ÖKLİD UZAYINDA BİR EĞRİ BOYUNCAKİ HAREKETLERİN DARBOUX VE EĞRİLİK MATRİSLERİ

AYLA KILIÇ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ
2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD UZAYINDA BİR EĞRİ BOYUNCAKİ HAREKETLERİN DARBOUX VE EĞRİLİK MATRİSLERİ

AYLA KILIÇ

TOKAT
2019

Ayla KILIÇ tarafından hazırlanan **"ÖKLİD UZAYINDA BİR EĞRİ BOYUNCAKİ HAREKETLERİN DARBOUX VE EĞRİLİK MATRİSLERİ"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı **26 HAZİRAN 2019** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / ~~Oy Çokluğu~~ ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ	....
Üye Prof. Dr. Zülfigar AKDOĞAN	....
Üye Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT	....

ONAY

....

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
01/07/2019

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

AYLA KILIÇ
26/06/2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖKLİD UZAYINDA BİR EĞRİ BOYUNCAKİ HAREKETLERİN DARBOUX VE EĞRİLİK MATRİSLERİ

AYLA KILIÇ

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm, giriş için ayrıldı. İkinci bölümde üçüncü ve son bölüm için gerekli temel tanım, teorem ve kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde bir eğri boyunca çatı hareketlerin Darboux matrisleriyle yüksek mertebeden eğrilik matrisleri arasında bazı bağıntılar verilmiştir. İlk olarak E^n deki Frenet-Serret hareketinin Darboux matrislerinin bileşenleri tanımlanmıştır ve böylece bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca E^n deki eğri-hiperyüzey çifti için doğal çatı alan hareketini sunuyoruz ve buradan bu hareketin Darboux matrisi ile bu çiftin eğrilik matrisi arasında bazı bağıntılar elde edilmiştir. Son bölümde ise, Cayley formülündeki bir eğri-hiperyüzey çiftinin eğrilik matrisini kullanarak bir şemsiye matris elde edilmiştir. Ayrıca şemsiye hareketinin Darboux matrisi ile eğrilik matrisi arasında bir ilişki verilip aynı zamanda bu şemsiye matrisini kullanarak bir infinitezimal şemsiye matris elde edilmiştir.

2019, 63 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Eğri, Yüzey, Eğrilik, Öklidiyen Hareket, Darboux Matris, Frenet Çatı Alanı, İkinci Temel Form, Şemsiye Matris.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

CURVATURE AND DARBOUX MATRICES OF MOTIONS ALONG A CURVE IN EUCLIDEAN SPACE

AYLA KILIÇ

Tokat Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second section, we are given some relations between the Darboux matrices of the frame motions along a curve and the matrices of higher curvatures of the curve. First we describe entries of the Darboux matrix of the Serret-Frenet motion in E^n and hence we obtain some results. Furthermore we introduce motion of the natural frame field for the pair curve-hypersurface in E^n and so we obtain some relations between the Darboux matrix of this motion and the curvature matrix for this pair. In the third section, using the curvature matrix of a curve-hypersurface pair in the Cayley formula we obtain an umbrella matrix. Furthermore we give a relation between the Darboux matrix of the umbrella motion and the curvature matrix. In addition, using this umbrella matrix we also obtain an infinitesimal umbrella matrix.

2019, 63 pages

KEYWORDS: Curve, Surface, Curvature, Darboux Matrix, Motion, Frenet Frame Field, Second Fundemantal Form, Umbrella Matrix.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgiyle yaparak tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazımım boyunca yol gösterici katkılarıyla destek olan Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR'e, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip maddi manevi yanımda olan başta sevgili eşim Murat KILIÇ'a, ablam Leyla ÖREN'e, kızım Arya Ecrin KILIÇ'a ve aileme teşekkür ederim.

AYLA KILIÇ
Haziran 2019

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel vektör uzayı
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathrm{I}(E^n)$	E^n in izometrilerinin cümlesi
$R_0(n)$	E^n de O etrafında dönmelerin cümlesi
$O(n)$	Ortogonal matrislerin cümlesi
$T(n)$	E^n de ötelemelerin cümlesi
I_n	$n \times n$-tipinden birim matris
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$	Regüler matrislerin cümlesi
$A(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}$ üzerinde şemsiye matrislerinin cümlesi
$A(n)$	$\mathbb{R}$ üzerinde şemsiye matrislerinin cümlesi
$T_M(P)$	M manifoldunun P noktasındaki tanjant uzay
$\phi(M)$	M manifoldunun vektör alanlarının uzayı
$K(V)$	E^n de bir eğrinin eğrilik matrisi
$K(X)$	Eğri-hiperyüzey ikilisinin eğrilik matrisi
W	Darboux matrisi
$W(E, V)$	Frenet-Serret hareketinin Darboux matrisi
$W(E, X)$	Eğri-hiperyüzey ikilisi için X doğal çatısının E standart çatısı üzerindeki değişiminin Darboux matrisi
$W(V, X)$	X doğal çatısının V Frenet çatısı üzerindeki değişimin Darboux matrisi
$W(A)$	A şemsiye matrisi ile oluşan şemsiye hareketinin Darboux matrisi

1. GİRİŞ

Evren hareket halindedir. Bu hareket ardışık dönmeler, ötelemeler ve şekil değiştirmeler yoluyla yapılır. Cismin katı olduğu kabul edilirse, bu hareket dönme (öteleme) ve akabinde bir öteleme (dönme) yardımıyla yapılır. Bu nedenle, katı cisimlerin hareketi fiziksel uzayda önemli bir yer tutar. Bu sayede, bir katı hareket $y = Ax+C$ şeklinde ifade edilir, burada $A \in SO(n)$ dönme matrisini ve C öteleme vektörünü ifade eder. Başka bir değişle, $y = Ax + C$ katı hareketleri temsil eder. Burada, A matrisinin ve C öteleme vektörünün nasıl elde edileceği önemli bir sorudur.

$\alpha : I \subseteq R \overset{C^\infty}{\to} E^n$ birim hızlı eğrisi verildiğinde $A(s) = [V_1(s) \;\; V_2(s) \;\; \cdots V_n(s)]$ dönme matrisi, Frenet vektörler alanlarından veya dönmenin ifadesinde kolaylık sağlayan Cayley formulü kullanılarak eğrilikler matrisinden elde edilmesine karşın, öteleme vektörü $C(s) = \overrightarrow{O\alpha(s)}$ vektöründen yani eğrinin kendisi alınarak elde edilir. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında bir α regüler eğrisinin bir $s \in I$ noktasında $k_1(s)$, $k_2(s)$, $\cdots$, $k_{n-1}(s)$ gibi $(n-1)-$tane eğriliği olduğu ve bu eğriliklerden oluşan matrisinin antisimetrik olduğu iyi bilinen bir husustur.

Özel olarak, E^3 deki bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir $\alpha : I \subseteq R \overset{C^\infty}{\to} M$ eğrisi verilsin. Yüzeyin birim normal vektör alanı N ve α eğrisinin teğet vektör alanı V_1 ve $N \times V_1 = Y$ olmak üzere,

$$\{V_1(s), Y(s), N(\alpha(s))\}$$

cümlesi, $T_{E^3}(\alpha(s))$ uzayının bir ortonormal bazı olur. Bu baza (α, M) eğri-yüzey çiftinin çatısı denir. Burada normal eğrilik denen $\kappa_n(s)$, geodezik eğrilik denen $\kappa_g(s)$ ve geodezik burulma denen $t_r(s)$ eğrilikleri sırasıyla,

$$\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s),\ (No\alpha)(s) \rangle, \kappa_g = \langle \alpha''(s), N \times V_1 \rangle, t_r = -\left\langle (No\alpha)'(s), N \times V_1 \right\rangle$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca, E^3 uzayınındaki α eğrisinin κ, τ eğrilikleriyle, şeridin eğrilikleri olan κ_g, κ_n, t_r arasında $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$ ve $\tau = t_r + \dfrac{\kappa_g \kappa_n' - \kappa_n \kappa_g'}{\kappa^2}$ bağıntıları iyi bilinmektedir. Ancak $n > 3$ için, 1984 yılında Erdoğan Esin and H. Hilmi Hacısalihoğlu (Esin ve Hacısalihoğlu, 1986a,b) tarafından modern diferensiyel geometri metoduyla ve 2010 yılında Osman Zeki Okuyucu (Okuyucu, 2010) tarafından klasik diferensiyel geometri metoduyla genelleştirilmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, 1986 da yapılan çalışmadan yararlanılarak, yeni bir bakış açısı ve uslupla, konu ele alınıp aynı hedeflere ulaşılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tezin ileri bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler üzerinde durulacaktır.

2.1. n-Boyutlu Öklid Uzayı E^n

Tanım 2.1.1. n-boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ de her $x, y \in \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, ..., x_n), \quad y = (y_1, ..., y_n)$ için

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ de uzaklık fonksiyonu denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.1.2.

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanan uzaklık fonksiyonuna Öklid metriği denir. $(\mathbb{R}^n, d)$ ikilisinden ibaret olan metrik uzaya, n-boyutlu Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.1.3. n-boyutlu Öklid uzayı E^n de bir nokta $X = (x_1, ..., x_n)$ olsun. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

bileşenlerine E^n in i-yinci Öklid koordinat fonksiyonu ve $(x_1, ..., x_n)$ reel sayılar n-lisine de bir Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.1.4. n-boyutlu Öklid uzayı E^n de bir sıralı $\{P_0, ..., P_n\}$ nokta $(n+1)$-lisi için eğer $\{\overrightarrow{P_0P_1}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ in bir ortonormal bazı ise $\{P_0, ..., P_n\}$ çatısına bir Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.2. E^n de Hareketler

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}^n$ de uzaklık fonksiyonu d olmak üzere

$$f : E^n \longrightarrow E^n$$

fonksiyonu için,

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in E^n$$

ise f fonksiyonuna E^n in bir izometrisi denir (Nomizu, 1966).

E^n in bütün izometrilerinin cümlesi $I(E^n)$ ile gösterilirse bu cümlenin dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir grup olduğu ve üstelik $f \in I(E^n)$ ise f izometrisinin birebir ve örten olduğu da söylenebilir.

Tanım 2.2.2. E^n in bir f izometrisi için eğer

$$f(O) = O, \quad O \in E^n$$

ise f ye O etrafında bir dönme denir (Nomizu, 1966).

E^n de O etrafında dönmelerin cümlesi $R_O(n)$ ile gösterilirse, bu cümle bileşke işlemine göre bir grup olup, $I(E^n)$ in bir altgrubudur.

Teorem 2.2.3. E^n de

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup O(n) ile, $O = (0, ..., 0)$ noktasını sabit bırakan dönme grubu $R_O(n)$ eşlenebilir (Hacısalihoğlu, 1980).
Teorem 2.2.3. ün ifadesinden, herhangibir $R_O \in R_O(n)$ dönmesinin E^n deki bir x noktasının R_O altındaki görüntüsü y olmak üzere

$$y = Ax, \quad A \in SO(n)$$

biçiminde ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.

Tanım 2.2.4. E^n in bir f izometrisi için eğer, $(x_1, ..., x_n)$ olmak üzere

$$f(x) = (x_1 + t_1, ..., x_n + t_n), \qquad t_i \in \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq n$$

ise f ye E^n de bir öteleme denir (Nomizu, 1966).

E^n deki bütün ötelemelerin cümlesi $T(n)$ ile gösterilirse, bu cümle dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir değişimli grup olup, $I(E^n)$ in bir alt grubu olduğu açıktır.

E^n in bir izometrisi, $R_O \in R_O(n)$ ve $T, T' \in T(n)$ olmak üzere,

$$f = T \circ R_O \qquad veya \qquad f = R_O \circ T'$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 2.2.5. $T \in T(n)$ ve $R_O \in R_O(n)$ olmak üzere,

$$T \circ R_O \qquad veya \qquad R_O \circ T'$$

biçimindeki izometrilere genel izometriler (veya katı hareketler) denir (Nomizu, 1966).

E^n in bütün genel izometrilerinin grubu $R(n)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.6. $R(n)$ grubu, her $R \in R(n)$ için

$$R = \begin{bmatrix} & & & & t_1 \\ & & & & . \\ & & a_{ij} & & . \\ & & & & . \\ & & & & t_n \\ 0 & . & . & . \; 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [a_{ij}] \in O(n), \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

biçiminde, $(n+1) \times (n+1)$-tipinde reel ve regüler matrislerin grubu $GL(n+1, \mathbb{R})$ nin bir altgrubu olarak ifade edilebilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Teorem 2.2.6. nın ifadesine göre, herhangibir $R \in R(n)$ genel izometrisi, E^n deki bir x noktasının R altındaki görüntüsü y olmak üzere

$$y = Ax + t, \qquad A \in SO(n), \qquad t \in T(n)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Şimdi n-boyutlu bir Σ^n referans uzayı gözönüne alalım ve bu uzayı (bütün noktaları hareketler altında invaryant anlamında) sabit olarak düşünelim. Σ^n de orijin olarak bir keyfi O noktasını seçerek E^n in herbir $P, Q, ...$ noktasına, bu noktaların Σ^n de $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, ...$ yer vektörlerini karşılık getirelim. Σ^n deki vektörlerin çarpımları Öklid iç çarpımı anlamındadır.

Tanım 2.2.7. E^n de

$$y = Ax + t, \qquad A \in SO(n), \qquad t \in T(n)$$

ile verilen bir genel izometrinin ifadesindeki A ve t operatörleri eğer "*zaman*" ile özdeşlenebilen bir "s" parametrisinin fonksiyonları ve üstelik A ya karşılık gelen ortogonal matrisin determinantı +1 ve bütün karakteristik değerleri -1 den farklı ise, $y = Ax + t$ izometrilerinin sürekli serisine E^n de bir genel hareket denir (Bottema ve Roth, 1979).

$y = Ax + t$ ile verilen bir genel harekette $y \in \Sigma^n$, $x \in E^n$ olup, y ve x vektörleri (veya kolon matrisleri), sırası ile, bir P noktasının Σ^n ve E^n deki yer vektörlerini ifade etmektedirler. Bir genel harekette $y = Ax$ kısmına hareketin dönme kısmı denir. Bir genel hareketin

$$y = A(s)x$$

ile verilen dönme kısmını düşünelim. Hareketli uzayın bir P noktasının hız vektörü

$$y' = A'(s)x$$

ile verilir. Böylece

$$y' = A'(s)A^t(s)y$$

elde edilmekte olup, burada "A^t" ile A matrisinin transpozu gösterilmektedir. A ortogonal bir matris olduğundan, $AA^t = I_n$ eşitliğinin her iki tarafının s ye göre türevi alınır ve

$$W(s) = A'(s)A^t(s)$$

anti-simetrik matrisi tanımlanırsa

$$y' = W(s)y$$

yazılabilir.

Tanım 2.2.8.

$$y' = W(s)y$$

ile verilen $W(s) = A'(s)A^t(s)$ matrisine A ya karşılık gelen hareketin Darboux matrisi denir (Bottema ve Roth, 1979).

Tanım 2.2.9. Birinci mertebeden bir infinitezimal nicelik Σ olmak üzere

$$A = I_n + [\Sigma b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+\Sigma b_{11} & \Sigma b_{12} & . \; . \; . & \Sigma b_{1n} \\ \Sigma b_{21} & 1+\Sigma b_{22} & . \; . \; . & \Sigma b_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \Sigma b_{n1} & \Sigma b_{n2} & . \; . \; . & 1+\Sigma b_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisine bir infinitezimal matris ve bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüme de bir infinitezimal lineer dönüşüm denir (Courant ve Hilbert, 1953).

İnfinitezimal matrislerin çarpımları değişme özeliğine sahiptir. Bir $A = I_n + [\Sigma b_{ij}]$ infinitezimal matrisinin tersi ve determinantı, sırasıyla

$$A^{-1} = I_n - [\Sigma b_{ij}]$$

ve

$$detA = 1 + \Sigma(b_{11} + b_{22} + ... + b_{nn})$$

biçimindedir. Ayrıca, "bir infinitezimal matrisin ortogonalliği için gerek ve yeter şart, bu matris ile birim matris arasındaki fark matrisinin bir anti-simetrik matris olmasıdır" (Courant ve Hilbert, 1953).

2.3. Bir Ortogonal Matris İçin Cayley Formülü

O orijini etrafında bir dönme hareketi

$$y = Ax, \qquad A \in SO(n)$$

ile verilmekte olup, bir harekette bütün uzaklıklar invaryant kaldıklarından

$$< \overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox} > = < \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oy} >$$

ve kısalık için, $\overrightarrow{Ox} = x, \quad \overrightarrow{Oy} = y$ ile gösterilirse

$$< y, y > = < x, x >$$

veya

$$< y - x, y + x > = 0$$

yazılabilir. Böylece

$$f = y - x \qquad ve \qquad g = y + x$$

vektörleri ortogonal olup, $y = Ax$ eşitliği de gözönüne alınarak

$$f = (A - I_n)x, \qquad g = (A + I_n)x, \qquad < f, g > = 0 \tag{2.3.1}$$

bulunur. $Ax = -x$ hali hariç tutulursa (yani, A nın karakteristik değerlerinden birisinin -1 olması hali hariç tutulursa); o zaman $A + I_n$ matrisi regüler olacağından, (2.3.1) in ikinci eşitliğinden bulunan

$$x = (A + I_n)^{-1} g$$

değeri, (2.3.1) in birinci eşitliğinde yerine yazılırsa

$$f = (A - I_n)(A + I_n)^{-1} g$$

elde edilir.

$$(A - I_n)(A + I_n)^{-1} = B \tag{2.3.2}$$

denirse

$$f = Bg$$

olur. $B^t = -B$ olduğundan B matrisi bir anti-simetrik matristir. Diğer taraftan, (2.3.2) den

$$(I_n - B)A = (I_n + B) \tag{2.3.3}$$

yazılabilmekte olup, B bir reel anti-simetrik matris olduğundan

$$det B \geq 0$$

dır ve böylece $det(B - rI_n)$, $r \in \mathbb{R}$, negatif olmayan katsayılar ile r ye göre bir polinomdur. O halde bütün reel karakteristik değerler sıfırdır. Böylece özel olarak $r = 1$ için

$$det(B - I_n) \neq 0$$

olup, $B - I_n$ matrisi regülerdir. Bu durumda, $I_n - B$ matrisinin tersi vardır ve (2.3.3) den, karakteristik değerlerinden birisi -1 olmayan herhangibir ortogonal matris

$$A = (I_n - B)^{-1}(I_n + B) \tag{2.3.4}$$

biçiminde yazılabilir. Bu formül Cayley formülü olarak bilinmektedir (Bottema ve Roth, 1979).

2.4. Bir Ortogonal Matrisin Taylor Açılımı

E^n de bir genel hareket düşünüldüğünde hareketin A ortogonal matrisi için, genelliği bozmaksızın, $s = 0$ başlangıç anında

$$A(0) = I_n$$

olacak biçimde Σ^n ve E^n in orijinlerinin çakıştıkları düşünülebilir. A ortogonal matrisinin O noktası civarında Taylor açılımı

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} A^{(k)}(0) s^k$$

$$A(s) = I_n + A'(0)s + \frac{1}{2!}A^{(2)}(0)s^2 + \frac{1}{3!}A^{(3)}(0)s^3 + ...$$

biçiminde olup, burada $A^{(k)}(0),\ k = 1, 2, ...$, bir sabit matristir. Böylece

$$A'(s) = A'(0) + A^{(2)}(0)s + \frac{3}{3!}A^{(3)}(0)s^2 + ...$$

olup,

$$W(s) = A'(s)A^t(s)$$

Darboux matrisi için, $s = 0$ başlangıç anında

$$W(0) = W_0 = A'(0)A^t(0)$$

ve $A^t(0) = I_n$ olduğundan

$$W(0) = A'(0)$$

elde edilir (Bottema ve Roth, 1979).

2.5. Şemsiye Hareketleri

Tanım 2.5.1. $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^t \in \mathbb{R}^n_1$ olmak üzere

$$AS = S$$

özeliğini sağlayan $A \in O(n)$ matrisine şemsiye matrisi denir ve şemsiye matrislerinin cümlesi $A(n)$ ile gösterilir (Özdamar, 1977).

Teorem 2.5.2. $A(n)$, $O(n)$ in bir altgrubudur (Özdamar, 1977).

Teorem 2.5.3. (Özdamar, 1977) $A = \left[\ a_{ij}\ \right]$ bir $n \times n$ matris olsun. $1 \leq j, k \leq n$ olmak üzere

$$A \in A(n) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ji} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ki} a_{ji} = \delta_{jk}$$

Tanım 2.5.4. E^n de, $A \in A(n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$y = Ax + C$$

ile verilen harekete E^n de bir şemsiye hareketi denir. Burada x, y ve C $n \times 1$ matrislerdir (Hacısalihoğlu, 1977).

2.6. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.6.1. Bir Hausdorff uzayı M olsun. M nin herbir noktası, n-boyutlu Öklid uzayı E^n in bir açık altcümlesine homeomorf bir komşuluğa sahip ise M ye bir n-boyutlu topolojik manifold denir (Matsushima, 1972).

Tanım 2.6.2. Bir n-boyutlu topolojik manifold M olsun. M nin bir V açığı

$$\psi : U \longrightarrow V$$

homeomorfizmi ile E^n in bir U açığına homeomorf olarak verilsin. (U, ψ) ikilisine M nin bir P noktasındaki koordinat komşuluğu denir.

E^n deki bir $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ koordinat sistemi için,

$$\psi : U \longrightarrow V$$

olmak üzere,

$$x_i : u_i \circ \psi^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

biçiminde tanımlı fonksiyonların $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ cümlesine V de bir lokal koordinat sistemi denir (Matsushima, 1972).

Tanım 2.6.3. Bir n-boyutlu topolojik manifold M ve $V_i \subset M$ açık altcümlelerinin $\{V_i\}$ ailesi M nin bir örtüsü olmak üzere, herbir V_i nin E^n deki bir U_i açık altcümlesine ψ_i ile homeomorf olduğunu düşünelim. Bir indis cümlesi I olmak üzere, bu biçimde elde edilen (U_i, ψ_i) koordinat komşuluklarının

$$A = \{(U_i, \psi_i) | i \in I\}$$

ailesine M nin bir atlası denir. Eğer

$$\psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j) \neq \varnothing$$

olacak şekildeki her $(i, j) \in I \times I$ için

$$\psi_i^{-1} \circ \psi_j \qquad ve \qquad \psi_j^{-1} \circ \psi_i$$

fonksiyonları, $r \geq 1$ için r defa diferensiyellenebilir ise A ya bir C^r-sınıfından atlas denir (Matsushima, 1972).

Tanım 2.6.4. Bir n-boyutlu topolojik manifold M olsun. Eğer, M nin C^r-sınıfından bir atlası var ise M ye C^r-sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Matsushima, 1972).

Her $r \in \mathbb{N}$ için M, C^r-sınıfından bir diferensiyellenebilir manifold ise M ye kısaca C^∞-manifold da denir.

Tanım 2.6.5. Bir diferensiyellenebilir manifold M, M den $\mathbb{R}$ ye bütün diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $P \in M$ olmak üzere

$$X_P : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, her $f, g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$1) X_P(af + bg) = a(X_P f) + b(X_P g),$$

$$2) X_P(fg) = (X_P f)g(p) + f(p)(X_P g)$$

özeliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona M nin P noktasındaki bir tanjant vektörü denir.

Bu biçimde tanımlı fonksiyonların cümlesi $T_M(P)$ ile gösterilirse, her $X_P, Y_P \in T_M(P)$, $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}$ için

$$(X_P \oplus Y_P)(f) = X_P f + Y_P g$$

$$(a \odot X_P)(f) = aX_P f$$

işlemleriyle birlikte $T_M(P)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olup, M nin P noktasındaki tanjant uzayı adını alır (Matsushima, 1972).

Burada, $X_P = \sum\limits_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_P$ olmak üzere $X_P f$ ile,

$$X_P f = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}|_P$$

ifade edilmektedir.

Tanım 2.6.6. Bir diferensiyellenebilir manifold M olsun.

$$X : M \overset{1:1 \text{ örten}}{\longrightarrow} \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$

$$P \longrightarrow X_P \in T_M(P)$$

biçiminde tanımlı X dönüşümüne M manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir (Matsushima, 1972).

M üzerindeki X vektör alanlarının cümlesini $\phi(M)$ ile gösterirsek, her $X, Y \in \phi(M)$, $a \in \mathbb{R}$ ve $P \in M$ için

$$(X \oplus Y)(P) = X_P + Y_P$$

$$(a \odot X)(P) = aX_P$$

işlemleriyle birlikte $\phi(M)$ cümlesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur.

Tanım 2.6.7. Bir diferensiyellenebilir manifold M olsun.

$$<,>: \phi(M) \times \phi(M) \longrightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

biçiminde, aşağıdaki özeliklere sahip bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu ve $<,>$ dönüşümüne de M üzerinde metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir: $\forall X, Y \in \phi(M)$ ve $(a \in \mathbb{R})$ için

1) $< X, Y >=< Y, X >$

2) $< X + Y, Z >=< X, Z > + < Y, Z >, \qquad Z \in \phi(M)$

3) $< aX, Y >= a < X, Y >$

4) $< X, X >> 0 \Longleftrightarrow X \neq 0$

5) X, Y vektör alanları diferensiyellenebilir ise

$$< X, Y >: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu da diferensiyellenebilirdir.

Bu tanımda eğer (3) özeliği yerine,

3') Her $X \in \phi(M)$ için, $< X, Y >= 0 \Longrightarrow Y = 0$

özeliği alınırsa M manifolduna bir yarı-Riemann manifoldu denir (Hicks, 1974).

Tanım 2.6.8. Bir yarı-Riemann manifoldu M olmak üzere

$$D : \phi(M) \times \phi(M) \longrightarrow \phi(M)$$

$$D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu, her $X, Y, Z \in \phi(M)$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

1) $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$

2) $D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z$

3) $D_{fX} Y = f D_X Y$

4) $D_X(fY) = f D_X Y + (Xf)Y$

5) $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$

6) $X < Y, Z >=< D_X Y, Z > + < Y, D_X Z >$

özeliklerini sağlarsa bu D fonksiyonuna M üzerinde bir Riemann konneksiyonu ve D_X e de, X e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir ve $Y = (y_1, ..., y_n)$ vektör alanı diferensiyellenebilir olmak üzere $D_{X_P} Y = (X_P y_1, ..., X_P y_n)$ biçiminde tanımlanır (Hicks, 1974).

Örnek 2.6.9. n-boyutlu Öklid uzayı E^n de bir Öklid koordinat sistemi $\{x_1, ..., x_n\}$ olmak üzere, $\phi(E^n)$ in bir bazının $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ olduğu bilinmektedir.

$$<,>: \phi(E^n) \times \phi(E^n) \longrightarrow C^\infty(E^n, \mathbb{R})$$

fonksiyonu, $X = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$< X, Y >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

biçiminde tanımlanırsa, $\phi(E^n)$ de tanımlanan bu iç çarpım ile E^n bir Riemann manifoldu olur (Hicks, 1974).

Tanım 2.6.10. Bir (n-1)-boyutlu diferensiyellenebilir manifold $\overline{M}$ olmak üzere

$$f : \overline{M} \longrightarrow E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ve her $P \in \overline{M}$ için

$$(f_*)_P : T_{\overline{M}}(P) \longrightarrow T_{E^n}(f(P))$$

türev dönüşümü birebir ise $f(\overline{M}) = M$ manifolduna E^n in bir (n-1)-altmanifoldu veya bir hiperyüzeyi denir (Hicks, 1974).

Tanım 2.6.11. E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı $N = (a_1, ..., a_n)$ olsun. Her $P \in M$ için,

$$S : T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

$$S(X_P) = D_{X_P} N$$

biçiminde tanımlı S dönüşümüne M nin şekil operatörü denir (Hicks, 1974).

Tanım 2.6.12. E^n in bir hiperyüzeyi M üzerinde

$$II : \phi(M) \times \phi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$II(X, Y) =< S(X), Y >$$

biçiminde tanımlı II fonksiyonuna M üzerinde ikinci temel form denir (Hicks, 1974).

Tanım 2.6.13. E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde ikinci temel form II olsun. Bir $P \in M$ noktasında iki doğrultu $X_P, Y_P \in T_M(P)$ olmak üzere

$$II(X_P, Y_P) = 0$$

oluyorsa X_P ve Y_P doğrultularına eșlenik doğrultular denir (Hicks, 1974).

Tanım 2.6.14. E^n in bir hiperyüzeyi M , M üzerinde ikinci temel form II ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n ve M nin Riemann konneksiyonları, sırası ile, D ve $\overline{D}$ olmak üzere, her $X, Y \in \phi(M)$ için

$$D_X Y = \overline{D}_X Y + II(X, Y)N$$

denklemine Gauss denklemi denir (Hicks, 1974).

2.7. E^3 de Șeridin Eğrilikleri

E^3 de bir M yüzeyi içinde birim hızlı bir $\alpha : I \longrightarrow M$ eğrisi verilsin. Y yüzeyin birim dik vektör alanı N olsun. α eğrisinin birim teğet vektör alanı V_1 olmak üzere,

$$(N \circ \alpha) \times V_1 = Y$$

eșitliğiyle tanımlanan Y vektör alanını göz önüne alalım. Vektörel çarpımın özeliklerinden dolayı $\{V_1(s), Y(s), (N \circ \alpha)(s)\}$ kümesi, $T_{E^3}(\alpha(s))$ uzayının ortonormal bir tabanı olur. Bu tabana, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısı denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.7.1. $\alpha : I \longrightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_\eta(s) =< \alpha'', (N \circ \alpha)(s) >$$

eșitliğiyle belirli $\kappa_\eta(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.7.2. $\alpha : I \longrightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_g(s) = < \alpha'', Y(s) >$$

eşitliğiyle belirli $\kappa_g(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodizik eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.7.3. $\alpha : I \longrightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$t_r(s) = - < (N \circ \alpha)'(s), Y(s) >$$

eşitliğiyle belirli $t_r(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik burulması denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.7.4. $\alpha : I \longrightarrow M$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\kappa_\eta, \kappa_g, t_r$ fonksiyonlarına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.7.5. α, M içinde birim hızlı bir eğri olsun. (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri, $\kappa_\eta, \kappa_g, t_r$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} V_1 &= \kappa_g Y + \kappa_\eta (N \circ \alpha) \\ Y' &= -\kappa_g V_1 + t_r (N \circ \alpha) \\ (N \circ \alpha) &= -\kappa_\eta V_1 - t_r Y \end{aligned}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2004).

Bu eşitlikler matris formunda

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ Y' \\ (N \circ \alpha)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_\eta \\ -\kappa_g & 0 & t_r \\ -\kappa_\eta & -t_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ Y \\ (N \circ \alpha) \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır.

2.8. E^n de Eğriler

Tanım 2.8.1. n-boyutlu Öklid uzayı E^n ve $\mathbb{R}$ de bir irtibatlı açık altcümle I olmak üzere,

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n de bir eğri denir ve kısaca α ile gösterilir (Hicks, 1974).

Tanım 2.8.2. E^n de bir

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\alpha_*(\frac{\partial}{\partial s}) = U_1$$

ve E^n deki konneksiyon D olmak üzere

$$U_i = D_{U_1}U_{i-1}, \qquad 1 < i \leq n$$

biçiminde tanımlı vektör alanlarından oluşan $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ sistemi lineer bağımsız olsun. Bu sisteme Gram-Schmidt metodunun uygulanması ile elde edilen ortonormal

$$\{V_1, V_2, ..., V_n\}$$

vektör alan sistemine, α eğrisinin E^n de Frenet-Serret çatı alan sistemi veya Frenet çatı alan sistemi denir. Burada $U_1 = V_1$ dir (Hicks, 1974).

Tanım 2.8.3. E^n de bir

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

eğrisinin Frenet çatı alan sistemi $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ olsun. Bu durumda, $1 \leq i < n$ için

$$k_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$k_i(s) =< V_i'(s), V_{i+1}(s) >$$

biçiminde tanımlı k_i fonksiyonuna, α eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında α nın i-yinci eğriliği denir (Hicks, 1974).

Tanım 2.8.4. E^n de bir

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

eğrisi s yay-parametrisi ile verilmiş olsun. α nın i-yinci eğrilik fonksiyonu k_i ve Frenet çatı alanı $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ olmak üzere, $1 \leq i \leq n$, $k_0 = k_n = 0$ için

$$D_V V_i = V_i' = -k_{i-1}V_{i-1} + k_i V_{i+1}$$

formüllerine Frenet formülleri denir (Hicks, 1974).

Frenet formüllerini,

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ . \\ . \\ . \\ V_{n-2}' \\ V_{n-1}' \\ V_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & & & & . & . & . \\ . & . & . & & & & . & . & . \\ . & . & . & & & & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & k_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ . \\ V_{n-2} \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} \quad (2.8.5)$$

formunda ya da basitçe

$$V' = K(V)V$$

biçiminde matrisler ile yazmak da mümkündür. Buradaki anti-simetrik $K(V)$ matrisine E^n de bir α eğrisinin eğrilik matrisi denir.

$n = 3$ özel hali özel halinde (2.8.6) eşitliği

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. 1-inci eğrilik olan $k_1(s)$ değeri eğrilik adıyla ve 2-inci eğrilik olan $k_2(s)$ değeri de burulma(torsiyon) adıyla bilinir.

Tanım 2.8.5. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde bir

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\alpha_*(\frac{\partial}{\partial s}) = Y_1$$

ve M deki $\bar{D}$ konneksiyonuna göre

$$Y_i = \bar{D}_{Y_1} Y_{i-1}, \qquad 1 < i \leq n-1$$

biçiminde tanımlı vektör alanlarından oluşan $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}\}$ sistemi lineer bağımsız olsun. Bu sisteme Gram-Schmidt metodunun uygulanması ile elde edilen ortonormal

$$\{X_1, X_2, ..., X_{n-1}\}$$

vektör alan sistemine, α eğrisinin M hiperyüzeyi üzerinde Frenet çatı alan sistemi denir. Burada, $X_1 = Y_1$ dir (Guggenheimer, 1963).

Tanım 2.8.6. E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

eğrisi verilmiş olsun. α eğrisinin M deki Frenet çatı alan sistemi $\{X_1, X_2, ..., X_{n-1}\}$ e, M nin birim normal vektör alanı X_n nin katılmasıyla elde edilen ortonormal $\{X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n\}$ sistemine, eğri-hiperyüzey ikilisi için bir doğal çatı alanı veya bir cross-section denir (Guggenheimer, 1963).

Tanım 2.8.7. E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

eğrisi verilmiş olsun. (α, M) ikilisi için bir doğal çatı alanı $\{X_1, ..., X_{n-1}, X_n\}$ olmak üzere, $1 \leq i < n-1$ için

$$k_{ig}(s) =< X_i'(s), X_{i+1}(s) >$$

biçiminde tanımlı

$$k_{ig} : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna, α eğrisinin i-yinci geodezik eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_{ig}(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında α nın i-yinci geodezik eğriliği denir (Guggenheimer, 1963).

Tanım 2.8.8. E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

eğrisi verilmiş olsun. (α, M) ikilisi için bir doğal çatı alanı $\{X_1, ..., X_{n-1}, X_n\}$ in türev formülleri, $1 \leq i \leq n-1$ ve $k_{0g} = k_{(n-1)g} = 0$ olmak üzere,

$$D_{X_1}X_i = X_i' = -k_{(i-1)g}X_{i-1} + k_{ig}X_{i+1} + II(X_1, X_i)X_n \tag{2.8.6}$$

$$D_{X_1}X_n = -II(X_1, X_1)X_1 - II(X_1, X_2)X_2 - ... - II(X_1, X_{n-1})X_{n-1} \tag{2.8.7}$$

ile verilip ve kısalık için $II(X_1, X_i) = a_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ denirse, bu eşitlikler matris formunda

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \\ \vdots \\ X_{n-2}' \\ X_{n-1}' \\ X_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{1g} & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ -k_{1g} & 0 & k_{2g} & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -k_{2g} & 0 & & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{(n-2)g} & a_{(n-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{(n-2)g} & 0 & a_{(n-1)} \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & 0 & -a_{(n-1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n-2} \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} \tag{2.8.8}$$

veya kısaca, X ve X' kolon vektörlerini göstermek üzere,

$$X' = K(X)X$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki $K(X)$ anti-simetrik matrisine, (α, M) ikilisi için doğal çatı alanının Cartan matrisi veya M üzerinde α eğrisinin eğrilik matrisi denir (Guggenheimer, 1963).

Tanım 2.8.9. E^n in bir hiperyüzeyi M ve M üzerinde bir eğri

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

olsun. Bu eğrinin teğet vektör alanı T olmak üzere, eğer T vektör alanı, M nin şekil operatörü S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizisidir denir (Guggenheimer, 1963).

Bu tanıma göre, M hiperyüzeyi üzerinde eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi

$$S(T) = aT, \quad a \neq 0 \quad ve \quad a \in \mathbb{R}$$

biçimindedir.

3. EĞRİ BOYUNCA HAREKETLERİN DARBOUX MATRİSLERİ VE EĞRİLİK MATRİSLERİ

3.1. E^n de Frenet-Serret Hareketinin Darboux Matrisi

Bu hareket için referans uzayını $\sum^n$ sabit uzayı ve hareketli uzayı da E^n olarak alalım. Standart (ortonormal) çatıyı $E = \{O; e_1, ..., e_n\}$, hareketli (ortonormal) çatıyı $H = \{o; x_1, ..., x_n\}$ ve $\sum^n$ uzayında yay-parametresi ile verilmiş bir α eğrisinin bir Q noktasındaki Frenet çatısını da $V = \{V_1, ..., V_n\}$ ile gösterelim. E^n de Frenet-Serret hareketi, $x_1, ..., x_{n-1}$ eksenleri α eğrisinin $V_1, ..., V_{n-1}$ vektörleri ile çakışacak şekilde dönme yaparken, $\{x_1, ..., x_n\}$ hareketli çatısının o orijini ile birlikte α eğrisi boyunca hareketinden oluşmaktadır. Böylece, o orijini α eğrisinin Q noktası ile çakışırken, $\{x_1, ..., x_n\}$ çatısı da Q noktasında $\{V_1, ..., V_n\}$ çatısı ile çakışır. O halde, bu hareketin geometrisi α eğrisi ile ilgilidir.

Şimdi, aşağıdaki teoremle, E^n deki α eğrisi boyunca, Frenet-Serret hareketinin açısal hız matrisinin $W(E, V)$ Darboux matrisi verilebilir.

Teorem 3.1.1. (Esin, 1982) E^n de bir α eğrisi boyunca Frenet-Serret hareketinin $W(E, V) = [w_{ij}]_{n \times n}$ Darboux matrisinin w_{ij} elemanları,

$$w_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} det[P_{ij}(V_{r+1}), P_{ij}(V_r)]k_r \tag{3.1.1}$$

ile verilebilir; burada $P_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$ ler, herhangibir $U = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in T_{E^n}(P)$ için

$$P_{ij} : T_{E^n}(P) \longrightarrow S_p\{e_i, e_j\}$$

$$P_{ij}(U) = u_i e_i + u_j e_j$$

biçiminde tanımlı ortogonal izdüşümleri ve k_r de α eğrisinin r-yinci eğriliğini göstermektedir.

İspat. $(V_1^q, ..., V_n^q)$, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere V çatısının herhangi bir V_q vektörünü temsil etsin. V nin E üzerindeki hareketini ifade eden

$$E = AV, \quad A \in SO(n)$$

eşitliğindeki A pozitif ortogonal matrisi yardımıyla E^n de Frenet-Serret hareketinin $n \times n$ anti-simetrik $W(E, V)$ Darboux matrisi belirtilir.

$$A = [v_i^j] = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & . & . & . & v_1^{r-1} & v_1^r & v_1^{r+1} & . & . & . & v_1^n \\ v_2^1 & v_2^2 & . & . & . & v_2^{r-1} & v_2^r & v_2^{r+1} & . & . & . & v_2^n \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ v_i^1 & v_i^2 & . & . & . & v_i^{r-1} & v_i^r & v_i^{r+1} & . & . & . & v_i^n \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ v_n^1 & v_n^2 & . & . & . & \underbrace{v_n^{r-1}}_{V_{r-1}} & \underbrace{v_n^r}_{V_r} & \underbrace{v_n^{r+1}}_{V_{r+1}} & . & . & . & v_n^n \end{bmatrix}$$

Tanım 2.8.4. Frenet formüllerinden,

$$\begin{aligned} V_r' = (V_1^{r'}, V_2^{r'}, ..., V_i^{r'}, ..., V_n^{r'}) = & - \ k_{r-1}(V_1^{r-1}, V_2^{r-1}, ..., V_i^{r-1}, ..., V_n^{r-1}) \\ & + \ k_r \ (V_1^{r+1}, V_2^{r+1}, ..., V_i^{r+1}, ..., V_n^{r+1}) \end{aligned}$$

$$V_i^{r'} = -k_{r-1}V_i^{r-1} + k_r V_i^{r+1} \tag{3.1.2}$$

yazılabilir. Pozitif ortogonal matrisinin s yay-parametresine göre türevi $A' = [v_i^{j'}(s)]$ olmak üzere $W(E,V) = A'A^t$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} [w_{ij}] &= [v_i^{r'}][v_j^r] = [\sum_{r=1}^{n} v_i^{r'} v_j^r] \\ w_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} v_i^{r'} v_j^r \end{aligned}$$

elde edilir. Bu (3.1.2) ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} (-k_{r-1} v_i^{r-1} + k_r v_i^{r+1}) v_j^r \\ w_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} k_r v_i^{r+1} v_j^r - \sum_{r=1}^{n} k_{r-1} v_i^{r-1} v_j^r \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_{r=1}^{n} k_r v_i^{r+1} v_j^r = A$$

$$-\sum_{r=1}^{n} k_{r-1} v_i^{r-1} v_j^r = B$$

yazılırsa ve $r \leq i \leq n$ için,

$$\begin{aligned} A &= k_1 v_i^2 v_j^1 + k_2 v_i^3 v_j^2 + ... + k_{n-1} v_i^n v_j^{n-1} + k_n v_i^{n+1} v_j^n \\ B &= k_0 v_i^0 v_j^1 + k_1 v_i^1 v_j^2 + ... + k_{n-2} v_i^{n-2} v_j^{n-1} + k_{n-1} v_i^{n-1} v_j^n \end{aligned}$$

olur. $k_0 = k_n = 0$ olduğundan

$$A = \sum_{r=1}^{n-1} k_r v_i^{r+1} v_j^r \quad ve \quad B = \sum_{r=1}^{n-1} k_r v_i^r v_j^{r+1}$$

şeklinde bulunur. O halde

$$w_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} (v_i^{r+1} v_j^r \; - \; v_i^r v_j^{r+1}) k_r$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$w_{ji} = \sum_{r=1}^{n-1} (v_j^{r+1} v_i^r \; - \; v_j^r v_i^{r+1}) k_r$$
$$w_{ji} = -\sum_{r=1}^{n-1} (v_j^r v_i^{r+1} \; - \; v_j^{r+1} v_i^r) k_r$$

yazılabilir. Böylece, $w_{ij} = -w_{ji}$ ya da $-W^t = W$ dir. Yani, W anti-simetriktir. Diğer taraftan bir P noktasındaki $T_{E^n}(P)$ tanjant uzayı için

$$T_{E^n}(P) = S_p\{e_i, e_j\} \bigoplus S_p\{e_1, ..., e_{i-1}, \; e_{i+1}, ..., e_{j-1}, \; e_{j+1}, ..., e_n\}$$

yazılabilir. Üstelik, $P_{ij}(U) = u_i e_i + u_j e_j$ ve $1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j$ için

$$P_{ij} : T_{E^n}(p) \longrightarrow Sp\{e_i, e_j\}$$

dönüşümleri lineerdir. Böylece P_{ij} ortogonal izdüşümleri kullanılarak

$$\begin{aligned} P_{ij}(V_{r+1}) &= P_{ij}(V_1^{r+1}, ..., V_i^{r+1}, ..., V_j^{r+1}, ..., V_n^{r+1}) = V_i^{r+1} e_i + V_j^{r+1} e_j \\ P_{ij}(V_r) &= P_{ij}(V_1^r, ..., V_i^r, ..., V_j^r, ..., V_n^r) = V_i^r e_i + V_j^r e_j \end{aligned}$$

olduğundan

$$det[P_{ij}(V_{r+1}), P_{ij}(V_r)] = det[V_i^{r+1} e_i + V_j^{r+1} e_j, V_i^r e_i + V_j^r e_j]$$

dır. Determinant fonksiyonunun lineerliğinden yukarıdaki ifade

$$v_i^{r+1} v_j^r - v_i^r v_j^{r+1} det(e_i, e_j)$$

halini alır. O halde

$$v_i^{r+1}v_j^r - v_i^r v_j^{r+1} = det[P_{ij}(V_{r+1}), P_{ij}(V_r)]$$

olduğundan

$$w_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} det[P_{ij}(V_{r+1}), P_{ij}(V_r)]k_r$$

elde edilir.

$W(E, V) = [w_{ij}]_{n\times n}$ matrisi anti-simetrik olduğundan $i < j$ elemanlarıyla bellidir. Bu bağımsız elemanların sayısı $n(n-1)/2$ olup, bu özelikten yararlanarak $W(E, V)$ matrisini açık bir şekilde (3.1.1) eşitliklerinden yazalım ve yazım kolaylığı için

$$\begin{aligned}
a_{12} &= \sum_{r=1}^{n-1} det[P_{12}(V_{r+1}), P_{12}(V_r)]k_r \\
a_{13} &= \sum_{r=1}^{n-1} det[P_{13}(V_{r+1}), P_{13}(V_r)]k_r \\
a_{1n} &= \sum_{r=1}^{n-1} det[P_{1n}(V_{r+1}), P_{1n}(V_r)]k_r \\
a_{23} &= \sum_{r=1}^{n-1} det[P_{23}(V_{r+1}), P_{23}(V_r)]k_r \\
a_{2n} &= \sum_{r=1}^{n-1} det[P_{2n}(V_{r+1}), P_{2n}(V_r)]k_r \\
a_{(n-1)n} &= \sum_{r=1}^{n-1} det[P_{(n-1)n}(V_{r+1}), P_{(n-1)n}(V_r)]k_r
\end{aligned}$$

denilirse

$$
W(E,V)=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & a_{(n-1)n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}
$$

elde edilir.

3.2. Özel Hal ve Sağlama

Önceki kesimde yapılan genellemenin $n = 3$ özel hal için bilinen 3×3 Darboux matrisine karşılık geldiğini gösterelim. $n = 3$ için, (3.1.1) eşitliklerinden

$$
W(E,V)=\begin{bmatrix} 0 & \sum\limits_{r=1}^{2} det[P_{12}(V_{r+1}),P_{12}(V_r)]k_r & \sum\limits_{r=1}^{2} det[P_{13}(V_{r+1}),P_{13}(V_r)]k_r \\ & 0 & \sum\limits_{r=1}^{2} det[P_{23}(V_{r+1}),P_{23}(V_r)]k_r \\ & & 0 \end{bmatrix}
$$

yazılabilir. Matrisimiz anti-simetrik olduğundan sadece bağımsız w_{12}, w_{13}, w_{23} elemanlarını hesaplamak yeterlidir. O halde,

$$
\begin{aligned}
w_{12} &= \sum_{r=1}^{2} det[P_{12}(V_{r+1}),P_{12}(V_r)]k_r \\
w_{12} &= det[P_{12}(V_2),P_{12}(V_1)]k_1 + det[P_{12}(V_3),P_{12}(V_2)]k_2 \\
w_{12} &= (v_1^2 v_2^1 - v_1^1 v_2^2)k_1 + (v_1^3 v_2^2 - v_1^2 v_2^3)k_2
\end{aligned}
$$

olup,

$$
A_{3\times 3}=\begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{bmatrix}
$$

pozitif ortogonal matrisinin (i, j)-ninci kofaktörü, matrisin (i, j)-ninci elemanına eşit olacağından,

$$\begin{aligned} v_1^1 v_2^2 - v_1^2 v_2^1 &= v_3^3 \\ v_1^2 v_2^3 - v_1^3 v_2^2 &= v_3^1 \end{aligned}$$

yazılabilir ve böylece,

$$w_{12} = -(v_3^3 k_1 + v_3^1 k_2)$$

elde edilir. Benzer biçimde hesaplama ile,

$$\begin{aligned} w_{13} &= \sum_{r=1}^{2} [P_{13}(V_{r+1}), P_{13}(V_r)] k_r = v_2^3 k_1 + v_2^1 k_2 \\ w_{23} &= \sum_{r=1}^{2} [P_{23}(V_{r+1}), P_{23}(V_r)] k_r = -(v_1^3 k_1 + v_1^1 k_2) \end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$W(E, V) = \begin{bmatrix} 0 & -(v_3^3 k_1 + v_3^1 k_2) & v_2^3 k_1 + v_2^1 k_2 \\ v_3^3 k_1 + v_3^1 k_2 & 0 & -(v_1^3 k_1 + v_1^1 k_2) \\ -(v_2^3 k_1 + v_2^1 k_2) & v_1^3 k_1 + v_1^1 k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup, bu ise E^3 de Frenet-Serret hareketi için bilinen Darboux matrisidir.

3.3. Darboux Matrisi ve Eğrilik Matrisi

Teorem 3.3.1. (Esin, 1982) E^n de Frenet-Serret çatısının değişimini veren $K(V)$ eğrilik matrisi ile, E^n de Frenet-Serret hareketinin $W(E, V)$ Darboux matrisi arasında

$$K(V) = -A^t W(E, V) A \tag{3.3.3}$$

bağıntısı vardır.

İspat. $E = AV$ eşitliğinin her iki yanının s yay-parametresine göre türevi alınırsa, E çatısı sabit olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= A'V + AV' \\ V' &= -A^t A' V \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $V = A^t E$, $W(E, V) = A' A^t$, $V' = K(V)V$ eşitlikleri de gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} V' &= -A^t A' A^t E \\ &= -A^t W(E, V) E \\ K(V)V &= -A^t W(E, V) E \\ K(V) A^t E &= -A^t W(E, V) E \\ K(V) A^t &= -A^t W(E, V) \\ K(V) &= -A^t W(E, V) A \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenilen eşitliktir.

Genelliği bozmaksızın, $s = 0$ başlangıç anı için, $A_0 = I_n$ olacak biçimde $\sum^n$ in ve E^n in orijinlerinin çakıştıkları düşünülebilir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3.2. (Esin, 1982) $s = 0$ başlangıç anı için, $W_0(E, V)$ ve $K_0(V)$ sırasıyla, E^n deki Frenet-Serret hareketinin Darboux matrisi ve E^n deki eğrinin eğrilik matrisi olsun. Bu taktirde

$$K_0(V) = -W_0(E, V) \tag{3.3.4}$$

dır.

İspat. Genelliği bozmaksızın $s = 0$ için E^n ve $\sum^n$ başlangıç orijinlerinin çakıştığını yani $A_0 = \mathrm{I}_n$ olduğunu kabul edebiliriz. İlk olarak $s = 0$ a göre (3.3.3) denklemi yazılırsa

$$K_0(V) = -A_0^t \; W_0(E, V) \; A_0$$

elde edilir. Bu $A_0 = I_n$ ile beraber

$$K_0(V) = -W_0(E, V)$$

yi gerektirir. Bu da istenilen eşitliktir.

Şimdi E^n deki bir M hiperyüzeyinde uzanan bir α eğrisini düşünelim. Bu taktirde (α, M) ikilisi için $X = \{X_1, ..., X_{n-1}, X_n\}$ doğal çatı alanından bahsedilebilir. X çatısının α eğrisi boyunca hareketi, ayrıca V çatısının hareketine benzer. O halde, (α, M) ikilisi için X doğal çatısının hareketinin $W(E, X)$ ile göstereceğimiz Darboux matrisini belirtelim.

Teorem 3.3.3. (Esin, 1982) E^n in bir M hiperyüzeyi üzerinde bir eğri α olsun. (α, M) ikilisi için $X = \{X_1, ..., X_{n-1}, X_n\}$ doğal çatı alanının eğri boyunca hareketinin $W(E, X) = [w_{ij}]_{n\times n}$ Darboux matrisinin w_{ij} elemanları, $II(X_1, X_r) = a_r$ olmak üzere,

$$w_{ij} = \sum_{r=1}^{n-2} det[P_{ij}(X_{r+1}), P_{ij}(X_r)]k_{rg} \; - \sum_{s=1}^{n-1} a_s \; x_i^s \; x_j^n \tag{3.3.5}$$

ile verilebilir; burada P_{ij} $(1 \leq i, j \leq n, \; i \neq j)$ ler ile ortogonal izdüşümler, k_{rg} ile α eğrisinin r-yinci geodezik eğriliği ve x_i^k $(1 \leq k \leq n)$ ile de X_k nın i-yinci bileşeni gösterilmektedir.

İspat. X çatısının herhangibir X_q $(1 \leq q \leq n)$ vektörünün standart E çatısına göre bileşenlerini $(x_1^q, ..., x_n^q)$ ile gösterelim. X in E üzerindeki hareketini veren

$$E = BX \quad , \quad B \in SO(n)$$

$$B=[x_i^j]=\begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & . & . & . & x_1^{r-1} & x_1^r & x_1^{r+1} & . & . & . & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & . & . & . & x_2^{r-1} & x_2^r & x_2^{r+1} & . & . & . & x_2^n \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ x_i^1 & x_i^2 & . & . & . & x_i^{r-1} & x_i^r & x_i^{r+1} & . & . & . & x_i^n \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ x_n^1 & x_n^2 & . & . & . & \underbrace{x_n^{r-1}}_{X_{r-1}} & \underbrace{x_n^r}_{X_r} & \underbrace{x_n^{r+1}}_{X_{r+1}} & . & . & . & x_n^n \end{bmatrix}$$

Tanım 3.3.9 dan,

$$\begin{aligned} X_r' = (X_1^{r'}, X_2^{r'}, ..., X_i^{r'}, ..., X_n^{r'}) = & - k_{(r-1)g}(X_1^{r-1}, X_2^{r-1}, ..., X_i^{r-1}, ..., X_n^{r-1}) \\ & + k_{rg} \ (X_1^{r+1}, X_2^{r+1}, ..., X_i^{r+1}, ..., X_n^{r+1}) \\ & + II(X_1, (X_1^r, X_2^r, ..., X_i^r, ..., X_n^r))X_i^n \end{aligned}$$

$$X_i^{r'} = -k_{(r-1)g}X_i^{r-1} + k_{rg}X_i^{r+1} + II(X_1, X_i^r)X_i^n \qquad (3.3.6)$$

yazılır. Pozitif ortogonal B matrisinin s yay-parametresine göre türevi $B' = [x_i^{j'}(s)]$ olmak üzere $W(E,X) = B'B^t$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} [w_{ij}] &= [x_i^{r'}][x_j^r] = [\sum_{r=1}^{n} x_i^{r'} x_j^r] \\ w_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} x_i^{r'} x_j^r \\ w_{ij} &= \sum_{r=1}^{n-1} x_i^{r'} x_j^r + x_i^{n'} x_j^n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu (3.3.6), (2.8.7) ile birlikte düşünülür ve kısalık için $II(X_1, X_i^r) = a_r$ denilirse,

$$w_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1}(-k_{(r-1)g}x_i^{r-1}x_j^r + k_{rg}x_i^{r+1}x_j^r) - \sum_{s=1}^{n-1} a_s x_i^s x_j^n$$

elde edilir. $k_{0g} = k_{(n-1)g} = 0$ olduğundan,

$$w_{ij} = \sum_{r=1}^{n-2}(x_i^{r+1}x_j^r \ - \ x_i^r x_j^{r+1})k_{rg} - \sum_{s=1}^{n-1} a_s x_i^s x_j^n$$

bulunur. Burada,

$$T_{E^n}(P) = S_p\{e_i, e_j\} \bigoplus S_p\{e_1, ..., e_{i-1}, \ e_{i+1}, ..., e_{j-1}, \ e_{j+1}, ..., e_n\}$$

yazabiliriz. Üstelik, $P_{ij}(U) = u_i e_i + u_j e_j$ ve $1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j$ için

$$P_{ij} : T_{E^n}(P) \longrightarrow Sp\{e_i, e_j\}$$

dönüşümleri lineerdir. Böylece P_{ij} ortogonal izdüşümleri kullanarak

$$\begin{aligned} P_{ij}(X_{r+1}) &= P_{ij}(X_1^{r+1}, ..., X_i^{r+1}, ..., X_j^{r+1}, ..., X_n^{r+1}) = X_i^{r+1}e_i + X_j^{r+1}e_j \\ P_{ij}(X_r) &= P_{ij}(X_1^r, ..., X_i^r, ..., X_j^r, ..., X_n^r) = X_i^r e_i + X_j^r e_j \end{aligned}$$

olduğundan

$$det[P_{ij}(X_{r+1}), P_{ij}(X_r)] = det[X_i^{r+1}e_i + X_j^{r+1}e_j, X_i^r e_i + X_j^r e_j]$$

dır. Determinant fonksiyonunun lineerliğinden yukarıdaki ifade

$$x_i^{r+1}x_j^r - x_i^r x_j^{r+1} det(e_i, e_j)$$

halini alır. O halde

$$x_i^{r+1}x_j^r - x_i^r x_j^{r+1} = det[P_{ij}(X_{r+1}), P_{ij}(X_r)]$$

olduğundan

$$w_{ij} = \sum_{r=1}^{n-2} det[P_{ij}(X_{r+1}), P_{ij}(X_r)]k_{rg} - \sum_{s=1}^{n-1} a_s x_i^s x_j^n$$

elde edilir.

(α, M) ikilisi için elde edilen $K(X)$ eğrilik matrisi ile, elemanları (3.3.5) formülü ile belirlenen $W(E, X)$ Darboux matrisi arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 3.3.4. (Esin, 1982) $K(X)$, (α, M) ikilisinin eğrilik matrisi ve $W(E, X)$ de α boyunca X in hareketinin Darboux matrisi olsun. Bu taktirde

$$K(X) = -B^t \; W(E, X) \; B \tag{3.3.7}$$

dır.

İspat. $E = BX$ ifadesinin s ye göre türevi alınırsa, E çatısı sabit olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= B' \; X \; + \; B \; X' \\ X' &= -B^t \; B' \; X \\ &= -B^t \; B' \; B^t \; E \\ &= -B^t \; W(E, X) \; E \end{aligned}$$

Ayrıca $X' = K(X)X$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
K(X)X &= -B^t\, W(E,X)\, E \\
K(X)\, B^t\, E &= -B^t\, W(E,X)\, E \\
K(X)\, B^t &= -B^t\, W(E,X) \\
K(X) &= -B^t\, W(E,X)\, B
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.5. (Esin, 1982) $W_0(E,X)$, α boyunca $s = 0$ başlangıç anı için X hareketinin Darboux matrisi olsun. Bu taktirde $K_0(X)$, $s = 0$ başlangıç anında (α, M) çiftinin eğrilik matrisi olmak üzere

$$K_0(X) = -W_0(E,X) \tag{3.3.8}$$

dır.

İspat. Eğer $s = 0$ için (3.3.7) teki $B_0 = I_n$ alınırsa, (3.3.8) elde edilir.

Buraya kadar yapılanların yardımıyla, eğri boyunca ortonormal çatıların Darboux matrisleri arasında bir ilişki kuralabilir. Dolayısıyla, E^n de bir eğrinin yüksek mertebeden eğrilikleri ile, E^nde bir M hiperyüzeyi üzerindeki bir α eğrisinin yüksek mertebeden eğrilikleri arasında da bir bağıntı kurulmuş olacaktır. Bunun için (α, M) ikilisinin doğal çatı alanı X in, V Frenet çatısı üzerindeki değişimini gözönüne alınmalıdır.

Teorem 3.3.6. (Esin, 1982) X doğal çatısının V Frenet çatısı üzerindeki

$$V = CX, \quad C \in SO(n)$$

ile verilen değişimin Darboux matrisi

$$W(V,X) = C'\, C^t$$

olsun. $W(V,X)$ ile, $W(E,V)$ ve $W(E,X)$ Darboux matrisleri arasında

$$-A^tW(E,V)A = W(V,X) \; - \; CB^tW(E,X)A \tag{3.3.9}$$

bağıntısı vardır.

İspat. $V = CX$ in, s ye göre türevi alınırsa,

$$V' = C' \; X \; + \; C \; X'$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.4 ün ispatlarından

$$\begin{aligned} V' &= -A^t \; W(E,V) \; E \\ X' &= -B^t \; W(E,X) \; E \end{aligned}$$

oldukları görülmüştü. Üstelik $X = C^tV$ yazılabilir. Böylece, bu ifadeler $V' = C' \; X \; + \; C \; X'$ eşitliğinde yazılırsa

$$-A^t \; W(E,V) \; A = W(V,X) \; - \; C \; B^t \; W(E,X) \; A$$

denklemine indirgenir ve bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.7. (Esin, 1982) $s = 0$ başlangıç anında Darboux matrisleri arasında

$$-W_0(E,V) = W_0(V,X) \; - \; W_0(E,X) \tag{3.3.10}$$

eşitliği mevcuttur.

İspat. $s = 0$ başlangıç anı için

$$A_0 = B_0 = C_0 = I_n$$

olduğundan (3.3.9) dan dolayı ispat açıktır.

Sonuç 3.3.8. (Esin, 1982) Eğrilik matrisleri arasında

$$K(V) = C' \, C^t \; + \; C \; K(X) \; C^t \tag{3.3.11}$$

eşitliği vardır.

İspat.

$$\begin{aligned} -A^t \, W(E,V) \, A &= K(V) \\ C' \, C^t &= W(V,X) \\ A &= B \, C^t \end{aligned}$$

eşitlikleri (3.3.9) da kullanılırsa,

$$K(V) = C' \, C^t \; + \; C \; B^t \; W(E,X) \; B \; C^t$$

yazılabilir. Ayrıca

$$-B^t \; W(E,X) \; B = K(X)$$

olduğundan

$$K(V) = C' \, C^t \; + \; C \; K(X) \; C^t$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.9. (Esin, 1982) $s = 0$ başlangıç anında eğrilik matrisleri arasında

$$K_0(V) = W_0(V, X) \; + \; K_0(X) \tag{3.3.12}$$

eşitliği vardır.

İspat. Bu iddianın doğruluğu da yine $C_0 = I_n$ için (3.3.11) den görülmektedir.

4. $n \times n$-TİPİNDE ŞEMSİYE MATRİSLERİ VE BİR EĞRİNİN EĞRİLİKLERİ

4.1. Teoremler ve İspatlar

Bu bölümde, E^n de bir M hiperyüzeyi üzerinde eğrilik çizgisinden farkı bir α eğrisi için, $X = \{X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n\}$ doğal çatısının $X_2, X_3, ..., X_{n-2}$ doğrultularının X_1 teğet doğrultusu ile eşlenik doğrultular oldukları kabul edelim. Bu durumda,

$$II(X_1, X_2) = II(X_1, X_3) = ... = II(X_1, X_{n-2}) = 0$$

olacağından, elemanları α eğrisinin eğrilik fonksiyonları olan ve (2.8.8) ile belirli $K(X)$ eğrilik matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & k_{1g} & 0 & . & . & . & 0 & II(X_1, X_1) \\ -k_{1g} & 0 & k_{2g} & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -k_{2g} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & & & & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & k_{(n-2)g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & II(X_1, X_{n-1}) \\ -II(X_1, X_1) & 0 & 0 & . & . & . & -II(X_1, X_{n-1}) & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi,

$$k_{ig} = b_{i+2} \qquad (1 \leq i \leq n-2)$$

$$II(X_1, X_{n-1}) = b_1 \tag{4.1.1}$$

$$-II(X_1, X_1) = b_2$$

diyelim. Böylece, $b_j(1 \leq j \leq n)$ elemanlarına göre

$$K(X) = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_4 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_4 & 0 & b_5 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & & . & . & . \\ . & . & . & . & & & & . & . & . \\ . & . & . & . & & & & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & b_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & -b_n & 0 & b_1 \\ b_2 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & -b_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.2}$$

biçiminde yeniden yazılabilen $n \times n$ anti-simetrik eğrilik matrisini Cayley formülü kullanarak aşağıdaki teorem ile verilen bir şemsiye matrisi elde edebiliriz.

Teorem 4.1.1. (Esin, 1982) $n \geq 3$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $b_i = c$ ise

$$A = (I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X))$$

pozitif ortogonal matrisi bir şemsiye matrisidir.

İspat. Tanım 2.5.1. ile verilen şemsiye matrisi olma özeliğine göre, S=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^t \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere $AS = S$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(I_n + K(X))S = S + K(X)S$$

$$
\begin{aligned}
(I_n+K(X))S &= \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ .\\ .\\ .\\ 1\\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0\\ . & . & . & & & & . & . & .\\ . & . & . & & & & . & . & .\\ . & . & . & & & & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ .\\ .\\ .\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}\\
(I_n+K(X))S &= \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ .\\ .\\ .\\ 1\\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1-1\\ -1+1\\ .\\ .\\ .\\ -1+1\\ 1-1 \end{bmatrix}\\
(I_n+K(X))S &= S
\end{aligned}
$$

Böylece, S nin $K(X)$ in çekirdeğinde olduğu da görülmektedir. O halde,

$$
\begin{aligned}
(I_n+K(X))S &= S-K(X)S\\
(I_n+K(X))S &= S
\end{aligned}
$$

olup, buradan

$$S=(I_n-K(X))^{-1}S$$

elde edilir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
AS &= (I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X))S \\
AS &= (I_n - K(X))^{-1}S \\
AS &= S
\end{aligned}
$$

olur. Bu ise, A ortogonal matrisinin bir şemsiye matrisi olması demektir.

$n = 3$ özel hali için eğrilik matrisi

$$
K(X) = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{bmatrix}
$$

biçiminde olup, burada $b_1 = \tau_g$, $b_2 = k_n$, $b_3 = k_g$ ile, sırasıyla, E^3 de bir yüzey üzerine çizilmiş bir eğrinin geodezik burulması, normal eğriliği ve geodezik eğriliği gösterilmektedir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
I_3 - K(X) &= \begin{bmatrix} 1 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 1 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 1 \end{bmatrix} \\
(I_3 - K(X))^{-1} &= \frac{1}{1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \begin{bmatrix} 1 + b_1^2 & b_1 b_2 + b_3 & b_1 b_3 - b_2 \\ b_1 b_2 - b_3 & 1 + b_2^2 & b_2 b_3 + b_1 \\ b_1 b_3 + b_2 & b_2 b_3 - b_1 & 1 + b_3^2 \end{bmatrix} \\
I_3 + K(X) &= \begin{bmatrix} 1 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 1 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olup, bu değerler A=$(I_3 - K(X))^{-1}(I_3 + K(X))$ Cayley formülünde kullanılırsa,

$$A = \frac{1}{1+b_1^2+b_2^2+b_3^2}\begin{bmatrix} 1+b_1^2-b_2^2-b_3^2 & 2(b_1b_2+b_3) & 2(b_1b_3-b_2) \\ 2(b_2b_1-b_3) & 1-b_1^2+b_2^2-b_3^2 & 2(b_2b_3+b_1) \\ 2(b_3b_1+b_2) & 2(b_3b_2-b_1) & 1-b_1^2-b_2^2+b_3^2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. b_1, b_2, b_3 yerine $c_1/c_0, c_2/c_0, c_3/c_0$ almak suretiyle c_0, c_1, c_2, c_3 homogen parametreler ithal edildiğinde yukarıdaki A matrisi

$$A = \frac{1}{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}\begin{bmatrix} c_0^2+c_1^2-c_2^2-c_3^2 & 2(c_0c_3+c_1c_2) & 2(-c_0c_2+c_1c_3) \\ 2(-c_0c_3+c_2c_1) & c_0^2-c_1^2+c_2^2-c_3^2 & 2(c_0c_1+c_2c_3) \\ 2(c_0c_2+c_3c_1) & 2(-c_0c_1+c_3c_2) & c_0^2-c_1^2-c_2^2+c_3^2 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $c_i (0 \leq i \leq 3)$ parametrelerinin geometrik anlamları şöyledir: c_1, c_2, c_3 hareketin dönme ekseninin doğrultusunu verir ve c_0 da dönme açısı ile ilgilidir (Bottema ve Roth, 1979).

Bir şemsiye matrisinin herhangibir satırının (veya, herhangibir kolonunun) elemanlarının toplamı 1 olmak zorundadır. Bu karakterizasyonu da kullanmak amacıyla, A matrisinin bir şemsiye matrisi olduğunu ikinci bir yoldan gösterelim.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

denirse,

$$\sigma = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \end{pmatrix}$$

dairesel permütasyonunun kullanılması ile

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \sigma(a_3) & \sigma(a_1) & \sigma(a_2) \\ \sigma^2(a_2) & \sigma^2(a_3) & \sigma^2(a_1) \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece, $b_1 = b_2 = b_3 (= c)$ alınırsa,

$$A = \frac{1}{1+3c^2}\begin{bmatrix} 1-c^2 & 2(c^2+c) & 2(c^2-c) \\ 2(c^2-c) & 1-c^2 & 2(c^2+c) \\ 2(c^2+c) & 2(c^2-c) & 1-c^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. A matrisinin herhangibir satırının (veya, herhangibir kolonunun) elamanlarının toplamı 1 e eșit olduğu görülmektedir. Üstelik,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bütün bunlar, A ortogonal matrisinin bir șemsiye matrisi olduğu göstermektedir.

Teorem 4.1.2. (Esin, 1982) E^n de $A = (I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X))$ șemsiye matrisi ile oluşan șemsiye hareketinin Darboux matrisi $W(A)$ ile, eğrilik matrisi $K(X)$ arasında, $c = c(s)$ olmak üzere

$$W(A) = \frac{2c'}{c}(I_n - K(X))^{-1}K(X)(I_n + K(X))^{-1} \tag{4.1.3}$$

bağıntısı vardır.

İspat. A nın s ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} A' &= [(I_n - K(X))^{-1}]'(I_n + K(X)) + (I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X))' \\ A' &= (I_n - K(X))^{-1}(I_n - K(X))'(I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X)) + (I_n - K(X))^{-1}K'(X) \\ A' &= (I_n - K(X))^{-1}K'(X)(I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X)) + (I_n - K(X))^{-1}K'(X) \\ A' &= (I_n - K(X))^{-1}K'(X)[(I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X)) + I_n] \end{aligned}$$

ve

$$I_n = ((I_n - K(X))^{-1}(I_n - K(X)))$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$A' = 2(I_n - K(X))^{-1}K'(X)(I_n - K(X))^{-1}$$

olur. $K(X) = cU$ (U sabit matris) olup, $K'(X) = \frac{c'}{c}K(X)$ değeri A da yerine yazılırsa,

$$A' = 2\frac{c'}{c}(I_n - K(X))^{-1}K(X)(I_n - K(X))^{-1}$$

bulunur. Böylece $W(A) = A'A^t$ eşitliğinde A^t değeri yerine yazıldığında, $W(A)$ matrisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
W(A) &= 2\frac{c'}{c}(I_n - K(X))^{-1}K(X)(I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X))^{-1}(I_n - K(X)) \\
W(A) &= 2\frac{c'}{c}(I_n - K(X))^{-1}K(X)[(I_n + K(X))(I_n - K(X))]^{-1}(I_n - K(X)) \\
W(A) &= 2\frac{c'}{c}(I_n - K(X))^{-1}K(X)[(I_n - K(X))(I_n + K(X))]^{-1}(I_n - K(X)) \\
W(A) &= 2\frac{c'}{c}(I_n - K(X))^{-1}K(X)(I_n + K(X))^{-1}(I_n + K(X))^{-1}(I_n - K(X)) \\
W(A) &= 2\frac{c'}{c}(I_n - K(X))^{-1}K(X)(I_n + K(X))^{-1}.
\end{aligned}$$

Sonuç 4.1.3. (Esin, 1982) E^n de, herhangibir s anında, $A = (I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X))$ şemsiye matrisi ile oluşan şemsiye hareketinin Darboux matrisi $W(A)$ ile, (α, M) ikilisinin X doğal çatısının E standart çatı alanı üzerindeki hareketinin

Darboux matrisi $W(E,X)$ arasında X ile E arasındaki, geçiş matrisi B olmak üzere,

$$W(A) = 2\frac{c'}{c}[I_n + B^t W(E,X)B]^{-1} B^t W(E,X)B[I_n - B^t W(E,X)B]^{-1}$$

bağıntısı vardır.

İspat. $E = BX$ olmak üzere Teorem 3.3.4. den, herhangibir s anı için

$$K(X) = -B^t W(E,X)B$$

olduğu biliyoruz. Böylece, (4.1.3) eşitliğinde $K(X)$ in bu değeri kullanılırsa istenen bağıntı elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.4. (Esin, 1982) E^n de, $A = (I_n - K(X))^{-1}(I_n + K(X))$ şemsiye matrisi için, $A'A^t = W(A)$ olmak üzere, $I_n + W(A)ds$ matrisi de bir (infinitezimal) şemsiye matrisidir.

İspat. E^n de bir infinitezimal hareket için

$$Y + Y'ds = AX + C + (A'X + C')ds$$

yazılabilmekte olup, $X = A^t(Y - C)$ olduğundan,

$$Y + Y'ds = (I_n + A'A^t ds)(Y - C) + C + C'ds$$

veya $A'A^t = W(A)$ ifadesinin yazılmasıyla

$$(Y' - C')ds = (I_n + W(A)ds)(Y - C) - (Y - C)$$

elde edilir. Şimdi buradaki $I_n + W(A)ds$ matrisini göz önüne alalım. (4.1.3) ile verilen $W(A)$ için $W^t(A) = -W(A)$ olduğu açıktır. O halde,

$$(I_n + W(A)ds) - I_n = W(A)ds \qquad (= anti - simetrik \;\; matris)$$

olduğundan, $I_n + W(A)ds$ matrisi bir infinitezimal ortogonal matristir. Üstelik, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^t \in \mathbb{R}_1^n$ için,

$$[W(A)ds]S \quad = \quad [2\frac{c'}{c}(I_n - K(X))^{-1}K(X)(I_n + K(X))^{-1}]S$$

$$[W(A)ds]S \quad = \quad 2\frac{c'}{c}(I_n - K(X))^{-1}K(X)S$$

ve $S, K(X)$ in çekirdeğinde olduğundan,

$$[W(A)ds]S = 0$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} (I_n + W(A)ds)S &= S + [W(A)ds]S \\ (I_n + W(A)ds)S &= S \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $I_n + W(A)ds$ matrisi bir (infinitezimal) şemsiye matrisidir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde n-boyutlu Öklid uzayında, bir eğri boyunca eğrilik ve Darboux matrislerinden ve Şemsiye matrisleri hakında temel bilgilerden bahsedilmiştir. Bu çalışmayı yaparken, Prof. Dr. Erdoğan Esin ve Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu'nun "Curvature matrices and Darboux matrices of motions along a curve in Euclid" (Esin ve Hacısalihoğlu, 1986b) ve "Umbrella matrices and higher curvatures of a curve" (Esin ve Hacısalihoğlu, 1986a) makalelerinden söz edilmiştir. Bu çalışmada E^n de Frenet hareketinin Darboux matris bileşenlerini ve şeridin doğal çatı hareketini bulup bu hareketin Darboux matrisleriyle, eğrilik matrisi arasındaki bağıntılar verilmiştir. Bunların yanı sıra, E^n deki bir şemsiye hareketin Darboux matrislerinden bahsedilmiştir.

KAYNAKLAR

Bottema, O., ve Roth, B., 1979. Theoretical Kinematics, North Holland Publ. Com. Amsterdam. pp. 9–11, 17–26.

Bükcü, B., 2003. Lorentz Uzayında Cayley Formülü ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Courant, R., ve Hilbert, D., 1953. Methods of Mathematical Physics, Intersclence Publ., INC., New York. pp. 41.

Esin, E., 1982. Eğri Boyunca Hareketler Ve Şemsiye Matrisleri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Esin, E., ve Hacısalihoğlu H. H., 1986a. Umbrella matrices and higher curvatures of a curve, Commun. Fac. Sci. Univ., vol. 35, pp. 27–34.

Esin, E., ve Hacısalihoğlu H. H., 1986b. Curvature matrices and Darboux matrices of motions along a curve, Commun. Fac. Sci. Univ., vol. 35, pp. 35–44.

Guggenheimer, H. W., 1963. Differential Geometry, Mc Graw-Hill Book Company, pp. 210, 338–340, New York.

Hacısalihoğlu, H. H., 1977., Umbrella motions, Journal of the Fac. Sc. of the K.T.Ü., Trabzon, Turkey, pp. 29–40.

Hacısalihoğlu, H. H., 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, The Faculty of Science University of Fırat, Math. no. 2, Elazığ, Turkey.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000a. Diferensiyel Geometri Cilt I., Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Beşevler, Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000b. Diferensiyel Geometri Cilt II., Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Beşevler, Ankara.

Hicks, N. J., 1974. Notes on Differential Geometry, Van Nost. Rein. Com., London. pp.18–29, 74.

Matsushima, Y., 1972. Differentiable Manifolds, Marcel Dekker, INC., New York. pp. 25–46.

Nomizu, K., 1966. Fundamentals of Linear Algebra, Mc Graw-Hill Book Company, pp. 294–300.

Okuyucu, O. Z., 2010. Bir $M \subset E^n$ Hiperyüzeyi Üzerindeki Bir Eğrinin Eğrilikleriyle Bu Eğriye Ait Şeridin Eğrilikleri Arasındaki İlişkiler, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Özdamar, E., 1977. Şemsiye Matrislerinin Lie Grubu ve Diferensiyel Geometri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Sabuncuoğlu, A., ve Hacısalihoğlu H. H., 1975. On higher curvatures of a curve, Communications de la Faculté des Sciences De L' Université d' Ankar Série A1, Tome 24, pp. 33–46.

Sabuncuoğlu, A., ve Hacısalihoğlu H. H., 1975. Higher curvatures of a strip, Communications de la Faculté des Sciences De L' Université d' Ankar Série A1, Tome 24, pp. 25–33.

Sabuncuoğlu, A., 2004. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın No. 258, Yenişehir, Ankara.

Tsiotras, P., Junkins, J. L., ve Schaub H., 1997. Higher order cayley tranformation with application to attitude representations, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 20, no. 3., 528–534.

Yaylı, Y., 1985. Cayley Formülü Üzerine Kinematik Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : AYLA KILIÇ

Doğum Tarihi : 15/09/1992

Doğum Yeri : TAŞOVA

Medeni Hali : EVLİ

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

Telefon :

E-posta : arya.ecrin0060@gmail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2019
Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2015
Lise	Taşova Lisesi	2009