BİRİNCİ MERTEBEDEN BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

SEDA ÇAĞLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
PROF. DR. ALİ YAKAR

Haziran - 2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

SEDA ÇAĞLAK

TOKAT
Haziran - 2019

SEDA ÇAĞLAK tarafından hazırlanan "**Birinci Mertebeden Bulanık Diferansiyel Denklemler ve Eşitsizlikler Üzerine**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12 HAZİRAN 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANA BİLİM DALInda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Ali YAKAR Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Güzide ŞENEL Amasya Üniversitesi	....

ONAY

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
25/06/2019

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SEDA ÇAĞLAK

Haziran 2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

SEDA ÇAĞLAK

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu çalışmada, ilk olarak bulanık mantığın tarihçesinden, günlük hayatta kullanım alanlarından söz edilmiş, bulanık küme teorisine kısaca değinilmiştir. Ayrıca, bulanık sayılar ve bulanık aritmetik konularında geniş bir literatür taraması yapılmış ve sonucunda bu konuların derlemesi yapılmıştır. Bulanık analize değinilmiş, bulanık integral, Hukuhara diferansiyellenebilirliği, Hukuhara türevi, Seikkala türevi gibi kavramlardan bahsedilmiştir. Çalışmada birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklemler, bunların çözümleri, bulanık eşitsizlikler anlatılmıştır. Esas olarak bu tezde, birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklemlerin alt ve üst çözümleri incelenmiş ve alt ve üst çözümler metodu yardımıyla bazı karşılaştırma teoremleri ispatlanmıştır.

2019, 76 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Bulanık Küme, Bulanık Sayı, Hukuhara Farkı, Hukuhara Diferansiyellenebilirliği, Birinci Metebeden Bulanık Diferansiyel Denklemler, Birinci Mertebeden Bulanık Diferansiyel Eşitsizlikler, Alt ve Üst Çözüm

ABSTRACT

MASTER THESIS

ON THE FIRST ORDER FUZZY DIFFERANTIAL EQUATIONS AND INEQUALITIES

SEDA ÇAĞLAK

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR:PROF. DR. ALİ YAKAR

In this thesis, firstly, history of fuzzy logic and its areas of usage in daily life mentioned and theory of fuzzy sets are touched on. Also, a literature research is done and consequently, a compilation is made about this matters. Fuzzy Analysis is spoken and a notions like fuzzy integral and Hukuhara differentiability, Hukuhara derivative, Seikkala derivative are mentioned. In this study, first order differential equations, their solutions, first order fuzzy differential inequalities are explained. Essentially, in this thesis, upper and lower solutions of first order differential equations are investigated and some comparison results are proved via method of upper and lower solutions.

2019, 76 PAGE

KEYWORDS: Fuzzy Sets, Fuzzy Numbers, Hukuhara Difference, Hukuhara Differentiability, First Order Fuzzy Differential Equations, First Order Fuzzy Differential Inequalities, Upper and Lower Solutions

ÖNSÖZ

Bu tezin yazım sürecinde tecrübe ve bilgisinden her zaman yararlandığım, her konuda yardımlarını esirgemeyen, emeğini her zaman üzerimde hissettiğim, değerli hocam Prof. Dr. Ali YAKAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SEDA ÇAĞLAK

Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

1.GİRİŞ

Matematik denildiğinde ilk akla gelen kesinliktir. Halbuki günlük hayatta konuşmalarımız arasında belirsizlik içeren, orta yaşlı insan, uzun zaman, pahalı araba, yüksek bina gibi anlamı kişiden kişiye değişen kelimeler kullanılır. Klasik mantığın tanımlayamadığı bu tür belirsizlikler çoğunlukla bilimsel olmayan bir şey olarak kabul görmesine rağmen, 19. yüzyılın başlarında bu tür belirsizlikler üzerine bir çok filozof kafa yormuşlardır. Einstein bu durumu şu şekilde ifade etmiştir: "Matematiğin kavramları kesin olduğu sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değillerdir." 1920'lerde Heisenberg ortaya ilk belirsizlik kavramını atarak bilimi çok değerliliğe zorlamıştır. 1930'ların başlarında Lukasiewicz ilk üç-değerli mantık sistemini ve aynı dönemlerde kuantum filozofu Black de sürekli değerlere sahip mantığı tanımladı. Pek az batılı filozof çok değerliliği benimsemesine rağmen, Lukasiewicz, Gödel ve Black ilk çok değerli mantık ve kümeler üzerine teorik olarak çalışmalarını sürdürdüler, ancak kendilerine bir uygulama alanı bulamadılar. Belirsizliğin, modern anlamda matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir dönüm noktası, 1965'te California Berkeley Üniversitesi'nden Azeri kökenli Amerikalı Matematikçi Lütfi Askerzade Zadeh'in bulanık mantık ve dolayısıyla bulanık küme teorisini tanımlamasıyla başlamıştır. (Çağman, 2006)

Bu çalışmada da bulanık mantık ve bulanık kümeler üzerine kurulmuş olan bulanık sayılar, bulanık analiz ve bulanık diferansiyel denklemler ve eşitsizlikler konularından söz edilmiştir.

Kaynak özetleri kısmının birinci bölümünde, bulanık mantığın tarihçesi ve bulanık mantık teorisinin ne olduğuna kısaca değinilmiştir.

İkinci bölümünde, bulanık küme kavramı anlatılmış, üyelik fonksiyonun ne olduğu, bunların grafikleri, bir bulanık kümenin seviye kümeleri, çekirdeği, desteği, yüksekliği, normallik ve boş küme kavramlarından söz edilmiştir. Bunlara ek olarak bulanık kümelerde kesişim, birleşim ve tümleme işlemleri, bunların üyelik fonksiyonları ve grafikleri anlatılmıştır.

Üçüncü bölümünde, bir bulanık kümenin bulanık sayı belirtmesi için gerekli koşullar ve bulanık sayıların grafiklerine yer verilmiş, tekil bulanık sayı, üçgensel bulanık sayı, yamuk bulanık sayı, $L - R$ bulanık sayı, Gaussian bulanık sayı ve üstel bulanık sayı gibi bulanık sayı çeşitlerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümünde, Zadeh Genişletme prensibi anlatılmış, bu prensip yardımıyla bulanık sayılarda dört işlemin nasıl yapılacağı belirtilmiştir. Ayrıca $r -$ kesimi ile aralık aritmetiği kullanılarak bulanık sayılarda dört işlem tanımlanmıştır. Hukukara farkı, g-farkı, gH-farkı gibi bulanık sayılara özgü fark işlemleri anlatılmış ve çeşitli örneklere yer verilmiştir.

Beşinci bölümünde, bulanık sayıların metrik uzayı, normu, limit, yakınsaklık kavramları ele alınmıştır. Hukuhara diferansiyellenebilirliği, Hukuhara türevi, Seikkala türevi, genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik açıklanarak bulanık sayılarda türev işlemi anlatılmış ve bulanık integrale değinilmiştir.

Altıncı bölümünde, birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklemler ve bunların çözüm teknikleri ve çözümlerin grafikleri anlatılmış, örneklerle desteklenmiştir.

Yedinci bölümünde, birinci mertebeden bulanık diferansiyel eşitsizlikler anlatılmış, iki bulanık sayının ve iki bulanık fonksiyonun kıyaslanmasının nasıl yapılacağı açıklanmıştır.

Bulgular kısmında ise bütün bu literatür taramaları sonucunda elde edilen bilgilerle alt ve üst çözümlerin tanımları verildikten sonra alt ve üst çözümler metodu ile bazı karşılaştırma teoremleri ispatlanmıştır.

2.GENEL BİLGİLER

2.1.Bulanık Mantık

2.1.1. Bulanık mantığın tarihçesi

Karmaşık bir sistemde eksik bilgi ve olaylardan dolayı kesin matematik yeterli olmamaktadır. Geleneksel olarak olasılık kuramı, kesin olmamayı ya da belirsizliği ele almak için başarılı bir yaklaşımdır. Örneğin; bir meyve ya elmadır ya da değildir. Bu durumda olasılık, bazı bilgi ya da olayları açıklayabilmek için sınırları açıkça tanımlanabilen iyi bir yaklaşımdır. Fakat bir renk kırmızı veya kırmızımsı olabilir. Kırmızı ya da kırmızımsı renklerin kümesini tanımlamak oldukça zordur ve böyle bir durumda olasılık kuramının mümkün tüm problemleri modelleyemediği görülür. Burada Zadeh'in bulanık mantık ve küme teorisi devreye girmektedir. (Paksoy ve ark., 2013)

Zadeh bu teorisinde, matematiğin, dil ve insan zekasını ilişkilendirileceğini ve bulanık mantığın gerçek hayatın daha iyi bir modelini oluşturduğunu göstermesine rağmen bilim camiasından pek ilgi görmediği gibi tenkitlerle karşılanmış ve hatta ABD Ulusal Bilim Vakfı tarafından kaynakların boşa harcanmasına örnek olarak gösterilmişti. 1972'de İngiltere'de bir buhar makinesi için, bulanık mantık teorisi kullanılarak, bir kontrol edici tasarlanması dünyanın ilgisini bu konuya çekmiştir. Bulanık mantığın ilk ticari uygulamasının, 1980'de Danimarka'da bir çimento fabrikasının kontrolünde kullanılmasından sonra, başta Japonya olmak üzere dünyadaki çoğu ülkeler araştırma ve mühendislik uygulamalarıyla bu konuda büyük gelişmeler kat etmişlerdir. Özellikle, elektronik aletlerin ana yapılarını oluşturan transistor veya algoritmalar gibi anahtarlama araçlarında yoğun olarak bulanık mantık kullanılır.(Çağman, 2006)

Bulanık sistemler, endüstriyel proses kontrol sistemlerinde kullanılmasının yanında tahmin etmede, karar vermede, iklimlendirmede, otomobil kontrol sistemleri gibi mekanik kontrol sistemlerinde ve akıllı yapılarda da kullanılabilir.

Günümüzde görülmeye değer örnek bir bulanık sistem Japonya'da Sendai şehrindeki metro sistemidir. 1987'den beri bulanık kontrol sistem trenlerin rotalarında hızla yol almasını, yumuşak bir şekilde hızlanmalarını ve frenlemelerini, istasyona girişlerini, hassas bir şekilde durmalarını, saniye kaybetmeden ve yolcuları sarsmadan gerçekleştirmektedir.(Paksoy ve ark., 2013)

Matsushia ve Nissan gibi dev Japon şirketleri, bulanıklık yöntemiyle bu durumlarına ulaşmışlardır. Matsushia'nın çamaşır makinesi yıkanacakları değerlendirir ve gerekli olan deterjanı, su sıcaklığını ve yıkama şeklini ayarlar. Matsushia'nın on binlerce video kamerası, kendini tutan elin titremesini, mercekleri otomatik olarak ayarlayarak net görüntü gösterir. Sony'nin bulanık TV kontrastı, parlaklığı, rengi ve netliği otomatik olarak ayarlar. Mitsubishi Heavy Industries, aynı anda asansöre binmek isteyen kalabalığı taşıyacak asansörün verimini artırmak için bulanık kontrol sistemi tasarlamıştır. Amerika'da Otis Asansör Firması, zaman-değişken talep zamanlaması için kendi bulanık sistemini geliştirmiştir. Geniş bir yelpazede birbirinden çok farklı ilgi alanlarında ortaya konan çeşitli uygulamalar bulanık mantığı gittikçe artan bir hızda günlük yaşama dahil etmektedir.(Paksoy ve ark., 2013)

Bulanık teori her bir kelimenin anlamında saklı olan belirsizliği temsil eden teoridir. Bu teorinin bir uygulaması olarak "Bulanık Yapay Zeka"nın gelecekte insanlar ile bilgisayarlar arasında kurulacak olan yakın ilişkide büyük bir rol oynayacağı beklenmektedir. Pilav pişirme aletlerinden asansörlere, arabaların motor ve süspansiyon sistemlerinden nükleer reaktörlerdeki soğutma ünitelerine, klimalardan elektrikli süpürgelere kadar bulanık mantığın uygulandığı birçok saha mevcuttur. Bu sahalarda temin ettiği enerji, iş gücü ve zaman tasarrufu ise, onun "iktisat" adına ne kadar çok önem verilmesi gereken bir sistem olduğunu göstermektedir.(Paksoy ve ark., 2013)

Bulanık mantığın gelecekteki uygulama sahaları, daha da genişleyecek gibi gözükmektedir. Şeker hastaları için vücuttaki insülin miktarını ayarlayarak suni bir pankreas görevi yapan minik yapıların imalinde, prematüre doğumlarda bebeğin ihtiyaç duyduğu ortamı devam ettiren sistemlerin hazırlanmasında, suların klorlanmasında, kalp pillerinin üretiminde, oda içindeki ışığın miktarının ayarlanmasında ve bilgisayar sistemlerinin soğutulmasında bulanık mantık çok şeyler vaat etmektedir.(Paksoy ve ark., 2013)

2.1.2. Bulanık mantık

Etrafımızda ilgimizi çeken birçok sorunun yorumlanmasında sayısal bilgiden ziyade fazlaca kendi görüş, değer yargısı, takdir ve düşüncelerimizi sözel olarak ifade ederek olayları inceleriz. Bu ifadelerin anlamlı olmaları ve başkalarına iletilebilmesi için mutlaka her insanın en az bir tane dile ihtiyacı vardır. Dil ne kadar kesin olmayan kelime ve cümle ihtiva etse bile, insan iletişiminde ve bilgi akışında en etkin olan bir araçtır. Dildeki belirsizliklere rağmen insanoğlu onunla birbirini kolayca anlayabilmektedir. Örneğin "hava sıcak" denildiğinde herkes hava kelimesinin günlük hayattaki kullanımını kesinlikle anlamakta ancak "sıcak" kelimesinin ifade ettiği anlam izafi olarak birbirinden farklı olabilmektedir. Kutuplarda bulunan bir kişinin sıcak için 15° C'yi algılamasına karşılık ekvator civarında yaşayan bir kişi için bu 35°C'yi bulabilir. Arada birçok kişinin görüşü olarak başka dereceler de bulunabilir. Böylece "sıcak" kelimesinin altında insanların ima ettiği sayısal anlayışın bir sonucu olarak belirsiz bir durum ortaya çıkar. Bu rastgele değildir, ancak belirsizdir ve bu şekilde kelimelerin ima ettiği belirsizliklere bulanıklık denir.

Bulanık mantığın en geçerli olduğu iki durumdan ilki incelenen olayların çok karmaşık olması ve bununla ilgili yeterli bilginin bulunmaması durumunda kişilerin görüş ve değer yargılarına yer verilmesi, ikincisi ise insan muhakemesine, kavrayışlarına ve karar vermesine ihtiyaç gösteren hallerdir. Bulanık mantıktan, karşılaşılan her türlü sorunun karmaşık da olsa çözülebileceği anlamı çıkarılmamalıdır. Ancak, en azından insan düşüncelerinin incelenen olayla ilgili olarak bazı sözel çıkarımlarda bulunmasından dolayı en azından daha iyi anlaşılabileceği sonucuna varılabilir.

Günlük örneklerden bir tanesi, bir annenin çocuğuna fırına koyduğu keklerin pişmesi durumunda fırını kapatmasını söylemesi için ya sayısal olarak sıcaklığın hangi dereceye kadar devam etmesini veya daha basit olarak keklerin üstünün açık kahverengi olmaya başlaması halinde kapatmasını söyleyebilir. Bunlardan ikinci tür bilgi bulanıktır ve sayısal yönleri ima etmesine rağmen kesinlik olarak bilinmemektedir. İkinci tür sözel bilginin ise yani renk bilgisinin birçok kişi tarafından tercih edildiği gerçektir. O halde böyle bilgileri bilgisayarlara tanıtarak bulanık işlemlerin yapılması temin etmek yoluna gidilmelidir. İşte bu yoldaki en geçerli yöntembilim (metodoloji) bulanık küme, mantık ve sistemleridir. (Paksoy ve ark., 2013)

Bulanık mantık ve bulanık kümeleri, klasik mantık (Aristo mantığı) ve onun doğurduğu klasik kümeler ile beraber vermemiz aralarındaki farkı görme ve karşılaştırabilme açısından kolaylık sağlayacaktır. Bilindiği gibi, klasik mantık, yanlış veya doğrudan biri ile betimlenen ve kesin hüküm bildiren "Üç, ikiden büyük bir tamsayıdır.", "Ali otuz yaşındadır." gibi önerme dediğimiz ifadelerle çalışır. Bir x

değişkenine bağlı, $p(x) = x$ "x, ikiden büyük bir tamsayıdır.", $q(x) = x$ "x, otuz yaşındadır." gibi önermelere de açık önermeler denir. Bu önermelerle matematiğin temel taşlarından biri olan kümeleri inşa ederiz. Klasik kümelere, " iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur" denir. Önermeler kesin hüküm belirttiği için, bir açık önermeyi doğru yapan değişkenler iyi tanımlanmış olurlar ve bunların topluluğu matematikte küme olarak tanımlanır. (Çağman, 2006)

Klasik mantıkta önermeler ya doğrudur ya yanlıştır, üçüncü bir alternatifleri yoktur. Bir önermenin doğruluk değeri, doğrular için 1 ve yanlışlar için 0 kullanılır. Klasik mantığın doğurduğu kümeler, tabiattakinin aksine, yaşadığımız dünyayı siyah/beyaz, doğru/yanlış, iyi/kötü gibi kategorize ederek ikiye bölen birbirine zıt ikili kavramlarla inşa edilir. Halbuki, gerçek dünya siyah ve beyazdan ibaret değildir. Siyah ile beyazın arasında sonsuz renk tonu vardır. Konuşma dilinde ifade edilen üzerinde çalıştığımız çoğu sınıflandırmalarda kullandığımız, kesin sınırlarla tanımlanamayan ve kişiden kişiye farklı yorumlanan "çok güzel", "fazla uzun", "aşırı sıcak" gibi bulanık kavramlar klasik mantığın öngördüğü şekilde incelenemezler. İşte bu tür terimlerle ifade edilen "Hava aşırı sıcak.", "Amcam epeyce yaşlı." gibi ifadeleri, kesin hüküm belirtmediğinden, klasik mantık önerme olarak kabul etmez ve bu kavramlarla da klasik manada küme tanımlanamaz. İşte bu tür önermelere bulanık önermeler ve bunlarla uğraşan mantığa da bulanık mantık denir. (Çağman, 2006)

Bulanık önermelerin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında kesin bir şey söylenemeyeceğinden dolayı bunların doğruluk değeri,

$$[0,1] = \{x: 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$$

gerçel sayılar kümesinden, bir sayıyla derecelendirilir. Bir bulanık önerme derecesine göre hem doğru hem de yanlış olabilir. Bulanık bir önerme için "doğru değildir" denmiş ise bu "yanlıştır" anlamına gelmez. Bir önerme 0.8 derecesinde doğru ise aynı önerme 0.2 derecesinde yanlıştır. Anlaşılacağı gibi, klasik önermelerdeki çelişki ve totoloji burada geçerli değildir. Bu özellikten dolayı, klasik mantıkta problem olan paradokslar, hem doğru hem yanlış ya da ne doğru ne yanlış doğruluk değerine sahip önermeler, bulanık mantıkta doğruluk değeri alarak biraz da olsa gerçek hayata indirgenmiş olurlar. (Çağman, 2006)

2.2.Bulanık Kümeler

Bulanık kümeler klasik kümelerin genelleştirilmiş halidir, öyle ki, evrensel küme elemanlarının belirli bir kümeye ait veya değil şeklinde tasnifi yerine birden fazla kümeye dereceli üyeliğine imkan tanımaktadır. Bu nedenle, bulanık kümeler [0,1] kapalı aralığında değerler üreten üyelik fonksiyonları ile tanımlanmaktadırlar.

Bir bulanık küme, üyelik fonksiyonuyla ifade edilen elemanlardan oluşan; eğer bu elemanlar kümeye tam olarak aitse 1 üyelik derecesine sahip, hiç ait değilse 0 üyelik derecesine sahip olan ya da kısmi aitlik söz konusu ise 0 ile 1 arasında üyelik değerleri alabilen elemanlardır.

Klasik kümelerde evrensel E kümesinin bir alt kümesi U, eğer α elemanı U kümesinin özelliklerini taşıyorsa α elemanı U kümesinin elemanıdır denir ve sembolik olarak üye olma durumu $\alpha \in U$, aksi halde $\alpha \notin U$ biçiminde gösterilir. Kümenin üyelik fonksiyonu gösteriminde,

$$\mu_U : E \longrightarrow \{0,1\}$$

α elemanı U kümesinde, $\alpha \in U$ için $\mu_U(\alpha) = 1$ değerini alırken, $\alpha \notin U$ için $\mu_U(\alpha) = 0$ değerini alır. Klasik kümelerde kısmi üyelik söz konusu değildir. Hassas ve karmaşık sistemlerin klasik kümeler ile ifadesinin güçlüğü ikili yerine çoklu, tek değerlik yerine dereceli üyelik kavramını gündeme getirmiştir.

Bulanık kümeler, bir yandan günlük hayatta kullanılan dilsel ifadeleri matematiksel olarak ifade edebilirken diğer yandan belirsizlik içeren ve hassasiyet gerektiren karmaşık sistemlerin modellenmesinde kullanılan bir teori olarak yerini almıştır.

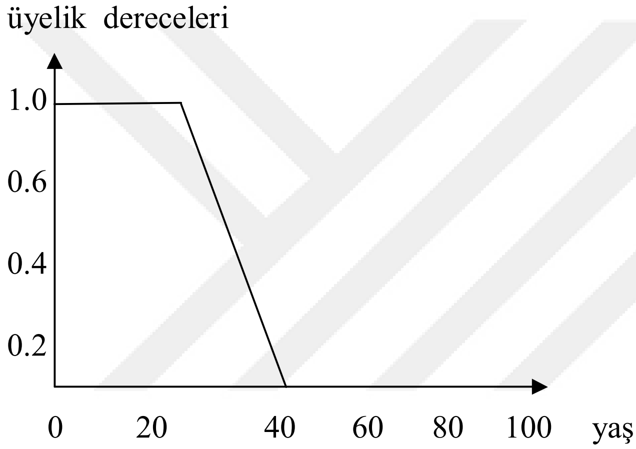
Tanım 2.2.1: Bir bulanık küme $\mu_U : E \longrightarrow [0,1]$ ile gösterilir, μ_U fonksiyonu *üyelik fonksiyonu* olarak adlandırılır ve $\mu_U(x)$ değeri, μ_U üyelik fonksiyonun x değerini aldığında karşılık olarak atadığı üyelik derecesini göstermektedir. Bulanık U kümesi, E evrensel kümesindeki her elemanın üyelik dereceleriyle birlikte oluşturduğu ikililer kümesidir.

$$U = \{(x, \mu_U(x)) : x \in E, \mu_U(x) \in [0,1]\}$$

Burada $\mu_U(x)$ değeri x'in U kümesine aitlik derecesini gösterir.

Bulanık bir kavram için farklı μ_U üyelik fonksiyonları düşünülebilir. Önerilecek üyelik fonksiyonu nesneldir ve ele alınan konuya göre değişiklik gösterebilmektedir. Örneğin; genç kavramını ele alalım. Herkes bu kavram için farklı yaş aralıklarını karşılık olarak ifade edebilmektedir. Bu öznel ifadeyi üyelik fonksiyonu biçiminde genç bir kişiden yazması istendiğinde, genç kavramına ilişkin üyelik fonksiyonu ve grafiği;

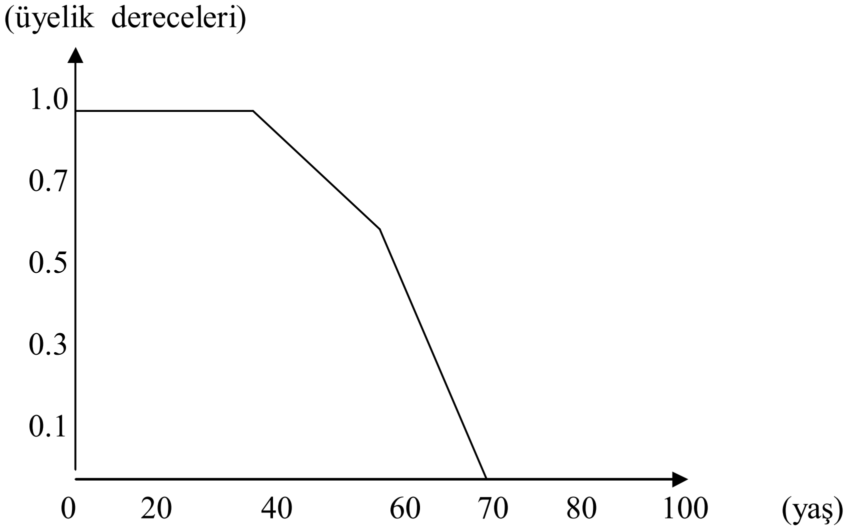
$$\mu_G = \begin{cases} 1, & eğer\ x \le 25 \\ \dfrac{40-x}{25}, & eğer\ 25 < x \le 40 \\ 0, & eğer\ 40 < x \end{cases}$$



Şekil 2.2.1: μ_G üyelik fonksiyonunun grafiği

Aynı kavram için yaşlı bir kişiden üyelik fonksiyonu yazması istendiğinde üyelik fonksiyonu ve grafiği

$$\mu_Y = \begin{cases} 1, & eğer\ x < 40 \\ \dfrac{80-x}{40}, & eğer\ 40 \le x < 60 \\ \dfrac{70-x}{20}, & eğer\ 60 < x \le 70 \\ 0, & eğer\ 70 < x \end{cases}$$



Şekil 2.2.2: μ_Y üyelik fonksiyonu grafiği

Örnek 2.2.1: Bulanık kümeler öznel algıları matematiksel olarak açıklar. $X = [40,100]$ bir odanın sıcaklık düzeyini gösteren aralık olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_5$ bulanık kümeleri sırasıyla soğuk, serin, tam kararında, ılık ve sıcak ifadelerini modellesin.

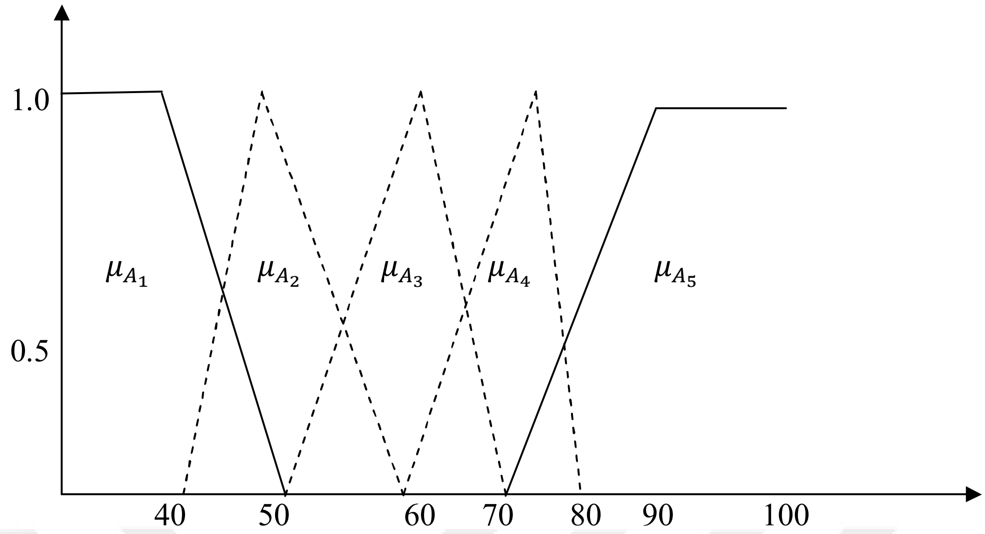
Soğuk: $$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & eğer\ 40 \le x < 50 \\ \dfrac{60 - x}{10}, & eğer\ 50 \le x < 60 \\ 0, & eğer\ 60 \le x \le 100 \end{cases}$$

Serin: $$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & eğer\ 40 \le x < 50 \\ \dfrac{x - 50}{10}, & eğer\ 50 \le x < 60 \\ 1 - \dfrac{x - 60}{10}, & eğer\ 60 \le x < 70 \\ 0, & eğer\ 70 \le x \le 100 \end{cases}$$

…

Sıcak: $$\mu_{A_5}(x) = \begin{cases} 0, & eğer\ 0 \le x < 80 \\ \dfrac{x - 80}{10}, & eğer\ 80 \le x < 90 \\ 1, & eğer\ 90 \le x \le 100 \end{cases}$$

şeklinde üyelik fonksiyonları tanımlanabilir.



Şekil 2.2.3: Oda sıcaklığına ilişkin bulanık kümelerin kullanımına örnek

Tanım 2.2.2: $U: E \rightarrow [0,1]$ bir bulanık küme olsun. U'nın seviye kümeleri (r-kesimi) ($cutU$) üyelik derecesi r'den büyük veya eşit elemanların oluşturduğu alt kümedir. (Bede, 2013)

$u_r = \{x \in E : \mu_u(x) \geq r\}, \qquad 0 < r \leq 1$

U bulanık kümesinin çekirdeği: ($coreU$) : Kümenin üyelik derecesi 1'e eşit olan elemanların oluşturduğu alt kümedir.

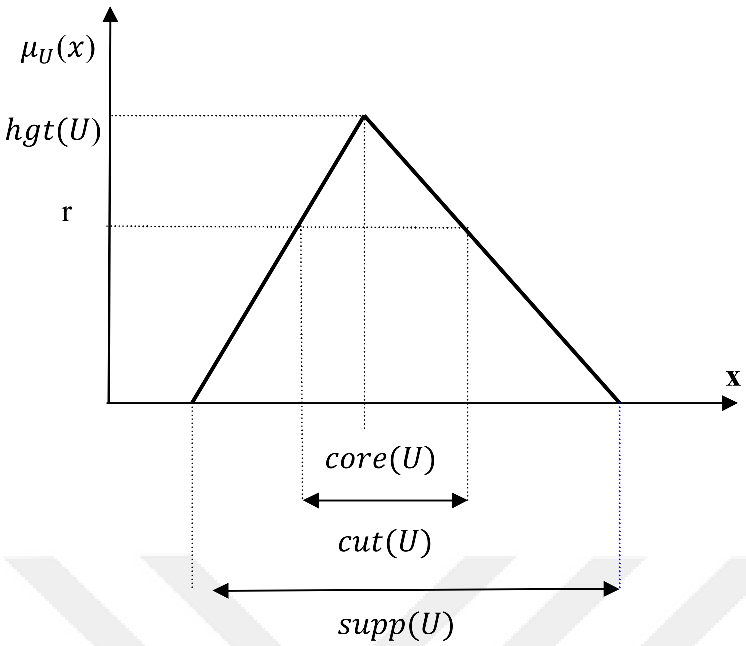
$U_1 = \{x \in E : \mu_U(x) = 1\}$ şeklindedir.

U kümesinin desteği : Kümenin üyelik derecesi 0'dan büyük olan elemanların oluşturduğu alt kümedir.

$suppU = \{x \in E : \mu_U(x) > 0\}$ olarak tanımlanır.

U kümesinin yüksekliği : ($hgt(U)$) : Kümenin üyelik derecesinin en büyük olduğu elemana karşılık gelir.

$hgt(U)$= $\sup_{\mu_U}(x)$



Şekil 2.2.4: Bulanık *u* kümesinin temel özellikleri (Usanmaz, 2014)

Örnek 2.2. 2: Örnek 2.1 'deki serin bulanık kümesini ele alalım.

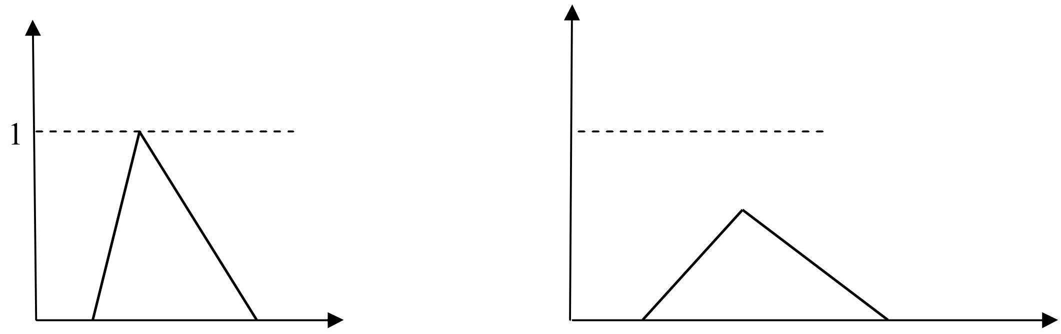
$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & 40 \le x < 50 \\ \dfrac{x-50}{10}, & 50 \le x < 60 \\ 1-\dfrac{x-60}{10}, & 60 \le x < 70 \\ 0, & 70 \le x \le 100 \end{cases}$$

$core(A_2)$={60}, $^1/_2$ _r kesimi $(A_2)_{1/2}$= [55,65],

r −kesimi $(A_2)_r$=$[50 + 100r, 70 - 10r]$, $0 < r \le 1$ ve $supp(A_2) = (50,70)$ olur.

Tanım 2.2.3:(Boş küme) : Bir U bulanık kümesi, ancak ve ancak, $\forall\, x \in U$ için $\mu_U(x)$= 0 ise boş küme olarak tanımlanabilir.

Tanım 2.2.4:(Normallik): U bir bulanık küme olsun. Eğer $\mu_U = \{x \in E : \mu_U(x) = 1\}$ kümesi boş küme değilse A bulanık kümesi normaldir.



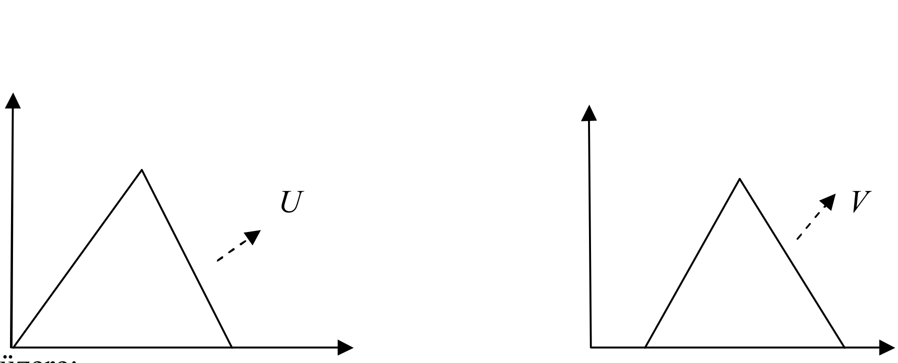
a b

Şekil 2.2.5: (a) Normal ve (b) normal olmayan bulanık kümeler

2.2.1. Bulanık kümelerde birleşim, kesişim ve tümleme işlemleri

Klasik kümeler üzerinde tanımlanan temel işlemlerden olan birleşim ve kesişim işlemleri bulanık kümeler üzerinde maksimum ve minimum fonksiyonları kullanılarak tanımlanmıştır. Bunun matematiksel doğruluğunun yanında insan düşüncesine yatkınlığı da görülmektedir. Herhangi bir kimsenin birden çok bulanık önermeler kullanarak akıl yürüteceğini varsayalım. Eğer önermelerin hepsi “veya” bağlacıyla bağlı ise ortak doğruluk değeri olarak, doğruluk durumuna olabildiğince yakın olmak isteneceğinden, önermeler içinde doğruluk değeri maksimum olanınki seçilecektir. Eğer önermelerin hepsi “ve” bağlacıyla bağlı ise ortak doğruluk değeri olarak, en kötü durum bilinmek isteneceğinden, önermeler içinde minimum olanınki seçilecektir.(Çağman, 2006)

E evrensel kümesinde verilen herhangi iki bulanık U ve V kümelerinin üyelik fonksiyonlarının grafikleri

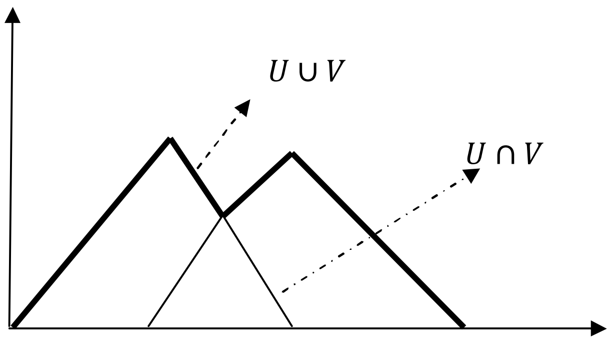


olmak üzere;

birleşim ve kesişimlerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla $\forall x \in E$ için

$\mu_{U\cap V}(x)= min\{\mu_U(x), \mu_V(x)\}$ ve $\mu_{U\cup V}(x) = max\{ \mu_U(x), \mu_V(x)\}$

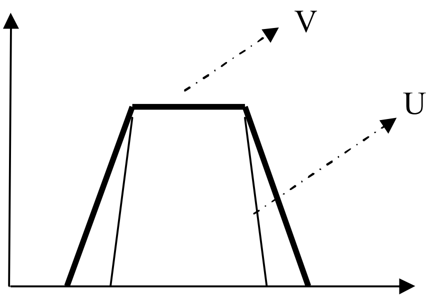
olarak tanımlanır.(Çağman, 2006)



Şekil 2.2.6: U ve V bulanık kümelerinin birleşim ve kesişimi

Bulanık kümelerin kapsama ve eşitliği direkt elemanların üyelik derecelerine bağlıdır, yani $\forall\, x \in E$ için $\mu_U(x) \leq \mu_V(x)$ ise $U \subseteq V$ olur, benzer şekilde $\mu_U(x) = \mu_V(x)$ ise $U = V$ olur.

E evrensel kümesi üzerinde tanımlı herhangi bir bulanık U kümesinin tümleyeninin üyelik fonksiyonu da $\forall\, x \in E$ için $\mu_{U'}(x)= 1 - \mu_U(x)$ biçiminde tanımlanır. (Çağman, 2006)



Şekil 2.2.7: Bulanık kümelerde kapsama işlemi

Klasik kümeler teorisinden bilinen küme işlemlerinin özellikleri, iki özellik dışında, bulanık kümeler için de geçerlidir. Klasik kümeler için sağlanan

$U \cup U' = E$ ve $U \cap U' = \emptyset$

özellikleri bulanık küme teorisinin en önemli ayırt edici karakteristiğini ortaya koyarlar ve bulanık kümeler için geçerli değillerdir. Çünkü; her ne kadar üyelik değerleri olasılıkta olduğu gibi [0,1] aralığında değer alsa da bir bulanık kümenin elemanlarının üyelik dereceleri toplamı olasılıkta olduğu gibi bu aralıkta bulunma zorunluluğu yoktur. Hatta bir kümenin eşitliklerden ne kadar saptığı bulanıklığının ölçüsüdür.(Çağman, 2006)

Örnek2. 2.3: $\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & eğer\ 40 \le x < 50 \\ \dfrac{60-x}{10}, & eğer\ 50 \le x < 60 \\ 0, & eğer\ 60 \le x \le 100 \end{cases}$ ve

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & eğer\ 40 \le x < 50 \\ \dfrac{x-50}{10}, & eğer\ 50 \le x < 60 \\ 1-\dfrac{x-60}{10}, & eğer\ 60 \le x < 70 \\ 0, & eğer\ 70 \le x \le 100 \end{cases}$$

bulanık kümelerini düşünelim:

Bunların birleşimi,

$$\mu_{A_1} \cup \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 1, & 40 \le x < 50 \\ 1-\dfrac{x-50}{10}, & 50 \le x < 55 \\ \dfrac{x-50}{10}, & 55 \le x < 60 \\ 1-\dfrac{x-60}{10}, & 60 \le x < 70 \\ 0, & 70 \le x < 100 \end{cases}$$

$$\mu_{A_1} \cap \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & 40 \le x < 50 \\ \dfrac{x-50}{10}, & 50 \le x < 55 \\ 1-\dfrac{x-50}{10}, & 55 \le x \le 60 \\ 0, & 60 < x \le 100 \end{cases}$$

A_1 kümesinin tümleyeni

$$\mu_{A_1'} = \begin{cases} 0, & 40 \le x < 50 \\ \dfrac{x-50}{10}, & 50 \le x < 60 \\ 1, & 60 \le x \le 100 \end{cases}$$

şeklindedir.

2.3.Bulanık Sayılar

Tanım 2.3.1: Bir $u : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ bulanık kümesini düşünelim. u aşağıdaki şartları sağlarsa bir bulanık sayıdır.

i) u normaldir, yani $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ vardır ki $u(x_0) = 1$ ‘dir.

ii) u bulanık konvekstir şöyle ki; $\forall\, t \in [0,1]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$u\,(tx + (1-t)y\,) \geq min\{\,u\,(x), u(y)\}$

iii) $u, \mathbb{R}'$ de üstten yarı süreklidir, yani;

$\forall\, \varepsilon>0$ ve $\exists\, \delta>0$ için $u(x) - u(x_0) < \varepsilon\ ve\ |\,x - x_0| < \delta$ olur.

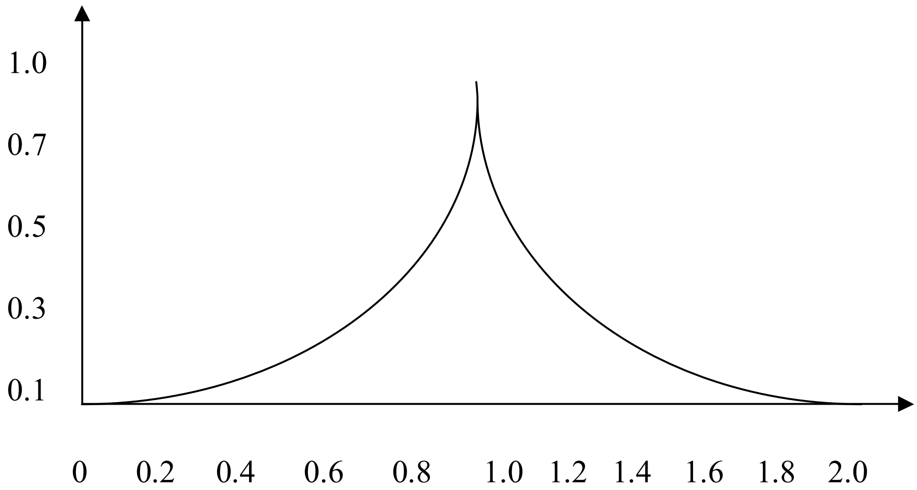
iv) u'nun desteği kompakttır, yani; $cl\,\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\,\}$ kompakttır. Burada $cl(A)$, A kümesinin kapanışını simgeler. (Bede, 2013)

Bulanık sayıların uzayını $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.3.1 : $u : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ bulanık kümesi üyelik fonksiyonu

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x < 1 \\ (2-x)^3, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & x \ge 2 \end{cases}$$

olan bir bulanık sayıdır. Üyelik fonksiyonunun grafiği;



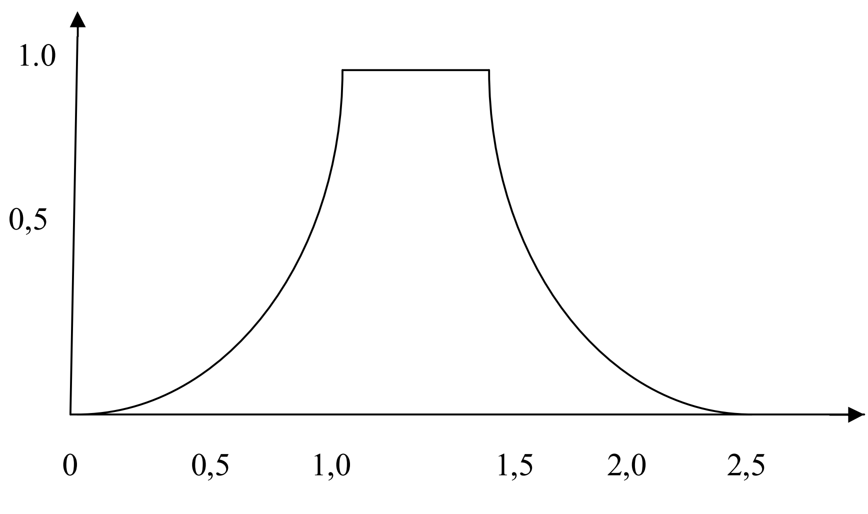
Şekil 2.3.1: Örnek 2.3.1'deki fonksiyonun üyelik fonksiyonunun grafiği

Örnek 2.3.2: Bulanık küme olan

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 \le x \le 1{,}5 \\ (2{,}5 - x)^3, & 1{,}5 < x < 2{,}5 \\ 0, & x \ge 25 \end{cases}$$

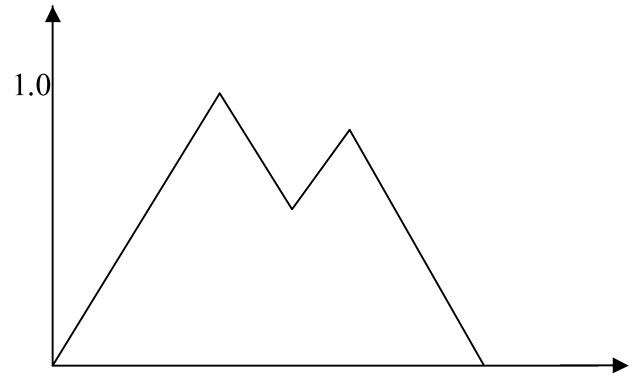
ifadesi bir bulanık sayıdır.

Üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:



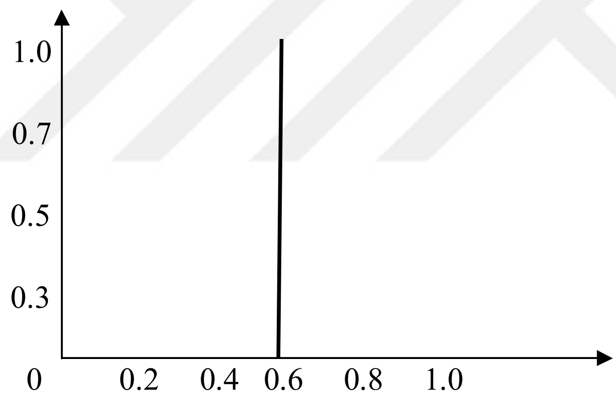
Şekil 2.3.2**:** Örnek 3.2'deki fonksiyonun üyelik fonksiyonunun grafiği

Örnek 2.3.3: Şekil 3.3'deki bulanık küme bulanık konveks olmadığından bulanık sayı da değildir.



Şekil 2.3.3: Bulanık sayı olmayan bulanık kümeye örnek

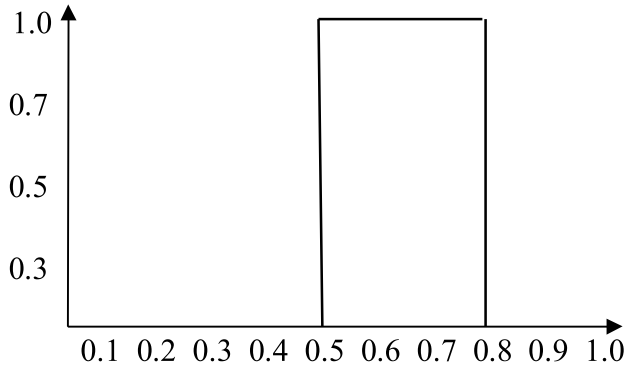
Not 2.3.1: Her reel sayı aynı zamanda bir bulanık sayıdır. yani; $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Ayrıca, her $x \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} = \{X_{\{x\}} : x \in \mathbb{R}\}$ olarak tanımlanır ve $X_{\{x\}}$ bir tekil bulanık sayıdır.



Şekil 2.3.4: Tekil bulanık sayı

Not 2.3.2 : Bulanık sayılar kapalı aralıklara genelleştirilebilir. Reel aralıkların kümesi bulanık sayılar kümesinin alt kümesidir. $\mathbb{I}$, reel aralıkların kümesi olsun.

$\mathbb{I} = \{X_{[a,b]} : [a, b] \subseteq \mathbb{R}\}$



Şekil 2.3.5: Bulanık sayı olarak ifade edilen reel aralık

Teorem 2.3.1: $u^-, u^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyonlar olsunlar.

(i) $u^-(r) = u_r^- \in \mathbb{R}$, $(0,1]$ aralığında sınırlı, azalmayan, soldan sürekli fonksiyon ve 0'da sağdan sürekli

(ii) $u^+(r) = u_r^+ \in \mathbb{R}$, $(0,1]$ aralığında sınırlı, artmayan, soldan sürekli fonksiyon ve 0'da sağdan sürekli

(iii) $u_1^- \leq u_1^+$

O zaman, u_r^-, u_r^+ şeklinde sınırları olan u_r, r −seviyesine kümesine sahip $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bulanık sayısı vardır.(Goetsel ve Woxman, 1986)

Tanım 2.3.4: $L, R : [0,1] \to [0,1]$ iki sürekli, artan fonksiyon olsun ve

$L(0) = R(0) = 0, L(1) = R(1) = 1$ şartları sağlansın.

$a_0^- \leq a_1^- \leq a_1^+ \leq a_0^+$ reel sayılar olsun. O zaman $u: \mathbb{R} \to [0,1]$ bulanık kümesi bir $L - R$ bulanık sayı olarak adlandırılır, bu bulanık sayı

$$\mu_U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_0^- \\ L\left(\dfrac{x - a_0^-}{a_1^- - a_0^-}\right), & a_0^- \leq x \leq a_1^- \\ 1, & a_1^- \leq x \leq a_1^+ \\ R\left(\dfrac{a_0^+ - x}{a_0^+ - a_1^+}\right), & a_1^+ \leq x \leq a_0^+ \\ 0, & a_0^+ \leq x \end{cases}$$

şeklinde üyelik fonksiyonuna sahiptir.

Sembolik olarak, $u = (a_0^-, a_1^-, a_1^+, a_0^-)_{L,R}$ yazarız. $[a_1^-, a_1^+]$, u'nun çekirdeği ve $a^- = a_1^- - a_0^-$, $a^+ = a_0^+ - a_1^+$ sırasıyla sol ve sağ sınırlar olarak adlandırılır. Eğer u bir $L-R$ bulanık sayısı ise o zaman onun seviye kümeleri

$u_r = [a_0^- + L^{-1}(r)\, a^-,\ a_0^+ - R^{-1}(r)\, a^+]$ olarak hesaplanır.

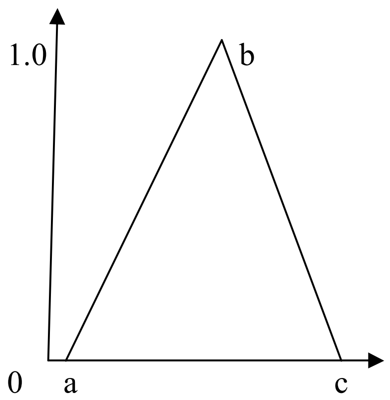
Bir yamuk bulanık sayı $a \le b \le c \le d$ olacak şekilde (a, b, c, d) şeklinde dörtlüyle simgelendirilir.

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a}, & a \le t \le b \\ 1, & b \le t \le c \\ \dfrac{d-t}{d-c}, & c < t \le d \\ 0, & d < t \end{cases}$$

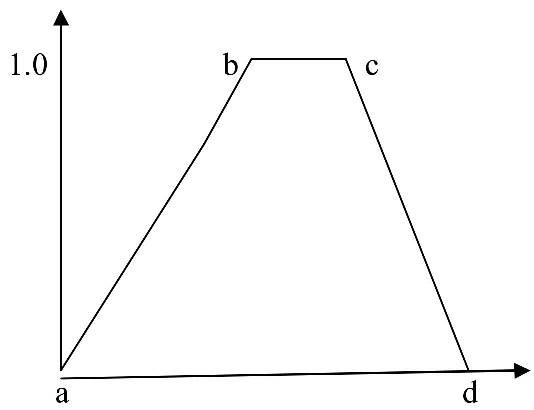
üyelik fonksiyonudur.

r −seviye kümesinin uç noktaları $u_r^- = a + r\,(b-a)$, $u_r^+ = d - r\,(d-c)$

eğer (a, b, c, d) simgesinde $b = c$ ise bulanık sayı üçgensel bulanık sayı olarak adlandırılır. (a, b, c) üçlüsü üçgensel bulanık sayıyı simgeler.(Dubois ve Prade, 1987)

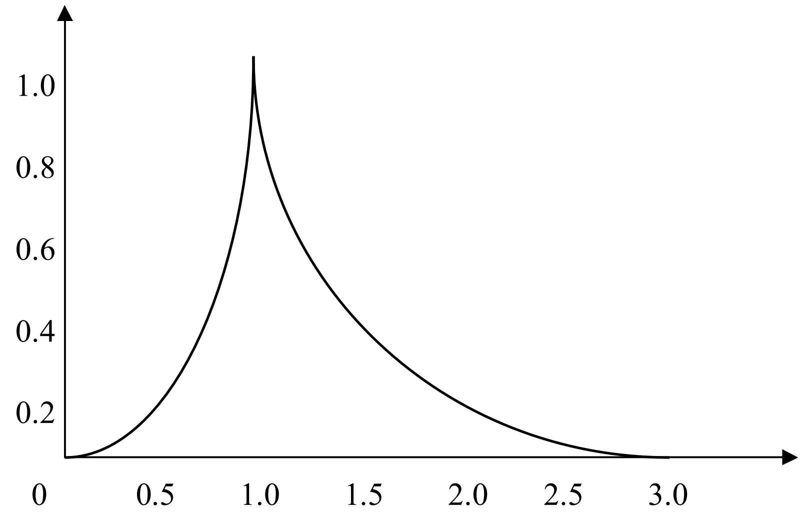


Şekil 2.3.6: Üçgensel bulanık Sayı



Şekil 2.3.7: Yamuk bulanık Sayı

Örnek 2.3.4 : $L, R : [0,1] \to [0,1]$, $L(x) = R(x) = x^2$ olsun. $a_1^- = a_1^+ = 1$ ve $a^- = 1$, $a^+ = 2$ olduğunda $L-R$ bulanık sayısının seviye kümesi $u_r = [\sqrt{r}, 3 - 2\sqrt{r}]$ olur.

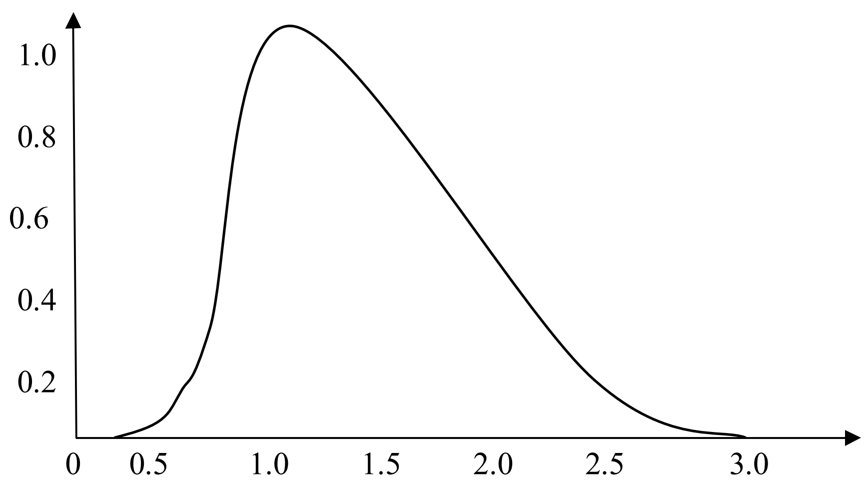


Şekil 2.3.6: L-R Bulanık Sayıya Örnek

Not 2.3.3 :

$$u(x) = \begin{cases} 0\,, & x < x_1 - a\sigma_l \\ e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma_l^2}}, & x_1 - a\sigma_l \leq x \leq x_1 \\ e^{-\frac{(x_1-x)^2}{2\sigma_r^2}}, & x_1 \leq x < x_1 + a\sigma_r \\ 0\,, & x_1 + a\sigma_r \leq x \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen bulanık sayı *Gaussian bulanık sayıdır*. Burada x_1 bulanık sayının çekirdeğidir. σ_l ve σ_r sağ ve sol açıklık, $a > 0$ değişken değerdir.

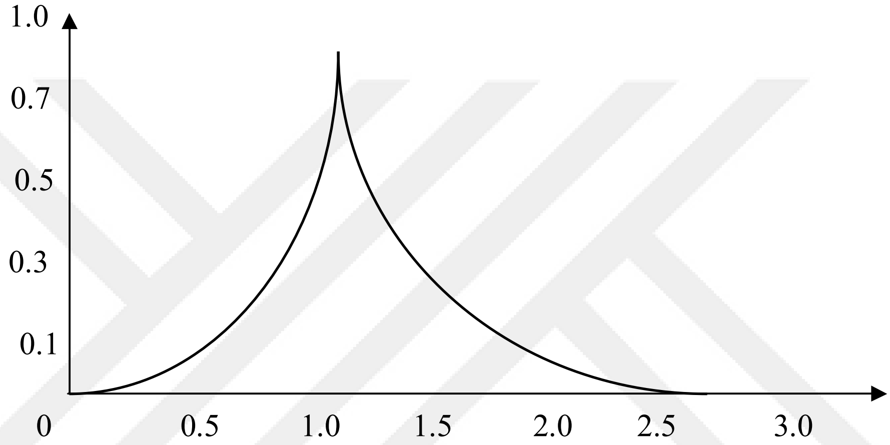


Şekil 2.3.9: Gaussian bulanık sayıya örnek

Not 2.3.4:

$$u(x)=\begin{cases} 0, & x < x_1 - a\sigma_l \\ e^{\frac{x-x_1}{\sigma_l}}, & x_1 - a\sigma_l \le x < x_1 \\ e^{\frac{x_1-x}{\sigma_r}}, & x_1 \le x < x_1 + a\sigma_r \\ 0, & x_1 + a\sigma_r \le x \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen bulanık sayı üstel bulanık sayıdır. Burada x_1 bulanık sayının çekirdeğidir. σ_l ve σ_r sağ ve sol açıklık, $a > 0$ değişken değerdir.



Şekil 2.3.10: Üstel Bulanık Sayıya Örnek

2.4. Bulanık Aritmetik

U ve V iki bulanık küme ise bu kümelerle dört işlem yapabilmeye ihtiyaç duyulmuştur. $U+V, U-V, U \cdot V,\ U/V$ ifadelerini hesaplamak için iki temel yöntem vardır. (1) genişletme prensibi (2) r-kesimi (seviye kümesi) ile aralık aritmetiğidir.

2.4.1.Zadeh genişletme prensibi

Tanım 2.4.1.1: (Zadeh Genişletme Prensibi): $X\ ve\ Y$ klasik kümeler, $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $v = F(u)$ olacak şekilde $F: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ (bulanık kümeler) fonksiyonuna genişletilebilir. (Zadeh, 1975)

$$v(y)= \begin{cases} \sup\{u(x) : x \in X,\ f(x) = y, & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Burada $\mathcal{F}(X)$ ile X üzerinde tanımlı bütün bulanık kümeler kümesi kastedilmektedir.

Zadeh genişletme prensibinin iki boyutta yapılması önemlidir, çünkü bu reel sayılar arasındaki işlemleri bulanık sayılara genişletmemizi sağlar.

Not 2.4.1.1: Her $u \in \mathcal{F}(X)$ bulanık kümesi için Zadeh genişletmesi iyi tanımlıdır. f^{-1}(y) $\neq \emptyset$ olduğunda, $\{u(x) : x \in X, f(x) = y\}$ kümesi boştan farklıdır ve sınırlıdır. Dolayısıyla en az bir üst sınıra sahiptir.

İki boyutlu Zadeh genişletme prensibi çok önemlidir, çünkü; bu sayede reel sayılar arasındaki işlemler bulanık sayılar için genişletilebilir.

Tanım 2.4.1.2: $f : X\, x\, Y \to Z$ fonksiyonu, F : $\mathscr{F}$(X) x $\mathscr{F}$(Y) →$\mathscr{F}$(Z) fonksiyonuna genişletilebilir, öyle ki $w = F(u, v)$ ve

$$w\,(z) = \begin{cases} \sup\left\{\min\left\{u(x), v(y)\right\}, & f(x,y) = z, \quad eğer\ \ f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ & 0, \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olur. (Bede, 2013)

Yukarıda tanımlarla verilen Zadeh Genişletme Prensibiyle toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri tanımlanmıştır.

U ve V iki bulanık küme olsunlar. $U + V = W$ ise, o zaman W için üyelik fonksiyonu

W ={(z,$\mu_W(z)$: sup $\{\min(\mu_U(x), \mu_V(y)\}, z = x + y,\ \ x, y, z \in E\}$ olarak tanımlanır.

W=$U - V$ ise çıkarma işlemi de

W={(z,$\mu_W(z)$: sup $\{\min(\mu_U(x), \mu_V(y)\}, z = x - y,\ \ x, y, z \in E\}$

W=$U \cdot V$; W={(z,$\mu_W(z)$: sup $\{\min(\mu_U(x), \mu_V(y)\}, z = x \cdot y,\ \ x, y, z \in E\}$

Benzer şekilde

W= U/V ; W ={(z,$\mu_W(z)$: sup $\{\min(\mu_U(x), \mu_V(y)\}, z = \frac{x}{y},\ \ x, y, z \in E\}$ olur.

Hepsinde de W bulanık kümedir. $W = U\,/\,V$ için V 'nin desteğinde sıfırın bulunmadığını kabul ederiz.

Örnek 2.4.1.1: Uve V bulanık kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.

U= {(1, 0.2), (3, 0.6), (5,1.0), (6, 0.8), (8, 0.4)}

V= {(5,0), (7, 0.4), (9, 0.8), (10, 1.0), (11, 0.5)}

Bu iki kümenin toplamı olan W kümesini bulalım. Bu işlem için önce bu iki bulanık kümenin ikişer ikişer eşleştirilerek öğelerinin toplanması ve bu toplamaya katılan öğelerin üyelik derecelerinin de minimumları alınarak tek üyelik derecesine indirilmeleri gerekmektedir.

W=U+ V bulanık kümesinde 5x5 toplam 25 tane eleman bulunacaktır.

W= {(1+5, 0.2 ∧ 0), (1+7, 0.2∧0.4), (1+9, 0.2 ∧ 0.8), (1+10, 0.2∧1.0), (1+11, 0.2∧0.5), (3+5, 0.6∧0), (3+7, 0.6∧0.4), (3+9, 0.6∧0.8), (3+10, 0.6∧1.0), (3+11, 0.6∧0.5), (5+5, 1.0∧0), (5+7, 1.0 ∧0.4), (5+9, 1.0∧0.8), (5+10, 1.0∧1.0), (5+11, 1.0∧0.5), (6+5, 0.8∧0), (6+7, 0.8∧0.4), (6+9, 0.8∧0.8), (6+10, 0.8∧1.0), (6+11, 0.8∧0.5), (8+5, 0.4∧0), (8+7, 0.4∧0.4), (8+9, (0.4∧0.8), (8+10, 0.4∧1.0), (8+11, 0.4∧0.5)}

Burada ∧ işareti minimumunu almak için kullanılmıştır. Bu işlem de tamamlandığında

W= { (6,0), (8, 0.2), (8, 0), (10, 0.2), (10, 0), (10, 0.4), (11, 0.2), (11,0),(12, 0.2), (12, 0.6),(12, 0.4), (13, 0.6), (13, 0.4), (13, 0), (14, 0.5), (14, 0.8), (15, 1.0),(15, 0.8), (15, 0.4),(16, 0.5), (16, 0.8), (17, 0.5), (17, 0.4), (18, 0.4), (19, 0.4)}

Bu son bulanık kümede elemanları birbirinin aynısı olan çok sayıda öğe vardır. Bu öğelerinin birleştirilmesinde maksimum alma işlemi uygulanır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

W= {(6,0), (8, 0.2), (10, 0.4), (11, 0.2), (12, 0.6), (13, 0.6), (14, 0.8), (15, 1.0), (16,0.8), (17, 0.5), (18, 0.4), (19, 0.4)} olarak elde edilir.

Benzer şekilde çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine de örnekler verilebilir.

2.4.2. r- kesimi ile aralık aritmetiği

İlk olarak reel sayılardaki aralık aritmetiğini kısaca hatırlatalım. $[a_1, b_1]$ ve $[a_2, b_2]$ reel sayıların kapalı, sınırlı aralıkları olsun. Eğer * toplama, çıkarma, çarpma, bölme işlemlerinden birini simgelerse, o zaman $[a_1, b_1]$ * $[a_2, b_2]$ = $[\alpha, \beta\ ]$

$[\alpha, \beta]$ ={ $a * b : a_1 \leq\ a\ \leq\ b_1, a_2 \leq\ b\ \leq\ b_2$ }

Eğer * bölme işlemi ise $[a_2, b_2]$ aralığında sıfır yer almaz.

Buradan

$[a_1, b_1]\ +\ [a_2, b_2]\ = [\ a_1 +\ a_2, b_1 +\ b_2]$

$[a_1, b_1]\ -\ [a_2, b_2]\ =\ [a_1 - b_2, b_1 - a_2]$

$[a_1, b_1]\ /\ [a_2, b_2]\ =\ [a_1, b_1]\ \cdot\ [\frac{1}{b_2}, \frac{1}{a_2}]$

$[a_1, b_1]\ \cdot\ [a_2, b_2]\ =\ [\alpha, \beta\ ]$ olur. Burada

$\alpha\ =\ min\{a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2\ \}$

$\beta\ =\ max\ \{\ a_1 a_2,\ a_1 b_2, b_1 a_2,\ b_1 b_2\ \}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.4.2.1: f: ℝ→ℝ sürekli fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon F: $\mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bulanık fonksiyonuna genişletilebilir. u ∈ $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $v = F(u)$ ∈ $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, v'nin seviye kümeleri v_r=$f(u_r)$, ∀ r ∈ [0,1], v_r=[v_r^-, v_r^+]

v_r^-= $inf\ \{\ f(x)\ :\ x\ \in\ u_r\ \}$

v_r^+= $sup\ \{\ f(x)\ :\ x\ \in\ u_r\ \}$ olur. (Bede, 2013)

$u_r, r\ \in$ [0,1] olmak üzere, u'nun seviye kümelerini simgeler.

Teorem 2.4.2.2: f: ℝ x ℝ→ℝ sürekli fonksiyonunu düşünelim. Bunu

F: $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ x $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ →$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonuna genişletebiliriz. Öyle ki

$w\ =\ F(u, v)$ fonksiyonunun her $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ için seviye kümeleri

w_r = { $f(x, y)\ :\ x\ \in\ u_r, y\ \in\ v_r$ } olur.

Bir başka deyişle w_r= $[w_r^-, w_r^+]$

w_r^-= inf $\{ f(x,y) : x \in u_r, y \in v_r\}$

w_r^+ = sup $\{ f(x,y) : x \in u_r, y \in v_r\}$ (Bede, 2013)

Şimdi $r-$kesimi ile aritmetik işlemlere bakalım. u ve v iki bulanık sayı olsun. r-kesimlerinin kapalı ve sınırlı aralıklar olduğunu biliyoruz.

$u_r = [u_r^-, u_r^+]$, $v_r = [v_r^-, v_r^+]$ olmak üzere

$w= u + v$ ise $w_r = u_r + v_r$

$w = u - v$ ise $w_r = u_r - v_r$

$w = u \cdot v$ ise $w_r = u_r \cdot v_r$

$w= u / v$ ise $w_r = u_r / v_r$

Bu yöntem genişletme prensibine eşdeğerdir. Ancak görülüyor ki, $r-$kesimi ile aritmetik işlemler daha kullanışlıdır.

Örnek 2.4.2.1: $u = (-3,-2,-1)$ ve $v= (4,5,6)$ iki üçgensel bulanık sayı olsun. $r-$kesimini kullanarak $u \cdot v$'yi bulalım.

$u_r = [-3 + r, -1 - r]$ ve $v_r = [4 + r, 6 - r]$ olur.

$w= u \cdot v$ olmak üzere

$w_r = [(r-3)(6-r), (-1-r)(4+r)], 0 \leq r \leq 1$ şeklinde elde edilir.

Örnek 2.4.2.2: $u= (0, 5, 10)$ ve $v= (5,10,12)$ iki üçgensel bulanık sayı olsun. bunların $r-$kesimleri

$u_r = [5r, 10 - 5r]$ ve $v_r = [5r + 5, 12 - 2r]$ olur. Bu durumda

$[u + v]_r = [10r + 5, 22 - 7r]$

$[u - v]_r = [7r - 12, 5 - 10r]$

$[u \cdot v]_r = [60r - 10r^2, 120 - 80r + 10r^2]$

$[{}^{u}/{}_{v}]_r = [\frac{5r}{12-2r}, \frac{2-r}{r+1}]$ olarak elde edilir.

Örnek 2.4.2.3: u= (1,2,3) ve v= (2,3,5) üçgensel bulanık sayılar olsunlar.

$u + v$ = (3,5,8)

$2u$= (2,4,6)

$-2v$ = ($-10, -6, -4$) şeklinde de hesaplanabilir.

2.4.3. Bulanık sayıların hukuhara farkı

Zadeh Genişletme Prensibine göre $u - u \neq 0$ ‘dır. Bu eksikliği gidermek yeni farklar ortaya atılmıştır.

Tanım 2.4.3.1**:** Hukuhara farkı ($H -$ farkı) $u \ominus_H v = w \Leftrightarrow u = v + w$ olarak tanımlıdır.

Eğer $u \ominus_H v$ varsa seviye kümeleri

$[u - v]_r = [u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+]$

şeklindedir. (Hukuhara, 1967)

Tanım 2.4.3.2: $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ iki bulanık sayı için genelleştirilmiş Hukuhara farkı (gH-farkı) w bulanık sayısıdır. Öyle ki (eğer mevcutsa);

$$u \ominus_{gH} v = w \Leftrightarrow \begin{cases} i) & u = v + w \\ ii) & v = u - w \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu fark için seviye kümeleri ise

$[u \ominus_{gH} v]_r = [min\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}, max\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}]$ olur.

Tanım 2.4.3.3: $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bulanık sayıları için genelleştirilmiş fark

$[u \ominus_g v]_r = [\,inf\ min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup \max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}]$, $\beta \geq r$ şeklinde tanımlanmıştır.

Not 2.4.3.1: g-farkı her zaman mevcuttur. Ancak H-farkı ve gH-farkı her koşulda var olmayabilir.

Örnek 2.4.3.1 : u=(2,3,5,6) yamuk bulanık sayısı ve v=(0,4,8) üçgensel bulanık sayısını düşünelim. Bunların gH-farkının olmadığını görmek kolaydır. Tersini kabul edersek, o zaman $u_r^- - v_r^- \leq u_r^+ - v_r^+$ ya da $u_r^- - v_r^- \geq u_r^+ - v_r^+$ sağlanmasına ihtiyaç vardır.

Ama görebiliriz ki

2= $u_0^- - v_0^- \geq u_0^+ - v_0^+ = -2$ ve $-1 = u_1^- - v_1^- \leq u_1^+ - u_1^+$ =1

Her r için aynı eşitsizlik sağlandığından bir çelişki elde etmiş oluruz.

Örnek 2.4.3.2: u=(1,2,3), v=(1,3,5) bulanık sayıları için $u \ominus_{\mathrm{gH}} v$ genelleştirilmiş Hukuhara farkını bulunuz. Hukuhara farkı mevcut mudur, inceleyelim.

$u_r = [1 + r,\ 3 - r\ ]$

$v_r = [1 + 2r, 5 - 2r]$

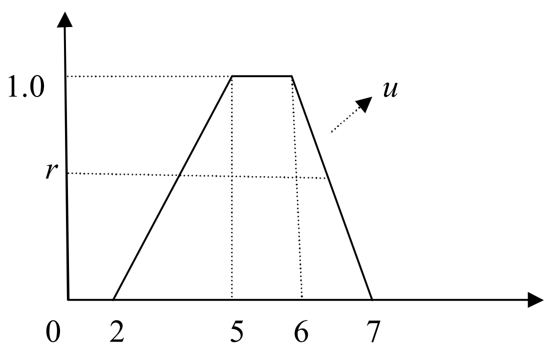
$u_r^- - v_r^- = -r$

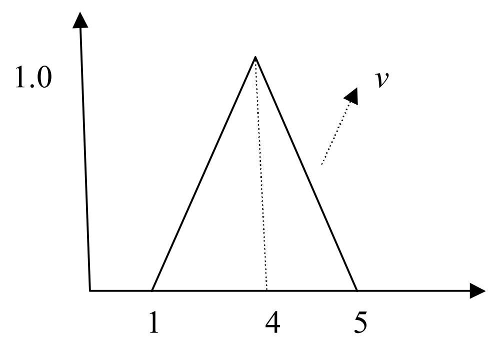
$u_r^+ - v_r^+ = -2 + r$

$[u \ominus_{\mathrm{gH}} v]_r = [-r, -2 + r]$, $u \ominus_{\mathrm{gH}} v = (-2, -1, 0)$ şeklinde gH-farkı bulunur.

$[u \ominus_{\mathrm{H}} v]_r = [-r, -2 + r]$ dir. $r = 0$ için $[0, -2]$ olduğundan Hukuhara farkı yoktur.

Örnek 2.4.3.3: $u = (2{,}5{,}6{,}7)$ ve $v = (1{,}4{,}5)$ yamuk ve üçgen bulanık sayılar olsun. $u + v, u - v, -2u + v, u - u, 2v - v\ \ u \cdot v$ ‘yi hesaplayalım.





$u_r^- = 2 + 3r$ $\qquad$ $v_r^- = 1 + 3r$

$u_r^+ = 7 - r$ $\qquad$ $v_r^+ = 5 - r$

$u_r = [\,2 + 3r, 7 - r\,]$ $\qquad$ $v_r = [\,1 + 3r, 5 - r\,]$

olarak bulunur. u ve v ‘nin r −kesimleri ile işlem yaparak ;

$u_r + v_r = [3 + 6r, 12 - 2r\,]$ olduğundan r’ye 0 ve 1 değerleri verilerek

$u + v = (3,9,10,12)$

$u_r - v_r = [\,-3 + 4r, 6 - 4r\,]$ olduğundan $u - v = (-3, 1,2,6\,)$

$-2u_r - v_r = [\,-13 + 5r, 1 - 7r\,]$ olduğundan $-2u + v = (-13, -8, -6, 1)$

$u_r - u_r = [\,-5 + 4r, 5 - 4r\,]$ olduğundan $u - u = (-5, -1, 1, 5\,)$

$2v_r - v_r = [\,-3 + 7r, 9 - 5r\,]$ olduğundan $2v - v = (-3, 4,9\,)$

$u_r \cdot v_r =(\, min\,\{\,2 + 9r + 9r^2, 10 + 13r - 3r^2, 7 + 20r - 3r^2, 35 - 12r - 3r^2\,\}$, $max\,\{2 + 9r + 9r^2, 10 + 13r - 3r^2, 7 + 20r - 3r^2, 35 - 12r - 3r^2\,\}\,)$

$= [2 + 9r + 9r^2,\ 35 - 12r - 3r^2\,]$ olduğundan

$u \cdot v = (2,20,24,35)$ olur.

Örnek 2.4.3.4 : $u = (2,5,6,8)$ ve $v=(1,4,5)$ bulanık sayıları için $u\ominus_{\mathrm{H}}v$ Hukuhara farkını bulalım:

$u_r = [2 + 3r,\ 8 - 2r]$

$v_r = [1 + 3r,\ 5 - r]$ seviye kümeleridir. $0 \leq r \leq 1$

$u\ominus_{\mathrm{H}}v = [2 + 3r - 1 - 3r,\ 8 - 2r - 5 + 2r\,] = [1, 3 - r\,]$ olarak bulunur.

Aralığı bulanık sayı şeklinde yazarsak $u\ominus_{\mathrm{H}}v = (\,1,2,3)$ elde ederiz.

Örnek 2.4.3.5: $u=(\,4,5,6,8)$ ve $v = (0,5,10)$ bulanık sayıları için $u\ominus_{\mathrm{g}}v$ farkını bulalım. $u\ominus_{\mathrm{gH}}v$ farkı var mıdır, inceleyelim.

$u_r = [\,4 + r, 8 - 2r\,]$

$v_r = [5r, 10 - 5r\ ]$

$u_r - v_r = [\ 4 - 4r, -2 + 3r\ ]$

$r = 0$ için $4 = u_0^- - v_0^- \geq u_0^+ - v_0^+ = -2$

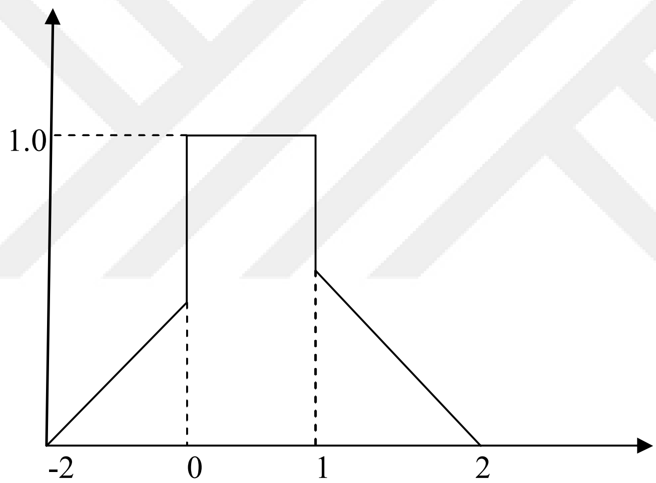
$r = 1$ için $0 = u_1^- - v_1^- \leq u_1^+ - u_1^+ = 1$

olduğundan gH-farkı yoktur.

g-farkı her zaman mevcuttur. g-farkı tanımından $u \ominus_g v = [-2 + 3r, 4 - 4r]$ bulunur.

Yani ; $u \ominus_g v = (-2,0,1,4)$ olur.

Bu farkı grafik üzerinde gösterecek olursak;



2.5. Bulanık Analiz

2.5.1. Bulanık sayıların metrik uzayı

Bulanık sayılarda en çok uygulanan metrik Hausdorff uzaklığıdır. Bulanık sayılar için Hausdorff uzaklığı; $\mathbb{R}^n$' in kompakt, konveks alt kümeleri arasındaki klasik Hausdorff-Pompei uzaklığına dayanır. Öncelikle Hausdorff uzaklığını tanımlayalım:

i) $\mathcal{K}, \mathbb{R}^{n}$'in kompakt, konveks, boş olmayan alt kümeleri ve $A \in \mathcal{K}$ olsun. bir a noktası ile A'daki bir x noktası arası uzaklık ;

$d(\,x, A\,) = \inf\{\,\|x - a\| : a\ \in\ A\}$

şeklinde tanımlıdır.

ii) $A, B \in \mathcal{K}$ olsun. A'dan B'ye ve B'den A'ya Hausdorff ayrımı;

$$d_H^*\ (B, A)\ =\ sup\,\{\,d(\,b, A\,) :\ b \in\ B\}$$

$$d_H^*\ (A, B)\ =\ sup\,\{\,d(a, B\,)\ :\ a\ \in\ A\}$$

iii) $A, B \in\ \mathcal{K}$ arasındaki Hausdorff Uzaklığı ;

$$\mathrm{d_H}\ (\,A, B)\ =\ max\ \{\,d_H^*(A, B),\ d_H^*\ (B, A)\,\}$$

iv) A= [a_1, a_2], B= [b_1,b_2] iki aralık olmak üzere bunlar arasındaki Hausdorff uzaklığı;

$\mathrm{d_H}\ (A, B)\ =\ max\ \{\ |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\ \}$ olur. (Bede, 2013)

Hausdorff uzaklığına göre, $\mathcal{K}$ tam ayrılabilir metriktir. Şimdi bulanık sayıların metrik uzayına bakalım.

Tanım 2.5.1.1: $D_\infty\ : \mathbb{R}_\mathcal{F} \times \mathbb{R}_\mathcal{F}\ \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ olsun.

$$D_\infty\ (\,u, v\,) = \sup \max_{r\,\in[0,1]}\{\ |u_r^- -\ v_r^-|, |u_r^+ -\ v_r^+|\ \}$$

$$= \sup\{\mathrm{d_H}(u_r,\, v_r)\,\}$$

Burada, u_r = [u_r^-, u_r^+], v_r= [v_r^-, v_r^+] $\subseteq$ $\mathbb{R}$ ve d_H reel aralıklarda klasik Hausdorff uzaklığıdır. D_∞ , bulanık sayılar arasında Hausdorff uzaklığı olarak adlandırılır.(Diamond ve Kloeden, 2000)

Aşağıdaki önermede bulanık sayılar arasındaki Hausdorff uzaklığına ait özellikler verilecektir:

Önerme 2.5.1.1:

i) ($\mathbb{R}_\mathcal{F}$, D_∞) bir metrik uzaydır ve ayrıca aşağıdaki şartlar sağlanır.

ii) $D_\infty\ (u\ +\ w, v\ +\ w\,) = D_\infty\ (u, v), \forall\, u, v, w\ \in \mathbb{R}_\mathcal{F},$

iii) $D_\infty\ (ku, kv\,) = |k|\,.\,D_\infty\ (\,u, v), \forall\, u, v\ \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ ve $k \in \mathbb{R}$;

iv) $D_\infty\ (u+v, w+e) \leq D_\infty\ (u,w) + D_\infty\ (v,e)$, $\forall\, u,v,w,e \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. (Diamond ve Kloeden, 2000)

İspat:

i) $D_\infty\ (u,v) = \sup \max_{r\in[0,1]}\{\ |u_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - v_r^+|\ \} \geq 0$ olduğunu görmek kolaydır.

$D_\infty\ (u,v) = 0 \Leftrightarrow u_r^- = v_r^-,\ \ u_r^+ = v_r^+,\ r \in [0,1]$

Ayrıca açıktır ki $D_\infty\ (u,v) = D_\infty\ (v,u)$ olur.

Üçgen eşitsizliğinden;

$|u_r^- - w_r^-| \leq |u_r^- - v_r^-| + |v_r^- - w_r^-| \leq D_\infty\ (u,v) + D_\infty\ (v,w)$

ve

$|u_r^+ - w_r^+| \leq |u_r^+ - v_r^+| + |v_r^+ - w_r^+| \leq D_\infty\ (u,v) + D_\infty\ (v,w)$

elde edilir.

Sonuç olarak $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ bir metriktir.

ii) $D_\infty\ (u,v) = \sup \max_{r\in[0,1]}\{\ |u_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - v_r^+|\ \}$

$$= \sup \max_{r\in[0,1]}\{\ |u_r^- + w_r^- - v_r^- - w_r^-|,\ |u_r^+ + w_r^+ - v_r^+ - w_r^+|$$

$$= D_\infty\ (u+v, v+w)$$

iii) $D_\infty\ (ku, kv) = \sup\limits_{r\in[0,1]} \max\ \{\ |ku_r^- - kv_r^-|, |ku_r^+ + kv_r^+| = |k|\ D_\infty\ (u,v)$

iv) Üçgen eşitsizliğini kullanarak;

$D_\infty\ (u+v, w+e) \leq D_\infty\ (u+v, w+v) + D_\infty\ (w+v, w+e)$

$= D_\infty\ (u,w) + D_\infty\ (v,e)$

Not 2.5.1.1 : $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ bir tam metrik uzaydır ve bu uzayda kapalı birim yuvar kompakt değildir. (Bede, 2013)

2.5.2. Bulanık sayıların normu

Bulanık sayıların normunu $\|u\|_{\mathcal{F}} = D_{\infty}\ (u, 0)$, $\forall\, u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ile gösterelim. Bulanık norm, gerçek anlamda norm olmadığı halde klasik normun özelliklerini sağlar. Bu bilinen anlamda norm değildir, çünkü $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bir vektör uzayı değildir.

Önerme 2.5.2.1: $\|.\|_{\mathcal{F}}$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\|u\|_{\mathcal{F}} = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ii) $\|\lambda u\|_{\mathcal{F}} = |\lambda| \cdot \|u\|_{\mathcal{F}},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

iii) $\|u + v\|_{\mathcal{F}} \leq \|u\|_{\mathcal{F}} + \|v\|_{\mathcal{F}}, \forall\, u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

iv) $|\ \|u\|_{\mathcal{F}} - \|v\|_{\mathcal{F}}\ | \leq D_{\infty}\ (u, v), \forall\, u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

v) Her a ve b (aynı işaretli) için ve $\forall\, u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ için

$D_{\infty}\ (\ au, bu\ ) = |b - a| \cdot \|u\|_{\mathcal{F}}$

vi) $D_{\infty}\ (u, v) = \|u \ominus_{gH}\ v\|_{\mathcal{F}}$

Not 2.5.2.1: Limit kavramı, bir dizinin $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$'de yakınsaklığı ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonunun sürekliliği, $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_{\infty}\ )$ metrik uzayında ele alınacaktır.

Örneğin; bir x_0 noktasında bulanık değerli bir fonksiyonun sürekliliği $\forall$ ε>0, $\exists$ δ>0 için $D_{\infty}\ (\ f(x), f(x_0)\ ) < \varepsilon$, $|x - x_0| < \delta$ olur.

Hausdorff uzaklığının tanımından

$\sup\limits_{r\,\in[0,1]} \max\ \{\ |f_r^-(\mathrm{x}) - f_r^-(x_0)|,\ |f_r^+(x) - f_r^+(x_0)|\ \ \} < \varepsilon$ yazılır. Buradan

$|f_r^{\pm}(x) - f_r^{\pm}(x_0)| < \varepsilon, \forall\, r \in [0,1]$ elde edilir.

Bu gösterir ki $\{\ f_r^{\pm} : r \in [0,1]\}$ ailesi eş süreklidir. Buradan da bu fonksiyonların sürekli olduğu sonucu çıkarılır.

Tanım 2.5.2.1: Aşağıdaki özellikler sağlandığında $(\ X, +, \cdot, d\ )$ bulanık sayı tipli uzaydır.

(FN-tipli uzay)

i) (X, d) bir metrik uzay (tam veya değil) ve d, önerme 2.5.1.1 deki özellikleri sağlar.

ii) $+, \cdot$ işlemleri X üzerinde aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) $u + v = v + u,\ u + (v + w) = (u + v) + w,$

b) Her $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b \geq 0$ ve her $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ $(a + b) \cdot u = (a \cdot u) + (b \cdot u),$

c) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ için $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v,$

d) Her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ için $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda(\mu \cdot u).$

iii) X de yoğun olmayan bir $Y \subset X$ (+ ve $\cdot$'ya göre) alt uzayı vardır öyle ki, hiçbir

$u \in X/Y$, X'de ters elemana sahip değildir.

Açıktır ki (($\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, D_∞), FN-tipli uzaydır. (Bede, 2013)

Sürekli fonksiyonlar için düzgün uzaklık $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$D\ (f, g) = sup\ \{\ D_\infty\ (f(x), g(x)) : x \in [a, b]\ \}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Bu durumda,

$(C[a, b], D)$, FN-tipli uzaydır. Çünkü ($\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, D) tam metrik uzay olduğundan

$(C([a, b]; \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, D) de tam metrik uzay olduğu kolaylıkla ispatlanabilir.

$(C([a, b]; \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, D) toplama ve skalerle çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlarız:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ özellikleri sağlanır.

Ayrıca

$0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, 0(t) = 0$, her $t \in [a, b]$ için,

$\|f\|_{\mathcal{F}} = \sup\ \{\ D\ (0, f(x)) : x \in [a, b]\ \}$ olur. (Bede, 2013)

2.5.3. Bulanık sayı değerli fonksiyonların integrali

Kolayca görülebilir ki bulanık sayı değerli fonksiyonların integrallerinin tanımları ciddi problemlere yol açmaz. Aşağıda Aumann ve Riemann integralleri tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.3.1: eğer $r \in [0,1]$ için $[f(x)]_r$ seviye kümesi ölçülebilirse,

$f: [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tasviri güçlü ölçülebilir olarak adlandırılır. Buradaki ölçülebilirlik Borel ölçülebilirliğidir.

Eğer $h: [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ integrallenebilir fonksiyonu varsa öyle ki;

$$\|f(t)\|_{\mathcal{F}} \leq h(t), \ \forall t \in [a,b],$$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tasviri sınırlı integrallenebilir olarak isimlendirilir,

Güçlü ölçülebilir ve sınırlı ölçülebilir bulanık değerli fonksiyon integrallenebilir olarak adlandırılır.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonunun bulanık Aumann integrali

$$[(FA)\int_a^b f(x)dx]^r = \int_a^b [f(x)]^r dx, r \in [0,1]$$

eşitliği ile tanımlanır.(Diamond ve Kloeden, 2000)

Tanım 2.5.3.2: $f: [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ $[a,b] \subset \mathbb{R}$ fonksiyonu Riemann integrallenebilir olarak adlandırılır, eğer aşağıdaki özellikleri sağlayan $I \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ varsa:

$\forall \ \varepsilon > 0 \ ve \ \exists \delta > 0$ vardır öyle ki; [a,b]'nin her bölüntüsü için

$d: a = x_0 < \cdots < x_n = b$ ve norm $v(d) < \delta$ ve her ξ_i noktası için $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, i=0,1,…,n-1

$$D_\infty \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_{i)}, I\right) < \varepsilon$$

O zaman $I = (FR)\int_a^b f(x)dx$ ile simgelenen integrali bulanık Riemann integrali olarak adlandırırız.(Gal, 2000)

2.5.4. Bulanık sayı değerli fonksiyonların diferansiyellenebilirliği

Hukuhara Diferansiyellenebilirliği

Tanım 2.5.4.1: $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonu yeterince küçük $h > 0$ için $f(x+h) \ominus f(x)$ ve $f(x) \ominus f(x+h)$ var ve $f'(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,mevcut öyle ki

$$lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \ominus f(x)}{h} = lim_{h\to 0} \frac{f(x) \ominus f(x+h)}{h} = f'(x)$$

oluyorsa $f'(x)$'e f'in x noktasında Hukuhara türevi denir. (Hukuhara, 1967)

Tanım 2.5.4.2: $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bulanık fonksiyonunun Seikkala türevi

$$[f'(x)]_r = [\left(f_r^-(x)\right)', \left(f_r^+(x)\right)'],\ 0 \leq r \leq 1$$

olarak tanımlanır. (Bede, 2013)

Not 2.5.4.1: Kabul edelim ki, $f_r^-(x)$ ve $f_r^+(x)$ fonksiyonları x'e göre sürekli diferansiyellenebilir, $r \in [0,1]$'e göre düzgün diferansiyellenebilir olsun. O zaman f'nin Hukuhara diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart Seikkala diferansiyellenebilir olmasıdır.

Gerçekten eğer; f, Hukuhara diferansiyellenebilirse;

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \ominus f(x)}{h} = [\lim_{h\to 0} \frac{f_r^-(x+h) - f_r^-(x)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{f_r^+(x+h) - f_r^+(x)}{h}]$$

Bu, f'nin Seikkala diferansiyellenebilir olduğunu gösterir.

Eğer f, Seikkala diferansiyellenebilir ise $f_r^+(x) - f_r^-(x) \geq 0$, olması durumu $f(x+h) \ominus f(x)$ Hukuhara farkının mevcudiyetini gerektirir ve $h \to 0$ için limit alırsak Hukuhara diferansiyelini elde ederiz.

Örnek 2.5.4.1:

i) $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ üçgensel değerli fonksiyon, eğer f Hukuhara diferansiyellenebilir ve x, y, z reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise o zaman $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ bir üçgensel bulanık sayıdır.

ii) $f(t) = (-e^t, 0, e^t)$ olsun. Fakat $f'(t) = (-e^t, 0, e^t)$ olduğundan hem

$f'\ (t) = f(t)$ hem de $f'\ (t) = -f(t)$ çelişkisi vardır.

iii) $f\ (t)\ =\ (1,2,3)\ e^{-t}$ olsun. $f'\ \ (t) = (\,-e^{-t}\,,\ -2\,e^{-t}\,,\ -3e^{-t}\ )$ bulanık sayı değildir. Bu örnekten de görülebileceği gibi her Seikkala diferansiyellenebilen bulanık değerli fonksiyonun Hukuhara türevi olmayabilir ama her Hukuhara türevlenebilir fonksiyonun Seikkala türevi vardır.

Genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik

Tanım 2.5.4.3: $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. f, x_0'da kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilir deriz, eğer $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ varsa öyle ki;

i) Her yeterince küçük h >0 için $\exists\ f\ (x_0 +\ h)\ \ominus\ f(x_0)$ ve $f(\,x_0\,)\ \ominus\ f(\,x_0 - h)$ve D metriğinde limitler

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\,(x_0 + h)\ \ominus\ f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)\ \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

ii) Her yeterince küçük h>0 için, $\exists f(\,x_0)\ \ominus\ f(\,x_0 + h\,), f(\,x_0 - h\,)\ \ominus\ f(x_0)$ farkları var ve limitler

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) \ominus f(\,x_0 + h)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0)$$

iii) her yeterince küçük $h > 0$ için $\exists f\ (x_0 + h)\ \ominus\ f(x_0), f\ (\,x_0 - h\,)\ \ominus\ f(x_0)$ farkları var ve limitler

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{(-h)} = f'\ (x_0)$$

iv)her yeterince küçük $h > 0$ için $\exists\ f(x_0)\ \ominus f(x_0 + h)\ ve\ f(x_0)\ \ominus f(x_0 - h)$ farkları var ve

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) \text{ olur.}$$

Paydadaki h ve $-h$, sırasıyla $\frac{1}{h}$ ve $-\frac{1}{h}$' ı ifade eder. (Bede ve Gal, 2010)

Önerme 2.5.4.1: Eğer $u(t)\ =\ (x(t), y(t), z(t))$ üçgensel bulanık değerli fonksiyon olsun. O zaman

i) u (i)-diferansiyellenebilir (Hukuhara diferansiyellenebilir) ise o zaman $u' = (x', y', z')$ olur.

ii) eğer u (ii)-diferansiyellenebilir ise o zaman $u' = (z', y', x')$ olur. (Bede, 2013)

İspat: ii) $u(t) \ominus u(t+h)$ H-farkları var olsun. O zaman;

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(t) \ominus u(t+h)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x(t) - x(t+h), y(t) - y(t+h), z(t) - z(t+h))}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{z(t+h) - z(t)}{-h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{-h}, \frac{x(t+h) - x(t)}{-h} \right)$$

$$= (z', y', x')$$

Benzer şekilde $\lim_{h\to 0} \frac{u(t-h) - u(t)}{-h} = (z', y', x')$ olur.

Tanım 2.5.4.4: $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonunun gH-türevi

$$f'_{gH} = \lim_{h\to\infty} \frac{f(x+h) \ominus \text{gH } f(x)}{h}$$

$$= [\, \min \{ (f^-)'(x), f^+)'(x) \},\ \max \{ (f^-)'(x), f^+)'(x) \}]$$

olur.

Tanım 2.5.4.5: $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonunun g-türevi

$[f'_g(\text{x})]_r = [\, \inf_{\beta \geq r} \min\{ (f_\beta^-)'(x),\ (f_\beta^+)'(x) \}, \sup_{\beta \geq r} \max\{ (f_\beta^-)'(x),\ (f_\beta^+)'(x) \}]$ olur.

Örnek 2.5.4.2.: $f : [-2,2] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bulanık değerli fonksiyonunu düşünürsek $f(x) = \left(\frac{x^3}{3}, \frac{x^3}{3} + x + 3, \frac{2x^3}{3} + 4 \right)$

$f_r^-(x) = \frac{x^3}{3} + r(x+3)$, $f_r^+(x) = (2-r)\,x^2 + xr + 4 - r$ ile seviye kümesi belirlenir.

$(f_r^-)'(x) = x^2 + r$

$(f_r^+)'(x)$= $(2 - r)\, x^2 + r$

$[\,-2,-1]$ ve $[\,1,2]$ aralıklarında fonksiyon gH-diferansiyellenebilirdir aynı zamanda Hukuhara diferansiyellenebilirdir. $[\,-1,1]$ aralığında gH-diferansiyellenebilir değildir ama g-diferansiyellenebilirdir. (Bede, 2013)

Örnek 2.5.4.3: $f(x) = (1,2,3,5) \cdot sinx$ fonksiyonunun Hukuhara türevini bulalım:

$f(x) = (\, sinx, 2sinx, 3sinx, 5sinx)$

f_r^- (x) = $sinx + rsinx$

f_r^+ (x) = $5sinx - r \cdot 2sinx$

Bunların türevini alırsak

$(f_r^-)'(x)$ =$cosx - rcosx = (1-r)\, cosx$

$(f_r^+)'(x)$= $5cosx - 2rcosx = (5-2r)cosx$ olduğundan

$[f_H'(x)] = [(1-r)\, cosx, (5-2r)cosx\,]$ olur.

2.6. Birinci Mertebeden Bulanık Diferansiyel Denklemler

2.6.1. Hukuhara diferansiyellenebilirliği ile bulanık diferansiyel denklem çözümü

x' = $f(t,x),\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bulanık başlangıç değer problemini Hukuhara diferansiyellenebilirliği altında düşüneceğiz. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki yardımcı önerme bulanık diferansiyel denklemi integral denkleme dönüştürür. Buradaki diferansiyellenebilirlik Hukuhara diferansiyellenebilirliğidir. Bulanık diferansiyel denklem Hukuhara türevi kullanılarak yazılmaktadır.

Yardımcı Önerme 2.6.1.1:$t_0 \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli olmak üzere aşağıdaki bulanık diferansiyel denklem

x' = $f(t,x),\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},\ [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde

$x(t)$= $x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)$ds integral denklemine denktir,(Bede, 2013)

İspat: x, x'= $f(t,x),\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ‘nin bir çözümü olsun.

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds$$

$x(t) \ominus x_0 = \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds$

Karşıt olarak integral denklemin x çözümü için

$x(t+h) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds$

ve

$\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)\ominus x(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} f\big(s, x(s)\big)ds$

Buradan görülüyor ki

D [$\int_{t}^{t+h} f(s, x(s)ds, h \cdot f\big(t, x(t)\big)$]

= D [$\int_{t}^{t+h} f\big(s, x(s)\big)ds, \int_{t}^{t+h} f\big(t, x(t)\big)ds$

$\leq \int_{t}^{t+h} D\Big(f\big(s, x(s)\big), f\big(t, x(t)\big)\Big)\, ds$

$\leq \int_{t}^{t+h} w\big(f\big(t, x(t)\big), h\big)ds = h \cdot w(f\big(t, x(t)\big), h)$

$w(f(\,t, x(t)), h\,), f\ (t, x(t))$ fonksiyonunun sürekli modülünü simgelemek üzere ($f(t, x(t))$ sürekli, $t\ \in\ [t_0, t_1]$)

O zaman

$\lim_{h\to 0} D\ (\frac{x(t+h)\ominus x(t)}{h}, f(t, x(t))$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ h\ \cdot w\big(f\big(t, x(t)\big), h\big) = 0$ olur ve bu gösterir ki

x, $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bulanık başlangıç değer probleminin çözümüdür.

Yardımcı Önerme 2.6.1.2: $R_0 = [\,t_0, t_0 + p\,] \times \bar{B}\,(x_0, q)$ ve

$f : R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli ve aşağıdaki Lipschitz şartını sağladığını varsayalım.

$\forall\ (t,x),(t,y)\ \in R_0$ için $\exists\ L > 0$ öyle ki;

$D(\ f(t,x), f(t,y)\ )\ \leq L\ \cdot D(x,y),$

Bu durumda f sınırlıdır. Yani $D(\ f(t,x), 0\ )\ \leq\ M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır.(Lupulescu, 2000)

***İspat*:** $D(\ f\ (\ t,x), 0\ )\ \leq\ D(\ f(t,x), f(t,x_0\ ))\ +\ D\ (\ f\ (t,x_0), 0\ )$ yazılabileceğini biliyoruz.

$t\ \in\ [\ t_0, t_0 + p\ ]$ için

reel fonksiyon $D\ (\ f(t,x_0), 0\ )$ sınırlıdır, yani;

$D\ (\ f(t,x_0), 0)\ \leq\ M_1$ olacak şekilde bir M_1vardır. Buradan

$D\ (\ f(t,x), 0\ )\ \leq\ L \cdot\ D\ (x,x_0)\ +\ M_1\ \leq\ Lq\ +\ M_1\ =\ M$ olduğundan f snırlıdır.

Teorem 2.6.1.1: Kabul eldim ki $R_0\ =\ [\ t_0, t_0\ +\ p\ ]\ \times\ \bar{B}\ (x_0, p\ ),\ p > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $f: R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli olsun ve aşağıdaki Lipschitz şartı sağlansın. (Burada $\bar{B}\ (x_0, p\ )$, x_0 merkezli p yarıçaplı yuvarı temsil eder.)

$D(\ f(t,x), f(t,y)\ ) \leq \mathrm{L} \cdot\ D(\ x,y)$, $\forall\ (t,x),(t,y) \in R_0$ olacak şekilde bir $\mathrm{L} > 0$ sabiti var olsun.

O zaman bulanık başlangıç değer problemi $x'(t)\ =\ f(t,x)$, $x(t_0)\ =\ x_0$, $[t_0,\ t_0 + \mathrm{k}\ ]$, $\mathrm{k} > 0$ aralığında tek çözüme sahiptir. (Wu ve ark., 1996)

İspat: $K_0 =\ C\ (\ [\ t_0, t_0 + p\ ]\ ,\ \mathbb{R}_{\mathcal{F}}\ )$ olsun ve $P\colon\ K_0 \to K_0$ operatörünü şöyle tanımlayalım:

$P(x_0)(t) =\ x_0$

$P(x)(t)\ =\ x_0\ +\ \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big) ds$

P'nin iyi tanımlı olduğunu görmek kolaydır. 2.6.1.2 yardımcı önermesinden ve Lipschitz şartından, f sınırlıdır ve ayrıca P sınırlıdır. Şöyle ki yardımcı önerme 2.6.1.2'den

$D\ (\ P(x)(t), x_0)\ \leq\ \int_{t_0}^{t} D\big(\ f\big(s, x(s)\big), 0\big) ds\ \leq\ M\ (t - t_0)$

Burada M= $\sup_{(t,x)\in R_0} D(f(t,x),0)$'dir.

Kabul edelim ki $d = \min\{ p, \frac{q}{M} \}$ ve $K_1 = C([t_0, t_0 + d], \bar{B}(x_0, q))$ olsun.

$P: K_1 \to C([t_0, t_0 + d], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ olsun. $D(p(x)(t), x_0) \leq q$ ve verilen $x \in K_1$ için $P(x) \in K_1$'dir. Bir tam metrik uzayın kapalı bir alt kümesi olduğundan K_1 bir tam metrik uzaydır.

P'nin bir büzüşme olduğunu ispatlayalım:

$$D(P(x)(t), P(y)(t)) \leq \int_{t_0}^{t} D(f(s,x(s)), f(s,y(s)))ds \leq 2L(t - t_0) D(x,y)$$

$k = min\{d, \frac{1}{2L}\}$ seçelim ve $K_2 = C\left([t_0, t_0 + k], \bar{B}(x_0, q)\right)$ olmak üzere P tasvirini

$P: K_2 \to K_2$ biçiminde sınırlayalım. Bu durumda P'nin bir büzüşme olduğunu elde ederiz. Banach sabit nokta teoreminden bir $x^* \in K_2$ vardır, öyle ki $P(x^*) = x^*$, burada x^* integral denklemin çözümüdür. Son olarak yardımcı önerme 2.6.1.1'den x^*, $[t_0, t_0 + k]$ üzerinde $x'(t) = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ bulanık başlangıç değer probleminin de çözümüdür. Banach sabit nokta teoreminin sonucu olarak, sabit nokta P'nin tekliği sonucu çıkarılır.

Teorem 2.6.2.2: $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \bar{B}(x_0, p)$, $p > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $f: R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli olsun. Öyle ki

$f(t,x)_r = [f_r^-(t, x_r^-, x_r^+), f_r^+(t, x_r^-, x_r^+)], r \in [0,1]$,

Eğer $f_r^-(t, x_r^-, x_r^+), f_r^+(t, x_r^-, x_r^+)$, $r \in [0,1]$ eş sürekliyse (Yani; $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ öyle ki $\forall r \in [0,1]$

$\|(t, x_r^-, x_r^+) - (t_0, (x_0)_r^-, (x_0)_r^+)\| < \delta$ olduğunda

$|f_r^-(t, x_r^-, x_r^+) - f_r^+(t, x_r^-, x_r^+)| < \varepsilon$ olur.)

ve ikinci ve üçüncü bileşene göre düzgün Lipschitz şartını sağlar; yani,

$\forall (t,x), (t,y) \in R_0$ ve $\forall r \in [0,1]$ için, bir $L > 0$ sabiti vardır öyle ki;

$\left|f_r^{\mp}(t, x_r^-, x_r^+) - f(t, y_r^-, y_r^+)\right| \leq L(|x_r^- - y_r^-| + |x_r^+ - y_r^+|)$, O zaman bulanık başlangıç değer problemi $x'(t) = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, $[t_0, t_0 + \mathrm{k}]$, $k > 0$ aralığında tek çözüme sahiptir.

Ayrıca tek çözümün seviye kümesi $x_r = [\, x_r^-, x_r^+ \,]$,

$$\begin{cases} (x_r^-)' = f_r^-(t, x_r^-, x_r^+) \\ (x_r^+)' = f_r^+(t, x_r^-, x_r^+) \end{cases}, \quad r \in [0,1]$$

adi diferansiyel denklem sistemiyle karakterize edilir. (Bede, 2008)

Örnek 2.6.1.1 : $u' = -u + 2\, e^{-t}(-1,0,1)$, $u(0) = (-1, 0,1)$ bulanık başlangıç değer problemini düşünelim.Teoremin 2.6.1.1'in şartları sağlanır ve önerme 2.5.4.1'den yola çıkarak $u = (x,y,z)$ formunda üçgensel bir çözüm araştıracağız. Denklemi

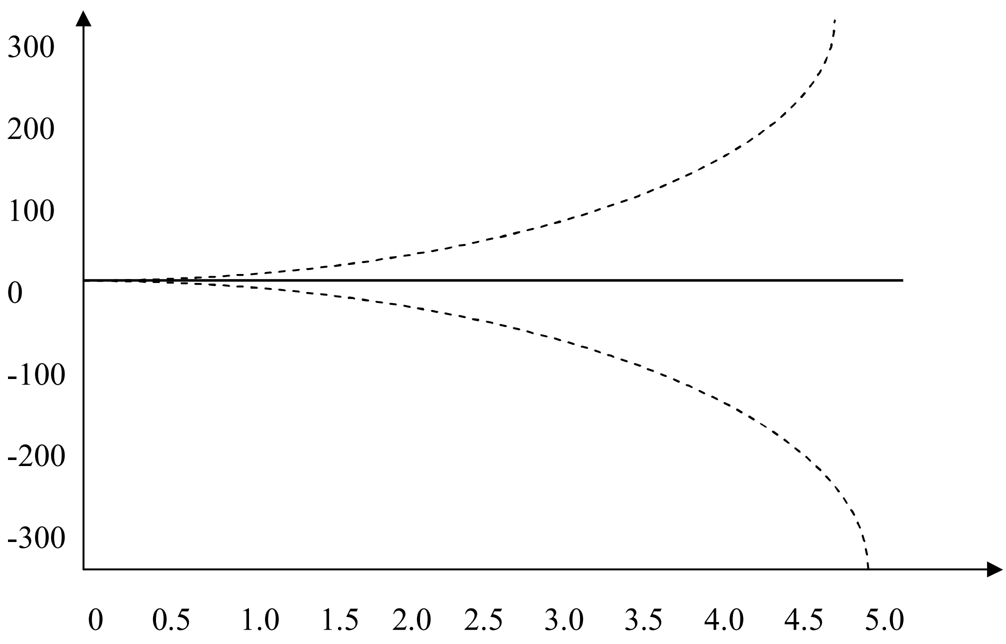
$$\begin{cases} x' = -z - 2e^{-t} \\ \quad y' = -y \\ z' = -x + 2e^{-t} \end{cases}$$

formunda adi diferansiyel denklem sistemine çevirirsek buradan çözüm

$u(t) = (\, e^{-t} - 2e^{t}, 0, 2e^{t} - e^{-t}\,)$, $t \in (0, \infty)$

şeklinde olur.

Çözüme ait grafik aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.6.1.1: Bulanık diferansiyel denklemin Hukuhara çözümü

Örnek 2.6.1.2: $u' - 2e^{-t}(-1,0,1) = -u$, $u(0) = (-1,0,1)$ denklemini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemine dönüşür.

$$\begin{cases} x' - 2e^{-t} = -z \\ y' = -y \\ z' + 2e^{-t} = -x \end{cases}$$

Buradan çözüm olarak $u(t) = (e^{-t}, 0, e^{t})$ elde edilir. Fakat bu durumda

$u(t+h) \ominus u(t)$ ve $u(t) \ominus u(t+h)$ H-farkları mevcut olmayacağından u, H- diferansiyellenebilir olmayacaktır.(Sevim, 2012)

Örnek 2.6.1.3: $u' + u = 2e^{-t}(-1,0,1)$, $u(0) = (-1,0,1)$ biçiminde olsun. O halde denklemin çözümü $u(t) = (-1,0,1)e^{-t}(1+2t)$ biçiminde elde edilir.

t yerine $t+h$ alınırsa $u(t+h) = (-1,0,1)e^{-t-h}(1+2t+2h)$ olacak şekilde elde edilir. $u(t+h) \ominus u(t) = [2he^{-h-t} + (2t+1)e^{-t}(e^{-h} - 1)](-1,0,1)$ H-farkı vardır. Benzer şekilde $u(t) \ominus u(t-h)$ H-farkını da görebiliriz. Böylece $u(t)$ denklemin bir çözümüdür. (Sevim, 2012)

Örnek 2.6.1.4: $u' = -u(2,3,4)$, $u(0) = (-1,0,1)$ bulanık diferansiyel denklemini ele alalım.

$u(t) = ce^{-t(2,3,4)}$, $u(0) = (-1,0,1)$

$u(t) = (c_1 e^{-2t}, c_2 3e^{-3t}, c_3 e^{-4t})$

$u(t) = (-e^{-2t}, 0, e^{-4t})$ olarak özel çözüm elde edilir. t yerine $t+h$ alarak Hukuhara farkını uyguladığımızda $u(t+h) - u(t) = (2e^{-2t}, 0, -4e^{-4t})$olur. Denklemin Hukuhara diferansiyellenebilirliğine sahip olmadığı görülür.

2.6.2. Zadeh genişletme prensibi ile diferansiyel denklem çözümü

Teorem 2.6.2.1: Kabul edelim ki

$f: [t_0, t_0 + p] \times [x_0 - q, x_0 + q] \times \bar{B}(a_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$

(burada $\bar{B}_{\mathbb{R}^n}(a_r, r) = \{ a \in \mathbb{R}^n : \|a - a_0\| \leq r \} \subseteq \mathbb{R}^n$ Öklid normuyla birlikte $\|.\|$ $\mathbb{R}^n$'de kapalı yuvarı simgeler.)

İkinci değişkene göre f'nin Lipschitz olduğunu kabul edelim.

Bir L_1vardır öyle ki $\|f(t,x,a) - f(t,y,a)\| \leq L_1 \|x-y\|$.

Ayrıca üçüncü değişkene göre f Lipschitz şartını sağlar. Yani;

$\|f(t,x,a) - f(t,y,b)\| \leq L_2 \|a-b\|$ olacak şekilde L_2 vardır. O zaman

$x' = f(t,x,a), x(t_0) = x_0$ başlangıç değer problemi tek çözüme sahiptir.

Ayrıca bu çözüm başlangıç koşuluna ve parametreye göre süreklidir.

(Diamond ve Kloeden, 2000)

Tanım 2.6.2.1: $A, X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bulanık sayılar ve $\tilde{f}, f$ fonksiyonunun Zadeh genişletmesi olsun. $X' = \tilde{f}\ (t,X,A), X(t_0) = X_0$, $X : [\, t_0, t_0 + p\,] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ çözümüne sahiptir. X ise $x' = f(t,x,a), x(t_0) = x_0$ klasik probleminin çözümü olan

x: $[\, t_0, t_0 + p\,] \rightarrow \mathbb{R}$ 'nin Zadeh genişlemesidir. (Bede, 2013)

Teorem 2.6.2.2: f: $[t_0, t_0 + p\,] \times [\, x_0 - q, x_0 + q\,] \times \bar{B}\,(a_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

f'nin ikinci ve üçüncü bileşenlere göre Lipschitz olduğunu kabul edelim. Yani;

Bir $L_1 > 0$ vardır öyle ki $\|f(t,x,a) - f(t,y,a)\| \leq L_1 \|x-y\|$ ve

$\|f(t,x,a) - f(t,y,b)\| \leq L_2 \|a-b\|$ olacak şekilde $L_2 > 0$ vardır. O zaman

$X' = \tilde{f}\ (t,X,A), X(t_0) = X_0$; iyi tanımlı ve süreklidir. Ayrıca X'in seviye kümeleri

$X_r = x(t,(X_0)_r, A_r) = \{x(t,x_0,a) : x_0 \in (x_0)_r, a \in A_r\}$, $x(t,x_0,a)$,

$x' = f\ (t,x,a)\ x(t_0) = x_0$ klasik probleminin tek çözümüdür. (Bede, 2013)

İspat: Teorem 2.6.2.1'e göre, $x' = f(\,t,x,a), x(t_0) = x_0$ problemi tek çözüme sahiptir. Teorem 2.4.2.2 'den $x\ (t,x_0,a\,)$'nin Zadeh genişletmesi tektir, iyi tanımlıdır ve süreklidir. Bunu $X(\,t,x_0,A\,)$ ile simgeleyelim, Ayrıca Teorem 2.4.2.2'den $r \in [0,1]$ olmak üzere seviye kümesi

$X_r = x(\,t,(x_0)_r, A_r\,) = \{x(t,x_0,a) : x_0 \in X_0, a \in A\}$ olur.

Örnek 2.6.2.1: $\begin{cases} x' = -(1,2,3).x \\ x(0) = (1,2,3) \end{cases}$ bulanık başlangıç değer problemini ele alalım.

Genişletme prensibini kullanarak bu problemi

$\begin{cases} x' = -a.x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ başlangıç değer problemine dönüştürdüğümüzde çözüm

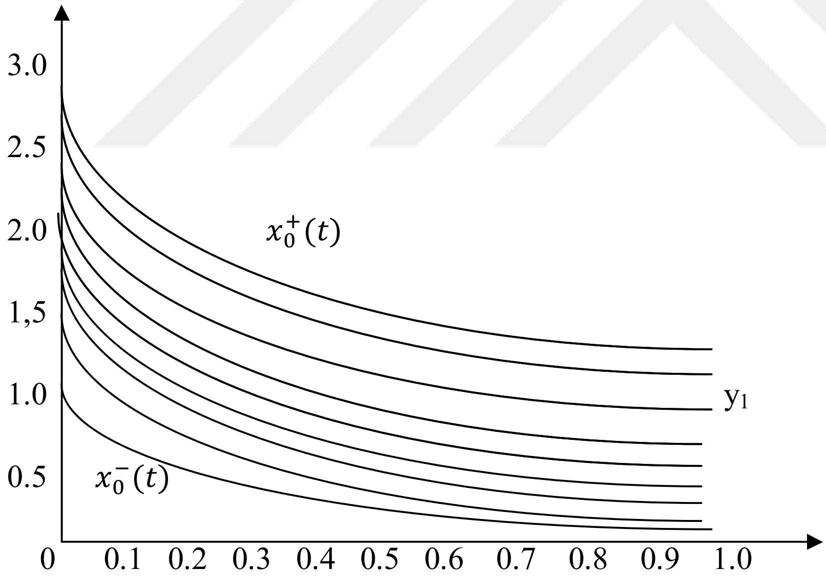
$x(t) = x_0 e^{-at}$ olur.

Zadeh genişletme prensibiyle bulanık çözümü $x(t)$ = (1,2,3) $e^{-(1,2,3)t}$ olarak elde ederiz.

Seviye kümelerini yazacak olursak

$x(t)_r^- = (1 + r)\ e^{-(3-r)t}$

$x(t)_r^+ = (3 - r)\ e^{-(1+r)t}$ şeklinde elde ederiz.



Şekil 2.6.2.1: Bir bulanık diferansiyel denklemin Zadeh genişletmesine dayalı çözümü

Örnek 2.6.2.2: $p_1 = (1,2,4)$ ve $p_2 = (1,3,4)$ iki üçgensel bulanık sayı olmak üzere

$\begin{cases} y' = p_2 xy \\ y(0) = p_1 \end{cases}$

Bulanık diferansiyel denklemini çözünüz.

Zadeh Genişletme Prensibiyle denklemin çözümü $y= (1,2,4). e^{(1,3,4)\frac{x^2}{2}}$

olarak bulunur. Seviye kümesi ile yazacak olursak

$p_1= [\, r, 4-2r \,]$

$p_2= [\, 2r+1, r+4 \,]$ olur.

Sonuç olarak;

$y(x)^- = r. e^{(2r+1)\frac{x^2}{2}}$

$y(x)^+ = (4-2r)\, e^{(r+4)\frac{x^2}{2}}$ olur.

2.6.3. Güçlü genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik altında diferansiyel denklemler

Yardımcı Önerme 2.6.3.1: $x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. Öyle ki $x_r = [\, x_r^-, x_r^+], r \in [0,1]$ fonksiyonları diferansiyellenebilir, x^- artan, x^+ azalandır, her α ∈ [0,1] için $(x_\alpha^-)' \geq c_1$ ve $(x_\alpha^+)' \leq c_2$ olacak şekilde $c_1 > 0$ ve $c_2 < 0$ sabitleri vardır.

$f: [\, a, b \,] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, t'ye göre sürekli olsun. f_α^-(t) ve f_α^+(t) seviye kümeleri,

$\alpha \in [\, 0,1 \,]$ ve $t \in [$ a,b $]$'ye göre $\frac{\partial f_\alpha^-(t)}{\partial \alpha}$ ve $\frac{\partial f_\alpha^+(t)}{\partial \alpha}$ sınırlı kısmi türevlere sahip olsun.

Eğer

a) $x_1^- < x_1^+$

veya

b) $x_1^- = x_1^+$

ve $[f(s)]_1$'in çekirdeği her $s \in T = [a, b]$ için sadece bir elemandan meydana geliyorsa, o zaman bir h vardır öyle ki; her $t \in [a, h]$ için $h > a$ olacak şekilde

$x \ominus \int_a^t f(s) ds$ H-farkı mevcuttur. (Bede ve Gal, 2010)

İspat: Eğer (u^-- v^-, u^+- v^+) fonksiyonları bulanık sayı belirtirse, iki bulanık sayının H-farkı $u \ominus v$ vardır, Kabul edelim ki $u \ominus v = z$ olsun. Bu, $z + v$=u ifadesini gerektirir ve r- seviye kümeleri

[z_r^-, z_r^+] + [v_r^-, v_r^+] = [u_r^-, u_r^+]

Bir başka deyişle

z_r^-= $u_r^- - v_r^-$

z_α^+= $u_\alpha^+ - v_\alpha^+$, $\alpha \in [0,1]$

Teorem 2.3.1'den $u \ominus v$ vardır, ($u^- - v^-, u^+ - v^+$) bir bulanık sayı tanımlar. Dahası, teorem 2.3.1 'in gerektirdiği sağ ve sol süreklilik sağlanır, $u \ominus v'nin$ varlığı

$v_1^+ - v_1^- \leq u_1^+ - u_1^-$ ifadesine eşit olur. $u^- - v^-$ azalmayan, $u^+ - v^+$ artmayandır.

Bu sebeple;

$x \ominus \int_a^t f(s)ds$ ifadesinin varlığını ispatlamak için

$[\int_a^t f(s)ds]_1^+$ - $[\int_a^t f(s)ds]_1^-$ $\leq$ $x_1^+ - x_1^-$ = çap (x_1)

$x_\alpha^- - [\int_a^t f(s)ds]_\alpha^-$ azalmayan,

$x_\alpha^+ - [\int_a^t f(s)ds]_\alpha^+$ artmayan olduğunu göstermek gerekir.

Ama

$[\int_a^t f(s)ds]_\alpha$ = [$\int_a^t f_\alpha^-$(s)ds, $\int_a^t f_\alpha^+$(s)ds] yukarıdaki şartları sağlar ve

$\int_a^t çap[f(s)]_1$ds $\leq$ çap ($[x]_1$)

$(x_\alpha^-)' - \int_a^t \frac{\partial f_\alpha^-(s)}{\partial \alpha} ds \geq 0, \forall \alpha \in [0,1]$

$(x_\alpha^+)' - \int_a^t \frac{\partial f_\alpha^+(s)}{\partial \alpha} ds \leq 0, \forall \alpha \in [0,1]$'ye eşittir.

f sürekli olduğundan sınırlıdır ve $çap[f(t)]_1$ fonksiyonu da sınırlıdır.

$çap[f(t)]_1 \leq M,\ t \in [a,b]$ olacak şekilde bir M sayısı var olsun.

Ayrıca her zaman $\int_a^t çap[f(s)]_1$ds $\leq M(t-a)$ olur.

Teoremin ifadesindeki a şıkkının varlığını kabul edelim.

O zaman, her $t \in [a, a + çap([x]_1) \ / M]$ olduğunda, $M(t-a) \leq çap([x]_1)$ elde ederiz.

Yukarıdaki eşitsizlikten $\int_a^t çap[f(s)]_1$ds $\leq çap([x]_1)$ kolayca elde edilir.

Kabul edelim ki $M_1, M_2 > 0$ ve $\forall s \in [a,b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$\left|\frac{\partial f_\alpha^-(s)}{\partial \alpha}\right| \leq M_1$ ve $\left|\frac{\partial f_\alpha^+(s)}{\partial \alpha}\right| \leq M_2$olsun.

Her $\alpha \in [0,1]$ için $(x_\alpha^-)' \geq c_1$ olduğundan

$\int_a^t \frac{\partial f_\alpha^-(s)}{\partial \alpha} ds \leq (t-a)M_1 \leq c_1 \leq (x_\alpha^-)'$, $\forall\, t \in [\, a, a + \frac{c_1}{M_1}]$ elde ederiz. Bu ise

Her $\alpha \in [0,1]$ ve $t \in [$ a, a+$\frac{c_1}{M_1}]$ için $x_\alpha^- - \int_a^t f_\alpha^-(s)ds$, α'ya göre azalmayan olmasını gerektirir.

Benzer olarak, her $\alpha \in [0,1]$ için $(x_\alpha^+)' \leq c_2$ olduğundan

$-\int_a^t \frac{\partial f_\alpha^+(s)}{\partial \alpha} \leq (t-a)M_2 \leq |c_2| \leq -(x_\alpha^+)'$ elde ederiz.

O halde $\forall\, t \in [\, a, a + \frac{|c_2|}{M_2}]$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$x_\alpha^+ - \int_t^a f_s^+(s)ds$, α'ya göre artmayandır.

Yukarıdaki sonuçlardan her $t \in [a,h]$ için, $x \ominus \int_a^t f(s)ds$ mevcuttur, Buradan

$$h = min\ \{\frac{c_1}{M_1}, \frac{|c_2|}{M_2}, \frac{çap([x])_1}{M}\} > 0$$

Eğer b şartını kabul edersek bu durumda her $s \in [a,b]$ için $çap(\,[f(s)]_1)\ ) = 0$, ve

her $t \in [a,b]$ için $\int_t^a çap([f(s)]_1)$ds = $çap(\,[x]_1)$= 0,

Diğer iki eşitsizlik her $t \in [a, a+h]$ için yukarıdaki ispata benzer şekilde elde edilir, burada

$h = min\,\{\frac{c_1}{M_1}, \frac{|c_2|}{M_2}\} > 0$ olur ve yardımcı önerme ispatlanır.

Not 2.6.3.1: u bir bulanık sayı olmak üzere $u_r = [\,u_r^-, u_r^+\,]$**,** $r \in [0,1]$ bulanık sayının seviye kümeleri olsun. $u_r^+ - u_r^-$ ifadesine çap denir ve çap(u_r) ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlikle verilen bulanık diferansiyel denklemin çözümlerinin varlık ve tekliğiyle ilişkilidir.

Teorem 2.6.3.1: $R_0 = [\,t_0, t_0 + p\,] \times \bar{B}(x_0, q),\ p, q > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $f: R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli ve aşağıdaki şartlar sağlanır:

i) $D\,(f(t, x, f(t, y)\,) \leq L \cdot D(x, y),\ \forall\,(t, x), (t, y) \in R_0$ olacak şekilde bir $L > 0$ sabiti vardır.

ii) $[f(t,x)]_\alpha = [\,f_\alpha^-(t,x),\ f_\alpha^+(t,x)\,]$, f'nin seviye kümelerinin gösterimi olsun. O zaman

$f_\alpha^-, f_\alpha^+: R_0 \to \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$'e göre sınırlı kısmi türevlere sahip olsun, sınırlar

$(t, x) \in R_0$'dan ve $\alpha \in [0,1]$'den bağımsız.

iii) x_0^- ve x_0^+ fonksiyonları diferansiyellenebilir ve $(x_0)_\alpha^- \geq c_1$ olacak şekilde

$c_1 > 0$ var ve $(x_0)_\alpha^+ \leq c_2$ olacak şekilde $c_2 < 0$ vardır. ayrıca aşağıdaki ihtimaller söz konusudur.

a) $x_1^- < x_1^+$ dir ya da

b) Eğer $x_1^- = x_1^+$

ise o zaman $[\,f(t,x)\,]_1$'in çekirdeği her $(t,x) \in R_0$ için sadece bir elemandan oluşur.

Bu taktirde bulanık başlangıç değer problemi $x'(t) = f(t, x), x(t_0) = x_0$ $k > 0$ için $[t_0, t_0 + k]$ aralığında tanımlı iki çözüme sahiptir. [3]

İspat : Yardımcı önerme 2.6.1.2 ve 2.6.3.1'i kullanacağız. Teorem 2.6.1.1'deki varlık sonucu, Hukuhara diferansiyeline sahip çözümün varlığını garantiler. Burada diğer çözümün varlığını ispatlayacağız.

İlk olarak, (ii) ve (iii) varsayımlarına bakalım. Yardımcı önerme 2.6.3.1

$0 < c \leq p$ için ve her $t \in [t_0, t_0 + c]$ için $x_0 \ominus \left(-\int_{t_0}^{t} F\big(t, x(t)\big)dt \right)$ H-farkının varlığını garantiler.

$R_1 = [t_0, t_0 + c] \times \bar{B}(x_0, q)$, $K_0 = C\left([t_0, t_0 + c], \mathbb{R}_{\mathcal{F}}\right)$ ve

operatör $Q : K_0 \to K_0$

Şimdi

$Q(x_0)(t) = x_0$

$Q(x)(t) = x_0 \ominus \left(\int_{t_0}^{t} F\big(t, x(t)\big)dt \right.$ tanımlayalım.

Q, c'nin seçimiyle birlikte $[t_0, t_0 + c]$ üzerinde iyi tanımlıdır. Yardımcı önerme 2.6.1.2 ve teoremin (i)deki Lipschitz şartından, f sınırlıdır ve

$$D(Q(x)(t), x_0) \leq \int_{t_0}^{t} D\big(f\big(t, x(t)\big), 0\big)dt \leq M(t - t_0),$$

burada, $M = \sup_{(t,x)\in R_1} D(f(t,x), 0)$ dir ve eşitsizlik Yardımcı Önerme 2.6.1.2'ye göre sağlanır.

$d = \min\{ c, \frac{q}{M} \}$ ve $K_1 = C([t_0, t_0 + d], \bar{B}(x_0, q))$ olsun.

O zaman $Q : K_1 \to C([t_0, t_0 + d], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ kısıtlamasıyla $D(Q(x)(t), x_0) \leq q$ elde ederiz. $x \in K_1$ gösterir ki $Q(x) \in K_1$ ve K_1, tam metrik uzayın kapalı bir alt uzayı olduğundan tamdır.

Şimdi Q'nun bir büzüşme olduğunu gösterelim:

$$D\left(Q(x)(t), Q(y)(t)\right) \leq \int_{t_0}^{t} D\Big(f\big(t, x(t)\big), f\big(t, y(t)\big)\Big)dt$$

$$\leq 2L(t - t_0)\, D(x, y)$$

Eğer $k < \min\{ d, \frac{1}{2L} \}$ seçersek, Q bir büzüşme olur. Banach sabit nokta teoremi, Q sabit noktasının varlığını gerektirir. Sonuca varmak için Q'nun sabit noktasının Tanım 2.5.3.1'in (ii) şıkkındaki gibi genelleştirilmiş diferansiyellenebilir olduğunu görebiliriz ve bu sabit nokta her $t \in [t_0, t_0+k]$ için $x'(t) = f(t,x), x(t_0) = x_0$ bulanık başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Teorem 2.6.3.2: Kabul edelim ki $R_0 = [\, t_0, t_0 + p\,]\, x\, \bar{B}\,(\, x_0, q\,), p > 0, x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $\forall\, \alpha \in [0,1]$ için $f: R_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ öyle ki $[f(t,x)]_\alpha = f_\alpha^-(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), f_\alpha^+(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+)]$ olsun ve aşağıdaki ifadeler sağlansın.

(i) $f_\alpha^{\mp}(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+)$ eşsürekli ve ikinci ve üçüncü bileşene göre düzgün Lipschitz olsun, yani; $\forall\, (t,x),(t,y) \in R_0$, $\alpha \in [0,1]$ için

$\left|f_\alpha^{\mp}(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+) - f_\alpha^{\mp}(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+)\right| \leq L\,(|x_\alpha^- - y_\alpha^-| + |x_\alpha^+ - y_\alpha^+|)$ olacak biçimde en az bir $L > 0$ mevcuttur.

(ii) f_α^-, f_α^+**:** $R_0 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $\alpha \in [0,1]$'e göre sınırlı ve kısmi türevlere sahip ve bu sınırlar α ve (t,x)'den bağımsız olsun.

(iii) x_0^- ve x_0^+ fonksiyonları diferansiyellenebilir, her $\alpha \in [0,1]$ için ve $(x_0)_\alpha^- \geq c_1$ için $c_1 > 0$, $(x_0)_\alpha^+ \leq c_2$ için $c_2 < 0$ olsun.

Ayrıca aşağıdaki ihtimalleri düşünelim:

a) $(x_0)_1^- < (x_0)_1^+$

ya da

b) Eğer $(x_0)_1^- = (x_0)_1^+$ ise o zaman $[(t,x,u)]_1$'in çekirdeği her $(t,x) \in R_0$ için sadece bir elemandan oluşur. $[x]_1$ ve $[u]_1$ de sadece bir elemandan oluşur.

Bu taktirde

$x'(t) = f(t,x),\; x(t_0) = x_0$

bulanık başlangıç değer problemi $[t_0, t_0 + k]$ üzerinde aşağıdaki iki adi diferansiyel denklem sisteminin birleşimine eşittir.

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)' = f_\alpha^-(t, x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)) \\ (x_\alpha^+)' = f_\alpha^+(t, x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)) \quad , \quad \alpha \in [0,1] \\ x_\alpha^-(t_0) = (x_0)_\alpha^-, x_\alpha^+(t_0) = (x_0)_\alpha^+ \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)' = f_\alpha^+(t, x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)) \\ (x_\alpha^+)' = f_\alpha^-(t, x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)) \quad , \quad \alpha \in [0,1] \\ x_\alpha^-(t_0) = (x_0)_\alpha^-, x_\alpha^+(t_0) = (x_0)_\alpha^+ \end{cases} \tag{2}$$

(Bede, 2008)

İspat: Teoremin (i) şartı, her sabit $\alpha \in [0,1]$ için (1) ve (2) denklem sistemlerinin tek çözümünün varlığını garanti eder. Bu çözümleri sırasıyla $(x_\alpha^-)^i$, $(x_\alpha^+)^i$, $(x_\alpha^-)^{ii}$ ve $(x_\alpha^+)^{ii}$ ile gösterelim. $f_\alpha^\mp$ 'nin eşsürekliliği, bulanık değerli fonksiyon olan f'nin sürekliliğini garantiler.

f fonksiyonunun (i) kabulünden dolayı standart Lipschitz şartını sağladığını söyleyebiliriz. Tüm bu şartlar bulanık başlangıç değer probleminin x^i ve x^{ii} çözümlerinin varlık ve tekliğini garantiler.

$[x^i]_\alpha$= [$(x^i)_\alpha^-$, $(x^i)_\alpha^+$] ve $[x^{ii}]_\alpha$= [$(x^{ii})_\alpha^-$, $(x^{ii})_\alpha^+$], $\alpha \in [0,1]$ olsun.

Bu taktirde, x^i Hukuhara diferansiyellenebilir olduğundan

$[(x^i)']_\alpha$ = [$((x^i)_\alpha^-)'$, $((x_i)_\alpha^+)'$] yazılır ve $(x^i)_\alpha^-$, $(x^i)_\alpha^+$, (1) sisteminin çözümleridir.

$(x_\alpha^-)^i$, $(x_\alpha^+)^i$ sistemin tek çözümü olduğundan

($(x^i)_\alpha^-$, $(x^i)_\alpha^+$) = ($(x_\alpha^-)^i$, $(x_\alpha^+)^i$), ∀ α ∈ [0,1] elde ederiz.

Benzer nedenle (ii)-diferansiyellenebilir çözüm

[$(x^{ii})']_\alpha$ = [($(x^{ii})_\alpha^+)'$, $((x^{ii})_\alpha^-)'$] eşitliğini sağlar.

Bu yüzden ($(x^{ii})_\alpha^-$, $(x^{ii})_\alpha^+$) = (($x_\alpha^-)^{ii}$, $(x_\alpha^+)^{ii}$), ∀ α ∈ [0,1] olur.

Sonuç olarak başlangıç değer probleminin çözümleri tam olarak (1) ve (2) de verilen sistemlerin çözümleridir.

Teorem 2.6.3.3: Kabul edelim ki R_0= [t_0, t_0 + p] x ($\bar{B}(x_0$, p) ∩ $\mathbb{R}_\mathcal{T}$), $p > 0$,

$x_0 \in \mathbb{R}_\mathcal{T}$ ve $f: R_0 \to \mathbb{R}_\mathcal{T}$ öyle ki;

$f(t,x)$=($f^-(t,x^-,x^1,x^+)$, $f^1(t,x^-,x^1,x^+)$, $f^+(t,x^-,x^1,x^+)$) olsun ve aşağıdaki ifadeler sağlansın:

i) f^{-}, f^{+}, f^{1} sürekli ve iki, üç ve dördüncü bileşenlere göre Lipschitz şartını sağlasın.

ii) $x_0 = (x_0^-, x_0^1, x_0^+)$ trivial olmayan bir üçgensel sayı öyle ki $x_0^- < x_0^1 < x_0^+$

Bu taktirde

(a) Başlangıç değer problemi $x'(t) = f(t,x), x(t_0) = x_0$ $[t_0 , t_0 + k]$ aralığında iki tane üçgensel değerli çözüme sahiptir.

(b) Başlangıç değer problemi aşağıdaki iki adi diferansiyel denkleme eşittir.

$$\begin{cases} (x^-)' = f^-(t, x^-, x^1, x^+) \\ (x^1)' = f^1(t, x^-, x^1, x^+) \\ (x^+)' = f^+(t, x^-, x^1, x^+) \\ x^-(t_0) = x_0^-, \; x^1(t_0) = x_0^1, \; x^+(t_0) = x_0^+ \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} (x^-)' = f^+ (t, x^-, x^1, x^+) \\ (x^1)' = f^1(t, x^-, x^1, x^+) \\ (x^+)' = f^- (t, x^-, x^1, x^+) \\ x^-(t_0) = x_0^-, \; x^1(t_0) = x_0^1, x^+(t_0) = x_0^+ \end{cases} \tag{4}$$

İspat: f üçgensel değerli olduğunda, $x'(t) = f(t,x), x(t_0) = x_0$ çözümlerinin de üçgensel değerli olduğunu görmek kolaydır. (i) ve (ii) şartları bulanık başlangıç değer probleminin lokal olarak iki tek çözümünün olduğunu garantiler. Teorem 6.3.2'deki şartlar sağlanır ve (1) ve (2) problemleri sırasıyla (3) ve (4)'te verilen problemlere karşılık gelir ve ispat tamamlanır. (Bede, 2013)

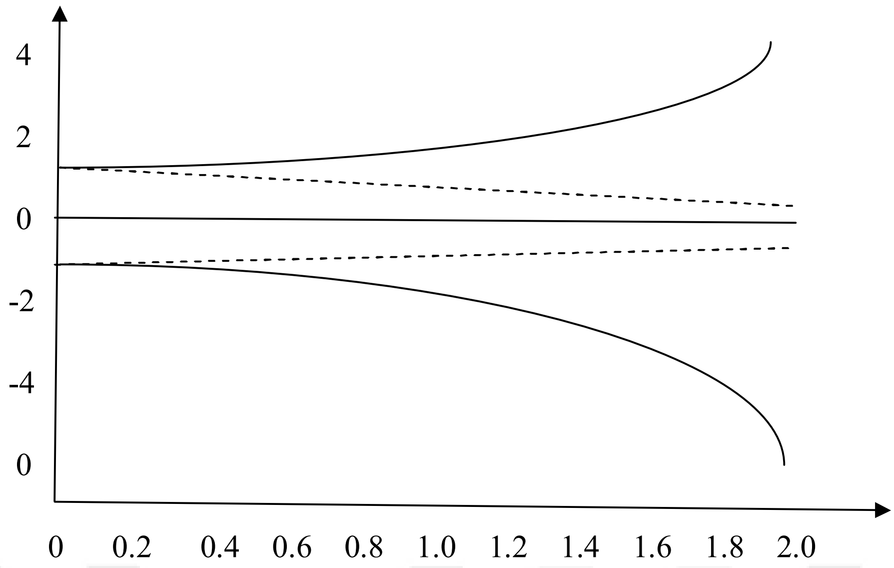
Örnek 2.6.3.1: Homojen denklemle başlayalım.

$x' = -x, \; x(0) = (-1, 0, 1)$

(i)- diferansiyellenebilirliği aslında Hukuhara diferansiyellenebilirliği olduğundan, $x(t) = e^t(-1,0,1)$ çözümü elde edilir.

(ii)-diferansiyellenebilirliği altında $x(t) = e^{-t} (-1,0,1)$ çözümü elde edilir.

İki çözüm aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.6.3.1: Bulanık diferansiyel denklemin iki çözümü

(bütün çizgi (i)- diferansiyellenebilir çözüm, kesikli çizgi (ii)-diferansiyellenebilir çözümü göstermektedir.)

Örnek 2.6.3.2: $x' = -x + e^{-t}(-1, 0, 1)$, $x(0) = (-1, 0, 1)$

Genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik (i) ve (ii) şartları altında (i)-diferansiyellenebilirliğinden

$$\begin{cases} (x_0^-)' = -x_0^+ - e^{-t} \\ x_1' = -x_1 \\ (x_0^+)' = x_0^- + e^{-t} \end{cases}$$

ve $x(t) = (\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t}, 0, \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t})$ çözümü elde edilir.

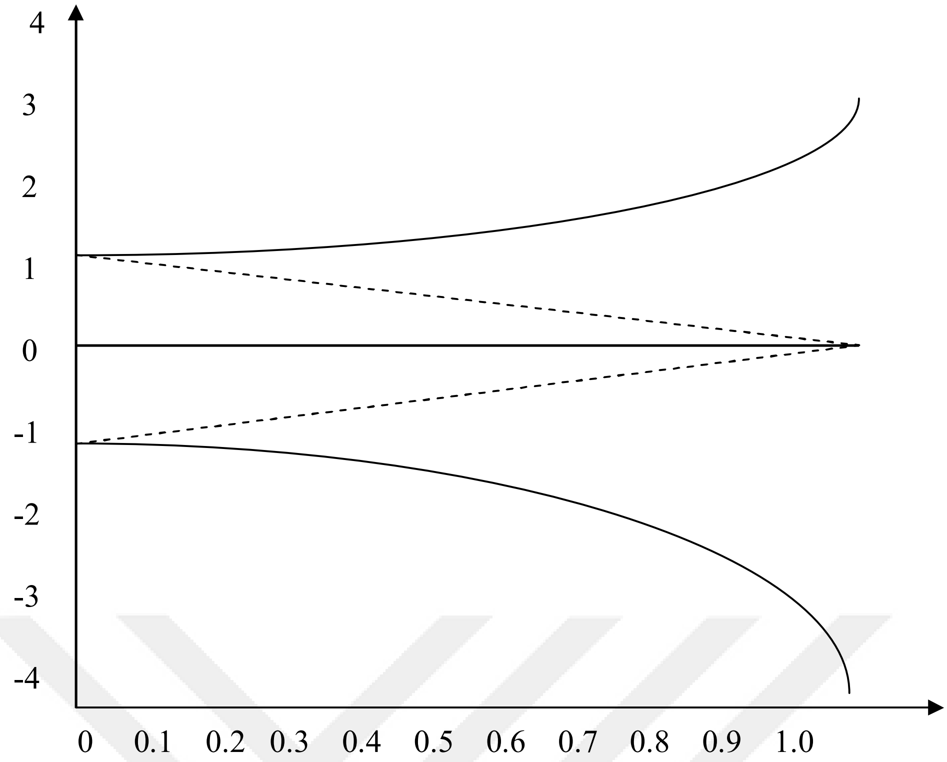
(ii)-diferansiyellenebilirliğinden

$$\begin{cases} (x_0^-)' = -x_0^- + e^{-t} \\ x_1' = -x_1 \\ (x_0^+)' = x_0^+ - e^{-t} \end{cases}$$

ve

$x(t) = e^{-t}(1 - t)(-1, 0, 1)$ çözümünü elde ederiz.

Bu iki çözümün grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.6.3.2: Bulanık diferansiyel denklemin iki çözümü

(bütün çizgi (i)- diferansiyellenebilir çözüm, kesikli çizgi (ii)-diferansiyellenebilir çözümü göstermektedir.)

2.7. Birinci Mertebeden Bulanık Diferansiyel Eşitsizlikler

Aşağıda reel değerli fonksiyonlar için verilen iki önermenin ispatı kolaylıkla yapılabilir.

Yardımcı Önerme 2.7.1: $u \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ ve $M \in \mathbb{R}, M > 0$ öyle ki

$u'(t) + Mu(t) \leq 0, t \in [0,T]$ ve $u(0) \leq 0$ veya $u(0) \leq u(T)$ olsun. Bu taktirde $u(t) \leq 0$ olur.

Yardımcı Önerme 2.7.2: $u \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ ve $M \in \mathbb{R}, M > 0$ öyle ki

$u'(t) + Mu(t) \geq 0, t \in [0,T]$ ve $u(0) \geq 0$ veya $u(0) \geq u(T)$ olsun. Bu taktirde $u(t) \geq 0$ olur.

Tanım 2.7.1: $x, y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. $x \leq y$ olması için gerek ve yeter şart $x_r^- \leq y_r^-$ ve $x_r^+ \leq y_r^+$, $r \in [0,1]$ olmasıdır. (Rodriguez-Lopez, 2007b)

Tanım 2.7.2: $x, y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. $x \preccurlyeq y$ olması için gerek ve yeter şart $x_r^- \geq y_r^-$

ve $x_r^+ \leq y_r^+$, r ∈ [0,1] olmasıdır. Burda $x_r \subseteq y_r$'dir. (Rodriguez-Lopez, 2007b)

Bu iki sıralama arasındaki önemli bir fark; $x \preccurlyeq x_{\{0\}}$ olduğunda $x \prec x_{\{0\}}$ olacak şekilde bir x bulanık sayısı yoktur. Yani; boş olmayan kümeler $x_r \subseteq \{0\}$ olur. O zaman x_r={0}' dır ve $x = x_{\{0\}}$'dır. Ayrıca $x < x_{\{0\}}$ olacak şekilde bulanık sayılar vardır. Örneğin; $x_{\{-1\}}$.

Yardımcı Önerme 2.7.3: Aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $x, y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},\ x = y \Leftrightarrow x \leq y$ ve $x \geq y$

ii) $x, y, z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, x \leq y$ olduğunda $x + z \leq y + z$ olur.

iii) $x, y, z, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},\ x \leq y$ ve $z \leq w$ ise $x + z \leq y + w$

iv) $x, y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, x \leq y$ ve $M \in \mathbb{R},\ M > 0$ ise $Mx \leq My$ olur.

Yardımcı Önerme 2.7.4: Aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $x, y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, x = y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y$ ve $x \succcurlyeq y$

ii) $x, y, z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, x \preccurlyeq y$ olduğunda $x + z \preccurlyeq y + z$ olur.

iii) $x, y, z, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},\ x \preccurlyeq y$ ve $z \preccurlyeq w$ ise $x + z \preccurlyeq y + w$

iv) $x, y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, x \preccurlyeq y$ ve $M \in \mathbb{R},\ M > 0$ ise $Mx \preccurlyeq My$ olur.

Yardımcı Önerme 2.7.5: $T > 0$ ve $f, g \in C([0,T], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ olmak üzere

$f \leq g \Rightarrow \int_0^t f(s)ds \leq \int_0^t g(s)ds,\ t \in [0,T]$

$f \preccurlyeq g \Rightarrow \int_0^t f(s)ds \preccurlyeq \int_0^t g(s)ds,\ t \in [0,T]$ özellikleri sağlanır.

(Diamond ve Kloeden, 1994)

Teorem 2.7.1: $u \in C^1([0,\mathrm{T}], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ ve $M \in \mathbb{R}, M > 0$

(i) $u'(t) + Mu(t) \geq X_{\{0\}},\ t \in [0,T]$ ve $u(0) \geq X_{\{0\}}$ ise, o zaman $u(t) \geq X_{\{0\}}$ olur.

(ii) $u'(t) + Mu(t) \leq X_{\{0\}}$, $t \in [0, T]$ ve $u(0) \leq X_{\{0\}}$ ise, o zaman $u(t) \leq X_{\{0\}}$ olur.

Benzer sonuçlar $\preccurlyeq$ ve $\succcurlyeq$ için de geçerlidir.(Rodriguez-Lopez, 2007b)

İspat: $[u(t)]_r$= $[u_r^-(t), u_r^+(t)$, $r \in$ [0,1] ise o zaman u_r^- ve u_r^+ $C^1([0,T], \mathbb{R})$'de fonksiyonlardır.

(i) ve $\geq$ eşitsizliğini düşünelim. Her $r \in [0,1]$ için

$(u_r^-)'$(t) + M$u_r^-(t) \geq 0$, $(u_r^+)'$(t) + Mu_r^+(t) ≥ 0, $t \in [0, T]$ ve

$u_r^-(0) \geq 0, u_r^+(0) \geq 0$ ise 7.2.Yardımcı Önermeden $u_r^-(t) \geq 0, u_r^+(t) \geq 0$ olur ve $u(t) \geq x_{\{0\}}$'dır.

$\succcurlyeq$ için seviye kümesinin sol sınırı farklı davranış gösterir.

$(u_r^-)'$ + M $u_r^- \leq 0, t \in [0, T]$, $u_r^-(0) \leq 0$, 2.7.1.Yardımcı Önermeden $u_r^- \leq 0$ olur.

Bu yüzden $u(t) \succcurlyeq x_{\{0\}}$'dir.

(ii)'nin ispatı benzer şekilde elde edilebilir.

Teorem 2.7.2: $u \in C^1([0,T], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ ve $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ öyle ki

u'(t) + $Mu(t) \geq X_{\{0\}}$ $t \in [0, T]$ ve $u(0) \geq u(T)$ ise o zaman $u(t) \geq X_{\{0\}}$ olur. Benzer şekilde $\succcurlyeq$ için de geçerlidir.(Rodriguez-Lopez, 2007b)

İspat: Teorem 2.7.1'in ispatının benzerini kullanarak, $C^1([0,T], \mathbb{R})$'ye ait olan u_r^-, u_r^+ fonksiyonlarını ve

her $r \in [0,1]$ için $\geq$ eşitsizliğini düşünelim. $(u_r^-)'$(t) + Mu_r^-(t) ≥ 0,

$(u_r^+)'$(t) + Mu_r^+(t) ≥ 0 ve $u_r^-(0) \geq u_r^-(T), u_r^+(0) \geq u_r^+(T)$ olduğundan

ve 2.7.2.Yardımcı Önermeden her $r \in [0,1]$ ve $t \in [0, T]$ için

u_r^-(t) ≥ 0, u_r^+(t) ≥ 0 elde ederiz.

Bu da $u(t) \geq X_{\{0\}}$ olmasını sağlar.

$\succcurlyeq$ için ve seviye kümesinin u_r^- sol sınırı için

$(u_r^-)'$(t) + M $u_r^- \leq 0$, $u_r^-(0) \leq u_r^-$(T) ve 2.7.1.Yardımcı Önermeyi uygulayarak

$u_r^- \leq 0$ elde edilir, bu yüzden $u(t) \succcurlyeq X_{\{0\}}$ olur.

Not 2.7.1: Eğer $u(0) \geq u(T)$ ise o zaman u_r^- (T) $\leq u_r^-(0)$ ve u_r^+(T) $\leq u_r^+(0)$ olur. Bu yüzden her seviye kümesinin çapı çap($[u(t)]_r$) = $u_r^+(t) - u_r^-(t)$ t değişkenine göre artabilir.

Ayrıca, $u(0) \succcurlyeq u(T)$, $[(u(T)]_r \subseteq [u(0)]_r$ olduğunu gösterir. Bu u'nun Hukuhara diferansiyellenebilirliği ile ortaklaşa olarak sağlar ki $[u(t)]_r$=$[u(0)]_r$ ve bu yüzden u'nun seviye kümelerinin çapı sabittir. çap$[u(t)]_r$=$çap[u(0)]_r$ olur.

Teorem 2.7.3: $u \in C^1([0,T], \mathbb{R}_\mathcal{F})$ ve $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ öyle ki

u'(t) + $Mu(t) \geq X_{\{0\}}$ ve $u(0) \leq u(T)$ olsun.

O zaman $u(t) \leq X_{\{0\}}$ olur.

Benzer sonuçlar kısmi sıralama $\succcurlyeq$ için geçerlidir. $u'(t) + Mu(t) \preccurlyeq X$ olması $u'(t)$ + $Mu(t) = x_{\{0\}}$ olmasını sağlar.(Rodriguez-Lopez, 2007b)

Daha öncesinde bir fonksiyonu $x_{\{0\}}$ ile nasıl kıyaslayacağımızı gördük. Şimdi iki farklı bulanık fonksiyonu nasıl kıyaslayacağımızı göreceğiz. Reel uzayda, x ve y'yi kıyaslarken $x - y$ farkını sıfır fonksiyonla kıyaslarız. Bulanık uzayda, bu sağlanmayabilir, o yüzden Hukuhara farkını düşüneceğiz.

Yardımcı Önerme 2.7.6: $x, y \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ ve $x \ominus_H y$ Hukuhara farkı var olsun.

$x \leq y \Leftrightarrow x \ominus_H y \leq x_{\{0\}}$ olur.

Benzer sonuç $\preccurlyeq$ parçalı sıralaması için de çıkarılabilir.(Rodriguez-Lopez, 2007b)

İspat: $(x \ominus_H y)_r = [x_r^- - y_r^-, x_r^+ - y_r^+]$, her $r \in [0,1]$ için,

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x_r^- \leq y_r^- \\ x_r^+ \leq y_r^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_r^- - y_r^- \leq 0 \\ x_r^+ - y_r^+ \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ominus_H y \leq x_{\{0\}} \text{ olur.}$$

$\preccurlyeq$ kısmi sıralaması için

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \begin{cases} x_r^- \geq y_r^- \\ x_r^+ \leq y_r^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_r^- - y_r^- \geq 0 \\ x_r^+ - y_r^+ \leq 0 \end{cases}$$

$x \ominus_H y$'nin varlığı $x_r^- - y_r^- \leq x_r^+ - y_r^+$ olmasını sağlar. Bundan dolayı

$x_r^- - y_r^- = x_r^+ - y_r^+ = 0$,

$(x \ominus_H y)_r = \{0\}$ veya $(x \ominus_H y) \preccurlyeq x_{\{0\}}$ ise o zaman $(x \ominus_H y) = x_{\{0\}}$ ve $x = y + x_{\{0\}}$ bu yüzden $x \preccurlyeq y$ olur.

Yardımcı Önerme 2.7.7: Kabul edelim ki $x, y : [0,T] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ diferansiyellenebilir ve Hukuhara fark fonksiyonu $x \ominus_H y : [0,T] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $(x \ominus_H y)(t)=x(t) \ominus_H y(t)$, $t \in [0,T]$ ile verilen fonksiyon var ve Hukuhara diferansiyellenebilir olsun. O zaman

$[(x \ominus_H y)']_r = [(x_r^-)'(t) - (y_r^-)'(t),\ (x_r^+)'(t) - (y_r^+)'(t)]$ olur.(Rodriguez-Lopez, 2007b)

İspat: $\forall\ t \in [0,T]$ için

$$0= lim_{h\to 0^+} \sup_{r\in[0,1]} d_H\left(\frac{(x\ominus_H y)(t+h)\ominus_H (x\ominus_H y)(t)}{h}, (x \ominus_H y)'(t)\right)$$

$$=lim_{h\to 0^+} sup_{r\in[0,1]} d_H\left(\frac{[(x_r^- - y_r^-)(t+h),\ \ x_r^+ - y_r^+)(t+h)]\ominus_H [(x_r^- - y_r^-)(t+h),(x_r^+ - y_r^+)(t)]}{h},\right.$$

$$\left., ((x \ominus_H y)'(t)\ \right)$$

$$=lim_{h\to 0^+} \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{ \left|\frac{x_r^-(t+h)-y_r^-(t+h)-x_r^- + y_r^-(t)}{h} - ((x \ominus_H y)_r^-)'(t)\right|,\right.$$

$$\left.\left|\frac{x_r^+(t+h)-y_r^+(t+h)-x_r^+ + y_r^+(t)}{h} - ((x \ominus_H y)_r^+)'(t)\right| \right\}.$$

Bu sağlar ki;

$$((x \ominus_H y)_r^-)'(t) = lim_{h\to 0^+} \frac{x_r^-(t+h)-x_r^-(t)}{h} - \frac{y_r^+(t+h)-y_r^+(t)}{h}) = (x_r^-)'(t) - (y_r^-)'(t)$$

ve

$((x \ominus_H y)_r^+)'(t) = (x_r^+)'(t) - (y_r^+)'(t)$ olur.

Not 2.7.2: $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$'deki x ve y elemanlarını kıyaslamak için $x \ominus_H y$ veya $y \ominus_H x$ Hukuhara farklarının varlığı gerekli değildir. Eğer $x_r \ominus_H y_r$ veya $y_r \ominus_H x_r$ Hukuhara farkları varsa, o zaman bulanık sayılar kıyaslanabilir.

Örneğin;

$x_r \ominus_H y_r \geq 0$, çap$(x_r) \geq$ çap(y_r)

$y_r \ominus_H x_r \leq 0$, çap$(x_r) <$ çap(y_r) ise o zaman $x \geq y$'dir.

Eğer çap(x_r)=çap(y_r) ise $x_r \ominus_H y_r \geq 0 \Leftrightarrow y_r \ominus_H x_r \leq 0$

Örnek 2.7.1: $x = (0,1,2)$ üçgensel bulanık sayısını düşünelim.

$$x(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 2-t, & t \in [1,2] \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Seviye kümesi x_r=$[r, 2-r]$ ile verilir.

Yamuk bulanık sayı y;

$$y(t) = \begin{cases} 4t-7, & t \in [\frac{7}{4}, 1] \\ 1, & t \in [2, \frac{9}{2}] \\ 10-4t, & t \in [\frac{9}{4}, \frac{5}{2}] \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlansın.

seviye kümeleri y_r =$[\frac{r+7}{4}, \frac{10-r}{4}]$, $\forall\, r \in [0,1]$.

seviye kümelerinin çapları; çap(x_r)=$2-2r$, çap(y_r)=$\frac{3-2r}{4}$ olur.

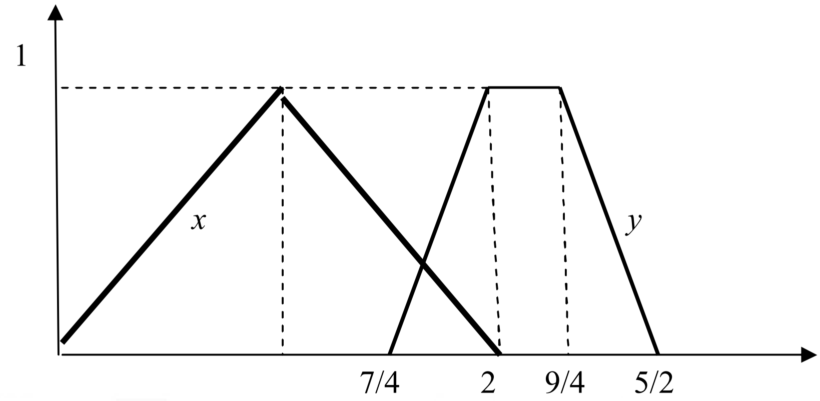
$\forall\, r \in [0, \frac{5}{6}]$ $için$ çap$(x_r) \geq$ çap(y_r) olur. $x_r \ominus_H y_r$ vardır.

$x_r \ominus_H y_r$ = [r, 2-r] $\ominus_H$ $[\frac{r+7}{4}, \frac{10-r}{4}]$ = $[\frac{3r-7}{4}, \frac{-2-3r}{4}] \leq 0$

r $\in (\frac{5}{6}, 1]$ için çap$(y_r) >$ çap(x_r), bu yüzden $y_r \ominus_H x_r$ vardır ve

$y_r \ominus_H x_r$ = $[\frac{r+7}{4}, \frac{10-r}{4}]$ $\ominus_H$ [r, $2-r$] = $[\frac{-3a+7}{4}, \frac{2+3a}{4}] \geq 0$

Bu gösterir ki $x \leq y$ dir. (Rodriguez-Lopez, 2007a)



Şekil 2.7. 1: İki bulanık sayının kıyaslanmasına örnek

Not 2.7.3: Sıralama bağıntısı $\preccurlyeq$ için, $y \preccurlyeq x$, $x_r \subseteq y_r$ ifadesine eşdeğerdir. Bu yüzden çap(y_r) ≤çap(x_r), her r için, ve çap(x_r) −çap(y_r), x ve y'yi kıyaslayabilmek için sabit işarete sahip olmalıdır.

I= [c,d] öyle ki; eğer $c \leq 0 \leq d$ ise I $\succcurlyeq$ 0 olur. (eş olarak; $\{0\} \subseteq$ I)

Eğer çap(y_r) ≥çap(x_r) ve $x_r \ominus_H y_r \geq 0$, yani $x_r \ominus_H y_r \supseteq \{0\}$ ise o zaman $y \preccurlyeq x$ olur.

Eğer çap(x_r) ≥çap(y_r) ve $x_r \ominus_H y_r \preccurlyeq 0$, yani $x_r \ominus_H y_r \subseteq \{0\}$ ise o zaman

$x_r \ominus_H y_r = \{0\}$ ve $x = y$ olur.

Eğer çap(x_r)=çap(y_r) ise o zaman $x_r \ominus_H y_r \succcurlyeq 0 \Leftrightarrow y_r \ominus_H x_r \preccurlyeq 0$ olur.

Bu da $y_r \ominus_H x_r = \{0\}$ ifadesine denktir.

Örnek 2.7.2:

$$x(t) = \begin{cases} 2(t+1), & t \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ 1, & t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ -2(t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan x yamuk bulanık sayısını düşünelim.

seviye kümeleri $x_r = [\frac{r-2}{2}, \frac{2-r}{2}]$

$$y(t) = \begin{cases} -t+1, & t \in [0,1] \\ t+1, & t \in [-1,0] \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $y = (-1,0,1)$ üçgensel bulanık sayısını düşünelim:

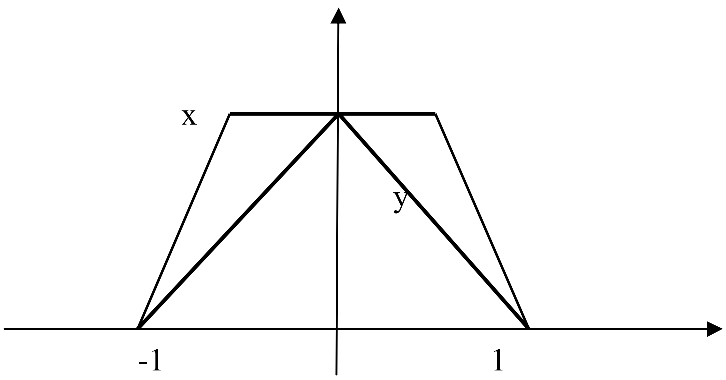
seviye kümeleri $y_r = [r-1, 1-r]$ olur.

çap$(x_r) = 2 - r \geq 2 - 2r = çap(y_r)$ olur. Sonuç olarak $x_r \ominus_H y_r$ farkı vardır, Ayrıca, $x \ominus_H y$ farkları yoktur,

$x_r \ominus_H y_r = [\frac{r-2}{2}, \frac{2-r}{2}] \ominus_H [r-1, 1-r] = [-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}]$

Ve bu kümelerin çapları r'ye göre artandır. Bu yüzden bulanık sayı tanımlamazlar.

$x_r \ominus_H y_r \supseteq \{0\}$ olmasını kullanarak $x \succcurlyeq y$ elde ederiz. (Rodriguez-Lopez, 2007a)



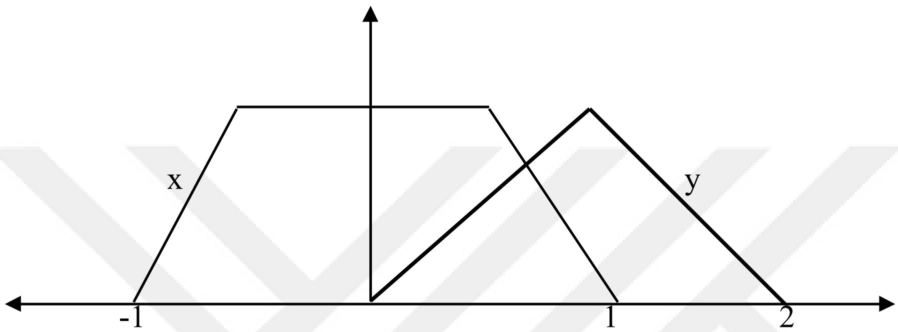
Şekil 2.7. 2: İki bulanık sayının $\preccurlyeq$-karşılaştırılmasına örnek

Örnek 2.7.3: $\leq$ sıralaması için x, örnek 2.7.2'deki yamuk bulanık sayıyı ve $y = (0,1,2)$ üçgensel bulanık sayısını göstersin.

x_r=$[\frac{r-2}{2}, \frac{2-r}{2}]$ ve $y_r = [r, 2 - r]$ her $r \in [0,1]$ için.

$x_r \ominus_H y_r = [-\frac{r}{2} - 1, \frac{r}{2} - 1]$

$x_r \ominus_H y_r \leq 0$ olur. Dolayısıyla $x \leq y$ olur. (Rodriguez-Lopez, 2007a)



Şekil 2.7. 3: İki bulanık sayısının kıyaslanmasına örnek

Yardımcı Önerme 2.7.8: $x, y, z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olmak üzere $x \ominus_H z$ ve $y \ominus_H z$ Hukuhara farkları var olsun, o zaman

$x \leq y \Leftrightarrow x \ominus_H z \leq y \ominus_H z$

Aynı ifade $\preccurlyeq$ kısmi sıralaması için de geçerlidir.(Rodriguez-Lopez, 2007b)

İspat: Eğer $x \leq y$ ise $x_r^- \leq y_r^-$, $x_r^+ \leq y_r^+$, her $r \in [0,1]$ için ve bu yüzden

$x_r^- - y_r^- \leq y_r^- - z_r^-$

$x_r^+ - y_r^+ \leq y_r^+ - z_r^+$

olur. Buradan $x \ominus_H z \leq y \ominus_H z$ elde edilir.

Benzer şekilde $x \preccurlyeq y$ olması sağlar ki

$y_r^- \leq x_r^-$ ve $x_r^+ \leq y_r^+$ dir.

Bu yüzden $x_r^- - z_r^- \geq y_r^- - z_r^-$,

$x_r^+ - z_r^+ \leq y_r^+ - z_r^+$

Eğer x $\ominus_H$ z≤ y $\ominus_H$ z ise 2.7.3.Yardımcı Önermeyi kullanarak

$x = (x \ominus_H z) + (y \ominus_H z) + z = y$ elde ederiz.

x ve y'nin Hukuhara farkına gerek duyulmayan aşağıdaki karşılaştırma sonuçları daha kullanışlıdır.

$C^1([c,d], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ gösterimi u: $[c,d] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ biçiminde tanımlanan sürekli ve Hukuhara diferansiyellenebilir fonksiyonlarının kümesini temsil eder.

Teorem 2.7.4: $x, y \in C^1([c,d], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ ve $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ öyle ki;

$x'(t) + Mx(t) \leq y'(t) + My(t)$, $t \in [c,d]$,

ve $x(c) \leq y(c)$ ise

$x(t) \leq y(t)$'dir.(Rodriguez-Lopez, 2007b)

Benzer sonuçlar $\preccurlyeq$ için de geçerlidir.

İspat: $[x(t)]_r$=[$x_r^-(t), x_r^+(t)$], $[y(t)]_r$=[$y_r^-(t), y_r^+(t)$]

≤ kısmi sıralaması için ve her $a \in [0,1]$ için $x_r^-, y_r^-, x_r^+, y_r^+$ $C^1([c,d], \mathbb{R})$de fonksiyonlar ve

$(x_r^-)'(t) + Mx_r^-(t) \leq (y_r^-)' + My_r^-(t)$

$(x_r^+)'(t) + Mx_r^+(t) \leq (y_r^+)' + My_r^+(t)$

$x_r^-(c) \leq y_r^-(c)$ ve $x_r^+(c) \leq y_r^+(c)$

Burdan,

$(x_r^- - y_r^-)'(t) + M(x_r^- - y_r^-)(t) \leq 0$, $t \in [c,d]$, $(x_r^- - y_r^-) \leq 0$

$(x_r^+ - y_r^+)'(t) + M(x_r^+ - y_r^+)(t) \leq 0$, $t \in [c,d]$, $(x_r^+ - y_r^+) \leq 0$

2.7.1.Yardımcı Önermeden

$(x_r^- - y_r^-)(t) \leq 0$, $(x_r^+ - y_r^+)(t) \leq 0$ olur.

Bu yüzden $x(t) \leq y(t)$ olur.

$\preccurlyeq$ kısmi sıralaması için

$(x_r^-)'(t) + Mx_r^-(t) \geq (y_r^-)' + My_r^-(t),\ t \in [c,d],\ x_r^-(c) \geq y_r^-(c),$

2.7.2.Yardımcı Önermeden $(x_r^- - y_r^-)$, $x_r^-(t) - y_r^-(t)$ yi sağlar.

Sonuç olarak, $x(t) \preccurlyeq y(t)$ olur.

3.BULGULAR

3.1.Birinci Mertebeden Bulanık Diferansiyel Denklemlerde Alt ve Üst Çözümler Tekniği

Tanım 3.1: $f \in C([t_0,\ t_0+p]\times \mathbb{R}_{\mathcal{F}},\mathbb{R}_{\mathcal{F}}), p>0$ ve $x'=f(t,x),\ x(t_0)=x_0$ bulanık başlangıç değer problemini ele alalım.

$w\in\ C^1([t_0,T],\mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ olmak üzere, eğer

$$\begin{cases} w' \geq f\big(t,w(t)\big), & t\in[t_0,t_0+p] \\ w(0)\geq x_0 \end{cases}$$

sağlanıyorsa w, diferansiyel denklemin bulanık üst çözümüdür. (Rodriguez-Lopez, 2007a)

$v\in\ C^1([\ t_0,T],\mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ olmak üzere, eğer

$$\begin{cases} v' \leq f\big(t,v(t)\big), & t\in[t_0,t_0+p] \\ v(0)\leq x_0 \end{cases}$$

sağlanıyorsa v, bulanık diferansiyel denklemin bulanık alt çözümüdür.

(Rodriguez-Lopez, 2007a)

Teorem 3.1: $f\ \in C([t_0,t_0+p]\times\ \mathbb{R}_{\mathcal{F}},\mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ ve $v,w\in\ C^1([t_0,t_0+p],\mathbb{R}_{\mathcal{F}})$, $t\ \in[t_0,t_0+p]$ $x'=f(t,x),\ x(t_0)=x_0, t\ \in[t_0,t_0+p]$ bulanık diferansiyel denkleminin bulanık alt ve üst çözümü olsun. Ancak üst çözüm tanımındaki $\geq$ yerine $>$ alalım. Yani, $w'>f(t,w)$ olsun.

Eğer $v(t_0)<w(t_0)$ ise, o zaman $v(t)<w(t)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki

$w'>f(t,w),\ v'\leq f(t,v)$ ve

$v(t_0)<w(t_0)$ olsun.

Kanıtlamalıyız ki $v(t)<w(t)$

Yani 2.7.6.Yardımcı Önermeye göre $v_r^-(t)<w_r^-(t)$ ve $v_r^+(t)<w_r^+(t)$ olmalıdır.

Eğer bu yanlışsa bir $t_1 \in [t_0, t_0 + p]$ vardır öyle ki

$v_r^-(t_1) = w_r^-(t_1)\ ve\ \ v_r^+(t_1) = w_r^+(t_1)$

$v_r^-(t) < w_r^-(t)$ ve $v_r^+(t) < w_r^+(t)$ olur.

Bu yüzden yeterince küçük $h > 0$ için

$\begin{cases} v_r^-(t_1 - h) < w_r^-(t_1 - h) \\ v_r^+(t_1 - h) < w_r^+(t_1 - h) \end{cases}$ olur. Yani;

$v(t_1 - h) < w(t_1 - h)$'dır. 2.7.8.Yardımcı önermeden

$v(t_1 - h) \ominus v(t_1) < w(t_1 - h) \ominus w(t_1)$ elde edilir.

Her tarafı $-h$ ile bölersek ve $h \to 0$ için limit alırsak Tanım5.4.2.1'den yararlanarak

$\lim_{h\to 0} \frac{v(t_1-h)\ominus v(t_1)}{-h} < \lim_{h\to 0} \frac{w(t_1-h)\ominus w(t_1)}{-h}$

$v'(t_1) \geq w'(t_1)$ sonucuna ulaşılır.

Burdan yola çıkarak

$f\big(t_1, v(t_1)\big) \geq v'(t_1) \geq w'(t_1) > f\big(t_1, w(t_1)\big) = f(t_1, v(t_1))$ çelişkisi elde edilir.

O halde $v(t) < w(t)$ olur.

Teorem 3.2: $f \in C([t_0, t_0 + p] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ ve $v, w \in C^1([t_0, t_0 + p], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$,

$x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, t_0 + p]$ bulanık diferansiyel denkleminin alt ve üst çözümü ve y bulanık diferansiyel denklemin bir çözümü olsun.

Ancak $v' < f(t, v)$ ve $w' > f(t, w)$ alalım.

Eğer $v(t_0) \leq y(t_0) \leq w(t_0)$ oluyorsa o zaman $v(t) < y(t) < w(t)$ olur.

İspat: İspatı sadece $y(t) < w(t)$ için yapalım. $v(t) < y(t)$ ispatlanırken benzer şekilde ispat yapılır.

Eğer $y(t_0) < w(t_0)$ ise o zaman Teorem 3.1 sağlanır.

Kabul edelim ki, $y(t_0) = w(t_0)$ olsun.

$z(t) = w(t) \ominus y(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Bu fonksiyonun seviye kümeleri $z_r = [z_r^-(t), z_r^+(t)]$

$$\begin{cases} z_r^-(t) = w_r^-(t) - y_r^-(t) \\ z_r^+(t) = w_r^+(t) - y_r^+(t) \end{cases} \quad \text{olur.}$$

$$(z_r^-)'(t_0) = (w_r^-)'(t_0) - (y_r^-)'(t_0) > f((t_0), w_r^-(t_0)) - f(t_0, y_r^-(t_0)) = 0$$

Buradan $z_r^-(x)$'in $[t_0, t_0 + h]$ gibi yeterince küçük bir aralıkta artan olduğunu görebiliriz. Bu yüzden $y_r^-(t_0 + h) < w_r^-(t_0 + h)$ olur. Teorem 3.1'i uygularsak görürüz ki $y_r^-(t) < w_r^-(t$, her $t \in [t_0 + h, t_0 + p]$ için h yeterince küçük seçildiğinde teorem z_r^- için ispatlanır.

Benzer şekilde,

$(z_r^+)'(t_0) = (w_r^+)'(t_0) - (y_r^+)'(t_0) > f(t_0), w_r^+(t_0)) - f(t_0, y_r^+(t_0)) = 0$ olur.

$z_r^+(t)$'nin $[t_0, t_0 + h]$ gibi yeterince küçük bir aralıkta artan olduğunu görebiliriz.

$y_r^+(t_0, t_0 + h) < w_r^+(t_0, t_0 + h)$ olur. Her $t \in [t_0 + h, t_0 + p]$ için h yeterince küçük seçildiğinde, Teorem 3.1'i uygularsak görürüz ki $y_r^+(t) < w_r^+(t)$ olur.

$$\begin{cases} y_r^-(t) < w_r^-(t) \\ y_r^+(t) < w_r^+(t) \end{cases} \quad \text{olduğundan } y(t) < w(t) \text{ olur.}$$

Benzer şekilde $v(t) < y(t)$ olduğunu ispatlayabiliriz.

Böylece $v(t) < y(t) < w(t)$ sonucuna ulaşırız.

Teorem 3.3: $f \in C([t_0, t_0 + p] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $v, w \in C^1([t_0, t_0 + p], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ $t \in [t_0, t_0 + p]$ bulanık diferansiyel denklemin bulanık alt ve üst çözümü olsunlar. Kabul edelim ki $f(t, x) \ominus f(t, y)$ ve $x \ominus y$ Hukuhara farkları mevcut ve $x \geq y$ için $f(t, x) \ominus f(t, y) \leq L \cdot (x \ominus y)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir L pozitif sabiti var olsun.

Bu taktirde $v(t_0) \leq w(t_0)$ olduğunda $v(t) \leq w(t)$ olur.

İspat: Öncelikle $\widetilde{w}(t) = w(t) + \varepsilon \cdot e^{2Lt}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Seviye kümeleri $[\widetilde{w}_r^-(t), \widetilde{w}_r^+(t)]$ olsun.

$$\begin{cases} \widetilde{w}_r^-(t) = w_r^-(t) + \ \varepsilon \cdot e^{2Lt} \\ \widetilde{w}_r^+(t) = w_r^+(t) + \ \varepsilon \cdot e^{2Lt} \end{cases} \text{ olur.}$$

$$\frac{d}{dt}(\,\widetilde{w}_r^-(t)) = \frac{d}{dt}(w_r^-(t)) + \ 2L\varepsilon \cdot e^{2Lt}$$

$$\geq f\big(t, w_r^-(t)\big) + f\big(t, \widetilde{w}_r^-(t)\big) + 2L\varepsilon e^{2Lt} - f\big(t, \widetilde{w}_r^-(t)\big)$$

$$\geq -L\big(\widetilde{w}_r^-(t) - w_r^-(t)\big) + f(t, \widetilde{w}_r^-(t) + 2L\varepsilon e^{2Lt}$$

$$= f(\,t, \widetilde{w}_r^-(t)) + L\varepsilon e^{2Lt}$$

$$> f(t; \widetilde{w}_r^-(t))$$

Ayrıca $v_r^-(t_0) \leq w_r^-(t_0) < \widetilde{w}_r^-(t_0)$ olur. Buradan $v_r^-(t) < \widetilde{w}_r^-(t)$

$\varepsilon \to 0$ için $v_r^-(t) \leq w_r^-(t)$ elde edilir.

Benzer şekilde;

$$\frac{d}{dt}(\,\widetilde{w}_r^+(t)) = \frac{d}{dt}(\,w_r^+(t)) + \ 2L\varepsilon \cdot e^{2Lt}$$

$$\geq f\big(t, w_r^+(t)\big) + f\big(t, \widetilde{w}_r^+(t)\big) + 2L\varepsilon e^{2Lt} - f\big(t, \widetilde{w}_r^+(t)\big)$$

$$\geq -L\big(\widetilde{w}_r^+(t) - w_r^+(t)\big) + f(t, \widetilde{w}_r^+(t) + 2L\varepsilon e^{2Lt}$$

$$= f(\,t, \widetilde{w}_r^+(t) + L\varepsilon e^{2Lt}$$

$$> f(t; \widetilde{w}_r^+(t))$$

Ayrıca $v_r^+(t_0) \leq w_r^+(t_0) < \widetilde{w}_r^+(t_0)$ olur. Buradan $v_r^+(t) < \widetilde{w}_r^+(t)$

$\varepsilon \to 0$ için $v_r^+(t) \leq w_r^+(t)$ elde edilir.

2.7.6.Yardımcı Önermeden $v(t) \leq w(t)$ elde edilir.

Sonuç 3.1: Yukarıda ispatlanan teoremlerde elde edilen aynı sonuçlar $\preccurlyeq$-kısmi sıralaması için de geçerlidir. Teorem 3.3'ü $\preccurlyeq$-kısmi sıralaması için ispatlayalım.

$f(t,x) \ominus f(t,y)$ ve $x \ominus y$ Hukuhara farkları mevcut ve

$f(t,x) \ominus f(t,y) \preccurlyeq \ L \cdot (x \ominus y)$ şartı sağlansın. $v(t_0) \preccurlyeq w(t_0)$ olduğunda

$v(t) \preccurlyeq w(t)$ eşitsizliği sağlanır mı, inceleyelim.

$$v(t_0) \preccurlyeq w(t_0) \Leftrightarrow \begin{cases} v_r^-(t_0) \geq w_r^-(t_0) \\ v_r^+(t_0) \leq w_r^+(t_0) \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$w' \succcurlyeq f(t, w(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} (w_r^-)' \leq f(t, w_r^-(t)) \\ (w_r^+)' \geq f(t, w_r^+(t)) \end{cases} \quad \text{olur.}$$

Öncelikle $\widetilde{w}(t) = w(t) + \varepsilon \cdot e^{2Lt}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Seviye kümeleri $[\widetilde{w}_r^-(t), \widetilde{w}_r^+(t)]$ olsun.

$$\begin{cases} \widetilde{w}_r^-(t) = w_r^-(t) + \varepsilon \cdot e^{2Lt} \\ \widetilde{w}_r^+(t) = w_r^+(t) + \varepsilon \cdot e^{2Lt} \end{cases} \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\widetilde{w}_r^-(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(w_r^-(t)\right) + 2L\varepsilon \cdot e^{2Lt} \\ &\leq f\left(t, w_r^-(t)\right) + f\left(t, \widetilde{w}_r^-(t)\right) + 2L\varepsilon e^{2Lt} - f\left(t, \widetilde{w}_r^-(t)\right) \\ &\leq -L\left(\widetilde{w}_r^-(t) - w_r^-(t)\right) + f(t, \widetilde{w}_r^-(t) + 2L\varepsilon e^{2Lt} \\ &= -f(t, \widetilde{w}_r^-(t)) + 3L\varepsilon e^{2Lt} \\ &< f(t, \widetilde{w}_r^-(t)) \end{aligned}$$

Ayrıca $w_r^-(t_0) < \widetilde{w}_r^-(t_0) < v_r^-(t_0)$ ise buradan $\widetilde{w}_r^-(t) < v_r^-(t)$ olur.

$w_r^-(t_0) < v_r^-(t_0) < \widetilde{w}_r^-(t_0)$ ise $\varepsilon \to 0$ için $v_r^-(t_0) = \widetilde{w}_r^-(t_0)$ elde edilir.

Sonuç olarak $\varepsilon \to 0$ için $v_r^-(t) \geq w_r^-(t)$ elde edilir.

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\widetilde{w}_r^+(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(w_r^+(t)\right) + 2L\varepsilon \cdot e^{2Lt} \\ &\geq f\left(t, w_r^+(t)\right) + f\left(t, \widetilde{w}_r^+(t)\right) + 2L\varepsilon e^{2Lt} - f\left(t, \widetilde{w}_r^+(t)\right) \\ &\geq -L\left(\widetilde{w}_r^+(t) - w_r^+(t)\right) + f(t, \widetilde{w}_r^+(t) + 2L\varepsilon e^{2Lt} \\ &= f(t, \widetilde{w}_r^+(t) + L\varepsilon e^{2Lt} \\ &> f(t; \widetilde{w}_r^+(t)) \end{aligned}$$

Ayrıca $v_r^+(t_0) \leq w_r^+(t_0) < \widetilde{w}_r^+(t_0)$ olur. Buradan $v_r^+(t) < \widetilde{w}_r^+(t)$

$\varepsilon \to 0$ için $v_r^+(t) \leq w_r^+(t)$ elde edilir.

2.7.6.Yardımcı Önermeden $v(t) \preccurlyeq w(t)$ elde edilir.

Örnek 3.1: $x' = f(t,x)$ olmak üzere

$f(t,x) = x,\ x(0) = (2,3,4)$ bulanık başlangıç değer problemini ele alalım.

$v(t) = (-t^2+1)(0,1,2)$ ve $w(t) = e^t(5,6,7)$ fonksiyonlarını düşünelim. $t \in [0,1]$

$v'(t) = -2t(0,1,2)$ ve $f(t,v) = (-t^2+1)(0,1,2)$ olur.

$v'(t) \leq f(t,v)$ sağlanır mı, inceleyelim.

$v'(t) = (0,-2t,-4t)$'dir ve seviye kümeleri

$[v'(t)]_r = \left[\left(v'(t)\right)_r^-, \left(v'(t)\right)_r^+\right] = [-2tr, -2t(2+r)]$

$f(t,v) = (0, -t^2+1, -2t^2+2)$

$[f(t,v)]_r = \left[\left(f(t,v)\right)_r^-, \left(f(t,v)\right)_r^+\right] = [(-t^2+1)r, (-t^2+1)(2-r)]$ elde ederiz.

Kolayca görülür ki, $r \in [0,1]$ için

$\left(v'(t)\right)_r^- \leq \left(f(t,v)\right)_r^-$ ve $\left(v'(t)\right)_r^+ \leq \left(f(t,v)\right)_r^+$ olur.

Yani; $v' \leq f(t,v)$ olur.

Şimdi $v(0) \leq x(0)$ olup olmadığını inceleyelim.

$v(0) = (0,1,2)$ ise seviye kümeleri $[v(0)]_r = [r, 2-r]$

$x(0) = (2,3,4)$ ise seviye kümeleri $[x(0)]_r = [2+r, 4-r]$ olur. Yine $r \in [0,1]$ için

$(v(0))_r^- \leq (x(0))_r^-$ ve $(v(0))_r^+ \leq (x(0))_r^+$ olduğundan $v(0) \leq x(0)$ olur.

v, bulanık diferansiyel denklemin bulanık alt çözümüdür.

$w'(t) = e^t(5,6,7)$ ve $f(t,w) = e^t(5,6,7)$ olduğundan yukarıdakine benzer işlemlerle

$w'(t) \geq f(t,w)$ $w(0) \geq x(0)$ elde edilir.

w, bulanık diferansiyel denklemin bulanık üst çözümüdür.

Bulanık diferansiyel denklemin Lipschitz şartını $L > 1$ için sağladığı açıktır.

$[v(0)]_r = [r, 2-r]$

$[w(0)]_r = [5+r, 7-r]$

Şimdi $v(0) \leq w(0)$ eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$[v(0)]_r^- \leq [w(0)]_r^-$ ve $[v(0)]_r^+ \leq [w(0)]_r^+$ olduğundan eşitsizlik sağlanır.

3.8.1.Teoreme göre $v(t) \leq w(t)$ olmalıdır. Bu eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

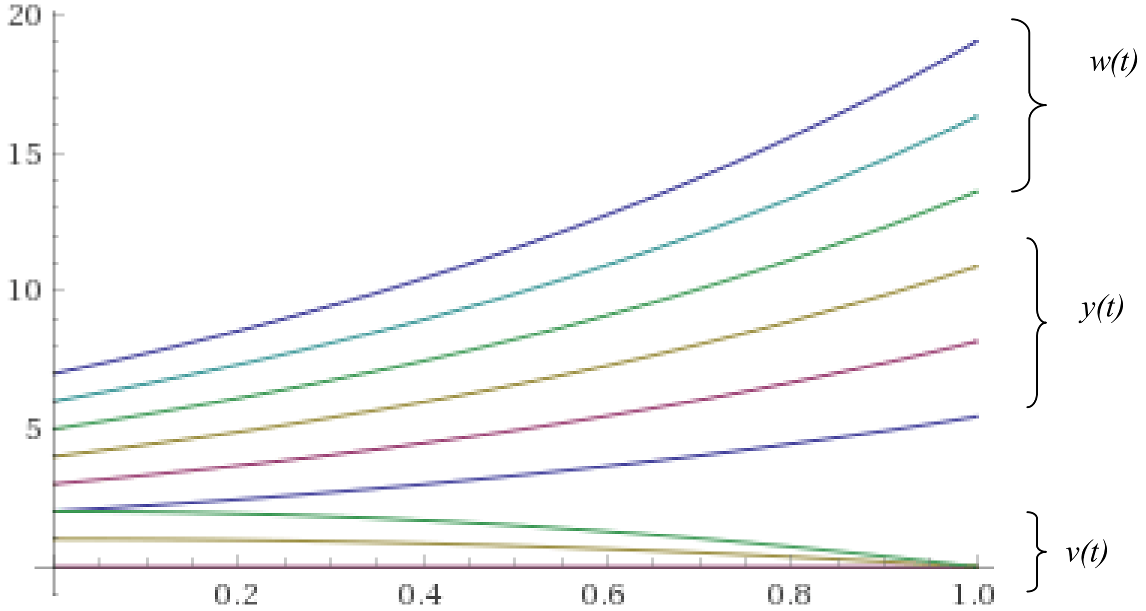
$[v(t)]_r = [(-t^2+1)r, (-t^2+1)(2-r)]$

$[w(t)]_r = [e^t(5+r), e^t(7-r)]$ olduğundan

$[v(t)]_r^- \leq [w(t)]_r^-$ ve $[v(t)]_r^+ \leq [w(t)]_r^+$ sağlanır ve $v(t) \leq w(t)$'dir.

Ayrıca bulanık diferansiyel denklemin çözümü $y(t) = e^t(2,3,4)$ olur.

v, w, y'nin grafiği çizilirse; $v(t) \leq y(t) \leq w(t)$ olduğu kolayca görülebilir.



Şekil 3.1: Örnek 3.1'deki alt çözüm, üst çözüm ve çözümün grafiği

4.SONUÇ

Bu tez çalışmasında birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklemlerde alt ve üst çözümler tekniğiyle bazı karşılaştırma teoremlerini ispatlamak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda öncelikle bulanık küme, bulanık sayı, bulanık analiz, bulanık diferansiyel denklemler ve bulanık diferansiyel eşitsizlikler incelenmiş ve tezin genel bilgiler kısmında bu konulara yer verilmiştir.

Birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklemlerin alt ve üst çözümleri üzerine çalışılmış ve alt ve üst çözümler metoduyla teoremler ispatlanıp ve bu teoremlerin uygulaması olan bir örneğe yer verilmiştir. Bu çalışmada görülmüştür ki, klasik diferansiyel denklemlerde geçerli olan alt ve üst çözümler tekniği bulanık diferansiyel denklemler için de geçerlidir.

5.KAYNAKLAR

Bede, B., 2008. Note on Numarical solution of fuzzy differential equations by predictor-corrector method. Information Sciences, 178.

Bede, B. Ve Gal, S.G., 2010. Solutions of Fuzzy Differential Equations Based on Generalized Differentiability. Communications in Mathematical Analysis,9,22-41.

Bede, B., 2013. Mathmatics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. USA.

Çağman, N., 2006. Bulanık Mantık. Bilim ve Teknik, sayı:463, sayfa: 50-51.

Diamond, P., ve Kloeden, P.E., 1994. Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.

Diamond, P., ve Kloeden, P., 2000. Metric Topology of Fuzzy Numbers and Fuzzy Analysis, Handbook Fuzzy Sets Ser, vol 7, pp. 583-641, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Dubois, D., ve Prade, H., 1987. Fuzzy Numbers: An overview. In:Fuzzy Analsis and Information. Mathematical Logic, vol 1, pp3-39, CRC Press, Boca Raton.

Gal, S.G., 2000. Approximation Theory in Fuzzy Setting, In: Anastassiou, G.A(ed.) Handbook of Analytic- Computational Methods in Applied Mathematics, ch13, pp 617-666, Boca Raton.

Goetschel, R., ve Woxman, W., 1986. Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Systems 18, 31-43,

Hukuhara, M., 1967. Integration des Applications Measurables dont la valeurest un compact convexe.

Lupulescu, V., 2000. On a class of fuzzy functional differential equations. Fuzzy Sets and Systems 160, 1547-1562.

Paksoy, T., Pehlivan, N. Y., ve Özceylan,2013. E., Bulanık Küme Teorisi. Türkiye.

Rodriguez-Lopez, R., 2007a. Monotone Method For Fuzzy Differential Equations. Fuzzy Sets and Systems, Spain.

Rodriguez-Lopez, R., 2007b. Comparison Results For Fuzzy Differential Equations.Fuzzy sets and Systems,Spain.

Sevim, F., 2012. Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri. Yüksek Lisans Tezi, Niğde.

Usanmaz, B., 2014. Elle Yük Kaldırmanın Bulanık Diferansiyel Denklemler ile Modellenmesi. Doktora Tezi, Erzurum.

Wu, C., ve Song, S., Stanles Lee, E., 1996. Approximate Solutions, Existence and Uniqueness of Caucy Problem of Fuzzy Differential Equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications,

Zadeh, L.A., 1975. The Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Information Sciences 8, 199-249,

6.ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Samsun'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Samsun'da tamamladım. 2008 yılında Samsun 19 Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde lisans eğitimime başladım. 2013 yılında lisans eğitimimi tamamladım ve 2014'te Tokat Yeşilyurt Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandım. Bu okulda üç yıl çalıştıktan sonra Sivas Yıldızeli Şehit Hakan Şahbaz Çok Programlı Anadolu Lisesi'ne atandım ve buradaki görevimi halen sürdürmekteyim.