T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NON-NEWTONIAN VE MULTIPLICATIVE METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Tekin SARITAŞ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN
2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NON-NEWTONIAN VE MULTIPLICATIVE METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Tekin SARITAŞ

TOKAT
2019

TEKİN SARITAŞ tarafından hazırlanan "**NON-NEWTONIAN VE MULTİPLİCATİVE METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23 AĞUSTOS 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN	…………………………………
Üye Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN	…………………………………
Üye Dr. Öğr. Üyesi Tuğba MERT	…………………………………

ONAY

…………………………………

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
--/--/20--

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Tekin SARITAŞ
23/08/2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NON-NEWTONIAN VE MULTIPLICATIVE METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Tekin SARITAŞ

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

Bu tez çalışmasında ilk olarak sabit nokta, büzülme dönüşümü gibi temel tanımlar ile Banach sabit nokta teoremi gibi temel sonuçlar verildi.
non-Newtonian metrik uzaylar ve multiplicative metrik uzaylarla ilgili genel tanım ve teoremler incelendi. Ayrıca bunların inşaa ettiği topolojiler verildi. Son olarak, non-Newtonian metrik uzaylar ve multiplicative metrik uzaylarda bazı sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri incelendi.

2019, 54 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Non-Newtonian Topolojik Yapı, Non-Newtonian Büzülme Dönüşümü, Multiplicative Metrik Uzay, Sabit Nokta

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON SOME FIXED POINT THEOREMS IN NON-NEWTONIAN AND MULTIPLICATIVE METRIC SPACES

Tekin SARITAŞ

Tokat Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

In the this thesis study, firstly basic definitions such as fixed point, contraction mapping and basic result such as Banach fixed point theorem were given. General definitions and theorems about non-Newtonian metric spaces and multiplicative metric spaces were investigated. Furthermore, the topologies that constructed by this metric spaces were given. Finally, some fixed point and common fixed point theorems in non-Newtonian metric spaces and multiplicative metric spaces were investigated.

2019, 54 pages

KEYWORDS: Non-Newtonian Topological Structures, Non-Newtonian Contraction Mapping, Multiplicative Metric Spaces, Fixed Point

İÇİNDEKİLER

ÖZET . . . . **i**

ABSTRACT . . . . **ii**

ÖNSÖZ . . . . **iv**

SİMGE ve KISALTMALAR . . . . **v**

1. GİRİŞ **1**

2. KURAMSAL TEMELLER **3**

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler 3

2.2. Non-Newtonian Metrik Uzaylar 7

2.3. Multiplicative Metrik Uzaylar 17

3. BULGULAR **30**

3.1. Non-Newtonian Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri 30

3.2. Multiplicative Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri 33

4. TARTIŞMA VE SONUÇ **51**

5. KAYNAKLAR **52**

6. ÖZGEÇMİŞ **54**

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgiyle yaparak tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazımım boyunca değerli tavsiyeleri ve yol gösterici katkılarıyla destek olan Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR, Matametik Öğretmeni Derya ALTAN ve Seda CEYLAN'a yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma, bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan başta ailem olmak üzere herkese sonsuz teşekkür ederim.

Tekin SARITAŞ
23/ 08/ 2019

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
∞	Sonsuzluk
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük veya eşit
$>$	Büyük
$\geq$	Büyük veya eşit
$\neq$	Eşit değil

1. GİRİŞ

Farklı uzaylardaki sabit veya ortak sabit nokta çalışmaları üzerindeki sonuçlarla alakalı sabit nokta teorisi oldukça geniş bir literatüre sahiptir. Son yıllarda, sabit nokta teoremleri diferensiyel denklemler, integral denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğinin gösterilmesi ve matematiğin diğer birçok branşına uygulanabilir. Sabit nokta teori ile belli büzülme koşullarını sağlayan kendi içine dönüşümler birçok uygulamaya sahiptir ve çeşitli çalışmaların önemli bir sahası olmuştur. (Choudhary ve Nanda, 1990; He, Song ve Chen; Wataru, 2000) Son zamanlarda, multiplicative kalkülüs Bashirov, Kurpınar ve Özyapıcı (Bashirov ve ark., 2008) tarafından çalışılmıştır. Bu yazarlar klasik kalkülüste türev ve integrallerin iyi bilinen özelliklerine ilişkin sonuçlar ve uygulamalar vermişlerdir. Daha sonra multiplicative kalkülüs Uzer tarafından kompleks değerli fonksiyonlara genişletilmiştir. Ayrıca Özavşar ve Çevikel (Ozavsar ve Cevikel, 2017) multiplicative büzülme dönüşümleri kavramını tanımlayarak tam mul- tiplicative metrik uzaylar üzerindeki dönüşümlerin bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır. Agamieza (Ozavsar ve Cevikel, 2017) ve diğerleri multiplicative hesaplama, iktisat ve finans gibi çeşitli matematiksel alanlarda kullanmışlardır. Florac ve Assep (Florack ve van Assen, 2012) multiplicative hesaplamayı biyomedikal alanda kullanmıştır. Bashirov ve Rıza (Bashirov ve Rıza, 2011) multiplicative Cauchy-Riemann eşitliğinde kullanmış ve karmaşık multiplicative farklı hesapları ortaya koymuştur. Ve aynı zamanda multiplicative hesaplamalar için uygun olan karmaşık dizileri incelemiştir. Mısırlı ve Gurefe (Mısırlı ve Gurefe, 2011) sayı metodlar ve şu an günümüzde henüz çözümüne ulaşamadığımız daha birçok matematiksel uygulamalarda multiplicative hesaplamayı kullanmıştır. Non-Newtonian kalkülüs, Newtoon ve Leibnitz'in alışılmış kalkülüsünün bir alternatifidir ve klasik işlemler yerine non-Newtonian işleme dayanarak diferensiyelllenebilme ve integrallenebilmeyi sağlar. Non-Newtonian kalkülüsün fraktal geometri, görüntü analizi, ekonomik büyüme, finans, fizikteki dalga teorisi, kuantum fiziği, bilgi teknolojisi gibi farklı alanlarda çok sayıda uygulaması vardır. Non-Newtonian kalkülüs üzerindeki çalışmalar 1972 yılında Grosmann ve Katz tarafından başlatılmıştır. Çakmak ve Başar (2002) non-Newtonian metrik kavramı üzerinde çalışmış ve bu uzaya göre Minkowski eşitsizliği ile üşgen eşitsizliği kavramını tanımlamışlardır.

Binbaşıoğlu, Demiriz ve Türkoğlu (2016) non-Newtonian topolojik yapının inşasını yaparak Banach sabit nokta teoremini bu uzaylar için ispatlamışlardır. Böylece non-Newtonian metrik uzaylardaki sabit nokta teorisinin de temelleri atılmıştır.

Bu tez çalışmasında sabit nokta teorisi üzerine bir literatür taraması yapılmıştır. Sabit nokta teorisiyle alakalı temel tanım ve kavramlardan bahsedilmiştir. Non-Newtonian ve multiplicative metrik uzaylar ile bunların topolojilerinin inşası incelenmiştir. Non-Newtonian metrik uzaylar ve multiplicative metrik uzaylar için çeşitli büzülme dönüşümlerinden yararlanarak bazı sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde tezimizin ileri bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1.1. X boş olmayan keyfi bir küme olsun. $T : X \to X$ dönüşümünün bir sabit noktası

$$T\ (x) = x$$

olacak şekildeki $x \in X$ noktasıdır. (Soykan, 2012)
Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi $T : X \to X$ ile tanımlanan bir T dönüşümünün herhangi bir sabit noktası olmayabilir, bir sabit noktası olabilir ya da birden çok sabit noktası olabilir.

Örnek 2.1.2. $X = \mathbb{R}$ kümesini göz önüne alalım. $t \neq 0$ olmak üzere

$$Tx = t + x$$

ile tanımlanan $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ öteleme (translation) fonksiyonunun sabit noktası yoktur.

Örnek 2.1.3. $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanı

$$T(x, y) = (x, -y)$$

ile tanımlı $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yansıma fonksiyonunun sabit noktasıdır.Yani T fonksiyonunun sonsuz sayıda sabit noktası vardır.

I , X üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümünün sabit noktaları aslında

$$(T - I)(x) = 0 \tag{2.1.1}$$

denkleminin çözümleridir.O halde bir denklemin çözümünü bulmak için standart bir teknik, buna karşılık gelen fonksiyonun sabit noktalarını bulmaktır.

Tanım 2.1.4. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun.Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq a < 1$ varsa T ye bir daralma (ya da büzülme) dönüşümü denir. (Soykan, 2012)

Tanım 2.1.5. X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun.

$$T \circ T(x) = T(T(x))$$

ile verilen dönüşümde X den X 'e olup ve bir T nin ikinci iterasyonu adını alır. Genel olarak n adet T den elde edilen $T \circ T \circ T \circ ... \circ T(x)$, n. iterasyon adını alır ve

$$T \circ T \circ ... \circ T(x) = T(T(...T(x)...))$$

ile verilir ve

$$T^n = T \circ T \circ ... \circ T$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.6. $T(x) = x^2 - 1$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun dördüncü iterasyonu

$$T^4(x) = T(T(T(T(x)))) = (((x^2 - 1)^2 - 1)^2 - 1)^2 - 1$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.7. (Banach Sabit Nokta Teoremi)
(X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Yani, her $x, y \in X$ için

$$d(T_x, T_y) \leq k.d(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ var olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir. (Soykan, 2012)

Örnek 2.1.8. $T(x) = x + 1$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım.O zaman

$$|T(x) - T(y)| \leq |x - y| \tag{2.1.2}$$

dir ve ayrıca T sabit bir noktaya sahip değildir.

Örnek 2.1.9.

$$T(x) = x + 1 - \frac{x}{1 + |x|}$$

ile tanımlı $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu düşünelim.O zaman

$$|T^{'}(x)| = 1 - (1 + |x|)^{-2} < 1$$

dir ve bu nedenle her $x < y$ için

$$|T(y) - T(x)| = |\frac{y}{x}T^{'}(t)dt| \leq \frac{y}{x}|T^{'}(t)dt| < \frac{y}{x}dt = |y - x|$$

dir. O halde herhangi x, y için kesin bir eşitsizlik olan

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

sağlanır.Bununla birlikte T herhangi bir sabit noktaya sahip değildir.

Örnek 2.1.10. $T(x) = x$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım.Bu durumda (2.1.2) eşitliği yine sağlanır. Bütün $x \in \mathbb{R}$ noktaları T nin sabit noktalarıdır. O halde sabit nokta tek değildir (yani birden fazladır).

Tanım 2.1.11. (çakışık nokta, zayıf uyuşabirlik, ortak sabit nokta) (Ahmad ve ark., 2012)
$S, T : X \to X$ dönüşümler olsun. $x \in X$ için

$$y = Tx = Sx$$

şartı sağlanıyorsa y ye çakışma noktası, x e de T ve S nin çakışık noktası denir. Aynı zamanda T ile S zayıf uyuşabilir olur yani X de çakışık noktaları aynıdır. O zaman çakışma noktası olan y bu dönüşümlerin tek ortak sabit noktasıdır.

Tanım 2.1.12. (çakışık nokta) (Jungck ve Rhoades, 2006)
$f, g : X \to X$
X kümesi üzerinde dönüşümler olsun. $\omega \in X$ için

$$f\omega = g\omega = z$$

ise, ω, f ve g nin nin çakışık noktası adını alır ve z, f ve g nin nin çakışık noktası olur.

Tanım 2.1.13. (zayıf uyuşabilirlik) (Jungck ve Rhoades, 2006)
$f, g : X \to X$
X kümesi üzerinde dönüşümler olsun. Eğer f ve g her çakışık noktasında değişmeli ise zayıf uyuşabilir denir.

Tanım 2.1.14. (Ahmad ve ark., 2012)
f ve g, X'in kendi içine birer dönüşümü olsun.

$$\omega = f\omega = g\omega$$

koşulunu sağlayan bir $\omega \in X$, f ve g nin ortak sabit noktasıdır.

2.2. Non-Newtonian Metrik Uzaylar

$\beta = \exp$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar kümesini göstermek üzere

$$\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow \beta(x) = e^x = y$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu β fonksiyonu, bir üreteç olarak eğer $''\forall\, x \in \mathbb{R}$ için $I(x) = x$ olmak üzere $\beta = I''$ şeklinde alınırsa bu taktirde β klasik aritmetiği üretir. Eğer $\beta = \exp$ alınırsa β geometrik aritmetiği üretir. $\mathbb{R}(\mathbb{N})$, non-Newtonian reel sayıların

$$\mathbb{R}(\mathbb{N}) = \{\beta(x) : \ x \in \mathbb{R}\}$$

olacak şekilde bir kümesi olarak tanımlansın. β aritmetiğinin tüm kavramları klasik aritmetiktekilere benzer özelliklere sahiptir. β sıfır, β bir ve bütün β tamsayıları

$$..., \beta(-1), \beta(0), \beta(1), ..$$

şeklinde oluşturulur.

A aralıklı herhangi bir β üretecini ele alalım. β toplama, β çıkarma, β çarpma, β bölme, ve β sıralama gibi işlemleri $x, y \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\beta \quad \text{toplama} \;\; x \dot{+} y = \beta\left\{\beta^{-1}(x) + \beta^{-1}(y)\right\},$$

$$\beta \quad \text{çıkarma} \;\; x \dot{-} y = \beta\left\{\beta^{-1}(x) - \beta^{-1}(y)\right\},$$

$$\beta \quad \text{çarpma} \; x \dot{\times} y = \beta\left\{\beta^{-1}(x) \times \beta^{-1}(y)\right\},$$

$$\beta \quad \text{bölme } x\dot{/}y = \beta\left\{\beta^{-1}(x) \div \beta^{-1}(y)\right\},$$

$$\beta \quad \text{sıralama } x \;\dot{<}\; y = \beta\left\{\beta^{-1}(x) \; < \beta^{-1}(y)\right\}$$

$\times \in A \subset \mathbb{R}(\mathbb{N})$ için $x \dot{\times} x$ ile tanımlanan sayı x-in β karesidir ve x^{2N} olarak gösterilir. $\sqrt{x}^N$ sembolü de β karesi x e eșit olan β negatif olmayan sayıları için

$$t = \beta\left\{\sqrt{\beta^{-1}(x)}\right\}$$

ile gösterilir. Yani herbir t sayısı için $t^{2N} = x$ dir. Bu makale boyunca x^{pN} ile p inci non-Newtonian kuvveti göstereceğiz. Böylece aşağıdakileri elde ederiz.

$$x^{2N} = x \dot{\times} x = \beta\left\{\beta^{-1}(x) \times \beta^{-1}(x)\right\} = \beta\left\{\left[\beta^{-1}(x)\right]^2\right\},$$

$$x^{3N} = x^{2N} \dot{\times} x = \beta\left\{\beta^{-1}\left\{\beta\left[\beta^{-1}(x) \times \beta^{-1}(x)\right]\right\} \times \beta^{-1}(x)\right\} = \beta\left\{\left[\beta^{-1}(x)\right]^3\right\}$$

$$\vdots$$

$$x^{pN} = x^{(p-1)N} \dot{\times} x = \beta\left\{\left[\beta^{-1}(x)\right]^p\right\},$$

$$\vdots$$

Bir $x \in A \subset \mathbb{R}(\mathbb{N})$ sayısının β mutlak değeri $\beta\left(\left|\beta^{-1}(x)\right|\right)$ olarak tanımlanır ve $|x|_N$ ile gösterilir. Ayrıca $\sqrt{x^{2N}}^N = |x|_N = \beta\left\{\left|\beta^{-1}(x)\right|\right\}$ dır. Böylece

$$|x|_{\mathbb{N}} = \beta\{\left|\beta^{-1}(x)\right|\} = \begin{cases} x, & x \;\dot{>}\; \beta(0), \\ \beta(0), & x = \beta(0) \\ \beta(0) \dot{-} x, & x \;\dot{<}\; \beta(0) \end{cases}$$

elde edilir.

Her $x_1, x_2 \in A \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{N})$ için $|.|_N$ non-Newtonian uzaklık fonksiyonu

$$\left|x_1 \dot{-} x_2\right| = \beta\left\{\left|\beta^{-1}(x_1) \dot{-} \beta^{-1}(x_2)\right|\right\}$$

olarak tanımlanır. Bu uzaklık değişmelidir. Yani

$$\left|x_1 \dot{-} x_2\right| = \left|x_2 \dot{-} x_1\right|$$

koşulunu sağlar.

Herhangi bir $z \in \mathbb{R}(\mathbb{N})$ alalım. Eğer $z \ \dot{>} \ \beta(0)$ ise z non-Newtonian pozitif reel sayı olarak adlandırılır; eğer $z \ \dot{<} \ \beta(0)$ ise z non-Newtonian negatif sayı olarak adlandırılır ve eğer $z = \beta(0)$ ise o halde z non-Newtonian nötr reel sayıdır. non-Newtonian pozitif reel sayılar $\mathbb{R}^+(\mathbb{N})$ ve non-Newtonian negatif reel sayılar $\mathbb{R}^-(\mathbb{N})$ ile gösterilir. Klasik hesaplamalarda ortaya konulan belirgin özellikler, non-Newtonian hesaplamalarda da verilebilir.

Önerme 2.2.1. Her $x, y \in \mathbb{R}(\mathbb{N})$ için $\left|x \dot{\times} y\right|_N = |x|_N \dot{\times} |y|_N$ dır. (Çakmak ve Başar, 2012)

Önerme 2.2.2. Non-newtonian $|.|_N$ uzaklığına göre üçgen eşitsizliği her $x, y \in \mathbb{R}(\mathbb{N})$ için

$$\left|x \dot{+} y\right|_N \dot{\leq} |x|_N \dot{+} |y|_N$$

şeklinde tanımlanır. (Çakmak ve Başar, 2012)

non-Newtonian metrik uzaylar , metrik uzaylara bir alternatif olarak düşünülebilir.

Tanım 2.2.3. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun.

Eğer bir $d_N : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+(\mathbb{N})$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$

$(NM1)$ $d_N(x, y) = \beta(0) = \dot{0} \iff x = y$

$(NM2)$ $d_N(x, y) = d_N(y, x)$

$(NM3)$ $d_N(x, y) \dot{\leq} d_N(x, z) \dot{+} d_N(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa X üzerinde non-Newtonian metrik uzay olarak adlandırılır ve burada (X, d_N) ikilisi non-Newtonian metrik uzay adını alır. (Çakmak ve Başar, 2012)

Önerme 2.2.4. $\mathbb{R}(\mathbb{N})$ üzerinde her $x \in \mathbb{R}(\mathbb{N})$ için

$$d_N(x, y) = \left| x \dot{-} y \right|_N$$

şeklinde tanımlanan d_N non-Newtonian metriğini düşünürsek $(\mathbb{R}(\mathbb{N}), d_N)$ non-Newtonian bir metrik uzaydır. (Çakmak ve Başar, 2012)

Tanım 2.2.5. X, $\mathbb{R}(\mathbb{N})$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer her $x, y \in X$ için ve $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{N})$ için $||.||_N : X \longrightarrow \mathbb{R}^+(\mathbb{N})$ fonksiyonu

$(NN1)$ $||.||_N = 0 \iff x = \dot{0}$
$(NN2)$ $\left|\left|\lambda \dot{\times} x\right|\right|_N = |\lambda|_N \dot{\times} ||x||_N$
$(NN3)$ $\left|\left|x \dot{+} y\right|\right|_N \leq ||x||_N \dot{+} ||y||_N$

aksiyomlarını sağlıyorsa o halde $||.||_N$ X üzerinde negatif olmayan bir non-Newtonian norm olarak adlandırılır ve $(X, ||.||_N)$ non-Newtonian normlu uzaydır. (Çakmak ve Başar, 2012)

Not 2.2.6. Burada X üzerinde her $||.||_N$ non-Newtonian normun

$$d_N(x, y) = \left|\left| x \dot{-} y \right|\right|_N \quad x, y \in X$$

eşitliğiyle X üzerinde bir non-Newtonian d_N metriğini ürettiğini görmek kolaydır. (Çakmak ve Başar, 2012)

Önerme 2.2.7. (X, d_N) non-Newtonian bir metrik uzay olsun. O halde her $x, y, z \in X$ için

$$\left| d_N(x, z) \dot{-} d_N(y, z) \right|_N \dot{\leq} d_N(x, y)$$

eşitsizliği elde edilir. (Çakmak ve Başar, 2012)

İspat. non-Newtonian üçgen eşitsizliğine göre

$$d_N(x,z) \dot{\leq} d_N(x,y) \dot{+} d_N(y,z) \Rightarrow d_N(x,z) \dot{-} d_N(y,z) \dot{\leq} d_N(x,y)$$

$$d_N(y,z) \dot{\leq} d_N(y,x) \dot{+} d_N(x,z) \Rightarrow d_N(y,x) \dot{-} d_N(x,z) \dot{\leq} d_N(y,x)$$

elde ederiz. Böylece $|.|_N$ nın tanımından ve yukarıdaki eşitsizlikten dolayı

$$\left| d_N(x,z) \dot{\leq} d_N(y,z) \right|_N \dot{\leq} d_N(x,y)$$

sonucuna varırız.

Tanım 2.2.8. (X, d_N) non-Newtonian bir metrik uzay $x \in X$ ve $\varepsilon \;\dot{>}\; \dot{0}$ olsun.

$$B_\varepsilon^N = \left\{ y \in X : d_N\left(x,y\right) \;\dot{<}\; \varepsilon \right\}$$

şeklinde tanımlanan küme x merkezli ε yarıçaplı non-Newtonian açık yuvar diye adlandırılır. Benzer şekilde non-Newtonian kapalı yuvar ise

$$\bar{B}_\varepsilon^N\left(x\right) = \left\{ y \in X : d_N\left(x,y\right) \;\dot{\leq}\; \varepsilon \right\}$$

şeklinde tanımlanır. (Çakmak ve Başar, 2012)

Örnek 2.2.9. $\left(\mathbb{R}^+\left(\mathbb{N}\right), d_N\right)$ non-Newtonian metrik uzayını düşünelim. d_N tanımından x_0 merkezli $\varepsilon \;\dot{>}\; \dot{1}$ yarıçaplı açık yuvarın $\left(x_0 \dot{-} \varepsilon, x_0 \dot{+} \varepsilon\right) \subset \mathbb{R}^+\left(\mathbb{N}\right)$ şeklinde olduğu görülür. (Çakmak ve Başar, 2012)

Tanım 2.2.10. (X, d_N) non-Newtonian bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. O halde $B_\varepsilon^N\left(x\right) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon \;\dot{>}\; \dot{1}$ varsa $x \in A$ noktası A' nın non-Newtonian iç noktası adını alır. A' nın bütün iç noktalarının kümesi A nın non-Newtonian içi olarak adlandırılır ve $int_N\left(A\right)$ ile gösterilir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Tanım 2.2.11. (X, d_N) bir non-Newtonian metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A' nın her noktası A' nın bir non-Newtonian iç noktası ise yani $A = int_N\left(A\right)$ ise o halde A' non-Newtonian bir açık küme olarak adlandırılır.(Çakmak ve Başar, 2012)

Lemma 2.2.12. (X, d_N) bir non-Newtonian metrik uzay olsun. X'in her non-Newtonian açık yuvarı non-Newtonian açık kümedir.(Çakmak ve Başar, 2012)

İspat. $x \in X$ ve $B_\varepsilon^N(x)$ non-Newtonian açık bir yuvar olsun.
$y \in B_\varepsilon^N(x)$ için $\delta = \varepsilon \dot{-} d_N(x, y)$ ve $z \in B_\delta^N(y)$ olursa o halde

$$d_N(y, z) \dot{\leq} \varepsilon \dot{-} d_N(x, y)$$

dir. Buradan da

$$d_N(x, z) \dot{\leq} d_N(x, y) \dot{+} d_N(y, z) \dot{<} \varepsilon$$

sonucuna varırız. Elde edilen bu sonuç $z \in B_\varepsilon^N(x)$ olduğunu gösterir. Yani $B_\delta^N(y) \subset B_\varepsilon^N(x)$ dır. Böylece $B_\varepsilon^N(x)$ non-Newtonian açık bir kümedir.

Lemma 2.2.13. (X, d_N) non-Newtonian bir metrik uzay olsun. O halde X ve $\emptyset$ non-Newtonian açık kümelerdir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Lemma 2.2.14. non-Newtonian açık kümelerin (sayılabilen veya sayılamayan) ailesinin sonlu birleşimi de bir açık kümedir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Lemma 2.2.15. non-Newtonian açık kümelerin ailesinin herhangi bir sonlu kesişimi yine non-Newtonian bir açık kümedir.(Çakmak ve Başar, 2012)

İspat. B_1 ve B_2 iki non-Newtonian açık küme ve $y \in B_1 \cap B_2$ olsun. O halde $\delta_1, \delta_2 \dot{\geq} 0$ vardır öyleki

$$B_{\delta_1}^N(y) \subset B_1^N \text{ ve } B_{\delta_2}^N(y) \subset B_2^N$$

dır. δ, δ_1 ve δ_2 den daha küçük alınırsa

$$B_\delta^N(y) \subset B_1^N \cap B_2^N$$

dır. Bu yüzden de non-Newtonian açık kümelerin bütün sonsuz elemanlarının kesişimi non-Newtonian açık kümedir.

Teorem 2.2.16. Her non-Newtonian metrik uzay non-Newtonian açık kümelerin kümesi olarak alınırsa bir non-Newtonian topolojik uzaydır.(Çakmak ve Başar, 2012)

İspat. Şu ana kadar elde ettiğimiz sonuçlar bu teoremi ispatlar.

Tanım 2.2.17. (X, d_N) bir non-Newtonian metrik uzay olsun. $\varepsilon \dot{>} 0$ olmak üzere $\left(B_\varepsilon^N \diagdown \{x\}\right) \cap S = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $x \in X$ nin $S \subset X$ kümesinin bir yığılma (limit) noktası olmasıdır. S kümesinin bütün non-Newtonian yığılma (limit) noktalarının kümesi S' ile gösterilir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Tanım 2.2.18. (X, d_N) bir non-Newtonian metrik uzay olsun. Eğer S bütün non-Newtonian limit noktalarını içeriyorsa o halde $S \subset X$, (X, d_N) de non-Newtonian kapalı kümedir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Önerme 2.2.19. (X, d_N) bir non-Newtonian metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. O halde $S \cup S'$ bir non-Newtonian kapalı kümedir. Bu küme S kümesinin non-Newtonian kapanışı diye adlandırılır ve $\overline{S}_N$ ile gösterilir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Önerme 2.2.20. (X, d_N) non-Newtonian metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. S kümesi non-Newtonian kapalı kümedir $\Longleftrightarrow$ S nin tümleyeni olan $X \diagdown S$, non-Newtonian açık kümedir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Tanım 2.2.21. $\left(X, d_N^X\right)$ ve $\left(Y, d_N^Y\right)$ iki tane non-Newtonian metrik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.
Eğer $\forall\, \varepsilon \dot{>} \dot{0}$ için $\delta \dot{>} 0$ var öyle ki $f\left(B_\delta^N(x)\right) \subset B_\varepsilon^N(f(x))$ ise o halde f, $x \in X$ de non-Newtonian süreklidir denir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Örnek 2.2.22. (X, d_N) non-Newtonian metrik uzayı verilsin ve $X \times X$ üzerinde

$$p\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = d_N(x_1, y_1) \dot{+} d_N(x_2, y_2)$$

eşitliğiyle bir p non-Newtonian metriğini tanımlayalım. O halde

$$d_N : X \times X \longrightarrow \left(\mathbb{R}^+(\mathbb{N}), |.|_N\right)$$

non-Newtonian metriği $X \times X$ de non-Newtonian süreklidir. Bunu göstermek için $(y_1, y_2), (x_1, x_2) \in X \times X$ alalım.

$$\left| d_N(y_1, y_2) \dot{-} d_N(x_1, x_2) \right| \dot{\leq} d_N(x_1, y_1) \dot{+} d_N(x_2, y_2)$$

olduğundan d_N nin $X \times X$ de non-Newtonian süreklidir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Tanım 2.2.23. Eğer $\forall \varepsilon \dot{>} \dot{0}$ için $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ var öyle ki $n > n_0$ için $d_N(x_n, x) \dot{<} \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi bir $X = (X, d_N)$ metrik uzayında yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ya da $n \to \infty$ iken $x_n \xrightarrow{N} x$ şeklinde gösterilir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Tanım 2.2.24. Eğer her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ var öyle ki $\forall m, n \dot{>} n_0$ iken $d_N(x_n, x_m) \dot{<} \varepsilon$ ise (x_n) dizisi $X = (X, d_N)$ non-Newtonian metrik uzayında non-Newtonian Cauchy dizisi adını alır.
Benzer şekilde eğer her $B_\varepsilon^N(x)$ non-Newtonian açık yuvarı için $n > n_0$ ve $x_n \in B_\varepsilon^N(x)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisinin x'e non-Newtonian yakınsak olduğu söylenebilir.
Eğer X' deki her non-Newtonian Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayının non-Newtonian tam olduğu söylenebilir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Önerme 2.2.25. $\left(\mathbb{R}(\mathbb{N}), \dot{+}, \dot{\times}\right)$ bir tam uzaydır.(Çakmak ve Başar, 2012)

Önerme 2.2.26. $X = (X, d_N)$ bir non-Newtonian metrik uzay olsun. O halde

(i) X' deki yakınsak bir dizi sınırlıdır ve limiti tektir

(ii) X' deki yakınsak bir dizi X' de bir Cauchy dizisidir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Lemma 2.2.27. (X, d_N) bir non-Newtonian metrik uzay , (x_n) X' de bir dizi ve $x \in X$ olsun. O halde

$$x_n \xrightarrow{N} x\,(n \longrightarrow \infty) \iff d_N(x_n, x) \xrightarrow{N} \dot{0}\,(n \longrightarrow \infty).$$

(Çakmak ve Başar, 2012)

İspat. (x_n) dizisinin x'e non-Newtonian yakınsak olduğunu varsayalım. Yani $\forall \varepsilon \dot{>} \dot{1}$ için bir n_0 doğal sayısı var olsun ve $n > 0$ iken $(d_N(x_n, x) \dot{<} \varepsilon)$ olsun.

$$\text{Böylece } \forall n > n_0 \text{ için } -\varepsilon \dot{<} d_N(x_n, x) \dot{<} \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise

$$\forall n > n_0 \text{ için } |d_N(x_n, x)|_N \dot{<} \varepsilon$$

demektir. Elde edilen bu sonuç $d_N(x_n, x)$ dizisinin $\dot{0}$'a non-Newtonian yakınsak olduğunu gösterir.

Lemma 2.2.28. (X, d_N) bir non-Newtonian metrik uzay ve (x_n) X'de bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi non-Newtonian yakınsak ise o halde non-Newtonian yığılma noktası tektir.(Çakmak ve Başar, 2012)

Teorem 2.2.29. $\left(X, d_N^X\right)$ *ve* $\left(Y, d_N^Y\right)$ iki non-Newtonian metrik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ bir dönüşüm ve (x_n), X'de herhangi bir dizi olsun. O halde f, $x \in X$ noktasında non-Newtonian süreklidir ancak ve ancak her (x_n) dizisi için $n \longrightarrow \infty$ iken $x_n \longrightarrow x$ olduğunda $f\left(x_n\right) \xrightarrow{N} f\left(x\right)$ dir.(Çakmak ve Başar, 2012)

İspat. f'nin x noktasında non-Newtonian sürekli ve $x_n \xrightarrow{N} x$ olduğunu varsayalım. f'nin non-Newtonian sürekli olmasından dolayı $\forall \varepsilon \dot{>} \dot{0}$ için $\delta \dot{>} \dot{0}$ vardır öyleki

$$f(B_\delta^N(x)) \subset B_\varepsilon^N(f(x)).$$

$x_n \xrightarrow{N} x$ $(n \to \infty)$ olduğundan $n > n_0$ olacak şekilde bir x_n bulamayız ki $x_n \in B_\varepsilon^N(x)$ olsun. Yukarıdaki sonuçlardan dolayı

$$f(x_n) \in B_\varepsilon^N(f(x))$$

ve böylece

$$f(x_n) \xrightarrow{N} f(x)(n \to \infty)$$

bulunur.

Tersine olarak f'nin x'de non-Newtonian sürekli olmadığını varsayalım. Yani bir $\varepsilon \dot{>} \dot{1}$ var $\ni$ her bir $\forall\ \delta \dot{>} \dot{1}$ için

$$d_N^X({x'}^N, x) \dot{<} \delta$$

koşulunu sağlayan $x^{'} \in X$ için var fakat $d_N^Y(f(x^{'}), f(x)) \dot{\geq} \varepsilon$ olsun. Şimdi (δ_n) reel sayılarından herhangi bir dizi oluşturalım öyleki $\delta_n \xrightarrow{N} \dot{0}$ ve her n için $\delta_n \dot{\geq} \dot{0}$ olsun. Her n için seçilen $n^{'}$ yukarıdaki eşitsizliği sağlar ve $x_n^{'}$ ile gösterilir. Burada $x_n^{'} \xrightarrow{N} x$ olduğu açıktır fakat $f(x_n^{'})$, $f(x)$'e non-Newtonian yakınsak değildir. Bu yüzden eğer f non-Newtonian sürekli değilse o halde $x_n \xrightarrow{N} x$ olacak şekilde her (x_n) dizisi

$$f(x_n) \xrightarrow{N} f(x)$$

koşulunu sağlamaz.

Bunun karşıt tersini alarak teoremin koşulunun ispatlandığı görülür.

Teorem 2.2.30. (X, d_N) bir non-Newtonian metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. O halde

(i) Bir $x \in X$ noktası $\bar{S}$ ye aittir $\Longleftrightarrow$ S de $x_n \xrightarrow{N} x$ $(n \longrightarrow \infty)$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır

(ii) S kümesi non-Newtonian kapalıdır $\Longleftrightarrow$ S deki her non-Newtonian yakınsak dizi S ye ait olan bir non-Newtonian limit noktasına sahiptir.(Çakmak ve Başar, 2012)

İspat. (i) $x \in S$ olsun. Eğer her n için $x_n = x$ olan bir (x_n) olduğunu düşünürsek o halde bu S de $x_n \xrightarrow{N} x$ koşulunu sağlayan bir dizi olur. $x \in S_N^{'}$ olsun. Böylece her $\varepsilon_n = \dot{1} \dot{+} \dot{1} \dot{/} \dot{n}$ için $B_{\varepsilon_n}^N(x) \cap S \neq \emptyset$ dır. $x_n \in B_{\varepsilon_n}^N(x) \cap S$ seçersek S de bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz ve $x_n \xrightarrow{N} x$ $(n \to \infty)$. Bunun yakınsaklığı kolayca ispat edilebilir.

(ii) (i) den kolayca görülür.

Tanım 2.2.31. (X, d_N) bir non-Newtonian tam metrik uzay ve $T : X \longrightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $k \in \mathbb{R}(\mathbb{N})$ sayısıyla birlikte eğer her $x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \dot{\leq} k \dot{\times} d(x, y)$$

oluyorsa non-Newtonian Lipschitz koşulunu sağlar. Burada $k \dot{<} \dot{1}$ ise , T bir non-Newtonian büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.(Çakmak ve Başar, 2012)

2.3. Multiplicative Metrik Uzaylar

Tanım 2.3.1. X boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne multiplicative metrik denir.

$(m1)$ $\forall\, x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 1$ ve $d(x,y) = 1 \Longleftrightarrow x = y$

$(m2)$ $\forall\, x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$

$(m3)$ $\forall\, x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y).d(y,z)$ *(multiplicative üçgen eşitsizliği)* (Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Örnek 2.3.2. $\mathbb{R}_+^n$ pozitif reel sayıların n inci kuvvetlerinin koleksiyonu olsun. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \epsilon \mathbb{R}_+^n$ ve $|.|^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$|a|^* = \begin{cases} a & a \ \geq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{a} & a \ < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d^*(x,y) = \left|\frac{x_1}{y_1}\right|^* . \left|\frac{x_2}{y_2}\right|^* ... \left|\frac{x_n}{y_n}\right|^*$$

şeklinde tanımlanan $d^* : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ fonksiyonunu alalım. Bu şekilde tanımlanan d^* ın multiplicative metriğin bütün şartlarını sağladığı açıktır. (Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Örnek 2.3.3. $a \ > 1$ sabit bir reel sayı olsun. O halde

$$d_a(x,y) := |x - y|_a := \prod_{i=1}^{n} \left|\frac{a^{x_i}}{a^{y_i}}\right|^*$$

şeklinde tanımlanan $d_a : {\mathbb{R}_+}^n \to {\mathbb{R}_+}^n$ fonksiyonu multiplicative metrik uzay şartlarını sağlar. d_a'nın

$$\prod_{i=1}^{n} \left|\frac{a^{x_i}}{a^{y_i}}\right|^* = a^{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i - y_i|}$$

koşulunu sağladığı görülebilir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Önerme 2.3.4. (X, d) multiplicative bir metrik uzay olsun. O halde $\forall\ x, y, z \in X$ için

$$\left|\frac{d(x,z)}{d(y,z)}\right|^{*} \leq d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. Multiplicative üçgen eşitsizliğine göre aşağıdakileri yazabiliriz.

$$d(x,z) \leq d(x,y).d(y,z) \Rightarrow \frac{d(x,z)}{d(y,z)} \leq d(x,y) \tag{2.3.3}$$

$$d(y,z) \leq d(y,x).d(x,z) \Rightarrow \frac{1}{d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{d(y,z)}$$

Böylece $|.|^{*}$ tanımından ve (2.3.3) den

$$\frac{1}{d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{d(y,z)} \leq d(x,y) \Leftrightarrow \left|\frac{d(x,z)}{d(y,z)}\right|^{*} \leq d(x,y)$$

elde ederiz.

Tanım 2.3.5. (X, d) multiplicative metrik uzay $x \in X$ ve $\varepsilon\ > 1$ olsun

$$B_{\varepsilon}(x) = \{y \epsilon X \mid d(x,y)\ < \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanan küme x merkezli ε yarıçaplı multiplicative açık yuvar olarak adlandırılır. Benzer şekilde multiplicative kapalı yuvar da

$$\bar{B}_{\varepsilon}(x) = \{y \epsilon X \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Örnek 2.3.6. $(\mathbb{R}_{+} d^{*})$ multiplicative metrik uzayını düşünelim. d^{*} ın tanımından $(\frac{x_0}{\varepsilon}, x_0.\varepsilon) \subset \mathbb{R}_{+}$ olmak üzere x_0 merkezli $\varepsilon\ > 1$ yarıçaplı multiplicative açık yuvarlarının varlığı görülebilir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.7. (X, d) multiplicative metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer bir $x \in A$ noktası için $\varepsilon\ > 1$ olmak üzere $B_{\varepsilon}(x) \subset A$ koşulu sağlanıyorsa bu x noktası A'nın bir iç noktasıdır. A'nın bütün iç noktalarının koleksiyonuna A'nın multiplicative içi denir ve $int(A) = A$ ile gösterilir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.8. (X, d) bir multiplicative metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A'nın bütün noktaları multiplicative iç nokta ise $int(A) = A$ olup A multiplicative açık kümedir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Lemma 2.3.9. (X, d) multiplicative metrik uzay olsun. X'in her bir multiplicative açık yuvarı multiplicative açık kümedir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. $x \in X$ ve $B_\varepsilon(x)$ multiplicative açık yuvar olsun. $y \in B_\varepsilon(x)$ için, eğer $\delta = \frac{\varepsilon}{d(x,y)}$ ve $z \in B_\delta(y)$ olursa o halde $d(y, z) \ < \frac{\varepsilon}{d(x,y)}$ dır. Buradan

$$d(x, z) \ < d(x, y).d(y, z) \ < \varepsilon$$

elde edebiliriz.
Yani $z \in B_\varepsilon(x)$ olduğunu gösterir. Bu da $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$ anlamına gelir. Böylece $B_\varepsilon(x)$ multiplicative açık kümedir.

Lemma 2.3.10. (X, d) multiplicative metrik uzay olsun. O halde X ve $\emptyset$ multiplicative açık kümedir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Lemma 2.3.11. Multiplicative açık kümelerin ailesinin sayılabilir veya sayılamaz sonlu birleşimi de bir multiplicative açık kümedir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Lemma 2.3.12. Multiplicative açık kümeler ailesinin her sonlu kesişimi de multiplicative açık kümedir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. B_1 ve B_2 iki multiplicative açık küme ve $y \in B_1 \cap B_2$ olsun. O halde $B_{\delta_1}(y) \subset B_1$ ve $B_{\delta_2}(y) \subset B_2$ olacak şekilde $\delta_1, \delta_2 \ > 1$ vardır. δ_1 ve δ_2, δ dan daha küçük oldukları için $B_\delta(y) \subset B_1 \cap B_2$ elde ederiz. Böylece her sonlu multiplicative açık kümeler dizisinin kesişimi multiplicative açık kümedir.

Teorem 2.3.13. Her multiplicative metrik uzay bütün multiplicative açık kümelerin ailesini baz kabul eden bir topolojik uzaydır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. Şu ana kadar elde ettiğimiz sonuçlar bunu ispatlar.

Tanım 2.3.14. (X, d) multiplicative metrik uzay olsun. Bir $x \in X$ noktasının $S \subset X$ in multiplicative limit noktası olması için gerek ve yeter koşul $\forall\ \varepsilon\ > 1$ için $\big(B_\varepsilon(x) \backslash \{x\}\big) \cap S\ \neq\ \varnothing$ olmasıdır. S kümesinin multiplicative limit noktalarının kümesi S' ile gösterilir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.15. (X, d) multiplicative metrik uzay olsun. Eğer S bütün multiplicative limit noktalarını içerirse $S \subset X$, (X, d) de multiplicative kapalı kümedir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Multiplicative kapalı kümelerin tanımından aşağıdaki önermeleri kolayca ispatlayabiliriz.

Önerme 2.3.16. (X, d) multiplicative metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. O halde $S \cup S'$ multiplicative kapalı bir kümedir. Bu küme S kümesinin multiplicative kapanışı diye adlandırılır ve $\bar{S}$ ile gösterilir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Önerme 2.3.17. (X, d) multiplicative metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. S multiplicative açıktır ancak ve ancak X/S kapalı ise.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.18. (X, d_x) ve (Y, d_y) iki multiplicative metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall\varepsilon\ > 1$ için bir $\delta\ > 1$ var öyle ki $(f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)))$ koşulunu sağlıyorsa f, $x \in X$ de multiplicative süreklidir denir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.19. (X, d) multiplicative metrik uzayı verilsin. $X \times X$ üzerinde bir multiplicative metriği

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1).d(x_2, y_2)$$

şeklinde tanımlayalım. O halde $d : X \times X \to ([1, \infty), |.|^*)$ multiplicative metriği $X \times X$ üzerinde multiplicative süreklidir. Bunu göstermek için $(y_1, y_2), (x_1, x_2) \in X \times X$ olsun.

$$\left|\frac{d(y_1, y_2)}{d(x_1, x_2)}\right|^* \leq d(x_1, x_2).d(y_1, dy_2)$$

elde ettiğimiz için d nin $X \times X$ üzerinde multiplicative süreklidir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.20. (X, d_x) multiplicative bir metrik uzay, (Y, d_y) bir metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ olacak şekilde $\delta > 1$ varsa o halde f nin $x \in X$ de yarı multiplicative sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Aynı şekilde benzer şartlar sağlanırsa $g : Y \to X$ fonksiyonunun da $y \in Y$ de yarı multiplicative sürekli olduğu söylenir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Örnek 2.3.21. $f : (\mathbb{R}_+, |.|^*) \to (\mathbb{R}, |.|^*)$, $f(x) = \ln(x)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$, $|\ln(x) - \ln(y)| < \varepsilon$ olsun. Eğer $\delta = e^\varepsilon$ olursa o halde $\left|\frac{x}{y}\right|^* < \delta$ elde ederiz. Bu ise bize f nin $\mathbb{R}_+$ üzerinde yarı multiplicative sürekli olduğunu gösterir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Örnek 2.3.22. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}^*[a, b]$, $[a, b]$ den $\mathbb{R}_+$ e olan bütün yarı multiplicative sürekli fonksiyonların koleksiyonu olsun. O halde

$$d(f, g) = \max_{x\in[a,b]} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|^* ; f, g \in \mathbb{C}^*[a, b]$$

dönüşümü $\mathbb{C}^*[a, b]$ üzerinde multiplicative bir metriktir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.23. (X, d) multiplicative metrik uzay, (x_n) bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her multiplicative $B_\varepsilon(x)$ açık yuvarı için $n \geq N$ olacak şekilde bir N doğal sayısı var ve $x_n \in B_\varepsilon(x)$ oluyorsa x_n, x noktasına multiplicative yakınsaktır denir ve $x_n \to_* x(n \to \infty)$ ile gösterilir.

Lemma 2.3.24. (X, d) multiplicative metrik uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x \in X$ olsun. O halde

$$x_n \to_* x(n \to \infty) \Leftrightarrow d(x_n, x) \to_* 1(n \to \infty)$$

dır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. (x_n) dizisinin x noktasına multiplicative yakınsak olduğunu varsayalım. Yani $\forall\, \varepsilon > 1$ için $n \geq N$ olacak şekilde bir N doğal sayısı var öyle ki $d(x_n, x) < \varepsilon$ olsun. Böylece

$$\forall n \geq N \text{ icin } \frac{1}{\varepsilon} < d(x_n, x) < 1$$

eşitsizliği elde edilir. Bunun anlamı $\forall n \geq N$ için $|d(x_n, x)|^* < \varepsilon$. Yani $d(x_n, x)$ dizisi 1 noktasına multiplicative yakınsaktır.

Lemma 2.3.25. (X, d) multiplicative metrik uzay (x_n) X'de bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi multiplicative yakınsak ise o halde multiplicative limit noktası tektir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. $(x_n) \rightarrow_* x$ ve $(x_n) \rightarrow_* y$ $(n \rightarrow \infty)$ olacak şekilde $x, y \in X$ alalım. $\forall \varepsilon > 1$ için bir N doğal sayısı vardır öyleki $\forall n \geq N$ için $d(x_n, x) < \sqrt{\varepsilon}$ ve $d(x_n, y) < \sqrt{\varepsilon}$ elde edilir. Ayrıca

$$d(x, y) \leq d(x_n, x).d(x_n, y) < \varepsilon$$

dır. ε keyfi olduğundan $d(x, y) = 1$ dir. Böylece $x = y$ dır.

Teorem 2.3.26. (X, d_X) ve (Y, d_Y) iki multiplicative metrik uzay olsun. $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve (x_n), X'de herhangi bir dizi olsun. O halde f, $x \in X$ noktasında multiplicative süreklidir ancak ve ancak $x_n \rightarrow_* x$ $(n \rightarrow \infty)$ olacak şekilde her (x_n) dizisi için $f(x_n) \rightarrow_* f(x)$ dir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. f'nin x noktasında multiplicative sürekli ve $x_n \rightarrow x$ $(n \rightarrow \infty)$ olduğunu varsayalım. f nin multiplicative sürekliliğinden $\forall \varepsilon > 1$ için $\delta > 1$ vardır öyleki $f(B_\delta(x)) \subset B(f(x))$ dır. $x_n \rightarrow_* x(n \rightarrow \infty)$ olduğundan dolayı öyle bir N vardır ki $n \geq N$, $x_n \in B_\delta(x)$ sağlanır. Yukarıdaki sonuçlar üzerinden şunu diyebiliriz ki $f(x_n) \in B_\varepsilon(f(x))$ ve bu yüzden $f(x_n) \rightarrow_* f(x)$ $(n \rightarrow \infty)$ dır.
Karşıt olarak f'nin x noktasında multiplicative sürekli olmadığını varsayalım. Yani her $\delta > 1$ için bir $\varepsilon > 1$ ve $d_X(x', x) < \delta$ koşulunu sağlayan $x' \in X$ var fakat

$$d_Y(f(x'), f(x)) \geq \varepsilon \tag{2.3.4}$$

olsun. Şimdi her n için $\delta_n > 1$ ve $\delta_n \rightarrow 1$ olmak üzere (δ_n) reel sayılarının keyfi dizisini alalım. Her n için (2.3.4) eşitsizliğini sağlayan x''i seçelim ve bunu x'_n ile gösterelim. $x'_n \rightarrow_* x$ olduğu fakat $f(x'_n)$, $f(x)$'e multiplicative yakınsak olmadığı açıktır. Bu yüzden eğer f multiplicative sürekli değilse o halde her $x_n \rightarrow_* x$ dizisi

$f(x_n) \to_* f(x)$ koşulunu sağlamaz. Bunu kanıtlamak için karşıt tersini ıspatlamak yeterlidir.

Teorem 2.3.27. (X, d_x) ve (Y, d_y) sırasıyla alışılmış metrik uzay ve multiplicative metrik uzay olsun. $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve (x_n), X de herhangi bir dizi olsun. O halde f, $x \in X$ noktasında yarı multiplicative süreklidir ancak ve ancak $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde her (x_n) dizisi için $f(x_n) \to_* f(x)$ dır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Teorem 2.3.28. (X, d) multiplicative metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. O halde

(i) Bir $x \in X$ noktası $\bar{S}$ nin elemanıdır$\Leftrightarrow$ S de bir (x_n) dizisi var öyleki $x_n \to_* x$ $(n \to \infty)$ dır.

(ii) S kümesi multiplicative kapalıdır$\Leftrightarrow$ S de her multiplicative yakınsak dizi yine S'ye ait olan multiplicative bir limit noktasına sahiptir.

(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. (i) $x \in X$ olsun. Eğer her n için $x_n = x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisini düşünürsek bu S'de $x_n \to_* x$ olacak şekilde bir dizidir. $x \in S'$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon_n = 1 + \frac{1}{n}$ için $B_{\varepsilon_N}(x) \cap S \neq \varnothing$ dır. $x_n \epsilon B_{\varepsilon_N}(x) \cap S$ seçilirse S de $x_n \to_* x$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz. Karşıtın ispatını yapmak kolaydır.

(ii) (i) den yapılabilir.

Tanım 2.3.29. (X, d) bir multiplicative metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 1$ için bir $n \epsilon N$ var öyleki $m, n \geq N$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ oluyorsa, bu dizi multiplicative Cauchy dizisidir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Teorem 2.3.30. (X, d) multiplicative metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Bu dizi multiplicative yakınsak ise multiplicative bir Cauchy dizisidir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. $x_n \to_* x$ olacak şekilde $x \in X$ alalım. Bundan dolayı her $\varepsilon < 1$ için bir N doğal sayısı vardır öyleki her $m, n \geq N$ için $d(x_n, x) < \sqrt{\varepsilon}$ ve $d(x_m, x_n) < \sqrt{\varepsilon}$ dir. Multiplicative üçgen eşitsizliğine göre

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x).d(x, x_m) < \sqrt{\varepsilon}.\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

elde ederiz. Böylece (x_n) multiplicative Cauchy dizisidir.

Teorem 2.3.31. A, $\mathbb{R}_+$ nın boş olmayan bir alt kümesi olsun. O halde $s = \sup A$ olması için gerek ve yeter şart

(i) Her $a \in A$ için $a \leq s$ dir.

(ii) Her $\varepsilon > 1$ için $\left|\frac{s}{a}\right|^* < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $a \in A$ noktası vardır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. $s = \sup A$ olsun. O halde supremumun tanımından (i) şartı açıktır. (ii) nin ispatı için bir $\varepsilon > 1$ var olsun öyleki $\left|\frac{s}{a}\right|^* < \varepsilon$ olacak şekilde A kümesinde hiçbir a olmasın. Eğer böyle bir durum varsa o halde $\frac{s}{\varepsilon}$ aynı zamanda A dizisi için en üst sınırdır. Fakat bu durum imkansızdır. Çünkü s, A nın en küçük üst sınırıdır. Karşıtının ispatı için s sayısının hem (i) hem de (ii) koşullarını sağladığını varsayalım. (i) ye göre s, A kümesi için bir üst sınırdır. Eğer $s \neq \sup A$ ise o halde $s > \sup A$ anlamına gelir. Fakat bu sonuç imkansızdır. Bu yüzden $s = \sup A$ dır.

Teorem 2.3.32. A, $\mathbb{R}_+$ nın boş olmayan bir alt kümesi olsun. O halde $m = \inf A$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\forall a \in A$ için $m \leq a$ dır.

(ii) $\forall \varepsilon > 1$ için $\left|\frac{a}{m}\right|^* < \varepsilon$ olacak şekilde bir $a \in A$ noktası vardır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. $s = \sup A$ olsun. O halde supremumun tanımından (i) şartı açıktır. (ii) nin ispatı için bir $\varepsilon > 1$ var olsun öyleki $\left|\frac{s}{a}\right|^* < \varepsilon$ olacak şekilde A kümesinde hiçbir a olmasın. Eğer böyle bir durum varsa o halde $\frac{s}{\varepsilon}$ aynı zamanda A dizisi için en üst sınırdır. Fakat bu durum imkansızdır. Çünkü s, A nın en küçük üst sınırıdır. Karşıtının ispatı için s sayısının hem (i) hem de (ii) sağladığını varsayalım. (i) ye göre s, A kümesi için bir üst sınırdır. Eğer $s \neq \sup A$ ise o halde $s > \sup A$ anlamına gelir. Fakat bu sonuç imkansızdır. Bu yüzden $s = \sup A$ dır.

Tanım 2.3.33. (X, d) multiplicative metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $x \in X$ için bir $M > 1$ var öyleki $A \subseteq B_M(x)$ ise A kümesi multiplicative sınırlıdır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Teorem 2.3.34. Multiplicative bir Cauchy dizisi multiplicative sınırlıdır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. (X, d) multiplicative metrik uzay ve (x_n) bu metrik uzayda bir multiplicative Cauchy dizisi olsun. Multiplicative Cauchy dizisinin tanımından $\varepsilon = 2 > 1$ için bir n_0 doğal sayısı vardır öyleki her $m, n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < 2$ sağlanır.

$$M = \max\{2, d(x_1, x_{n_0}), ..., d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}$$

şeklinde alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n x_{n_0}) < M$ olduğu açıktır. Bu nedenle

$$\forall\ m, n \in \mathbb{N} \text{ için } d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}).d(x_m, x_{n_0}) < M^2$$

elde edilir. Bu da bu dizinin multiplicative sınırlı olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.35. (x_n) ve (y_n) bir (X, d) multiplicative metrik uzayında multiplicative Cauchy dizileri olsun. Bu taktirde $(d(x_n, y_n))$ dizisi $(\mathbb{R}_+, d^*)$ multiplicative metrik uzayında multiplicative Cauchy dizisi olur.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. Multiplicative ters üçgen eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} d^*(d(x_n, y_n), d(x_m, y_m)) &= \left|\frac{d(x_n, y_n)}{d(x_m, y_m)}\right|^* \\ &\leq \left|\frac{d(x_n y_n)}{d(x_m, y_n)}\right|^* . \left|\frac{d(x_m, y_n)}{d(x_m, y_m)}\right|^* \\ &\leq d(x_n, x_m).d(y_n, y_m) \end{aligned}$$

elde edilir.

(x_n) ve (y_n) multiplicative Cauchy dizileri olduklarından her $\varepsilon > 1$ için bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall\ n, m \geq N$ için $d(x_n, x_m) < \sqrt{\varepsilon}$ ve $d(y_n y_m) < \sqrt{\varepsilon}$ dır. Bu sonuç

$\forall\ n, m \geq N$ için $d^*(d(x_n, y_n), d(x_m, y_m)) < \varepsilon$ olduğunu gösterir. Bu da $d(x_n, y_n)$ in bir multiplicative Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Lemma 2.3.36. (X, d) bir multiplicative metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. O halde (x_n) multiplicative bir Cauchy dizisidir ancak ve ancak $d(x_n, x_m) \rightarrow_* 1$ $(m, n \rightarrow \infty)$ dır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. (x_n) multiplicative bir Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon > 1$ için bir N vardır öyleki her $m, n \geq N$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ dır. Bu nedenle $|.|^*$ nın tanımından $n, m \geq N$ için $|d(x_n, x_m)|^* < \varepsilon$ sonucunu elde ederiz. Bu sonuç ise $(\mathbb{R}_+, |.|^*)$ de $d(x_n, x_m) \rightarrow_* 1$ $(m, n \rightarrow \infty)$ olduğunu ortaya koyar.

Teorem 2.3.37. (X, d) multiplicative metrik uzay olsun. (x_n) ve (y_n) de X de iki tane dizi öyleki $x, y \in X$ için $x_n \rightarrow_* x$, $y_n \rightarrow_* y$ olsun. O halde

$$d(x_n, y_n) \rightarrow_* d(x, y)(n \rightarrow \infty)$$

dır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. $x_n \rightarrow_* x$ ve $y_n \rightarrow_* y$ $(n \rightarrow \infty)$ olsun. Yani $\forall \varepsilon > 1$ için bir $N \in \mathbb{N}$ var öyleki $n \geq N$ için $d(x_n, x) < \sqrt{\varepsilon}$ ve $d(y_n, y) < \sqrt{\varepsilon}$ alalım. Öte yandan multiplicative üçgen eşitsizliğine göre

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x).d(x, y).d(y_n, y)$$

$$d(x, y) \leq d(x_n, x).d(x_n, y_n).d(y_n, y)$$

dır. Bu sonuç ise

$$\frac{d(x_n, y_n)}{d(x, y)} \leq d(x_n, x).d(y_n, y),$$

$$\frac{d(x, y)}{d(x_n, y_n)} \leq d(x_n, x).d(y_n, y)$$

olduğunu gösterir.

$|.|^*$ mutlak değer fonksiyonunun tanımından her $n \geq N$ için

$$\left|\frac{d(x_n, y_n)}{d(x, y)}\right|^* \leq d(x_n, x).d(y_n, y) \ < \varepsilon$$

dır. Bu ise $(\mathbb{R}_+, |.|^*)$ de $d(x_n, y_n) \rightarrow_* d(x, y)$ $(n \rightarrow \infty)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.38. (x_n), (X, d) multiplicative metrik uzayında bir multiplicative Cauchy dizisi olsun. Eğer (x_n) dizisi (x_{n_k}) alt dizisi var öyleki $x_{n_k} \rightarrow_* x$ $(n \rightarrow \infty)$ dır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. (x_n) bir multiplicative Cauchy dizisi ve $\varepsilon \ > 1$ olsun. O halde $m, n \geq N$ için $d(x_n, x_m) \ < \sqrt{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $N \ \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. (x_{n_k}), (x_n) in bir alt dizisi öyleki $x_{n_k} \rightarrow_* x$ $(n \rightarrow \infty)$ olsun. Bu taktirde $k_1 \ \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall k \geq k_1$ için $d(x_{n_k}, x) \ < \sqrt{\varepsilon}$ dır. Dahası $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır $k_1 \ \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall k \geq k_2$ için $n_k \geq N$ olmak üzere $\lim_{k \to \infty} n_k = \infty$ ve $k_2 \ \in \mathbb{N}$ dır. Böylece

$$\forall \ k \geq \max\{n, k_1, k_2\} \ \text{ için } d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}).d(x_{n_k}, x) \ < \sqrt{\varepsilon}.\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

elde ederiz. Bu ise $x_n \rightarrow_* x$ $(n \rightarrow \infty)$ olduğunu gösterilir.

Lemma 2.3.39. $\mathbb{R}$ deki her dizi monoton bir alt diziye sahiptir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Lemma 2.3.40. $(\mathbb{R}_+, |.|^*)$ de bir monoton multiplicative sıralı dizisi multiplicative yakınsaktır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. (x_n) $\mathbb{R}_+$ de artan multiplicative sınırlı bir dizi ve $x = \sup x_n$ olsun. $x_n \rightarrow_* x$ $(n \rightarrow \infty)$ olduğunu gösterelim. Supremumun multiplicative karakterizasyonundan her $\varepsilon \ \ > 1$ için $\left|\frac{x_n}{x}\right|^* \ < \varepsilon$ olacak şekilde x_n vardır. $n = N$ olsun. O halde monotonluktan her $m \ > n$ için $x_m \ > x_N$ dir. Fakat $x_m \ < x$ olduğundan bu sonuç her $m \ > N$ için $\left|\frac{x_m}{x}\right|^* \ < \varepsilon$ olduğunu gösterir. Böylece $x_n \rightarrow_* x(n \rightarrow \infty)$ dır.
Şu ana kadar elde ettiğimiz sonuçların genel özetleri Bolzano-Weierstrass teoreminin multiplicative kısımlarıdır.

Sonuç 2.3.41. $(\mathbb{R}_+, |.|^*)$'de bir multiplicative sınırlı dizi, multiplicative yakınsak alt diziye sahiptir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.42. Bir multiplicative metrik uzaydaki her multiplicative Cauchy dizisinin $x \in X$'e yakınsak olduğunu düşünürsek X kümesi kapalıdır. Eğer multiplicative metrik uzaydaki her multiplicative Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına multiplicative yakınsak ise o zaman bu multiplicative metrik uzay tamdır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.43. Şimdiye kadar elde ettiğimiz bütün sonuçlar $(\mathbb{R}_+, |.|^*)$ nın tam olduğunu gösterir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Teorem 2.3.44. (X, d) tam bir multiplicative metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. O halde (S, d) kapalıdır ancak ve ancak S multiplicative kapalıdır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. Teorem 2.3.30 ve Teorem 2.3.32 den görülür.

Tanım 2.3.45. (X, d) multiplicative metrik uzay olsun. Eğer bir $\lambda \in [0, 1)$ reel sayısı var öyleki

$$\forall\ x, y \in X \text{ için } d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1, x_2)^\lambda$$

koşulu sağlanıyorsa $f : X \to Y$ multiplicative büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Tanım 2.3.46. S ve T nin (X, d) multiplicative metrik uzayında kendi içine dönüşüm olduklarını varsayalım. Eğer $\forall\ x \in X$ için $STx = TSx$ koşulu sağlanırsa S ve T değişmeli dönüşümler olarak adlandırılır.(Gu, Cui ve Wu)

Tanım 2.3.47. S, T nin (X, d) multiplicative metrik uzayında iki kendi içine dönüşüm olduğunu varsayalım. Eğer $\forall\ x \in X$ için $d(STx, TSx) \leq d(Sx, Tx)$ koşulu sağlanırsa S ve T nin zayıf değişmeli dönüşümler olarak adlandırılır.(Gu, Cui ve Wu)

Uyarı 2.3.48. Değişmeli dönüşümler zayıf değişmeli olmak zorundadır ancak tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.3.49. S ve T (X, d) multiplicative metrik uzayında iki kendi içine dönüşüm olsun. Eğer $\forall\ x \in X$ için $R > 0$ ve $d(STx, TSx) \leq Rd(Sx, Tx)$ ise S ve T noktasal zayıf değişmeli olarak adlandırılır.(Pant, 1998, 1999)

Tanım 2.3.50. S ve T (X, d) multiplicative metrik uzayında kendi içine dönüşümler olsun. Eğer $\forall\ x \in X$ için $R > 0$ var ve $d(SSx, TTx) \leq Rd(Tx, Sx)$ ise S ve T (P) tipi R zayıf değişmeli dönüşüm olarak adlandırılır.(Imbad ve Ali, 2006)

Lemma 2.3.51. S ve T (X, d) multiplicative metrik uzayında kendi içine dönüşümler olsun. Eğer S, T, (P) tipi R zayıf değişmeli dönüşüm ve $\{x_n\}$, X üzerinde $\forall\ z \in X$ için $\lim_{n\to\infty} Sx_n = z = \lim_{n\to\infty} Tx_n$ koşulunu sağlayan bir dizi ise T, z noktasında değişmeli olduğunda $\lim_{n\to\infty} STx_n = Tz$ dır.(Pant, 1999)

3. BULGULAR

3.1. Non-Newtonian Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3.1.1. T bir non-Newtonian tam metrik uzayında non-Newtonian bir büzülme dönüşümü olsun. O halde T bir tek sabit noktaya sahiptir.(Çakmak ve Başar, 2012)

İspat. x_0, X'de keyfi bir nokta olsun. $\{x_n\}$

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, ..., x_n = T^nx_0$$

ile oluşturalım. Şimdi (x_n) dizisinin non-Newtonian Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$$d_N(x_m, x_n) = d_N(T^mx_0, T^nx_0)$$

$$= d_N(T^mx_0, T^mT^{n-m}x_0)$$

$$\dot{\leq} k^{mN} \dot{\times} d_N(x_0, T^{n-m}x_0)$$

$$= k^{mN} \dot{\times} d_N(x_0, x_{n-m})$$

$$\dot{\leq} k^{mN} \dot{\times} \left\{d_N(x_0, x_1) \dot{+} ... \dot{+} d_N(x_{n-m-1}, x_{n-m})\right\}$$

$$\dot{\leq} k^{mN} \dot{\times} d_N(x_0, x_1) \left\{\dot{1} \dot{+} k \dot{+} k^{2_N} \dot{+} ... \dot{+} k^{n-m-1_N}\right\}$$

$$\dot{\leq} \frac{k^{m_N} \dot{\times} d_N(x_0, x_1)}{1 \dot{-} k}$$

Eğer $m < n$ ise o halde $k^{m_N} \dot{<} \dot{1}$ ve $d_N(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^+(N)$ olduğundan dolayı

$$\frac{k^{m_N} \dot{\times} d_N(x_0, x_1)}{\dot{1} \dot{-} k}$$

elde ederiz. Burada m sayısı yeteri kadar büyük veya küçük seçilebilir. Bu sonuç ise $\{x_n\}$ non-Newtonian Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d_N) non-Newtonian kapalı olduğundan dolayı X'de bir x noktası vardır ve $(x_n \xrightarrow{N} x)$ dir. Şimdi x'in T

dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliğinden

$$d_N(x,Tx) \dot{\leq} d_N(x,x_n) \dot{+} d_N(x_n,Tx)$$

$$\dot{\leq} d_N(x,x_n) \dot{+} k \dot{\times} d_N(x_{n-1},x)$$

elde ederiz. $x_n \xrightarrow{N} x$ olduğundan dolayı $d_N(x,Tx) = \dot{0}$ ve bu yüzden de $Tx = x$ dır. Bu x'in T'nin bir sabit noktası olduğunu gösterir. Şimdi x in bir tek sabit nokta olduğunu gösterelim. $x_1 \in X$'in T'nin bir diğer sabit noktası olduğunu yani $Tx_1 = x_1$ olduğunu varsayalım. O halde

$$d_N(x,x_1) = d_N(Tx,Tx_1) \dot{\leq} k \dot{\times} d_N(x,x_1)$$

dir ve $k \dot{<} \dot{1}$ den dolayı $d_N(x,x_1) = \dot{0}$ dır. Böylece $x = x_1$ dir.

Sonuç 3.1.2. Yukarıdaki teoremin varsayımları altında rastgele seçilen $x_0 \in X$ ile oluşturulan iterasyon dizisinin T'nin bir tek x noktasına yakınsak olduğu görülür.(Çakmak ve Başar, 2012)

Teorem 3.1.3. T bir non-Newtonian tam metrik X uzayından kendisine dönüşüm ve $\bar{B}_{\dot{\tau}}^{N}(x_0) = \left\{x \in X : d_N(x,x_0) \dot{\leq} \dot{\tau}\right\}$ kapalı yuvarı üzerinde non-Newtonian bir büzülme olsun. Ayrıca

$$d(x_0, T_{x_0}) \ \dot{<} \left(\dot{1} \dot{-} k\right) \dot{\tau}$$

olduğunu varsayalım. O halde

$$x_n = T^n x_0 = T x_{n-1}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon dizisi bir $x \in \bar{B}_{\dot{\tau}}^{N}(x_0)$ noktasına yakınsar ve x, T'nin bir tek sabit noktasıdır.(Çakmak ve Başar, 2012)

İspat.

$$d_N(x_m, x_n) \dot{\leq} \frac{k^m \times d_N(\dot{x}_0, x_1)}{\dot{1} \dot{-} k}$$

eşitsizliğinde $m = 0$ alınırsa

$$d_N(x_m, x_n) \dot{\leq} \frac{d_N(x_0, x_1)}{\dot{1} \dot{-} k}$$

olur. $d_N(x_0, Tx_0) \dot{<} (\dot{1} \dot{-} k)\dot{\tau}$ eşitsizliğinden

$$d_N(x_0, x_n) \dot{\leq} \frac{d_N(x_0, x_1)}{\dot{1} \dot{-} k} \dot{<} \dot{\tau}$$

elde ederiz. Bu sonuçlar bütün x_n'lerin $\bar{B}^N_{\dot{\tau}}(x_0)$'da kapalı olduğunu gösterir. $x_n \to x$ ve $\bar{B}^N_{\dot{\tau}}(x_0)$ nın kapalı olmasından dolayı $x \in \bar{B}^N_{\dot{\tau}}(x_0)$ dır.

3.2. Multiplicative Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3.2.1. (X, d) multiplicative metrik uzay ve $T : X \to X$ multiplicative bir büzülme olsun. Eğer (X, d) tam ise T bir tek sabit noktaya sahiptir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. $x_0 \in X$ noktasını alalım. X'de (x_n) dizisini $n = 1, 2, 3, ...$için $x_n = fx_{n-1}$ olarak tanımlayalım. Buradan T multiplicative büzülme olduğunndan

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1})^{\lambda} \leq d(x_{n-1}, x_{n-2})^{\lambda^2} \leq ... \leq d(x_1, x_0)^{\lambda^n}$$

sonucuna ulaşırız. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m x_{m-1})...d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq d(x_1, x_0)^{\lambda^{m-1}+...+\lambda^n} \\ &\leq d(x_1, x_0)^{\frac{\lambda^n}{1-\lambda}} \end{aligned}$$

dır. Bu sonuç $d(x_m, x_n) \to_* 1$ $(m, n \to \infty)$ olduğunu gösterir. Bu yüzden $x_n \to_* z$ $(n \to \infty)$ gibi bir $z \in X$ sayısı vardır. Dahası

$$d(Tz, z) \leq d(Tx_n, Tz).d(Tx_n, z) \leq d(x_n, z)^{\lambda}.d(x_{n+1}, z) \to_* 1(n \to \infty)$$

dır. Böylece $d(Tz, z) = 1$ olur. Yani z, T'nin bir sabit noktasıdır. Başka bir ifadeyle $Tz = z$ dir.

Şimdi başka bir y noktası için $Ty = y$ olsun. Bu taktirde

$$d(z, y) = d(Tz, Ty) \leq d(z, y)^{\lambda}$$

dır. Böylece $d(z, y) = 1$ ve $y = z$ dir. Bu sonuç ise z'nin T'nin bir tek sabit noktası olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.2. (X, d) tam bir multiplicative metrik uzay olsun. $\varepsilon > 1$ ve $x_0 \in X$ için $\bar{B}_{\varepsilon}(x_0)$'in multiplicative kapalı yuvar olduğunu düşünelim. Ayrıca $T : X \to X$ dönüşümünün

$$\forall\ x, y \in \bar{B}_\varepsilon(x_0) \text{ için } d(Tx, Ty) \leq d(x, y)^\lambda.$$

büzülme şartını sağladığını varsayalım. Burada $\lambda \in [0, 1)$ bir sabittir ve $d(Tx_0, x_0) \leq \varepsilon^{1-\lambda}$ dır. O halde T, $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ bir tek sabit noktaya sahiptir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. Her $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ için $Tx \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ ve $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$'in tam olduğunu ispat etmek yeterlidir. Kabul edelim ki (x_n), $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ da bir multiplicative Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde (x_n), X'de bir multiplicative Cauchy dizisidir. X'in tamlığından bir $x \in X$ vardır öyleki $x_n \rightarrow_* x$ X'in tamlığından $x_n \rightarrow_* x$, $d(x_n, x) \rightarrow_* 1$ olduğundan

$$d(x_0, x) \leq d(x_n, x_0).d(x_n, x) \leq d(x_n, x).\varepsilon$$

elde ederiz. Böylece $d(x_0, x) \leq \varepsilon$ ve $x \epsilon \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ dır. Bu ise $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$'in tam olduğunu gösterir. Her $x \ \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ için

$$d(x_0, Tx) \leq d(Tx_0, x_0).d(Tx_0, Tx) \leq \varepsilon^{1-\lambda}.d(x_0, x)^\lambda \leq \varepsilon^{1-\lambda}.\varepsilon^\lambda = \varepsilon$$

olup $Tx \ \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ dır.

Sonuç 3.2.3. (X, d) bir tam multiplicative metrik uzay olsun. Eğer $T : X \to X$ dönüşümü bazı pozitif n tamsayıları için $\lambda \in [0, 1)$ bir sabit olmak üzere

$$\forall\ x, y \ \in X \text{ için } d(T^n x, T^n y) \ < d(x, y)^\lambda$$

koşulunu sağlıyorsa X'de bir tek sabit noktaya sahiptir.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. Teorem 3.2.1 den T^n, $z \in X$'de bir tek sabit noktaya sahiptir ancak ve ancak $T^n(Tz) = T(T^n z) = Tz$ dir. Bu nedenle aynı zamanda Tz, T^n'nin sabit bir noktasıdır ve $Tz = z$ olduğundan dolayı z, T nin sabit noktasıdır. Ayrıca T nin sabit noktası T^n'nin de sabit nokta olduğu için T nin sabit noktası bir tektir.

Teorem 3.2.4. (X, d) bir tam multiplicative metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümünün $\lambda \in [0, 1)$ bir sabit olmak üzere

$$\forall\, x, y \in X \text{ için } d(Tx, Ty) \leq (d(Tx, , x).d(Ty, y))^{\lambda}$$

büzülme koşulunu sağladığını varsayalım. O halde T, X'de bir tek sabit noktaya sahiptir ve herhangi $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsaktır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. $x_0 \in X$ seçelim. $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, ..., x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0$ dizisini oluşturalım.

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) &\leq (d(Tx_n, x_n).d(Tx_{n-1}, x_{n-1}))^{\lambda} \\ &= (d(x_{n+1}, x_n).d(x_n, x_{n-1}))^{\lambda} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq (d(x_n, x_{n-1}))^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} = d(x_n, x_{n-1}))^{h}$$

elde ederiz. Buradan $h = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ dır. $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n,} x_m) &\leq d(x_{n,} x_{n-1}).d(x_{n-1}, x_{n-2})...d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq d(x_1, x_0)^{h^{n-1}+h^{n-2}+...+h^m} \leq d(x_1, x_0)^{\frac{h^m}{1-h}} \end{aligned}$$

dır. Elde ettiğimiz bu sonuçlar $d(x_n, x_m) \to_* 1$ $(n \to \infty)$ olduğunu gösterir. Bu yüzden de (x_n) bir Cauchy dizisidir. X'in tamlığından göre $x_n \to_* z$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.

$$\begin{aligned} d(Tz, z) &\leq d(Tx_n, Tz).d(Tx_n, z) \\ &\leq (d(Tx_n, x_n).d(Tz, z))^{\lambda}.d(x_{n+1}, z) \end{aligned}$$

olduğundan

$$d(Tz,z) \leq (d(Tx_n,x_n)^\lambda.d(x_{n+1},z))^{\frac{1}{1-\lambda}} \to_* 1(n\to\infty)$$

elde ederiz. Bu nedenle $d(Tz,z) = 1$ yani $Tz = z$ dır. Son olarak T'nin sabit noktasının bir tek olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 3.2.5. (X,d) bir tam multiplicative metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü aşağıdaki büzülme şartını sağladığını varsayalım. $\lambda \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ bir sabit olmak üzere

$$\forall\ x,y\ \in X \text{ için } d(Tx,Ty) \leq (d(Tx,y).d(Ty,x))^\lambda$$

olup T bir sabit noktaya sahiptir ve her $x\ \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsaktır.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

İspat. $x_0\ \in X$ seçelim $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1 = T^2x_0, .., x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, ...$ dizisini oluşturalım.

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_n) = d(Tx_n,Tx_{n-1}) &\leq (d(Tx_n,Tx_{n-1}).d(Tx_{n-1},x_n))^\lambda \\ &\leq (d(x_{n+1},x_n).d(x_n,x_{n-1}))^\lambda \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da

$$d(x_{n+1},x_n) \leq (d(x_n,x_{n-1}))^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} = d(x_n,x_{n-1})^h$$

elde ederiz. Buradan $h = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ dır. $n\ > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n-1}).d(x_{n-1},x_{n-2})...d(x_{m+1},x_m) \\ &\leq d(x_1,x_0)^{h^{n-1}+h^{n-2}+...+h^m} \leq d(x_1,x_0)^{\frac{h^m}{1-h}} \end{aligned}$$

olup $d(x_n,x_m) \to_* 1\ (m,n\to\infty)$ olduğunu görülür. Bu nedenle (x_n) bir Cauchy dizisidir. X'in multiplicative tamlığından $x_n \to_* z\ (n\to\infty)$ olacak şekilde $z\ \in X$ vardır.

$$
\begin{aligned}
d(Tz,z) &\leq d(Tx_n,Tz).d(Tx_n,z) \\
&\leq (d(Tz,x_n).d(Tx_n,z))^{\lambda}.d(x_{n+1},z), \\
&\leq (d(Tz,z).d(x_n,z).d(x_{n+1},z))^{\lambda}.d(x_{n+1},z)
\end{aligned}
$$

den dolayı

$$d(Tz,z) \leq (d(x_{n+1},z).d(x_n,z))^{\lambda}.d(x_{n+1},z)^{\frac{1}{1-\lambda}} \rightarrow_* 1(n \rightarrow \infty)$$

elde ederiz. Buradan $d(Tz,z) = 1$ yani $Tz = z$ dır. Bu yüzden z, T'nin bir sabit noktasıdır. Sonuç olarak T'nin sabit noktasının bir tek olduğu kolayca gösterilebilir.

Uyarı 3.2.6. Teorem 3.2.1 ,Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 metrik uzaylardaki büzülme dönüşümlerinin bazı yakınsak dönüşüm sabit nokta teoremlerini multiplicative metrik uzaylarına taşır. Aşağıdaki iki örnekle konuyu özetleyelim.
$x = \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\} \cup \{(1,x) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\}$ olsun.

$$d((a,b),(c,d)) = \left(\left|\frac{a}{c}\right|^* . \left|\frac{b}{d}\right|^* \right)^{\frac{1}{3}}$$

olacak şekilde tanımlanan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü düşünelim. O halde (X,d) bir tam multiplicative metrik uzaydır. $T : X \rightarrow X$

$$T(x,1) = (1,\sqrt{x}) \text{ ve } T(1,x) = (\sqrt{x},1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm

$$\text{Her } (a,b),(c,d) \ \in X \ \text{ için } \ d(T(a,b),T(c,d)) \leq d((a,b),(c,d))^{\lambda}$$

multiplicative büzülme şartını sağlar. Burada $\lambda = \frac{1}{2} \in [0,1)$ sabittir. T'nin $(1,1) \ \in X$ üzerinde bir tek sabit noktaya sahip olduğu açıktır. Eğer $X = [0.1,1]$ olursa $|.|^*$ multiplicative metriğine göre bir multiplicative tam metrik uzaydır. Böylece

$T(x) = e^{x-1-\frac{x^3}{10}}$ şeklinde tanımlanan $T : X \to X$ dönüşümü

$$\forall\ x, y \in X \text{ için } \left|\frac{T(x)}{T(y)}\right|^{*} \leq (\left|\frac{x}{y}\right|^{*})^{\lambda}. \tag{3.2.5}$$

multiplicative büzülme koşulunu sağlar. Burada $\lambda = 0.997$ dir. Son olarak T nin $0.7411317711 \in X$ de bir tek sabit noktaya sahip olduğunu görebiliriz.(Ozavsar ve Cevikel, 2017)

Teorem 3.2.7. A, B, S ve T bir tam multiplicative metrik uzaydan kendi içine aşağıdaki şartları sağlayan dönüşümler olsun.

a) $A(X) \subset T(X)$ ve $B(X) \subset S(X)$,

b) $d(Ax, By) \leq \{\max\{d(Sx, Ty), d(Ax, Sx), d(By, Ty), d(Ax, Ty), d(By, Sx)\}\}^{\lambda}$,

c) $\{A, S\}$ ve $\{B, T\}$ R Zayıf noktasal değişmeli çiftleridir.

d) $\{A, S\}$ ve $\{B, T\}$ karşılıklı olarak sürekli çiftlerin uyumlu çiftleridir.

O halde A, B, S, ve T tek ortak sabit noktaya sahiptir.(Shanjit ve ark., 2016)

İspat. X'de x_0 keyfi bir nokta için $A(X) \subset T(X)$ olduğundan dolayı X de bir x_1 noktası vardır. öyleki $Tx_1 = Ax_0$ dır ve x_1 için X de x_2 vardır öyleki $Sx_2 = Bx_1$. Böyle devam edilerek X'de $\{x_n\}$ dizisini

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n}$$

ve $n = 0, 1, 2, ...$ için $y_{2n+1} = Tx_{2n} = Bx_{2n-1}$ şeklinde tanımlayabiliriz. (b) den

$$
\begin{aligned}
d(y_{2n}, y_{2n+1}) &= d(Ax_{2n-1}, Bx_{2n}) \\
&\leq \{\max\{d(Sx_{2n-1,}Tx_{2n}), d(Ax_{2n-1}, Sx_{2n-1}), d(Bx_{2n}, Tx_{2n}) \ , \\
&\quad d(Ax_{2n-1}, Tx_{2n}), d(Bx_{2n}, Sx_{2n-1})\}\}^{\lambda} \\
&= \{\max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n-1}), d(y_{2n+1}, y_{2n}) \ , \\
&\quad d(y_{2n}, y_{2n}), d(y_{2n+1}, y_{2n-1})\}\}^{\lambda} \\
&= \{\max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1}), 1, d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\}\}^{\lambda} \\
&= d^{\lambda}(y_{2n-1}, y_{2n}).d^{\lambda}(y_{2n}, y_{2n+1})
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu sonuç

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq d^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(y_{2n-1}, y_{2n})$$

olduğunu ortaya koyar.
$h = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ olsun. O halde

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq d^{h}(y_{2n-1}, y_{2n}) \tag{3.2.6}$$

dır. Aynı zamanda

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq d^{h}(y_{2n}, y_{2n+1}) \tag{3.2.7}$$

dır. (2.1.6) ve (2.1.7) den

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq d^{h}(y_{2n-1}, y_{2n}) \leq ... \leq d^{h^n}(y_1, y_0), n \geq 2 \text{ için}$$

dir. $m \geq n$ gibi pozitif tam sayı olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
d(y_m, y_n) &\leq d(y_m, y_{m-1}).d(y_{m-1}, y_{m-2})...d(y_{n+1}, y_n) \\
&\leq d^{h^{m-1}}(y_1, y_0).d^{h^{m-2}}(y_1, y_0)...d^{h^n}(y_1, y_0) \\
&= d^{h^{m-1}+h^{m-2}+...+h^n}(y_1, y_0) \\
&\leq d^{\frac{h^n}{1-h}}(y_1, y_0)
\end{aligned}
$$

dır. Bu sonuç $m, n \to \infty$ iken $d(y_m, y_n) \to 1$ olduğunu ortaya koyar. Böylece $\{y_n\}$ bir multiplicative Cauchy dizisidir. X'in tamlığından bir $z \in X$ vardır öyleki $n \to \infty$ iken $y_n \to z$ dir. Sonuç olarak $Ax_{2n}, Bx_{2n-1}, Sx_{2n}, Tx_{2n+1}$ $n \to \infty$ iken z'ye yakınsaktır. Eğer A ve S uyuşabilir ise

$$\lim_{n\to\infty} ASx_{2n} = Az$$

ve $\lim SAx_{2n} = Sz$ elde edilir.

$A(X) \subset T(X)$ den dolayı X de bir z noktası vardır. Örneğin $Az = Tw$ dir. (b) yi kullanarak

$$\begin{aligned} d(Az, Bw) &\leq \{\max\{d(Sz, Tw), d(Az, Sz), d(Bw, Tw), d(Az, Tw), d(Bw, Sz)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(Az, Az), d(Az, Az), d(Bw, Az), d(Az, Az), d(Bw, Az)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{1, 1, d(Bw, Az)\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(Bw, Az) \end{aligned}$$

olduğundan $d^{1-\lambda}(Bw, Az) = 1$ elde ederiz.

Bu yüzden $Az = Bw$ olup

$Az = Sz = Bw = Tw$ dir.

A ve S'nin R Zayıf noktasal değişmeliliğinden bir $R > 0$ var öyleki

$$d(ASz, SAz) \leq Rd(Az, Sz)$$

dir. Buradan $ASz = SAz$ ve $SSz = SAz = ASz = AAz$ elde ederiz.

Benzer şekilde B ve T nin noktasal R Zayıflığına göre

$$BBw = BTw = TBw = TTw$$

dir. Tekrar (b) den

$$
\begin{aligned}
d(Az, AAz) &= d(Bw, AAz) \\
&= d(AAz, Bw) \\
&\leq \{\max\{d(SAz, Tw), d(AAz, SAz), d(Bw, Tw)\ , \\
&\quad d(AAz, Tw), d(Bw, SAz)\}\}^{\lambda} \\
&= \{\max\{d(AAz, Az), d(AAz, AAz), d(Bw, Bw)\ , \\
&\quad d(AAz, Az), d(Az, AAz)\}\}^{\lambda} \\
&= \{\max\{1, 1, d(AAz, Az)\}\}^{\lambda}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu yüzden $AAz = Az$ olup $Az = AAz = SAz$ dır.

Böylece Az , A ve S nin ortak sabit noktasıdır. Tekrar (b) den

$$
\begin{aligned}
d(Bw, BBw) &= d(Az, BBw) \\
&\leq \{\max\{d(Sz, TBw), d(Az, Sz), d(BBw, TBw)\ , \\
&\quad d(Az, TBw), d(BBw, Sz)\}\}^{\lambda} \\
&= \{\max\{d(Bw, BBw), d(Bw, Bw), d(BBw, BBw)\ , \\
&\quad d(Bw, BBw), d(BBw, Bw)\}\}^{\lambda} \\
&= \{\max\{1, 1, d(BBz, Bw)\}\}^{\lambda}
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

Bu yüzden $BBw = Bw$. Böylece $Bw = BBw = TBw$ olup

Bw, B ve T nin ortak sabit noktasıdır.

Eğer $Bw = Az = u$ ise o halde $Au = Su = Bu = Tu = u$ dır. Dolayısıyla u, A, B, S ve T nin ortak sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliğini ispat edelim. v, A, B, S

ve T nin bir başka ortak sabit noktası olsun. O halde

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(Au,Bv) \\ &\leq \{\max\{d(Su,Tv),d(Au,Su),d(Bv,Tv),d(Au,Tv),d(Bv,Su)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(u,v),d(u,u),d(v,v),d(u,v),d(v,u)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{1,1,d(u,v)\}\}^{\lambda} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu yüzden $d(u,v) \to 1$ olup $u = v$ dir.
Bu sonuçlar sabit noktaların tek olduğunu ve ıspatın tamamlandığını gösterir.

Teorem 3.2.8. S, T, A ve B bir X tam multiplicative metrik uzayından kendi içine, aşağıdaki koşulları sağlayan dönüşümler olsun.

(a) $S(X) \subset B(X)$ ve $T(X) \subset A(X)$,

(b) $\{A, S\}$ ve $\{B, T\}$, (P) tipi R zayıf değişmeli dönüşüm,

(c) S, T, A ve B den birisi süreklidir,

(c) $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\forall\, x, y \in X$ için $d(Sx,Ty) \leq \left\{\max\left\{\begin{array}{c} d(Ax,By), d(Ax,Sx), d(By,Ty), \\ d(Sx,By), d(Ax,Ty) \end{array}\right\}\right\}^{\lambda}$

ise

O halde S, T, A ve B X'de bir tek ortak noktalası vardır.(Shanjit ve ark., 2016)

İspat. $S(X) \subset B(X)$ olduğundan dolayı $x_0 \epsilon X$ noktasını düşünelim. $\exists x_1 \in X$ öyleki $Sx_0 = Bx_1 = y_0$, $\exists x_2 \in X$ öyleki $Tx_1 = Ax_2 = y_1$, $\exists x_{2n+1} \in X$ öyleki $Sx_{2n} = Bx_{2n+1} = y_{2n}$, $\exists x_{2n+2} \in X$ öyleki $Tx_{2n+2} = Ax_{2n+2} = y_{2n+1}, ...$
Şimdi X'de bir $\{y_n\}$ dizisini tanımlayabiliriz.

$$
\begin{aligned}
d(y_{2n}, y_{2n+1}) &= d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\
&\leq \{\max\{d(Ax_{2n}, Bx_{2n+1}), d(Ax_{2n}, Sx_{2n}), d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\ , \\
&\quad d(Sx_{2n}, Bx_{2n+1}), d(Ax_{2n}, Tx_{2n+1})\}\}^{\lambda} \\
&\leq \{\max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\ , \\
&\quad d(y_{2n}, y_{2n}), d(y_{2n-1}, y_{2n+1})\}\}^{\lambda} \\
&\leq \{\max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1}), 1, d(y_{2n-1}, y_{2n}).d(y_{2n}, y_{2n+1})\}\}^{\lambda} \\
&= d^{\lambda}(y_{2n-1}, y_{2n}).d^{\lambda}(y_{2n}, y_{2n+1})
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

Buradan

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq d^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(y_{2n-1}, y_{2n})$$

elde ederiz. $h = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ olsun. O halde

$$d(y_{2n}, y_{2n-1}) \leq d^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(y_{2n-1}, y_{2n}) \tag{3.2.8}$$

elde ederiz. Aynı zamanda

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq d^{h}(y_{2n-1}, y_{2n}) \tag{3.2.9}$$

dır. (2.1.8) ve (2.1.9) dan

$$n \geq 2 \text{ için } d(y_n, y_{n+1}) \leq d^{h}(y_{n-1}, y_n) \leq ... \leq d^{h^n}(y_1, y_0)$$

olduğunu biliyoruz.

$m \geq n$ olacak şekilde $m, n\ \in \mathbb{N}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} d(y_m, y_n) &\leq d(y_m, y_{m-1}).d(y_{m-1}, y_{m-2})...d(y_{n+1}, y_n) \\ &\leq d^{h^{m-1}}(y_1, y_0).d^{h^{m-2}}(y_1, y_0)...d^{h^n}(y_1, y_0) \\ &\leq d^{\frac{h^n}{1-h}}(y_1, y_0) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu sonuç $m, n \to \infty$ iken $d(y_m, y_n) \to 1$'i ortaya koyar. Bu yüzden $\{y_n\}$ multiplicative Cauchy dizisidir. X'in tamlığından bir $z \in X$ vardır öyleki $n \to \infty$ iken $y_n \to z$ dir.

Dahası $\{Sx_{2n-1}\} = \{Bx_{2n-2}\} = \{y_{2n-1}\}$ ve $\{Tx_{2n}\} = \{Ax_{2n-1}\} = \{y_{2n}\}$, $\{y_n\}$ in dizileri olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} Sx_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} Bx_{2n-2} = \lim_{n\to\infty} Tx_{2n} = \lim_{n\to\infty} Ax_{2n-1} = z$$

elde ederiz.

Durum 1: A nın sürekli olduğunu varsayalım. O halde

$$\lim_{n\to\infty} ASx_{2n} = \lim_{n\to\infty} AAx_{2n} = Az$$

dır. $\{A, S\}$, (P) tipi R zayıf değişmeli dönüşüm olduğu için

$$d(SSx_{2n}, AAx_{2n}) \leq Rd(Ax_{2n}, Sx_{2n})$$

dır. $n \to \infty$ olsun. O halde

$$\lim_{n\to\infty} SAx_{2n} = Az$$

dır. Şimdi

$$\begin{aligned} d(SAx_{2n}, Tx_{2n+1}) \leq \{&\max\{d(AAx_{2n}, Bx_{2n+1}), d(AAx_{2n}, SAx_{2n}), d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \\ &d(SAx_{2n}, Bx_{2n+1}), d(AAx_{2n}, Tx_{2n+1})\}\}^{\lambda} \end{aligned}$$

elde ederiz. $n \to \infty$ olduğu için

$$\begin{aligned} d(Az,z) &\leq \{\max\{d(Az,z),d(Az,Az),d(z,z),d(Az,z),d(Az,z)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(Az,z),1\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(Az,z) \end{aligned}$$

dır. Bu sonuç $d(Az,z)=1$ için $Az=z$ olduğunu verir.
Tekrar

$$\begin{aligned} d(Sz,Tx_{2n+1}) \;\; \leq \;\; & \{\max\{d(Az,Bx_{2n+1}),d(Az,Sz),d(Bx_{2n+1},Tx_{2n+1}), \\ & d(Sz,Bx_{2n+1}),d(Az,Tx_{2n+1})\}\}^{\lambda} \end{aligned}$$

elde ederiz. $n \to \infty$ alınırsa

$$\begin{aligned} d(Sz,z) &\leq \{\max\{d(Az,z),d(z,Sz),d(z,z),d(Sz,z),d(z,z)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(Sz,z),1\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(Sz,z) \end{aligned}$$

Bu ise $d(Sz,z)=1$ yani $Sz=z$'yi sağlar. $z=Sz \in S(X) \subseteq B(X)$ böylece $\exists z^* \in X$ vardır öyleki $z=Bz^*$ dır. O halde

$$\begin{aligned} d(z,Tz^*) &= d(Sz,Tz^*) \\ &\leq \{\max\{d(Az,Bz^*),d(Az,Sz),d(Bz^*,Tz^*)\ , \\ &\quad d(Sz,Bz^*),d(Az,Tz^*)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(z,Tz^*),1\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(z,Tz^*) \end{aligned}$$

Bu ise $d(z,Tz^*)=1$ yani $Tz^*=z$ olduğunu sağlar.
$\{B,T\}$, (P) tipi R zayıf değişmeli dönüşüm olduğu için

$$d(Bz,Tz)=d(BBz^*,TTz^*) \leq Rd(Tz^*,Bz^*)=Rd(z,z)=R$$

dır. Fakat $R > 0$ ve $d(x,y) \geq 1$ olup yüzden de $d(Bz,Tz) = 1$ dır. Bu yüzden de $Bz = Tz$ dır. Son olarak

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &= d(Sz,Tz) \\ &\leq \{\max\{d(Az,Bz), d(Az,Sz), d(Bz,Tz), d(Sz,Bz), d(Az,Tz)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(z,Tz),1\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(z,Tz) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu sonuç $d(z,Tz) = 1$ için $Tz = z$ verir.

Durum 2: B nin sürekli olduğunu varsayarsak Durum 1 deki aynı sonucu elde ederiz.

Durum 3: S nin sürekli olduğunu varsayalım. O halde

$$\lim_{n\to\infty} SAx_{2n} = \lim_{n\to\infty} SSx_{2n} = Sz$$

dır. $\{A,S\}$, (P) tipi R zayıf değişmeli dönüşüm olduğundan dolayı

$$d(AAx_{2n}, SSx_{2n}) \leq Rd(Sx_{2n}, Ax_{2n})$$

dır. $n \to \infty$ iken

$$\lim_{n\to\infty} ASx_{2n} = Sz$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} d(SSx_{2n}, Tx_{2n+1}) \leq \; & \{\max\{d(ASx_{2n}, Bx_{2n+1}), d(ASx_{2n}, SSx_{2n}), d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \;, \\ & d(SSx_{2n}, Bx_{2n+1}), d(ASx_{2n}, Tx_{2n+1})\}\}^{\lambda} \end{aligned}$$

elde ederiz. $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} d(Sz,z) &\leq \{\max\{d(Sz,z), d(Sz,Sz), d(z,z), d(Sz,z), d(Sz,z)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(Sz,z),1\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(Sz,z) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu sonuç $d(Sz, z) = 1$ için $Sz = z$ verir.

$z = Sz \ \in S(X) \subseteq B(X)$ olduğundan dolayı $\exists z^* \ \in X$ vardır öyleki $z = Bz^*$ dır. O halde

$$\begin{aligned} d(SSx_n, Tz^*) &\leq \{\max\{d(ASx_n, Bz^*), d(ASx_n, SSx_n), d(Bz^*, Tz^*)\ , \\ &\quad d(SSx_n, Bz^*), d(ASx_n, Tz^*)\}\}^{\lambda} \end{aligned}$$

dır. $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} d(Sz, Tz^*) &\leq \{\max\{d(Sz, z), d(Sz, Sz), d(z, Tz^*), \\ &\quad d(Sz, z), d(Sz, Tz^*)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(z, Tz^*), 1\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(z, Tz^*) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç $d(z, Tz^*) = 1$ için $Tz^* = z$ verir.

$\{B, T\}$, (P) tipi R zayıf değişmeli dönüşüm olduğundan dolayı

$$d(Tz, Bz) = d(TTz^*, BBz^*) \leq Rd(Bz^*, Tz^*) = Rd(z, z) = R$$

elde ederiz. Fakat $R \ > 0$ ve $d(x, y) \geq 1$ dır. Bu yüzden $d(Bz, Tz) = 1$, böylece $Bz = Tz$ dır.

Son olarak

$$\begin{aligned} d(Sx_n, Tz) &\leq \{\max\{d(Ax_{2n}, Bz), d(Ax_{2n}, Sx_{2n}), d(Bz, Tz), \\ &\quad d(Sx_{2n}, Bz), d(Ax_{2n}, Tz)\}\}^{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &\leq \{\max\{d(z,Tz), d(z,z), d(Tz,Tz), d(z,Tz), d(z,Tz)\}\}^{\lambda} \\ &\Rightarrow d(z,Tz) \leq \{\max\{d(z,Tz),1\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(z,Tz) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu sonuç $d(z,Tz) = 1$ için $Tz = z$ verir.

$z = Tz \ \in T(X) \subseteq A(X)$ olup böylece $\exists z^{**} \ \in X$ vardır öyleki $z = Az^{**}$ dır. O halde

$$\begin{aligned} d(Sz^{**},z) &= d(Sz^{**},z) \\ &\leq \{\max\{d(Az^{**},Bz), d(Az^{**},Sz^{**}), d(Bz,Tz), \\ &\qquad d(Sz^{**},Bz), d(Az^{**},Tz)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(z,z), d(z,Sz^{**}), d(Bz,Bz), d(Sz^{**},z), d(z,z)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(Sz^{**},z),1\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(Sz^{**},z) \end{aligned}$$

dır. Bu sonuç $d(Sz^{**},z) = 1$ için $Sz^{**} = z$ verir.

$\{S,A\}$, (P) tipi R zayıf değişmeli dönüşüm olduğu için

$$d(Az,Sz) = d(AAz^{**},SSz^{**}) \leq Rd(Sz^{**},Az^{**}) = Rd(z,z) = R$$

elde edilir. Böylece $Az = Sz$ dir.

$Sz = Tz = Az = Bz$ elde ederiz. Böylece z, S, T, A ve B nin ortak sabit noktasıdır.

Durum 4: T nin sürekli olduğunu varsayarsak Durum 3 teki aynı sonucu elde ederiz.

Ek olarak S, T, A ve B'nin bir tek ortak sabit noktasının olduğunu gösterelim. $w \in X$ S, T, A ve B'nin bir diğer ortak sabit noktası olsun.

$$\begin{aligned} d(z,w) &= d(Sz,Tw) \\ &\leq \{\max\{d(Az,Bw), d(Az,Sz), d(Bw,Tw), d(Sz,Bw), d(Az,Tw)\}\}^{\lambda} \\ &= \{\max\{d(z,w),1\}\}^{\lambda} \\ &= d^{\lambda}(z,w) \end{aligned}$$

olup $d(z,w) = 1$ yani $z = w$ olur. Bu ise çelişkidir.
Bu yüzden S, T, A ve B bir tek ortak sabit bir noktaya sahiptir.

Örnek 3.2.9. $X = \mathbb{R}$ klasik metrik uzay olsun. $\forall\ x, y \in X$ için $d(x,y) = e^{|x-y|}$ olacak şekilde $d : X \times X \to R^{+}$ tanımlansın. (X,d) nin bir tam multiplicative metrik uzay olduğu açıktır. Aşağıdaki dönüşümleri ele alalım. $\forall\ x \in X$ için $Sx = x$, $Tx = \frac{1}{2}x$, $Bx = 3x$, $Ax = 2x$ dır.

a) $SX = TX = BX = AX = A$ dır. Böylece $SX \subset BX$, $TX \subset AX$ dır,

b) $\{A,S\}, \{B,T\}$, (P) tipi R zayıf değişmeli dönüşümüdür,

c) S, T, A ve B nin birisi süreklidir,

d) $\lambda = \frac{1}{3}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} d(Sx,Ty) &\leq \{\max\{d(Ax,By), d(Bx,Tx), d(By,Ty), d(Sx,By), d(Ax,Ty)\}\}^{\lambda} \\ &\Rightarrow e^{\left|x-\frac{1}{2}y\right|} \leq \left\{\max\left\{e^{|3x-2y|}, e^{|2x|}, e^{\left|\frac{3}{2}y\right|}, e^{|2y-x|}, e^{\left|3x-\frac{1}{2}y\right|}\right\}\right\}^{\lambda} \\ &= \max\left\{e^{|3x-2y|\lambda}, e^{|2x|\lambda}, e^{\left|\frac{3}{2}y\right|\lambda}, e^{|2y-x|\lambda}, e^{\left|3x-\frac{1}{2}y\right|\lambda}\right\} \end{aligned}$$

dır. Çünkü $y = \ln x$ dönüşümü artandır. Böylece

$$\Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}y\right| = \max\left\{|3x-2y|\,\lambda, |2x|\,\lambda, \left|\frac{3}{2}y\right|\lambda, |2y-x|\,\lambda, \left|3x-\frac{1}{2}y\right|\lambda\right\}$$

olup üç durum vardır:

(i) $x \geq \frac{1}{2}y \geq 0$ ya da $\frac{1}{2}y \geq x \geq 0$ dır,

(ii) $\frac{1}{2}y < x < 0$ ya da $x < \frac{1}{2}y < 0$ dır,

(iii) $x > 0, y < 0$ ya da $x < 0, y > 0$ dır. Her ne durum olursa olsun (iii) eşitsizliği doğrudur. Bu yüzden ana teoremin bütün şartları sağlanmıştır. Sonuç olarak $S0 = T0 = A0 = B0 = 0$ elde ederiz. Böylece 0, S, T, A ve B'nin bir tek ortak sabit noktasıdır.

(Shanjit ve ark., 2016)

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Dört bölümden oluşan bu tezin ilk kısmında sabit nokta teorisinin temel tanım ve teoremleri ile non-Newtonian ve topolojilerinin inşasına yer verildi.

Tezin ikinci kısmında ise non-Newtonian metrik uzaylar ve multiplicative metrik uzaylarda bazı sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri incelendi. İncelenen bu sonuçlar non-Newtonian ve multiplicative metrik uzaylar için temel oluşturulabilecek sonuçlardır. Bunlardan yararlanılarak bazı yeni sabit nokta teoremleri ve sonuçları verilebilir.

5. KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., El Gebeily, M. A. ve O'Regan, D., 2008. Generalized contractions in partions in partially ordered metric spaces. Applicable Analysis, 87, 109–116.

Ahmad, A. G. B., Fadail, Z. M., Rajić V. Ć. ve Radenović, S., 2012. Nonlinear contractions in 0-complete partial metric spaces. Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID:451239, 12 pages.

Bashirov, A. E., Kurpınar, E. M. ve Ozyapıcı, A., 2008. Multiplicative calculus and its applications, J. Math. Analy. App., 337, 36–48.

Bashirov, A. E. ve Rıza, M., 2011. On complex multiplicative differentiation. TWMS J. App. Eng. Math., 1, 75–85.

Bashirov, A. E. ve Norozpour, S., 2017. On complex multiplicative integration. TWMS J. App. Eng. Math., 7, 82–93.

Bashirov, A. E., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. ve Özyapıcı, A., 2011. On modeling with multiplicative differential equations. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 26, 425–438.

Binbașıoğlu, D., Demiriz, S. ve Türkoğlu, D., 2016. Fixed points of non-Newtonian contraction mappings on non-Newtonian metric spaces. Journal of Fixed Point Theory and Applications., 18, 213-224.

Choudhary, B. ve Nanda, S., 1990. Functional Analysis with Applications. John Wiley and Sons, New York.

Çakmak, A. F. ve Başar, F., 2012. Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. J. of Inequal. Appl., 2012(2012), doi:10.1186/1029-242X-2012-228, 17 pages.

Florack, L. ve van Assen, H., 2012. Multiplicative calculus in biomedical image analysis. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 42(1), 64–75.

Grossman, M. ve Katz, R., 1972. Non-Newtonian Calculus. Lee Press, Pigeon Cove, Massachusetts.

Gu, F., Cui, L-m ve Wu, Y-h., Some fixed point theorems for new contractivetype mappings. J. Qiqihar Univ. 19, 85-89(2003).

He, X., Song, M. ve Chen, D., 2014. Common fixed points for weak commutative mappings on a multiplicative metric spaces. Fixed Point Theory Appl. 2014 (2014), doi:10.1186/1687-1812-2014-48, 9 pages.

Imbad, M. ve Ali, J., 2006. Some common fixed point theorems in fuzzymetric space. Mathematical Communication, 11, 153–163.

Jung, S., 2010. A fixed point approach to the stability of differential equations $y' = F(x, y)$. Bull. Malys. Math. Sci. Soc., 33, 47-56.

Jungck, G. ve Rhoades, B. E., 2006. Fixed point theorems for occasionally weakly compatible mappings. Fixed Point Theory., 7(2), 287-296.

Kadak, U. ve Özlük, M., 2015. Genaralized Rugne-Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus. Abstract and Applied Analysis, 2015, Article ID: 594685, 10 pages.

Kimura, Y. ve Takahashi, W., 2001. Weak convergence to common fixed points of countable nonexpansive mappings and its applications, Journal of the Korean Mathematical Society. 38, 1275-1284.

Kimura, Y., 2010. Convergence of a sequence of sets in a Hadamard space and the shrinking projection method for a real Hilbert ball. Abstract and Applied Analysis, 2010, Article ID 582475, 11 pages

Mısırlı, E. ve Gurefe, Y., 2011. Multiplicative adams bashforth moulton methods. Numerical Algorithms, 57(4), 425-439.

Mohiuddine, S. A., Cancan, M. ve Sevli, H., 2011. Intuitionistic fuzzy stability of a Jensen functional equation via fixed point technique. Math. Comput Model. 54, 2403-2409.

Nadler, S. B., 1969. Multivalued nonlinear contraction mappings, Pacific J. Math., 30, 475-488.

Özavşar, M. ve Çevikel, A. C., 2017. Fixed points of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces. Journal of Enginering Tecnology and Applied Sciens 2(2), 65-79

Pant, R. P., 1998. Common fixed point theorems for contractive maps. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 226, 251-258.

Pant, R. P., 1999. R-weak commutativity and common fixed points. Soochow J. Math., 25, 37-42.

Rıza, M. ve Aktore, H., 2015. The Runge-Kutta method in geometric multiplicative calculus. LMS J. Comput. Math., 18, 539-554.

Soykan, Y., 2012. Fonksiyonel Analiz. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.

Suzuki, T., 2009. Subrahmanyam's fixed point theorem. Nonlinear Analysis., 71, 1678-1683.

Uzer, A., Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus. Comput. Match. Appl. 60 (2010), 2725-2737.

Wataru, T., 2000. Nonlinear Functional Analysis, Fixed Point Theory and its Applications. Yokohama Publishers, Yokohama.

Shanjit, L., Rohen, Y. ve Murthy, P. P., 2016. Some fixed point theorems of r-weakly commuting mappings in multiplicative metric spaces. Gazi University Journal of Science, 29(4), 855–867.

6. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :**Tekin SARITAŞ**

Doğum Tarihi :**09/03/1990**

Doğum Yeri :**IĞDIR**

Medeni Hali :**BEKAR**

Yabancı Dili :**İNGİLİZCE**

Telefon :**0542 406 65 34**

E-posta :**tekin.saritas1990@hotmail.com**

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2019
Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2014
Lise	Çok Proğramlı Lise İmam Hatip Lisesi	2006