg}{Cg}}{\delta - \frac{Sh}{Ch} * \frac{Sg}{Cg}} = \frac{\frac{Sh\ Cg\ \ Sg\ Ch}{Ch\ Cg}}{\delta - \frac{Sh\ Sg}{Ch\ Cg}} = \frac{\frac{Sh\ Cg\ \ Sg\ Ch}{Ch\ Cg}}{\frac{Ch\ Cg\ \ Sh\ Sg}{Ch\ Cg}}$$

$$= \frac{Sh * Cg - Sg * Ch}{Ch * Cg - Sh * Sg} = \frac{S(h-g)}{C(h-g)} = T(h-g)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.14. Her $h, g \in A$ için $Th + Tg = \frac{S(h+g)}{Ch\ Cg}$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$\begin{aligned} Th + Tg &= \frac{Sh}{Ch} + \frac{Sg}{Cg} = \frac{Sh * Cg + Sg * Ch}{Ch * Cg} \\ &= \frac{S\left(h+g\right)}{Ch * Cg} \quad \text{(Teorem 2.5.3 dan)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.15. Her $h, g \in A$ için $Th - Tg = \frac{S(h\ \ g)}{Ch\ Cg}$ dir.

İspat. Her $h, g \in A$ için

$$\begin{aligned} Th - Tg &= \frac{Sh}{Ch} - \frac{Sg}{Cg} = \frac{Sh * Cg - Sg * Ch}{Ch * Cg} \\ &= \frac{S\left(h-g\right)}{Ch * Cg} \text{ (Teorem 2.5.3 dan)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.16. Her $h \in A$ için $Eh = Ch + Sh$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$Ch + Sh = \frac{Eh + E(-h)}{2} + \frac{Eh - E(-h)}{2} = \frac{2Eh}{2} = Eh$$

elde edilir.

Teorem 3.1.17. Her $h \in A$ için $E(-h) = Ch - Sh$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$Ch - Sh = \frac{Eh + E(-h)}{2} - \frac{Eh - E(-h)}{2} = \frac{2E(-h)}{2} = E(-h)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.18. Her $h \in A$ için $Sh = \sqrt{\frac{1}{2}\left(C\left(2h\right) - \delta\right)}$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{2}\left(C\left(2h\right) - \delta\right)} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{E\left(2h\right) + E(-2h)}{2} - \delta\right)} \\
&= \sqrt{\frac{E\left(2h\right) + E(-2h)}{4} - \frac{\delta}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{E\left(2h\right) + E(-2h) - 2\delta}{4}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{E\left(h\right) - E(-h)}{2}\right)^2} \\
&= \frac{E\left(h\right) - E(-h)}{2} \\
&= Sh
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.19. Her $h \in A$ için $Ch = \sqrt{\frac{1}{2}\left(C\left(2h\right) + \delta\right)}$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{2}\left(C\left(2h\right)+\delta\right)} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{E\left(2h\right)+E(-2h)}{2}+\delta\right)} \\
&= \sqrt{\frac{E\left(2h\right)+E(-2h)}{4}+\frac{\delta}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{E\left(2h\right)+E(-2h)+2\delta}{4}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{E\left(h\right)+E(-h)}{2}\right)^{2}} \\
&= \frac{E\left(h\right)+E(-h)}{2} \\
&= Ch
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.20. Her $h \in A$ için $Sh = \frac{Th}{\sqrt{\quad (Th)^{*2}}}$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{Th}{\sqrt{\delta-(Th)^{2}}} &= \frac{\frac{Sh}{Ch}}{\sqrt{\delta-\left(\frac{Sh}{Ch}\right)^{2}}} = \frac{\frac{Sh}{Ch}}{\sqrt{\delta-\frac{Sh^{*2}}{Ch^{*2}}}} \\
&= \frac{\frac{Sh}{Ch}}{\sqrt{\frac{Ch^{*2}\quad Sh^{*2}}{Ch^{*2}}}} = \frac{\frac{Sh}{Ch}}{\sqrt{\frac{}{Ch^{*2}}}} = \frac{\frac{Sh}{Ch}}{\frac{}{Ch}} = Sh
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.21. Her $h \in A$ için $Ch = \frac{}{\sqrt[2]{\quad (Th)^{*2}}}$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\sqrt[2]{\frac{\delta}{\delta-(Th)^{2}}} = \sqrt[2]{\frac{\delta}{\delta-\left(\frac{Sh}{Ch}\right)^{2}}} = \sqrt[2]{\frac{\delta}{\delta-\frac{Sh^{*2}}{Ch^{*2}}}} = \sqrt[2]{\frac{\delta}{\frac{}{Ch^{*2}}}} = \frac{\delta}{\frac{}{Ch}} = Ch
$$

elde edilir.

Teorem 3.1.22. Her $h \in A$ için $\left[Ch+Sh\right]^{n} = C(nh)+S(nh)$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\begin{aligned}
[Ch + Sh]^{\mathsf{n}} &= \quad \frac{Eh + E(-h)}{2} + \frac{Eh - E(-h)}{2}^{\mathsf{n}} \\
&= \quad \frac{2Eh}{2}^{\mathsf{n}} \\
&= [Eh]^{\mathsf{n}} \\
&= Eh * Eh * \cdots * Eh \\
&= E(nh)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
C(nh) + S(nh) &= \frac{E(nh) + E(-nh)}{2} + \frac{E(nh) - E(-nh)}{2} \\
&= E(nh)
\end{aligned}
$$

ile ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.23. Her $h \in A$ için $[Ch - Sh]^{\mathsf{n}} = C(nh) - S(nh)$ dir.

İspat. Her $h \in A$ için

$$
\begin{aligned}
[Ch - Sh]^{\mathsf{n}} &= \quad \frac{Eh + E(-h)}{2} - \frac{Eh - E(-h)}{2}^{\mathsf{n}} \\
&= \quad \frac{2E(-h)}{2}^{\mathsf{n}} \\
&= [E(-h)]^{\mathsf{n}} \\
&= E(-h) * E(-h) * \cdots * E(-h) \\
&= E(-nh)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
C(nh) - S(nh) &= \frac{E(nh) + E(-nh)}{2} - \frac{E(nh) - E(-nh)}{2} \\
&= E(-nh)
\end{aligned}
$$

ile ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.24. Bu kesimde yazdığımız özdeşlikleri bir tablo halinde söyle yazabiliriz.

1	$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$	$Ch^{*2} - Sh^{\ 2} = \delta$
2	$\sinh(2x) = 2\sinh x \cdot \cosh x$	$S(2h) = 2(Sh * Ch)$
3	$\cosh 2x = 2(\cosh x)^2 - 1$	$C(2h) = 2(Ch)^{\ 2} - \delta$
4	$\cosh(2x) = (\cosh x)^2 + (\sinh x)^2$	$C(2h) = Ch^{*2} + Sh^{\ 2}$
5	$\cosh(2x) = 2(\sinh x)^2 + 1$	$C(2h) = 2(Sh)^{\ 2} + \delta$
6	$\sinh(x-y) = \sinh x.\cosh y - \sinh y.\cosh x$	$S(h-g) = Sh * Cg - Ch * Sg$
7	$\cosh(x-y) = \cosh x.\cosh y - \sinh x.\sinh y$	$C(h-g) = Ch * Cg - Sh * Sg$
8	$\sinh x + \sinh y = 2.\sinh \ \frac{x+y}{2}\ .\cosh \ \frac{x\ \ y}{2}$	$Sh + Sg = 2\ \ S\ \ \frac{h+g}{2}\ * C\ \ \frac{h\ \ g}{2}$
9	$\sinh x - \sinh y = 2.\cosh \ \frac{x+y}{2}\ .\sinh \ \frac{x\ \ y}{2}$	$Sh - Sg = 2\ \ C\ \ \frac{h+g}{2}\ * S\ \ \frac{h\ \ g}{2}$
10	$\cosh x + \cosh y = 2.\cosh \ \frac{x+y}{2}\ .\cosh \ \frac{x\ \ y}{2}$	$Ch + Cg = 2\ \ C\ \ \frac{h+g}{2}\ * C\ \ \frac{h\ \ g}{2}$
11	$\cosh x - \cosh y = -2.\sinh \ \frac{x+y}{2}\ .\sinh \ \frac{x\ \ y}{2}$	$Ch - Cg = 2\ \ S\ \ \frac{h+g}{2}\ * S\ \ \frac{h\ \ g}{2}$
12	$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x : \tanh y}$	$T(h+g) = \frac{Th + Tg}{\ \ + Th\ \ Tg}$
13	$\tanh(x-y) = \frac{\tanh x\ \ \ \tanh y}{1 + \tanh x : \tanh y}$	$T(h-g) = \frac{Th\ \ Tg}{\ \ Th\ \ Tg}$
14	$\tanh x + \tanh y = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh x : \cosh y}$	$Th + Tg = \frac{S(h+g)}{Ch\ \ Cg}$
15	$\tanh x - \tanh y = \frac{\sinh(x\ \ \ y)}{\cosh x : \cosh y}$	$Th - Tg = \frac{S(h\ \ \ g)}{Ch\ \ Cg}$
16	$e^{x} = \cosh x + \sinh x$	$Eh = Ch + Sh$
17	$e^{\ \ x} = \cosh x - \sinh x$	$E(-h) = Ch - Sh$
18	$\sinh x = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)}$	$Sh = \sqrt{\frac{1}{2}(C(2h) - \delta)}$
19	$\cosh x = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)}$	$Ch = \sqrt{\frac{1}{2}(C(2h) + \delta)}$
20	$\sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1\ \ \ (\tanh x)^2}}$	$Sh = \frac{Th}{\sqrt{\ \ \ \ (Th)^{\ 2}}}$
21	$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1\ \ \ (\tanh x)^2}}$	$Ch = \frac{}{\sqrt[2]{\ \ \ \ (Th)^{*2}}}$
22	$[\cosh x \pm \sinh x]^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx)$	$[Ch \pm Sh]^n = C(nh) \pm S(nh)$

4. İZOBORİK POLİNOMLAR ÜZERİNDE LOG VE EXP OPERATÖRLERİ

Huilan Li ve Trueman MacHenry 'i Rearick'in çalışmalarından esinlenerek aritmetik fonksiyonlar üzerinde tanımlanan logaritma ve üstel fonksiyonlarını kullanarak yeni iki operatör olan LOG ve EXP operatörlerini tanımladılar. Burada LOG operatörü genelleştirilmiş Lucas polinomlarını veren genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarında çalışır. EXP operatörü LOG operatötünün tersidir. Özellikle bu çalışmada bir aritmetik fonksiyon olan genelleştirilmiş Fibonacci polinomların Dirichlet çarpımının LOG operatörü altında bu fonksiyonlarının logaritmalarının toplamlarına geçişi sağladığı gösterilmiştir. Aynı zamanda aritmetik fonksiyon olan genelleştirilmiş Lucas polinomlarının toplamının EXP operatörü altında bu fonksiyonlarının üstellerinin Dirichlet çarpımlarına geçiş sağladığı da gösterilerek operatörlerin nasıl çalıştıklarına açıklık getirilmiştir. Bu yapı logaritma ve üstel aritmetik fonksiyonları arasındaki ilişkiyi daha rahat görebilmek içindir. Huilan Li ve Trueman MacHenry 'i Dirichlet çarpımı altında çarpımsal fonksiyonların grup yapılarının toplama altındaki fonksiyon gruplarına izomorf olduklarının farklı ispatlarını vererek daha detaylı olarak anlatmışlardır. Ayrıca bu çalışmada Huilan Li ve Trueman MacHenry 'i halka özelliklerini kullanarak yeni yapılar ortaya çıkarmışlardır.

Huilan Li ve Trueman MacHenry 'i bir monik polinom verildiğinde onun sonsuz çarpımının matrisi ağırlık izobarik polinomların grubu içerisine yerleştirilebileceğini ifade etmişlerdir. Bu sayede bu monik polinom teoremi ve onun Companion matrisi bize farklı bir matris (Different matris) ve farklı bir sonsuz matris verdiğini kolaylıkla göstermiştir. Different matrisin determinantı yukarıda bahsedilen monik polinomun diskriminantıdır ve böylece LOG operatörünün sonsuz Companion matrislere uyguladığımızda sonsuz different matris olduğu gösterilmiştir.

4.1. İzobarik Polinomlar

k baştan belirlenen sabit pozitif tam sayı olmak üzere derecesi k ve izobarik derecesi n olan

$$P_{k;n}(t_1,...,t_k) = \sum_{\alpha \vdash n} C_\alpha\, t_1^{\alpha_1}...t_k^{\alpha_k}$$

polinom formuna izobarik polinom denir. Burada α_i tüm $(1 \leq i \leq k)$ için negatif olmayan tam sayıdır. Bu çalışmamız da, $\alpha \vdash n$ ve $\mid \alpha \mid$ notasyonları sırasıyla $\sum_{j=1}^{k} j\alpha_j = n$ ve $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j$ yerine kullanılacaktır. Yani $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + ... + \alpha_k$ ve $\alpha \vdash n = 1.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + ... + k.\alpha_k$ dır. (Li ve MacHenry, 2013)

Tanım 4.1.1. $k \geqslant 2$ şeklinde bir tam sayı ve

$$P(x;t_1,...,t_k) = x^k - t_1x^{k-1} - ... - t_k$$

polinomu verilsin. $t = (t_1,...,t_k)$ olmak üzere Fibonacci polinomu $F_{k;n}(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}
F_{k;0}(t) &= 0 \\
F_{k;1}(t) &= 1 \\
F_{k;n}(t) &= F_{k-1;n}(t) \quad , \quad 1 \leqslant n < k \\
F_{k;n}(t) &= \sum_{i=1}^{k} t_i F_{k;n-i}(t) \quad , \quad n \geq k.
\end{aligned}$$

(MacHenry, 2000)

Örnek 4.1.2. $t = (t_1,...,t_k)$ olmak üzere $n = 4$ için $F_{k;4}(t)$ Fibonacci polinomu bulalım.

$$F_{k;n+1}(t) = t_1F_{k;n}(t) + t_2F_{k;n-1}(t) + ... + t_kF_{k;n-k+1}(t)$$

şeklinde tanımlı olan Fibonacci polinomu

$$
\begin{aligned}
F_{k;n}(t) &= 0 \qquad , \qquad n < 0 \\
F_{k;1}(t) &= 1 \\
F_{k;2}(t) &= t_1 F_{k;1}(t) + t_2 F_{k;0}(t) = t_1.1 = t_1 \\
F_{k;3}(t) &= t_1 F_{k;2}(t) + t_2 F_{k;1}(t) + t_3 F_{k;0}(t) = t_1.t_1 + t_2.1 = t_1^2 + t_2 \\
F_{k;4}(t) &= t_1 F_{k;3}(t) + t_2 F_{k;2}(t) + t_3 F_{k;1}(t) + t_4 F_{k;0}(t) \\
&= t_1.(t_1^2 + t_2) + t_2.t_1 + t_3.1 \\
&= t_1^3 + 2.t_2.t_1 + t_3
\end{aligned}
$$

hesaplanarak bulunur. Aynı zamanda $k = 2$ ve $n = 4$ için $F_{k;4}(t)$ Fibonacci polinomunu çalıştıralım.

$$
\begin{aligned}
F_{2;1}(t) &= 1 \\
F_{2;2}(t) &= t_1 \\
F_{2;3}(t) &= t_1 F_{2;2}(t) + t_2 F_{2;1}(t) = t_1^2 + t_2 \\
F_{2;4}(t) &= t_1 F_{2;3}(t) + t_2 F_{2;2}(t) = t_1.(t_1^2 + t_2) + t_2.t_1 = t_1^3 + 2.t_2.t_1
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Tanım 4.1.3. $k > 2$ şeklinde bir tam sayı ve

$$P(x; t_1, ..., t_k) = x^k - t_1 x^{k \;\; 1} - ... - t_k$$

polinomu verilsin. $t = (t_1, ..., t_k)$ olmak üzere Lucas polinomu $G_{k;n}(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$
\begin{aligned}
G_{k,0}(t) &= k \\
G_{k,1}(t) &= t_1 \\
G_{k,n}(t) &= G_{k-1,n}(t) \quad , \qquad 1 \leq n < k \\
G_{k,n}(t) &= \sum_{t=1}^{k} t_i G_{k,n-i}(t) \quad , \qquad n \geq k.
\end{aligned}
$$

(MacHenry, 2000)

Tanım 4.1.4. $k \geq 2$ şeklinde bir tam sayı ve

$$P(x; t_1, ..., t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - ... - t_k$$

polinomu verilsin. $t = (t_1, ..., t_k)$ olmak üzere Lucas polinomu $G_{k,n}(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$
\begin{aligned}
G_{k,0}(t) &= k \\
G_{k,1}(t) &= t_1 \\
G_{k,2}(t) &= t_1 G_{k,1}(t) + 2t_2 \\
G_{k,3}(t) &= t_1 G_{k,2}(t) + t_2\, G_{k,1}(t) + 3t_3 \\
G_{k,4}(t) &= t_1 G_{k,3}(t) + t_2\, G_{k,2}(t) + t_3\, G_{k,1}(t) + 4t_4 \\
&\vdots \\
G_{k,k-1}(t) &= t_1 G_{k,k-2}(t) + t_2\, G_{k,k-3}(t) + ... + t_{k-2}\, G_{k,1}(t) + t_{k-1}(k-1)
\end{aligned}
$$

olmak üzere $n \geq k$ için;

$$G_{k,n}(t) = \sum_{t=1}^{k} t_i G_{k,n-i}(t)$$

dır. (Şahin, 2013)

Örnek 4.1.5. $t = (t_1, ..., t_k)$ olmak üzere $k = 2$ ve $n = 4$ için $G_{4;4}(t)$ Lucas polinomunu bulalım.

$$
\begin{aligned}
G_{2;0} &= 2 \\
G_{2;1} &= t_1 \\
G_{2;2} &= t_1 G_{2;1} + t_2 G_{2;0} = t_1^2 + 2t_2 \\
G_{3;0} &= 3 \\
G_{3;1} &= G_{2;1} = t_1 \\
G_{3;2} &= G_{2;2} = t_1^2 + 2t_2 \\
G_{4;0} &= 4 \\
G_{4;1} &= t_1 \\
G_{4;2} &= G_{3;2} = t_1^2 + 2t_2 \\
G_{4;3} &= G_{3;3} \\
&= t_1 G_{3;2} + t_2 G_{3;1} + t_3 G_{3;0} \\
&= t_1^3 + 2t_1 t_2 + t_1 t_2 + 3t_3 \\
&= t_1^3 + 3t_1 t_2 + 3t_3 \\
G_{4;4} &= t_1 G_{4;3} + t_2 G_{4;2} + t_3 G_{4;1} + t_4 G_{4;0} \\
&= t_1(t_1^3 + 3t_1 t_2 + 3t_3) + t_2(t_1^2 + 2t_2) + t_3 t_1 + 4t_4 \\
&= t_1^4 + 4t_1^2 t_2 + 4t_1 t_3 + 2t_2^2 + 4t_4
\end{aligned}
$$

elde edilir

Teorem 4.1.6. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları $F_{k;n}(t)$ ve $G_{k;n}(t)$ olmak üzere $(n, k \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ ve $F_{k;0} = 1$ ve $G_{k;0} = k$ başlangıç koşulları için sırasıyla

$$F_{k;n} = \sum_{` n} (\alpha_1, \overset{|\,|}{...}, \alpha_k) t_1^{1} ... t_k^{k}$$

$$G_{k;n} = \sum_{` n} (\alpha_1, \overset{|\,|}{...}, \alpha_k) \frac{n}{|\alpha|} t_1^{1} ... t_k^{k}$$

dır.Burada a_i tüm $(1 \leq i \leq k)$ için negatif olmayan tam sayıdır. Bu çalışmada, $\alpha \vdash n$ ve $\mid \alpha \mid$ notasyonları sırasıyla $\sum_{j=1}^{k} j\alpha_j = n$ ve $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j$ yerine kullanılacaktır.

Yani $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + ... + \alpha_k$ ve $\alpha \vdash n = 1.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + ... + k.\alpha_k$ dır.
(MacHenry ve Wong, 2012)

Örnek 4.1.7. Yukarıda verilen teorem için $k = 3$, $n = 5$ için örnek verelim. İlk önce Genelleştirilmiş Fibonacci polinomu için çalıştıralım. Burada

$$
\begin{aligned}
\alpha \ \vdash \ & n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5 \ , \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \epsilon \mathbb{N}\} \\
= \ & \{(1,2,0), (3,1,0), (5,0,0), (0,1,1), (2,0,1)\}
\end{aligned}
$$

olacak şekilde,

$$
\begin{aligned}
F_{3;5} &= \sum_{\alpha \vdash 5} \binom{|\alpha|}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \\
&= \binom{3}{1\ 2\ 0} t_1^1 t_2^2 t_3^0 + \binom{4}{3\ 1\ 0} t_1^3 t_2^1 t_3^0 \\
&\quad + \binom{5}{5\ 0\ 0} t_1^5 t_2^0 t_3^0 + \binom{2}{0\ 1\ 1} t_1^0 t_2^1 t_3^1 + \binom{3}{2\ 0\ 1} t_1^1 t_2^2 t_3^0 \\
&= t_1^5 + 3t_1 t_2^2 + 2t_2 t_3 + 4t_1^3 t_2 + 3t_1^2 t_3
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Şimdi de Genelleştirilmiş Lucas polinomunu $k = 3$ ve $n = 5$ için çalıştıralım.

$$
G_{3;5}(t) = \sum_{\alpha \vdash 5} \frac{5}{\mid \alpha \mid} \binom{|\alpha|}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3}
$$

Burada,

$$
\begin{aligned}
\alpha \ \vdash \ & n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5 \ , \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \epsilon \mathbb{N}\} \\
= \ & \{(1,2,0), (3,1,0), (5,0,0), (0,1,1), (2,0,1)\}
\end{aligned}
$$

olacak şekilde,

$$
\begin{aligned}
G_{3;5}(t) &= \binom{5}{5\ 0\ 0}\frac{5}{5}t_1^5t_2^0t_3^0 + \binom{3}{1\ 2\ 0}\frac{5}{3}t_1^1t_2^2t_3^0 \\
&+ \binom{2}{0\ 1\ 1}\frac{5}{2}t_1^0t_2^1t_3^1 + \binom{2}{2\ 0\ 0}\frac{5}{2}t_1^2t_2^0t_3^0 + \binom{4}{3\ 1\ 0}\frac{5}{4}t_1^3t_2^1t_3^0 \\
&= \frac{5!}{0!0!5!}t_1^5 + \frac{3!}{1!2!0!}\frac{5}{3}t_1^1t_2^2 + \frac{2!}{0!1!1!}\frac{5}{2}t_2^1t_3^1 + \frac{2!}{2!0!0!}\frac{5}{2}t_1^2 + \frac{4!}{3!1!0!}\frac{5}{4}t_1^3t_2^1 \\
&= t_1^5 + 5t_1t_2^2 + 5t_2t_3 + 5t_1^2 + 5t_1^3t_2
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir.

Lemma 4.1.8.

$$\frac{\partial G_{k;n}}{\partial t_j} = nF_{k;n-j}$$

(Li ve MacHenry, 2013)

İspat.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G_{k;n}}{\partial t_j} &= \frac{\partial}{\partial t_j}\sum_{\vdash n}\frac{n}{|\alpha|}\binom{|\alpha|}{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}t_1^{\alpha_1}\ldots t_k^{\alpha_k} \\
&= n\sum_{\substack{\vdash n \\ j\neq 0}}\frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\ldots\alpha_k!}\frac{\alpha_j}{|\alpha|}t_1^{\alpha_1}\ldots t_j^{\alpha_j-1}\ldots t_k^{\alpha_k} \\
&= n\sum_{\substack{\vdash n \\ j\neq 0}}\frac{(|\alpha|-1)!}{\alpha_1!\ldots(\alpha_j-1)!\ldots\alpha_k!}t_1^{\alpha_1}\ldots t_j^{\alpha_j-1}\ldots t_k^{\alpha_k} \\
&= n\sum_{\vdash n-j}\frac{|\beta|!}{\beta_1!\ldots\beta_k!}t_1^{\beta_1}\ldots t_k^{\beta_k} \\
&= n\sum_{\vdash n-j}\binom{|\beta|}{\beta_1,\ldots,\beta_k}t_1^{\beta_1}\ldots t_k^{\beta_k} \\
&= nF_{k;n-j}
\end{aligned}
$$

Örnek 4.1.9. Yukarıda ispatladığımız lemmaya $n = 3$ ve $j = 1$ için örnek verelim. Şimdi

$$\frac{\partial G_{k;3}}{\partial t_1} = 3.F_{k;2}$$

olduğunu gösterelim. Burada $G_{k;3}$ Lucas polinomu $G_{k;3} = t_1^3 + 3t_1t_2 + 3t_3$

şeklindedir. Şimdi ispatımı eşitlikleri ayrı ayrı gösterip sonuçlarının eşitliğini göstererek tamamlamış olacağız.

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{k;3}}{\partial t_1} &= \frac{\partial(t_1^3 + 3t_1t_2 + 3t_3)}{\partial t_1} \\ &= 3t_1^2 + 3t_2\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

$$3F_{k;2} = 3(t_1^2 + t_2) = 3t_1^2 + 3t_2 \tag{4.1.17}$$

bulunur. Böylece [4.1.16] = [4.1.17] eşitliğinden eşitliğin sağlandığı gösterilmiş oldu.

4.2. Core polinomu ve Companion matris

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin k dereceden kontroller Core polinomu

$$X^k - t_1X^{k-1} - t_2X^{k-2} - \cdots - t_k$$

şeklindedir. Açık olarak, Generic Core olarak adlandırdığımız bu polinomu, yeni t_j katsayılı değişkenleri içeren bir Core polinomu belirtmek için aşağıdaki kıstaslara sahibiz. Core polinomu $[t_1, \cdots, t_k]$ notasyonu ile kısaltılmalıdır. Böylece her Core polinomu sayesinde aşağıdaki gibi bir matrise sahibiz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ t_k & t_{k-1} & t_{k-2} & \dots & t_2 & t_1 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Tamamlayıcı matrisin son satırı ile yani $[t_1, \cdots, t_k]$ matrisini A ile işleme tuttuğumuzda bu işlem sonucunda elde edilen A matrisine satır olarak ekleyerek $(A^2)_{k+1xk}$ matrisi elde edilir.Bu işlemi sonsuz defa tekarladığımızda A matrisinin tersi olan

$$
A^{-1}=\begin{bmatrix}
-t_{k-1}t_k^{-1} & -t_{k-2}t_k^{-1} & 0 & \dots & t_1t_k^{-1} & t_k^{-1} \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0
\end{bmatrix}_{k \times k}
$$

matrisi elde edilir. $[t_1, \cdots, t_k]$ matrisini A^{-1} ile işleme tabi tutulup bu işlem sonsuz kez tekrar edilir. Bu durumda A matrisine yukarı doğru sonsuz matris eklenir ve bu işlem sayesinde yukarı ve aşağı doğru eklenen satırlarla birlikte

$$
A^{1}=\begin{bmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(-1)^{k-1}S_{(-2;1^{k-1})} & \cdots & -S_{(-2;1)} & S_{(-2)} \\
(-1)^{k-1}S_{(-1;1^{k-1})} & \cdots & -S_{(-1;1)} & S_{(-1)} \\
(-1)^{k-1}S_{(0;1^{k-1})} & \cdots & -S_{(0;1)} & S_{(0)} \\
(-1)^{k-1}S_{(1;1^{k-1})} & \cdots & -S_{(1;1)} & S_{(1)} \\
(-1)^{k-1}S_{(2;1^{k-1})} & \cdots & -S_{(2;1)} & S_{(2)} \\
(-1)^{k-1}S_{(3;1^{k-1})} & \cdots & -S_{(3;1)} & S_{(3)} \\
(-1)^{k-1}S_{(4;1^{k-1})} & \cdots & -S_{(4;1)} & S_{(4)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix} = \left[(-1)^{k-j}S_{(n;1^{k-j})}\right]_{1 \times k}
$$

matrisi elde edilir. (Şahin, 2013)

4.3. Convolisyon Çarpım

P ve P', W de tanımlı iki polinom olmak üzere bu iki polinomun konvolisyon çarpımı

$$
P_n * P'_n = \sum_{j=0} P_j P'_{n-j}
$$

şeklinde tanımlıdır. Özellikle, F ve F' polinomları sırasıyla $[t_1, \dots, t_k]$ ve $[t'_1, \dots, t'_k]$ için GFP fonksiyonu

$$
F_n * F'_n = \sum_{j=0} F_j F'_{n-j}
$$

şeklindedir. (Li ve MacHenry, 2013)

5. İZOBORİK HALKALARDA LOG VE EXP OPERATÖRLERİ

5.1. LOG ve EXP

Rearick'in çalışmalarında ilk olarak aritmetik fonksiyonlar üzerinde logaritma ve üstel operatörleri tanımlanmıştır. Bu logaritma ve üstel operatörler biri diğerinin tersi olan operatörlerdir. Bu logaritma operatörü aritmetik fonksiyonların dirichlet çarpımını A daki toplama işlemine gecişi sağlayan bir operatördür. Üstel operatör ise aritmetik fonksiyonların toplamlarını Dirichlet çarpımına götüren bir operatördür. İfade edilen bu operatörler L ve E operatörleridir. MacHenry ve Li, Üstel operatörünü kullanarak analizdeki elementer trigonometrik ifadeler olan "sinüs", "cosinüs" ve "tanjant" ifadelerini tanımlamışlardır. MacHenry ve Li bu çalışmasında, Rearick'in çalışmalarında gösterdiği L ve E aritmetik fonksiyon grup yapılarının izomorfik olduğuna tekrar değinerek bu yapıların izomarfizma yapıları olduğunu detaylı olarak anlatmışlardır.

MacHenry ve Li, izobarik halka tanımlarını daha geniş bir şekilde açıklamaya çalışarak izobarik halka yapısının anlaşılırlığını sağlamaya çalışmışlardır.

MacHenry ve Li, bu çalışmasında $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{E}$ operatörleri tanımlanırken Rearick'in çalışmarında kullandığı LOG ve EXP operatörlerinden esinlenerek ortaya çok daha farklı olan yeni $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{E}$ operatörlerini tanımladılar. Burada $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{E}$ sırasıyla izobarik dereceli operatörlerdir.(Li ve MacHenry, 2013)

Tanım 5.1.1. Sabit bir k ve $n \geq 1$, Ağırlıklı izobarik polinomların kümesi W de tanımlı P_n polinomları, $i > k$ ve $t_i = 0$ için

$$\mathcal{L}(P_n) = -t_{n-1}P_1 - 2t_{n-2}P_2 - ... - (n-1)t_1P_{n-1} + nP_n$$

şeklinde tanımlıdır. (Li ve MacHenry, 2013)

Lemma 5.1.2. Sabit bir k için $n \geq 1$,

$$\mathcal{L}(P_n) = -t_{k-1}P_{n-k+1} - 2t_{n-2}P_2 - ... - (k-1)t_1P_{n-1} + kP_n$$

dır. Genel olarak, herhangi bir n için bu tanım

$$\mathcal{L}(P_{\mathsf{n}}) = -t_{\mathsf{k}\;\;1} P_{\mathsf{n}\;\;\mathsf{k+1}} - 2t_{\mathsf{n}\;\;2} P_2 - ... - (k-1)t_1 P_{\mathsf{n}\;\;1} + kP_{\mathsf{n}}$$

şeklinde olup bu yüzden

$$\mathcal{L}(F_{\mathsf{k;0}}) = k$$

$[t_1, ..., t_{\mathsf{k}}]$ için F polinomunun özü göz önünde tutulabilir. (Li ve MacHenry, 2013)

Lemma 5.1.3.

$$\mathcal{L}(F_{\mathsf{n}}) = G_{\mathsf{n}}$$

(Li ve MacHenry, 2013)

İspat. Açık bir biçimde $\mathcal{L}(F_{\mathsf{k;0}}) = G_{\mathsf{k;0}}$ ve $\mathcal{L}(F_{\mathsf{k;1}}) = G_{\mathsf{k;1}}$ dır. Dahası $\mathcal{L}$ bir lineer operatör olmasından dolayı, tümevarımla

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(F_{\mathsf{n}}) &= \mathcal{L}(t_1 F_{\mathsf{n}\;\;1} + t_2 F_{\mathsf{n}\;\;2} + ... + t_{\mathsf{n}} F_0) \\
&= t_1 \mathcal{L}(F_{\mathsf{n}\;\;1}) + t_2 \mathcal{L}(F_{\mathsf{n}\;\;2}) + ... + t_{\mathsf{n}} \mathcal{L}(F_0) \\
&= t_1 G_{\mathsf{n}\;\;1} + t_2 G_{\mathsf{n}\;\;2} + ... + t_{\mathsf{n}} G_0 \\
&= G_{\mathsf{n}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Matris gösterimi yardımıyla da biri diğerinin tersi olduğu çok rahatlıkla gösterilebilir. $\mathcal{L}(P_{\mathsf{n}})$ operatörünün ayrıca yazılı matrisi,

$$L_{\mathsf{n}} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & ... & 0 \\
-t_1 & 2 & 0 & ... & 0 \\
-t_2 & -2t_1 & 3 & ... & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-t_{\mathsf{n}\;\;1} & -2t_{\mathsf{n}\;\;2} & -3t_{\mathsf{n}\;\;3} & ... & n
\end{bmatrix}$$

vektör operatörü $(P_1, ..., P_n)$ dir.

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}F_1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3}F_2 & \frac{1}{3}F_1 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n}F_{n-1} & \frac{1}{n}F_{n-2} & \frac{1}{n}F_{n-3} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Bu matris açıkca L_n matrisinin tersidir.

Tanım 5.1.4. Sabit k için , $\mathcal{E}(G_{k;0}) = 1$,

$$\mathcal{E}(G_{k;n}) = \frac{1}{n}(F_{k;n-1}G_{k;1} + F_{k;n-2}G_{k;2} + ... + F_{k;1}G_{k;n-1} + G_{k;n})$$

dir. (Li ve MacHenry, 2013)

Lemma 5.1.5. F ve G polinomlarının biri diğerinin tersini $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{E}$ operatörleri yardımıyla sağlanır.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F_n) &= G_n \\ \mathcal{E}(G_n) &= F_n \end{aligned}$$

dir.

A^{1} sonsuz companion matrisi ile kodlanmış GFP nin LOG operatörü bölüm 4.2 ve Lemma 5.1.3 dikkate alınarak çok rahatlıkla gösterilmiştir.

$\lambda F_n = nF_n$ tanımı basit bir hesaplama ile gösterilebilir. (Li ve MacHenry, 2013)

Lemma 5.1.6. $n \geq 1$ için,

$$\mathcal{L}(F_n) = \overline{F_n} * \lambda F_n$$

$\overline{F_n}$, F_n nin dirichlet tersidir. (Li ve MacHenry, 2013)

Lemma 5.1.7. $n \geq 1$ için,

$$\lambda(P'_n * P''_n) = P'_n * \lambda P''_n + P''_n * \lambda P'_n$$

Sırasıyla $[t_1^{'}, ..., t_k^{'}]$ ve $[t_1^{''}, ..., t_k^{''}]$ olmak üzere $F^{'}$ ve $F^{''}$ polinomları GFP dır. Daha sonra n dereceden bu iki polinomun Dirichlet çarpımı $F^{'} * F^{''}$, GFP tarafından indüklenmiştir. Aynı zamanda sırasıyla $[t_1^{'}, ..., t_k^{'}]$ ve $[t_1^{''}, ..., t_k^{''}]$ olmak üzere $G^{'}$ ve $G^{''}$ için de geçerlidir. (Li ve MacHenry, 2013)

Lemma 5.1.8. $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F_n^{'} * F_n^{''}) &= \mathcal{L}(F_n^{'}) + \mathcal{L}(F_n^{''}) \\ \mathcal{E}(G_n^{'} + G_n^{''}) &= \mathcal{E}(G_n^{'}) * \mathcal{E}(G_n^{''})\end{aligned}$$

(Li ve MacHenry, 2013)

İspat. Lemma 5.1.6 den

$$\mathcal{L}(F_n^{'} * F_n^{''}) = \overline{F_n^{'} * F_n^{''}} * \lambda(F_n^{'} * F_n^{''})$$

dir. Lemma 5.1.7 den

$$\begin{aligned}\overline{F_n^{'} * F_n^{''}} * \lambda(F_n^{'} * F_n^{''}) &= \overline{F_n^{'}} * \overline{F_n^{''}} * (F_n^{'} * \lambda F_n^{''} + F_n^{''} * \lambda F_n^{'}) \\ &= \overline{F_n^{'}} * \overline{F_n^{''}} * F_n^{'} * \lambda F_n^{''} + \overline{F_n^{'}} * \overline{F_n^{''}} * F_n^{''} * \lambda F_n^{'} \\ &= \overline{F_n^{''}} * \lambda F_n^{''} + \overline{F_n^{'}} * \lambda F_n^{'}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F_n^{'} * F_n^{''}) &= \mathcal{L}(F_n^{'}) + \mathcal{L}(F_n^{''}) \\ \mathcal{E} \quad \mathcal{L}(F_n^{'} * F_n^{''}) &= \mathcal{E} \quad \mathcal{L}(F_n^{'}) + \mathcal{L}(F_n^{''}) \\ F_n^{'} * F_n^{''} &= \mathcal{E} \quad \mathcal{L}(F_n^{'}) + \mathcal{L}(F_n^{''}) \\ \mathcal{E}(G_n^{'}) * \mathcal{E}(G_n^{''}) &= \mathcal{E}(G_n^{'} + G_n^{''})\end{aligned}$$

dir.

$P \in W$ için P nin Dirichlet kuvveti $P^{\ r}$ dir.

Sonuç 5.1.9. $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}({F_n}^r) &= r\mathcal{L}(F_n) \\
\mathcal{E}(rG_n) &= \mathcal{E}(G_n)^r
\end{aligned}$$

İspat: $r \in \mathbb{N}$, Lemma 5.1.8 ve tanımdan hareketle

$$\mathcal{L}({F_n}^r) = \sum \mathcal{L}(F_n) = r\mathcal{L}(F_n)$$

ve

$$\mathcal{E}(rG_n) = \mathcal{E}(r\mathcal{L}(F_n)) = \mathcal{E}(\mathcal{L}({F_n}^r)) = {F_n}^r = \mathcal{E}(G_n)^r$$

dir. (Li ve MacHenry, 2013)

Lemma 5.1.10. L , M den S ye doğru bir local izomorfizmasıdır. S, GLP ile temsil edilmiş local bir $G_{k;n}$ tam sayıları polinomuna sahiptir.
(Li ve MacHenry, 2013)

İspat. Lemma 5.1.3 ve Lemma 5.1.5 de açık olarak görülebilir.

Tanım 5.1.11. f bir aritmetik fonksiyon,

$$\begin{aligned}
Lf(n) &= \sum_{d|n} f(d)f^{-1}(\frac{n}{d}) \log d \qquad n > 1 \\
Lf(1) &= \log f(1)
\end{aligned}$$

(Rearick, 1968)
Rearick' den uyarlanmış çarpımsal fonksiyonların logaritması ilk p için bu tanımdaki yapılar şeklindedir. Burada

$$n \geq 1 \ \text{için} Lf(p^n) = \sum_{j=0} f(p^j)f^{-1}(p^{n-j}) \log p^j$$

dir.

$$n \geq 0 \ \text{ için } Lf(p^0) = \log f(p^0)$$

elde edilir. Sonra her bir asal p için $f \underset{\longrightarrow}{lr_p} F$ gidiyorken

$$n \geq 1 \ \text{ için } \ Lf(n) = \sum_{j=0} jF_j \overline{F_{n \ j}} \log p$$

en sonunda $\log p$,

$$n \geq 1 \ \text{ için } \ Lf(n) = \sum_{j=0} jF_j \overline{F_{n \ j}}$$

dir. (Li ve MacHenry, 2013)

5.2. LOG ve EXP nin Diğer Özellikleri

Tanım 5.2.1. LOG ve EXP operatörlerinin sırası ile açıklamasındaki kullanışlılığı eski tanımları takip eder. (Li ve MacHenry, 2013)

Lemma 5.2.2.

$$\begin{aligned}
G_1 &= F_1 \\
G_2 &= -F_1^2 + 2F_2 \\
G_3 &= F_1^3 - 3F_1F_2 + 3F_3 \\
G_4 &= -F_1^4 + 4F_1^2F_2 - 2F_2^2 - 4F_1F_3 + 4F_4
\end{aligned}$$

ve genellersek

$$G_n = \sum_{\vdash n} n(-1)^{j \ j+1} \binom{|\alpha| - 1}{\alpha_1; \ldots; \alpha_k} F_1^{\ 1} \ldots F_k^{\ k}$$

dır. Yukarıdaki genel ifadede G nin tanımı Lemma 5.2.2 in $(-1)^{|\alpha|+1}$ göre değiştirilmiş işaretlerle F ye göre yapılmış ve bu durum aşağıdaki gibi ifade edilmiştir. Verilen $(1^{\ 1}, 2^{\ 2}, ..., k^{\ k})$ olmak üzere $P \in W$ için $P \ = P_1^{\ 1} P_2^{\ 2} ... P_k^{\ k}$ şeklinde ifade edilir. (Li ve MacHenry, 2013)

Sonuç 5.2.3.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= G_1 \\
F_2 &= \frac{1}{2!}G_1^2 + \frac{1}{2}G_2 \\
F_3 &= \frac{1}{3!}G_1^3 + \frac{1}{2}G_1G_2 + \frac{1}{3}G_3 \\
F_4 &= \frac{1}{4!}G_1^4 + \frac{1}{4}G_1^2G_2 + \frac{1}{8}G_2^2 + \frac{1}{3}G_1G_3 + \frac{1}{4}G_4
\end{aligned}
$$

ve genellersek

$$F_n = \sum_{\alpha \vdash n} \frac{1}{z(\alpha)} G_1^{\alpha_1} \ldots G_k^{\alpha_k}$$

dır. (Li ve MacHenry, 2013)

Sonuç 5.2.4.

$$\mathcal{E}(G_n) = \sum_{\alpha \vdash n} \frac{1}{z(\alpha)} G_1^{\alpha_1} \ldots G_k^{\alpha_k}$$

(Li ve MacHenry, 2013)

5.3. Hiperbolik Trigonometrik Fonksiyonlar

$\mathcal{E}$ nin şartları standart tanımlardaki fonksiyonlara benzer hiperbolik sinüs ve hiperbolik cosinüs tanımlarken F ve G yi göz önüne alınır.

Tanım 5.3.1.

$$
\begin{aligned}
C(G) &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) + \overline{\mathcal{E}(G)}) \\
S(G) &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) - \overline{\mathcal{E}(G)})
\end{aligned}
$$

$\mathcal{E}(G) = F$ ve $\overline{F_n} = -t_n$ olduğundan kolayca görülebilir.
(Li ve MacHenry, 2013)

Lemma 5.3.2.

$$\begin{aligned} C(G) &= \frac{1}{2}(F_{\mathsf{n}} - t_{\mathsf{n}}) \\ S(G) &= \frac{1}{2}(F_{\mathsf{n}} + t_{\mathsf{n}}) \end{aligned}$$

(Li ve MacHenry, 2013)

Teorem 5.3.3. δ fonksiyonun değerleri $(1, 0, 0, ..., 0, ...)$ için

$$C(G)^{2} - S(G)^{2} = \delta$$

şeklindedir. (Li ve MacHenry, 2013)

İspat.

$$\begin{aligned} C(G)^{2} - S(G)^{2} &= C(G) * C(G) - S(G) * S(G) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) + \overline{\mathcal{E}(G)}) * \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) + \overline{\mathcal{E}(G)}) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) - \overline{\mathcal{E}(G)}) * \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) - \overline{\mathcal{E}(G)}) \\ &= \frac{1}{4}(\mathcal{E}(G) * \mathcal{E}(G) + 2(\mathcal{E}(G) * \overline{\mathcal{E}(G)}) + \overline{\mathcal{E}(G)} * \overline{\mathcal{E}(G)}) \\ &\quad -\frac{1}{4}(\mathcal{E}(G) * \mathcal{E}(G) - 2(\mathcal{E}(G) * \overline{\mathcal{E}(G)}) + \overline{\mathcal{E}(G)} * \overline{\mathcal{E}(G)}) \\ &= \frac{4}{4}(\mathcal{E}(G) * \overline{\mathcal{E}(G)}) \\ &= (\mathcal{E}(G) * \overline{\mathcal{E}(G)}) \\ &= \delta \end{aligned}$$

Teorem 5.3.4. F ve G $[t_{1;:::;}t_{\mathsf{k}}]$ indüklenmüş ve $F^{'}$ ve $G^{'}$ $t^{'}_{1;:::;}t^{0}_{\mathsf{k}}$ indüklenmiştir. ve $\mathcal{L}(F) = G$ ve $\mathcal{L}(F^{'}) = G^{'}$

$$C(G + G^{'}) = C(G) * C(G^{'}) + S(G) * S(G^{'})$$

(Li ve MacHenry, 2013)

İspat.

$$\begin{aligned} C(G+G^{'}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G+G^{'})+\overline{\mathcal{E}(G+G^{'})}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})+\overline{\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(G)*C(G^{'})+S(G)*S(G^{'}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)+\overline{\mathcal{E}(G)})*\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G^{'})+\overline{\mathcal{E}(G^{'})}) \\ &\quad +\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)-\overline{\mathcal{E}(G)})*\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G^{'})-\overline{\mathcal{E}(G^{'})}) \\ &= \frac{1}{4}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})+\mathcal{E}(G)*\overline{\mathcal{E}(G^{'})} \\ &\quad +\overline{\mathcal{E}(G)}*\mathcal{E}(G^{'})+\overline{\mathcal{E}(G)}*\overline{\mathcal{E}(G^{'})}) \\ &\quad +\frac{1}{4}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})-\mathcal{E}(G)*\overline{\mathcal{E}(G^{'})} \\ &\quad -\overline{\mathcal{E}(G)}*\mathcal{E}(G^{'})+\overline{\mathcal{E}(G)}*\overline{\mathcal{E}(G^{'})}) \\ &= \frac{1}{4}(2(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'}))+2(\overline{\mathcal{E}(G)}*\overline{\mathcal{E}(G^{'})})) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})+\overline{\mathcal{E}(G)}*\overline{\mathcal{E}(G^{'})}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})+\overline{\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})} \end{aligned}$$

dır.

Teorem 5.3.5.

$$S(G+G^{'})=S(G)*C(G^{'})+C(G)*S(G^{'})$$

(Li ve MacHenry, 2013)

İspat.

$$\begin{aligned}
S(G)*C(G^{'})+C(G)*S(G^{'}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)-\overline{\mathcal{E}(G)})*\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G^{'})+\overline{\mathcal{E}(G')}) \\
&\quad +\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)+\overline{\mathcal{E}(G)})*\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G^{'})-\overline{\mathcal{E}(G')}) \\
&= \frac{1}{4}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})+\mathcal{E}(G)*\overline{\mathcal{E}(G')} \\
&\quad -\overline{\mathcal{E}(G)}*\mathcal{E}(G^{'})-\overline{\mathcal{E}(G)}*\overline{\mathcal{E}(G')}) \\
&\quad +\frac{1}{4}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})-\mathcal{E}(G)*\overline{\mathcal{E}(G')} \\
&\quad +\overline{\mathcal{E}(G)}*\mathcal{E}(G^{'})-\overline{\mathcal{E}(G)}*\overline{\mathcal{E}(G')}) \\
&= \frac{1}{4}(2(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'}))-2(\overline{\mathcal{E}(G)}*\overline{\mathcal{E}(G')})) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})-\overline{\mathcal{E}(G)}*\overline{\mathcal{E}(G')}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G^{'})-\overline{\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G')}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.3.6.

$$S(2G)=2(S(G)*C(G))$$

İspat.

$$\begin{aligned}
2(S(G)*C(G)) &= 2(\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)-\overline{\mathcal{E}(G)})*\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)+\overline{\mathcal{E}(G)})) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)-\overline{\mathcal{E}(G)})*(\mathcal{E}(G)+\overline{\mathcal{E}(G)}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G)*\mathcal{E}(G)+\mathcal{E}(G)*\overline{\mathcal{E}(G)}-\overline{\mathcal{E}(G)}*\mathcal{E}(G)-\overline{\mathcal{E}(G)}*\overline{\mathcal{E}(G)}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(2G)-\overline{\mathcal{E}(2G)}) \\
&= S(2G)
\end{aligned}$$

Teorem 5.3.7.

$$C(2G)=2(C(G))^{2}-\delta$$

İspat.

$$\begin{aligned}
2(C(G))^2 - \delta &= 2\left(\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) + \overline{\mathcal{E}(G)})\right)^2 - \delta \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{E}(G) + \overline{\mathcal{E}(G)}\right)^2 - \delta \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) * \mathcal{E}(G) + 2\mathcal{E}(G) * \overline{\mathcal{E}(G)} + \overline{\mathcal{E}(G)} * \overline{\mathcal{E}(G)} - 2\delta) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(2G) + 2\delta + \overline{\mathcal{E}(2G)} - 2\delta) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(2G) + \overline{\mathcal{E}(2G)}) \\
&= C(2G)
\end{aligned}$$

Teorem 5.3.8.

$$C(2G) = (C(G))^2 + (S(G))^2$$

İspat.

$$\begin{aligned}
(C(G))^2 + (S(G))^2 &= \left(\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) + \overline{\mathcal{E}(G)})\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) - \overline{\mathcal{E}(G)})\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\mathcal{E}(G) + \overline{\mathcal{E}(G)}\right)^2 + \left(\mathcal{E}(G) - \overline{\mathcal{E}(G)}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}(\mathcal{E}(G) * \mathcal{E}(G) + 2\mathcal{E}(G) * \overline{\mathcal{E}(G)} + \overline{\mathcal{E}(G)} * \overline{\mathcal{E}(G)} \\
&\quad + \mathcal{E}(G) * \mathcal{E}(G) - 2\mathcal{E}(G) * \overline{\mathcal{E}(G)} + \overline{\mathcal{E}(G)} * \overline{\mathcal{E}(G)}) \\
&= \frac{1}{4}(\mathcal{E}(2G) + \overline{\mathcal{E}(2G)} + \mathcal{E}(2G) + \overline{\mathcal{E}(2G)}) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\left(\mathcal{E}(2G) + \overline{\mathcal{E}(2G)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(2G) + \overline{\mathcal{E}(2G)}) \\
&= C(2G)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.3.9.

$$C(2G) = 2(S(G))^2 + \delta$$

İspat.

$$
\begin{aligned}
2(S(G))^2 + \delta &= 2\left(\frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) - \overline{\mathcal{E}(G)})\right)^2 + \delta \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\mathcal{E}(G) - \overline{\mathcal{E}(G)}\right)^2\right) + \delta \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(G) * \mathcal{E}(G) - 2\mathcal{E}(G) * \overline{\mathcal{E}(G)} + \overline{\mathcal{E}(G)} * \overline{\mathcal{E}(G)} + 2\delta) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(2G) - 2\delta + \overline{\mathcal{E}(2G)} + 2\delta) \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(2G) + \overline{\mathcal{E}(2G)}) \\
&= C(2G)
\end{aligned}
$$

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında $\forall g, h \in A$ için $(g * h)(n) = \sum_{d|n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)$ şeklinde tanımlanan Dirichlet çarpımı olmak üzere, Rearick'in çalışmalarında gösterildiği üzere $(A, +, *, \cdot)$ bir cebir yapısı içinde ki $(P, *)$ ve $(A, +)$ grupları izomorf olup bunun için $L : P \to A$ dönüşümü $\forall f, t \in P$ için $L(f*t) = L(f)+L(t)$ operatörü tanımlanmış ve L logaritma operatörü; $\forall f \in P$ için ve $n > 1$ için

$$Lf(n) = \sum_{d|n} f(d)f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right)\log d$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir. Rearick, bu L operatörü kullanılarak yeni ters operatör olan üstel operatör E tanımlanmış böylece yeni bir trigonometrik operatör ailesi ortaya çıkmıştır. Bu tez çalışmasında analizdeki hiperbolik trigonometrik fonksiyonların tanımına paralel olarak A-dan A-ya içine bir dönüşüm tanımlanarak sinüs (S), kosünüs (C) ve tanjant (T) operatörleri $\forall g \in A$ için,

$$Sg = \frac{1}{2}(Eg - E(-g))$$

$$Cg = \frac{1}{2}(Eg + E(-g))$$

ve

$$Tg = Sg * (Cg)^{-1}$$

olarak tanımlanır ve $\forall g \in A$ için $Cg(1) = \cosh g(1) > 0$ olduğundan Tg de $(Cg)^{-1}$ tanımlıdır ve kullanılmıştır.

Tanımları verilen logaritmik ve hiperbolik trigonometrik operatörlerin özelliklerinin incelemesi ve analizdeki klasik trigonometrik özelliklerin sağlanıp sağlanmadığının kontrolü bu tezin amaçlarından olup elde edilen özellikler incelenerek ispatları açılıp bazı ilişkiler elde edilmiştir.

Hiperbolik tigonometrik operatörlerin, analizdeki klasik hiperbolik fonksiyonlar ile olan ilişkilerinin veya onların kendi aralarındaki ilişkilere benzer ilişkilerin varlığının tespit edilmesi, sayılar teorisi ve sayı dizileri için de çok önemli olup aritmetik fonksiyonlar olan Fibonacci ve Lucas sayı dizileri yukarıda tanımlanan operatörlere göre biri diğerinin logaritmasıdır ve bu dönüşüm kullanılarak sayı dizilerinin yeni bazı özelliklerinin de ortaya çıkabileceği düşünülebilir.

Ayrıca bu tez çalışmasında Huilan Li ve Trueman MacHenry 'i Rearick'in çalışmalarından hareketle aritmetik fonksiyonlar üzerinde tanımlanan logaritma ve üstel fonksiyonları kullanılarak yeni iki operatör olan LOG ve EXP operatöri tanımlanmış analizdeki klasik hiperbolik fonksiyonlarla olan ilişkilerden yararlanılarak yeni özdeşlikler elde edilmiştir. Burada tanımlanan operatörler yardımıyla Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin birbirleri arasındaki ilişkiden hareketle yeni özelliklerin bulunması üzerinde çalışılabilir.

7. KAYNAKLAR

Amistur, S.A., 1956-57. On arithmetic functions, J. d' Anal. Math., 5, 273-314

Apostol,T.M., 1971. Some properties of completely multiplicative arithmetial functions, Amer. Math. Monthyl., 78, 266-271

Apostol, T.M., 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics, Department of Mathematics California Institute of Technology Pasadena, California, USA.

Azman, H., 2014. k-Lu F D V + L S H U E R O L N <R O O U Õ N 7 U L-Hiperbolik F L Y H < D U Tribonacci- / X F D V) R Q N V L \ R Q O D U Õ 3 K ' ' L V V H U W D W L R Q ANKARA.

Cashwell, A.D. ve Everrett, C.J., 1959. The ring of number-theoretic functions, Pacific J. Math. certain higher-order functional differential equations. Math., 9,975 ±985.

Carroll, T.B. ve Gioia, A.A., 1975. On a subgroup of the group of multiplicative arithmetic functions, J. Austral. Math. Soc., 20, 348 ±358.

Elliott, J., 2008. Ring structures on groups of arithmetic functions, J. Number Theory., 128, 709 ±730.

Erbe, L., Kong, Q. ve Zhang, B.G., 1995. Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcel Dekker Inc., New York.

Ferrero, M., 1980. On generalized convolution rings of aritmetic functions, Tsukuba J. Math., 4(2), 161 ±176.

Fraleigh, J. B., 1994. A Frist Course in Abstaract Algebra, Addison Wesley Punlishing Compain Inc, USA.

Falcon, S. ve Plaza, A., 2008. The k-Fibonacci hyperbolic functions. Chaos, Solitons and Fractals., 38, 409 ±420.

Guncan, A. N. ve Erbil, Y., 2014. The q-Fibonacci Hyperbolic Functions. Appl. Math., 8, 81 ±88.

Hardy, G.H. ve Wrigh, E.M., 1954. An Introduction to the Theory of Numbers, Third edition Oxford, UNIVERSITY OF COLORADO.

Li, H. ve MacHenry, T., 2013. The convolution ring of arithmetic functions and symmetric polynmials, Rocky Math.,43,1 ±33.

McCarthy, P.J., 1986. Introduction to arithmetical functions,Unversitext, Springer-Verlag, New York.

MacHenry, T., 1999. A subgroup of the group of units in the ring of arithmeti functions, Rocky Mountain J. Math., 29, 1055 ±1065.

MacHenry, T., 2000. Generalized Fibonacci and Lucas polynomials and multiplicative arithmetic functions, Fibonacci Quart. 38, 17 ±24.

MacHenry, T. ve Tudose, G., 2005. Reflections on isobaric polynomials and arithmetic functions, Rocky Mountain J. Math., 35, 901 ±928.

MacHenry, T. ve Tudose, G., 2006. Reflections on isobaric polynomials and arithmatic functions, Rocky Mountain J. Math., 36, 1957 ±1976.

MacHenry, T. ve Wong, K., 2012. A correspondence between isobarc rings and multiplicative arithmetic functions, Rocky Mountain J. Math., 42, 1247 ±1290.

Rearick, D., 1967. The trigonometry of numbers, Duke Math. J., 35, 767 ±776.

Rearick, D., 1968. Operators on algebras os arithmetic functions, Duke Math. J., 35, 761 ±766.

Shapiro, H.N., 1972. On the convolution ring of arithmetic functions, Comm. Pure Appl. Math., 25, 287 ±336.

Stakhov, A. ve Rozin, B., 2005. On a new class of hyperbolic functions. Chaos, Solitons and Fractals., 23, 379 ±389.

Stakhov, A. ve Rozin, B., 2005. The Golden Shofar. Chaos, Solitons and Fractals., 26(3), 677 ±684.

Stakhov, A. ve Rozin, B., 2006. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas p- numbers. Chaos, Solitons and Fractals., 28(4), 1014 ±1025.

Stakhov, A., 2003. Hyperbolic Fibonacci and Lucas functions, A new mathematics for the alive nature. Vinnitsa, ITI.

Stakhov, A. ve Tkachenko IS., 1993. Hyperbolic Fibonacci trigonometry. Rep Ukr Acad Sci.,7, 9 ±14.

Stakhov, A. ve Rozin, B., 2007. The "golden" hyperbolic models of Universe. Chaos, Solitons and Fractals., 34(2), 159 ±171.

Stakhov, A. ve Aranson, S., 2011. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden")LERQDFFL *RQLPHWU\ %RGQDU¶V *HRPHWU\ DQG +L Math., 2, 74 ±84.

ùDKLQ $ %D]Õ kHQHVDOPHdizilerin ... mesi. Ph. D. 'LVVHUWDWLRQD *hD]LRVPDQSDúD 72.$7

Vajda, S., 1989. Fibonnacci and Lucas Numbers, and the Golden Section, Theory and applications. John Wiley ile Sons, New York., 10 ±100.

Vinberg, E.B., 1999. A, course in Algebra, American Mathematical Society, USA.

☐☐☐g☐☐☐d0☐☐

. ø ù ø 6 (/   % ø / * ø / (5

$ G Õ   6 R \ D G Õ   0 •] H \ \ H Q   ' (0 ø 5

' R ÷ X P   7 D U L K L :17.02.1990

' R ÷ X P   < H U L   * • P • ú K D Q H   ù L U D Q

Medeni Hali :Bekar

< D E D Q F Õ   ' L O ø   Q J L O L] F H

Telefon :0 553 854 28 08

E-posta :muzeyyen.demir029@gmail.com

(÷ L W L P

Derece	(÷ L W L P % L U L P L	Mezuniyet Tarihi
Lisans	7 R N D W * D] L R V P D Q S D ú D h Q L Y	2012
Lise	ù L U D Q) D W L K 6 X O W D Q 0 H K P H	2006