KESİŞİMSEL ESNEK HALKALAR ÜZERİNDE ASAL VE MAKSİMAL İDEALLER

RECEP AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK
TEMMUZ-2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİŞİMSEL ESNEK HALKALAR ÜZERİNDE ASAL VE MAKSİMAL İDEALLER

RECEP AYDIN

TOKAT
TEMMUZ-2019

RECEP AYDIN tarafından hazırlanan "**KESİŞİMSEL ESNEK HALKALAR ÜZERİNDE ASAL VE MAKSİMAL İDEALLER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 26 Temmuz 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI' nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri | İmza

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK ....

Üye
Doç. Dr. Hasret DURNA ....

Üye
Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ ....

ONAY

....

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

..../..../......

23.7.2019

T.C. TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1992

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

RECEP AYDIN
26 Temmuz 2019
R. Aydın

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİŞİMSEL ESNEK HALKALAR ÜZERİNDE

RECEP AYDIN

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ FİLİZ ÇITAK)

Bu tez çalışmasında ilk olarak grup, alt grup, halka ve ideal gibi temel kavramlara yer verildi. Esnek kümeler, kesişimsel esnek gruplar ve kesişimsel esnek halkalarla ilgili genel tanım ve teoremler incelendi. Sonraki bölümde, kesişimsel esnek asal idealler ve kesişimsel esnek maksimal idealler tanımlanarak bazı cebirsel özellikleri incelendi.

2019, 53 Sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Esnek küme, kesişimsel esnek grup, kesişimsel esnek halka, kesişimsel esnek asal ideal, kesişimsel esnek maksimal ideal.

ABSTRACT

MASTER THESIS

KESİŞİMSEL ESNEK HALKALAR ÜZERİNDE ASAL VE MAKSİMAL İDEALLER

RECEP AYDIN

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. FİLİZ ÇITAK)

In the this thesis study, firstly basic concepts such as group, subgroup, ring and ideal were given. General definitions and theorems about soft sets, soft intersectional groups and soft intersectional rings were investigated. Finally, some algebraic properties were investigated by defining soft intersectional prime ideals and soft intersectional maximal ideals.

2019, 53 Pages

KEYWORDS: Soft set, soft intersectional group, soft intersectional ring, soft intersectional prime ideals, soft intersectional maximal ideals

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından bitimine kadar bana hep destek olan, çalışmanın her aşamasında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyaç duyduğum her türlü yardımı ilgiyle sağlayan, değerli görüş ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım problemlerin çözümünde bana rehber olan, yapılan çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen tüm bölüm hocalarıma ve bugüne kadar daima yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

RECEP AYDIN
TEMMUZ 2019

1. GİRİŞ

Ekonomi, mühendislik, çevre bilimi, sosyal bilimler, sağlık bilimi ve diğer birçok alanda, araştırmacılar belirsizliğe neden olan karmaşık yapılarla ilgilenmişlerdir. Fakat klasik yöntemlerle bunların çözümü imkansız olduğundan bu tür problemlerin çözümü için klasik yöntemlerin dışında bu belirsizliklere sahip yapıları modellemek ve sistematik bir çözüm meydana getirmek için farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bu tür yöntemlerle ilgilenen teorilerden bazıları olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, esnek kümeler teorisi gibi teorileridir.
Bulanık kümeler teorisi ilk olarak 1965 yılında Lotfi A. Zadeh tarafından ortaya konulmuş ve daha sonra geliştirilmiştir (Zadeh, 1965). Zadeh'in bulanık kümeler teorisine göre her şey $[0, 1]$ aralığında belirli bir derece ile gösterilir. Yani, değer kümesi $[0, 1]$ kapalı aralığı olmak üzere bir fonksiyon tanımlayıp bu fonksiyon ile bir bulanık küme oluşturarak belirsizliğe bir çözüm sunmuştur.

1971 yılında ise Azriel Rosenfeld ilk olarak bulanık kümelerde cebirsel yapıları incelemiştir. Yaptığı çalışma ile bulanık grup tanımını yaparak bazı cebirsel özellikleri ni araştırmıştır.(Rosenfeld, 1971).
1975 yılında Robin Giles bulanık küme ve çok değerli mantık arasında güçlü bir ilişki ortaya çıkardı. (Giles, 1975). Bulanık mantık, elektronik kontrol sistemleri, otomotiv endüstrisi fren sistemleri ve ev elektroniği gibi bir çok alanda kullanılmıştır.

1982 yılında Pawlak, kaba kümeler teorisi üzerine ilk makalesini yazdı ve daha sonra bunu geliştirdi (Pawlak, 1982). Biswas ve arkadaşları ise kaba kümelerin cebirsel işlemleri üzerine bazı çalışmalar yapmıştır (Biswas, 1994). Bu işlemlerle birçok alanda başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Esnek küme teorisi ilk olarak 1999 yılında Molodtsov tarafından ortaya atıldı (Molodt sov, 1999). Maji ve arkadaşları ise 2002 yılında esnek kümeler üzerine bazı tanımlar yaptılar ve esnek küme üzerinde bazı işlemlere yer verdiler (Maji, 2003). Çağman ve Enginoğlu 2010 yılında Molodtsov'un esnek küme kavramını yeniden tanımlayarak birkaç yeni sonucun geliştirilmesi için daha işlevsel hale getirdiler (Çağman ve Enginoğ lu, 2010). Aynı zamanda Çağman ve Enginoğlu esnek matrisleri ve bazı işlemlerini tanımladılar (Çağman ve Enginoğlu, 2010). Ali ve arkadaşları 2009 yılında esnek kümeler ile ilgili bazı farklı işlemler verdiler (Ali ve ark., 2009). Sezgin ve Atagün de esnek küme işlemleri üzerinde çalışmalar yaptı (Sezgin ve Atagün, 2011). A. Kharal ve B. Ahmad esnek kümeler üzerine dönüşümler tanımladılar (A. Kharal ve B. Ahmad, 2010). Feng ve arkadaşları esnek küme, kaba küme, bulanık küme arasındaki ilişkiyi incelediler (Feng ve ark., 2010). Maji ve arkadaşları bulanık esnek kümeleri tanımladılar ve esnek kümeleri bulanık kümeler ile birleştirdiler (Maji ve ark., 2007). Rosenfeld esnek kümelerin cebirsel yapılarını kurmak amacıyla esnek grup işlemlerini önerdi (Rosenfeld, 1971). Aktaş ve Çağman, 2007 yılında esnek grubu tanımlayarak esnek kümeleri bulanık kümeler ve kaba kümeler ile karşılaştırdılar ve esnek grubun bazı cebirsel yapılarını incelediler (Aktaş ve Çağman, 2007). Yapılan bu çalışma ile esnek küme teorisi cebir alanında da bir çok çalışmanın önünü açmıştır (Feng ve ark., 2008; Kazancı ve ark., 2010; Zhan ve Jun, 2010; Çıtak ve Çağman, 2017; Çıtak, 2018; Sezgin ve ark., 2019). Sezgin ve Atagün esnek yarı grup ve bir halkanın esnek ideali kavramlarını tanımladılar (Atagün ve Sezgin, 2011). Çağman ve arkadaşları esnek kesişimsel grupları ve esnek birleşimsel grupları tanımladılar (Çağman ve ark., 2012). Acar ve arkadaşları 2010 yılında esnek halkaların ilk işlemlerini incelediler (Acar ve ark., 2010). Jun ve arkadaşları esnek küme teorisi uygulamalarını kullanarak BCK/BCI cebirsel yapısını ele aldılar. Feng ve Jun esnek yarı halkarı ve esnek yarıhalkalar üzerinde esnek idealleri tanımladılar (Feng ve Jun, 2008). 2012 yılında Çağman ve arkadaşları kesişimsel esnek grupları tanımladı (Çağman ve ark., 2012). Çıtak ve Çağman 2015 yılında kesişimsel esnek halkaları tanımlayarak cebirsel özelliklerini inceledi (Çıtak ve Çağman, 2015).

Esnek kümelerle ilgili çalışmalar son yıllarda artarak devam etmektedir. Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezin tarihine değinildi. Tezin ikinci bölümünde temel tanım ve teoremler, tezin ikinci kısımında kullanacağımız esnek kümeler ve esnek kümeler üzerindeki işlemleri tanıtıldı. Kesişimsel esnek gruplar ve kesişimsel esnek halkalara yer verildi. Kesişimsel esnek idealler incelendi.

Tezin üçüncü bölümünde kesişimsel esnek halkalar üzerinde asal ve maksimal ideal tanımı yapılarak örneklerle açıklandı ve bazı teoremler ayrıntılı olarak incelendi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1. G boştan farklı bir küme ve " $\cdot$ ", G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G, \cdot)$ yapısına bir grup denir (Bilgiç, 2012).

1. $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ için $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ dir(Birleşme özelliği).

2. $\forall g \in G$ için $g \cdot e_G = e_G \cdot g = g$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır(Birim eleman özelliği).

3. $\forall g \in G$ için $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e_G$ olacak şekilde bir $g^{-1} \in G$ vardır(Ters eleman özelliği).

Ayrıca $\forall g_1, g_2 \in G$ için $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ ise G grubuna değişmeli grup denir.

Tanım 2.1.2. G bir grup ve H, G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. H kümesi G de tanımlanan işleme göre bir grup oluyorsa H ye G nin bir altgrubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir (Bilgiç, 2012).

Teorem 2.1.3. G bir grup olsun.
(i) G nin birim elemanı tektir.
(ii) Her elemanın tersi tektir.
(iii) $\forall g \in G$ için $(g^{-1})^{-1} = g$ dır (Bilgiç, 2012).

Tanım 2.1.4. G bir grup ve $N \leq G$ olsun. $\forall g \in G$ ve $\forall n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ ise N ye G nin normal altgrubu denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir (Bilgiç, 2012).

Tanım 2.1.5. $(G, \triangle)$ ve $(H, \star)$ iki grup olsun. $f : G \longrightarrow H$ bir fonksiyon olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $f(g_1 \triangle g_2) = f(g_1) \star f(g_2)$ ise f ye G den H ye bir grup homomorfizması veya kısaca homomorfizma denir (Bilgiç, 2012).

Tanım 2.1.6. $f : G \longrightarrow H$ grup homomorfizması birebir ve örten ise f ye bir izomorfizma denir. Eğer G den H ye bir izomorfizma varsa G ile H gruplarına izomorfiktirler veya eş yapılıdırlar denir ve $G \cong H$ ile gösterilir (Bilgiç, 2012).

Tanım 2.1.7. R boştan farklı bir küme ve "+","." R üzerinde tanımlı ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(R, +, .)$ yapısına bir halka denir.
1. $(R, +)$ bir abelyen (değişmeli) gruptur.
2. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$ için $r_1.(r_2.r_3) = (r_1.r_2).r_3$ dir(Birleşme özelliği).
3. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$ için $r_1.(r_2 + r_3) = (r_1.r_2) + (r_1.r_3)$ ve $(r_1 + r_2).r_3 = (r_1.r_3) + (r_2.r_3)$ dir(Sağdan ve soldan dağılma özelliği).
Bunlara ek olarak,
4. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$ için $r_1.r_2 = r_2.r_1$ ise R ye değişmeli halka denir.
5. $\forall r \in R$ için $r.e = e.r = r$ olacak şekilde bir $e \in R$ var ise e ye birim eleman, R ye de birimli halka denir (Bilgiç, 2012).

Tanım 2.1.8. R bir halka, I da R nin bir alt halkası olsun. Eğer $\forall r \in R$ için $rI \subseteq I$ ise I ya bir sol ideal. $Ir \subseteq I$ ise I ya bir sağ ideal denir. Eğer I hem sağ hem de sol ideal ise I ya kısaca bir ideal denir (Bilgiç, 2012).

Tanım 2.1.9. R değişmeli bir halka, $I \neq R$ bir ideal olsun. Eğer $\forall r_1, r_2 \in R$ için $r_1 r_2 \in I$ iken $r_1 \in I$ veya $r_2 \in I$ ise I ya asal ideal denir (Bilgiç, 2012).

Tanım 2.1.10. R bir halka, $M \neq R$ de onun bir ideali olsun. Eğer R nin $M \nsubseteq I$ olacak şekilde başka bir I özideali yoksa M ye maksimal ideal denir (Bilgiç, 2012).

2.2. Esnek Kümeler

Esnek kümeler üzerindeki çalışmalar ilk olarak 1999 yılında Molodtsov tarafından başlatılmıştır. 2003 yılında ise Maji ve arkadaşları esnek kümelerde bazı işlemleri tanımlamışlardır. Daha sonra 2010 yılında Çağman ve Enginoğlu esnek kümelerle ilgili bazı işlemleri tanımlamışlardır. Bu bölümde yapılan bu çalışmalar kullanılarak esnek kümeler ile ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir. Bu bölümün tamamında, evrensel küme U, parametreler kümesi E, U kümesinin kuvvet kümesi $P(U)$ ile gösterilecektir. Ayrıca $K, L, M \subseteq E$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.2.1. K kümesini U nun kuvvet kümesiyle eşleştiren fonksiyon $\widetilde{\varphi} : K \longrightarrow P(U)$ olsun. $(\widetilde{\varphi}, K) = \{(k, \widetilde{\varphi}(k)) : k \in K, \widetilde{\varphi}(k) \in P(U)\}$ şeklinde tanımlanan $(\widetilde{\varphi}, K)$ kümesine U üzerinde esnek küme denir (Molodtsov, 1999)

Örnek 2.2.2. U kümesi arabaların kümesi, E parametreler kümesi ve $K \subseteq E$ olsun. K={pahalı, güzel, otomatik, manuel, ucuz, bakımlı} olmak üzere esnek kümeyi pahalı araba, manuel araba, ucuz araba şeklinde tanımlayabiliriz. Daha ayrıntılı olarak

U=$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ve K=$\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ olmak üzere $k_1 \longrightarrow$ pahalı, $k_2 \longrightarrow$ manuel, $k_3 \longrightarrow$ otomatik, $k_4 \longrightarrow$ ucuz, $k_5 \longrightarrow$ bakımlı

$\widetilde{\varphi}(k_1)$=$\{u_2, u_4\}$, $\widetilde{\varphi}(k_2)$=$\{u_1, u_3\}$, $\widetilde{\varphi}(k_3)$=$\{u_3, u_4, u_5\}$, $\widetilde{\varphi}(k_4)$=$\{u_1, u_3, u_5\}$, $\widetilde{\varphi}(k_5)$=$\{u_1\}$ olduğunu kabul edelim. Böylece $(\widetilde{\varphi}, K)$, U üzerinde bir esnek kümedir.

Tanım 2.2.3. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer

1. $K \subseteq L$
2. $\forall k \in K$ için $\widetilde{\varphi}(k)$ ve $\widetilde{\chi}(k)$ kümeleri eşitse $(\widetilde{\varphi}, K)$, $(\widetilde{\chi}, L)$ nin esnek alt kümesidir denir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.2.4. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. $(\widetilde{\varphi}, K)$,$(\widetilde{\chi}, L)$ nin alt kümesi ve $(\widetilde{\chi}, L)$, $(\widetilde{\varphi}, K)$ nın alt kümesi ise $(\widetilde{\varphi}, K)$ esnek kümesi $(\widetilde{\chi}, L)$ esnek kümesine denktir denir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.2.5. K=$\{k_1, k_2, k_3, ..., k_n\}$ parametreler kümesi olsun. K kümesinin değili $\urcorner K$ ile gösterilir. $\urcorner K$=$\{\urcorner k_1, \urcorner k_2, \urcorner k_3, ..., \urcorner k_n\}$ şeklinde tanımlanır. $\urcorner k_i = k_i$ nin değilidir $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.2.6. $(\widetilde{\varphi}, K)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $(\widetilde{\varphi}, K)$ esnek kümesinin tümleyeni $(\widetilde{\varphi}, K)^c$ ile gösterilir ve $(\widetilde{\varphi}, K)^c = (\widetilde{\varphi}^c, \urcorner K)$ şeklinde tanımlanır. Burada $\widetilde{\varphi}^c : \urcorner K \longrightarrow P(U)$ dönüşümü $\forall k \in \urcorner K$ için $\widetilde{\varphi}^c(k) = U - \widetilde{\varphi}(\urcorner k)$ ile tanımlanır.

$\widetilde{\varphi}^c$ ye $\widetilde{\varphi}$ nin esnek tümleyen fonksiyonu denir. $(\widetilde{\varphi}^c)^c = \widetilde{\varphi}$ ve $((\widetilde{\varphi}, K)^c)^c = (\widetilde{\varphi}, K)$ dır (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.2.7. $(\widetilde{\varphi}, K)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall k \in K$ için $\widetilde{\varphi}(k) = \emptyset$ ise $(\widetilde{\varphi}, K)$ esnek kümesine boş esnek küme denir. Φ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Örnek 2.2.8. U=$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ manuel arabaların kümesi

K={ hidrolik, çelik jant, deri koltuk, cam tavan } parametreler kümesi olsun.

$(\widetilde{\varphi}, K)$ esnek kümesi "arabaların özelliği" olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(\text{hidrolik}) \longrightarrow \text{hidrolik araba} &= \emptyset \\
\widetilde{\varphi}(\text{çelik jant}) \longrightarrow \text{çelik jantlı araba} &= \emptyset \\
\widetilde{\varphi}(\text{deri koltuk}) \longrightarrow \text{deri koltuklu araba} &= \emptyset \\
\widetilde{\varphi}(\text{cam tavan}) \longrightarrow \text{cam tavanlı araba} &= \emptyset
\end{aligned}$$

Böylece $(\widetilde{\varphi}, K)$=$(\widetilde{\varphi}, \Phi)$ dır. Yani $(\widetilde{\varphi}, K)$ boş esnek kümedir.

Tanım 2.2.9. $(\widetilde{\varphi}, E)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall e \in E$ için $\widetilde{\varphi}(e) = U$ ise $(\widetilde{\varphi}, E)$ esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{E})$ ile gösterilir (Maji ve ark, 2003).

Örnek 2.2.10. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ arabaların kümesi ve E parametre kümesi E=\{hidrolik, çelik jantlı, deri koltuklu, cam tavanlı \} olsun. $(\widetilde{\varphi}, E)$ esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(\text{hidrolik}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\
\widetilde{\varphi}(\text{çelik jantlı}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\
\widetilde{\varphi}(\text{deri koltuklu}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\
\widetilde{\varphi}(\text{cam tavanlı}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\}
\end{aligned}$$

$(\widetilde{\varphi}, E)$ esnek kümesi, evrensel esnek kümedir.

Tanım 2.2.11. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. "$(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$" ifadesi $(\widetilde{\varphi}, K) \wedge (\widetilde{\chi}, L)$ ile gösterilir ve $(\widetilde{\varphi}, K) \wedge (\widetilde{\chi}, L)$=$(\widetilde{\psi}, K \times L)$ iken $\forall (k, l) \in K \times L$ için $\widetilde{\psi}(k, l) = \widetilde{\varphi}(k) \cap \widetilde{\chi}(l)$ şeklinde tanımlanır (Maji ve ark., 2003).

Örnek 2.2.12. $(\widetilde{\varphi}, K)$ esnek kümesi "arabaların fiyatları" ve $(\widetilde{\chi}, L)$ "arabaların çekiciliği" olsun.

Kabul edelim ki U=$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$, K=\{ pahalı, ucuz, çok ucuz\}, L=\{modifiyeli, ucuz, hızlı\} olsun.

$\widetilde{\varphi}$(pahalı)= $\{u_1, u_3, u_5\}$, $\widetilde{\varphi}$(ucuz)= $\{u_6, u_9, u_{10}\}$, $\widetilde{\varphi}$(çok ucuz)= $\{u_2, u_4, u_7, u_8\}$, $\widetilde{\chi}$(modifiyeli)= $\{u_2, u_3, u_7\}$, $\widetilde{\chi}$(ucuz)= $\{u_5, u_6, u_8\}$, $\widetilde{\chi}$(hızlı)=$\{u_6, u_9, u_{10}\}$ şeklinde tanımlansın.

$(\widetilde{\varphi}, K) \wedge (\widetilde{\chi}, L)$=$(\widetilde{\psi}, K \times L)$ olmak üzere

$\widetilde{\psi}$(pahalı, modifiyeli)=$\{u_3\}$, $\widetilde{\psi}$(pahalı, ucuz)=$\{u_5\}$, $\widetilde{\psi}$(pahalı, hızlı)=$\emptyset$, $\widetilde{\psi}$(ucuz, modifiyeli)=$\emptyset$, $\widetilde{\psi}$(ucuz, ucuz)=$\{u_6\}$, $\widetilde{\psi}$(ucuz, hızlı)=$\{u_6, u_9, u_{10}\}$, $\widetilde{\psi}$(çok ucuz, modifiyeli)=$\{u_2, u_7\}$, $\widetilde{\psi}$(çok ucuz, ucuz)=$\{u_8\}$, $\widetilde{\psi}$(çok ucuz, hızlı)=$\emptyset$ şeklindedir.

Tanım 2.2.13. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. "$(\widetilde{\varphi}, K)$ veya $(\widetilde{\chi}, L)$" ifadesi $(\widetilde{\varphi}, K)\vee(\widetilde{\chi}, L)$ ile gösterilir ve $(\widetilde{\varphi}, K)\vee(\widetilde{\chi}, L)$=$(\widetilde{\vartheta}, K\times L)$ iken $\forall(k, l) \in K \times L$ için $\widetilde{\vartheta}(k, l) = \widetilde{\varphi}(k) \cup \widetilde{\chi}(l)$ şeklinde tanımlanır (Maji ve ark., 2003).

Örnek 2.2.14. Örnek 2.2.15 i kullanalım. $(\widetilde{\varphi}, K)$ esnek kümesi "arabaların fiyatları" ve $(\widetilde{\chi}, L)$ "arabaların özelliği" olsun.
Kabul edelim ki U=$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$, K=$\{$ pahalı, ucuz, çok ucuz$\}$, L=$\{$modifiyeli, ucuz, hızlı$\}$ olsun.
$\widetilde{\varphi}$(pahalı)= $\{u_1, u_3, u_5\}$, $\widetilde{\varphi}$(ucuz)= $\{u_6, u_9, u_{10}\}$, $\widetilde{\varphi}$(çok ucuz)= $\{u_2, u_4, u_7, u_8\}$, $\widetilde{\chi}$(modifiyeli)= $\{u_2, u_3, u_7\}$, $\widetilde{\chi}$(ucuz)= $\{u_5, u_6, u_8\}$, $\widetilde{\chi}$(hızlı)=$\{u_6, u_9, u_{10}\}$ şeklinde tanımlansın.
$(\widetilde{\varphi}, K) \vee (\widetilde{\chi}, L)$=$(\widetilde{\vartheta}, K \times L)$ olmak üzere
$\widetilde{\vartheta}$(pahalı, modifiyeli)=$\{u_1, u_2, u_3, u_5, u_7\}$,
$\widetilde{\vartheta}$(pahalı, ucuz)=$\{u_1, u_3, u_5, u_6, u_8\}$,
$\widetilde{\vartheta}$(pahalı, hızlı)=$\{u_1, u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}\}$,
$\widetilde{\vartheta}$(ucuz, modifiyeli)=$\{u_6, u_9, u_{10}, u_2, u_3, u_7\}$,
$\widetilde{\vartheta}$(ucuz, ucuz)=$\{u_6, u_9, u_{10}, u_5, u_6, u_8\}$,
$\widetilde{\vartheta}$(ucuz, hızlı)=$\{u_6, u_9, u_{10}, u_6, u_9, u_{10}\}$,
$\widetilde{\vartheta}$(çokucuz,modifiyeli)=$\{u_2, u_4, u_7, u_8, u_2, u_3, u_7\}$,
$\widetilde{\vartheta}$(çok ucuz, ucuz)=$\{u_2, u_4, u_7, u_8, u_5, u_6, u_8\}$,
$\widetilde{\vartheta}$(çok ucuz, hızlı)=$\{u_2, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$ şeklindedir.

Önerme 2.2.15. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun.

1. $((\widetilde{\varphi}, K) \vee (\widetilde{\chi}, L))^c = (\widetilde{\varphi}, K)^c \wedge (\widetilde{\chi}, L)^c$

2. $((\widetilde{\varphi}, K) \wedge (\widetilde{\chi}, L))^c = (\widetilde{\varphi}, K)^c \vee (\widetilde{\chi}, L)^c$

(Maji ve ark., 2003).

İspat. 1.Kabul edelimki $(\widetilde{\varphi}, K) \vee (\widetilde{\chi}, L)$=$(\widetilde{\vartheta}, K \times L)$ olsun. $\forall(k, l) \in K \times L$ için

$$
\begin{aligned}
((\widetilde{\varphi}, K) \vee (\widetilde{\chi}, L))^c &= (\widetilde{\vartheta}, K \times L)^c \\
&= (\widetilde{\vartheta}^c, \urcorner(K \times L)) \\
&= (\widetilde{\varphi}^c, \urcorner K) \wedge (\widetilde{\chi}^c, \urcorner L) \\
&= (\widetilde{\phi}, \urcorner K \times \urcorner L) \\
&= \widetilde{\varphi}^c(k) \cap \widetilde{\chi}^c(l) \\
&= (\widetilde{\phi}, \urcorner(K \times L))
\end{aligned}
$$

Şimdi $(\urcorner k, \urcorner l) \in \urcorner(K \times L)$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\vartheta}^c(\urcorner k, \urcorner l) &= (U - \widetilde{\vartheta}(k, l)) \\
&= (U - \widetilde{\varphi}(k)) \cap (U - \widetilde{\chi}(l)) \\
&= \widetilde{\varphi}^c(\urcorner k) \cap \widetilde{\chi}^c(\urcorner l) \\
&= \widetilde{\phi}(\urcorner k, \urcorner l)
\end{aligned}
$$

Buradan $\widetilde{\vartheta}^c$ ve $\widetilde{\phi}$ nin aynı olduğu görülür.

2.Kabul edelimki $(\widetilde{\varphi}, K) \wedge (\widetilde{\chi}, L)$=$(\widetilde{\psi}, K \times L)$ olsun. $\forall (k, l) \in K \times L$ için

$$
\begin{aligned}
((\widetilde{\varphi}, K) \wedge (\widetilde{\chi}, L))^c &= (\widetilde{\psi}, K \times L)^c \\
&= (\widetilde{\psi}^c, \urcorner(K \times L)) \\
&= (\widetilde{\varphi}^c, \urcorner K) \vee (\widetilde{\chi}^c, \urcorner L) \\
&= (\widetilde{\phi}, \urcorner K \times \urcorner L) \\
&= \widetilde{\varphi}^c(k) \cap \widetilde{\chi}^c(l) \\
&= (\widetilde{\phi}, \urcorner(K \times L))
\end{aligned}
$$

Şimdi $(\urcorner k, \urcorner l) \in \urcorner(K \times L)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}^c(\urcorner k, \urcorner l) &= (U - \widetilde{\psi}(k,l)) \\
&= (U - \widetilde{\varphi}(k)) \cap (U - \widetilde{\chi}(l)) \\
&= \widetilde{\varphi}^c(\urcorner k) \cap \widetilde{\chi}^c(\urcorner l) \\
&= \widetilde{\phi}(\urcorner k, \urcorner l)
\end{aligned}$$

Buradan $\widetilde{\psi}^c$ ve $\widetilde{\phi}$ nın aynı olduğu görülür.

Tanım 2.2.16. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$ nin birleşimi $(\widetilde{\psi}, M)$ ile gösterilir. $M = K \cup L$ ve $\forall m \in M$ için

$$\widetilde{\psi}(\text{m}) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}(m), & e\breve{g}er\ m \in K - L, \\ \widetilde{\chi}(m), & e\breve{g}er\ m \in L - K \\ \widetilde{\varphi}(m) \cup \widetilde{\chi}(m), & e\breve{g}er\ m \in K \cap L \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.$(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, L)$=$(\widetilde{\psi}, M)$ dir (Maji ve ark., 2003).

Örnek 2.2.17. Örnek 2.2.15 den $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, L)$=$(\widetilde{\psi}, M)$ esnek kümesi
$\widetilde{\psi}$(pahalı)= $\{u_1, u_3, u_5\}$,
$\widetilde{\psi}$(ucuz)= $\{u_6, u_9, u_{10}\}$,
$\widetilde{\psi}$(çok ucuz)= $\{u_2, u_4, u_7, u_8\}$,
$\widetilde{\psi}$(modifiyeli)= $\{u_2, u_3, u_7\}$,
şeklinde elde edilir.

Tanım 2.2.18. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$ nin kesişimi $(\widetilde{\psi}, M)$ ile gösterilir. $M = K \cap L$ ve $\forall m \in M$ için $\widetilde{\psi}(m) = \widetilde{\varphi}(m)$ yada $\widetilde{\psi}(m) = \widetilde{\chi}(m)$ şeklinde tanımlanır.$(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, L)$=$(\widetilde{\psi}, M)$ dir (Maji ve ark., 2003).

Şimdi Çağman ve Enginoğlu(2010) tarafından tanımlanan esnek küme ve üzerindeki işlemlere yer vereceğiz.

Tanım 2.2.19. U evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. $K \subseteq E$ olmak üzere $\widetilde{\varphi} : E \to P(U)$ bir fonksiyon olsun. $k \notin K$ için $\widetilde{\varphi}(k) = \emptyset$ olacak şekilde $(\widetilde{\varphi}, K)$ kümesine U üzerinde esnek küme denir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.20. $K, L \subseteq E$ olmak üzere $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. $\forall e \in E$ için $\widetilde{\varphi}(e) \subseteq \widetilde{\chi}(e)$ ise $(\widetilde{\varphi}, K)$ ya $(\widetilde{\chi}, L)$ nin esnek alt kümesi denir ve $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, L)$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Örnek 2.2.21. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $K = \{e_1, e_2\}$, $L = \{e_1, e_2, e_4\}$ olmak üzere
$(\widetilde{\varphi}, K) = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_1, u_3, u_4\})\}$,
$(\widetilde{\chi}, L) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \}), (e_4, \{u_4, u_6\})\}$ esnek kümleri tanımlansın.
$\forall e \in E$ için $\widetilde{\varphi}(e) \subseteq \widetilde{\chi}(e)$ olduğundan $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, L)$ olur.

Önerme 2.2.22. $K, L, M \subseteq E$ olmak üzere $(\widetilde{\varphi}, K), (\widetilde{\chi}, L)$ ve $(\widetilde{\psi}, M)$, U üzerinde esnek kümeler olsun.

1. $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\varphi}, E)$
2. $(\widetilde{\varphi}, \Phi)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\varphi}, K)$
3. $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\varphi}, K)$
4. $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, L)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\psi}, M) \Rightarrow (\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\psi}, M)$ dir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat. $\forall e \in E$ için;

1. $\widetilde{\varphi}(e) \subseteq U$ olduğundan $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\varphi}, E)$ dir.
2. $\emptyset \subseteq \widetilde{\varphi}(e)$ olduğundan $(\widetilde{\varphi}, \Phi)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\varphi}, K)$ dir.
3. $\widetilde{\varphi}(e) \subseteq \widetilde{\varphi}(e)$ olduğundan $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\varphi}, K)$
4. $\widetilde{\varphi}(e) \subseteq \widetilde{\chi}(e)$ ve $\widetilde{\chi}(e) \subseteq \widetilde{\psi}(e) \Rightarrow \widetilde{\varphi}(e) \subseteq \widetilde{\psi}(e)$ olduğundan $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, L)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\psi}, M)$ ise $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\psi}, M)$ olur.

Tanım 2.2.23. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun.$\forall e \in E$ için $\widetilde{\varphi}(e) = \widetilde{\chi}(e)$ ise $(\widetilde{\varphi}, K)$ esnek kümesi $(\widetilde{\chi}, L)$ esnek kümesine eşittir denir ve $(\widetilde{\varphi}, K) = (\widetilde{\chi}, L)$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.24. $(\widetilde{\varphi}, K)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall e \in E$ için $\widetilde{\varphi}^c(e) = U \setminus \widetilde{\varphi}(e)$ şeklinde tanımlanan esnek kümeye $(\widetilde{\varphi}, K)$ nın tümleyeni denir ve $(\widetilde{\varphi}, K)^{\widetilde{c}}$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Örnek 2.2.25. Örnek 2.2.2 yi göz önüne alalım.
Buradan $(\widetilde{\varphi}, E)^c$={pahalı olmayan $=\{u_1, u_3, u_5\}$, manuel olmayan $=\{u_2, u_4, u_5\}$, otomatik olmayan $=\{u_1, u_2\}$, ucuz olmayan $=\{u_2, u_4\}$ } elde edilir.

Önerme 2.2.26. $(\widetilde{\varphi}, K)$, U üzerinde bir esnek küme olsun.

1. $((\widetilde{\varphi}, K)^{\widetilde{c}})^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi}, K)$

2. $(\widetilde{\varphi}, \Phi)^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi}, E)$

dir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat. $\forall e \in E$ için

1. $(\widetilde{\varphi}^c)^c(e) = \widetilde{\varphi}(e)$ olduğundan $((\widetilde{\varphi}, K)^c)^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi}, K)$ olur.

2. $\widetilde{\varphi}^c(e) = U \setminus \widetilde{\varphi}(e) = U \setminus \emptyset = U$ olduğundan $(\widetilde{\varphi}, \Phi)^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi}, E)$ olur.

Tanım 2.2.27. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. İki esnek kümenin birleşimi $\forall e \in E$ için $(\widetilde{\varphi} \cup \widetilde{\chi})(e) = \widetilde{\varphi}(e) \cup \widetilde{\chi}(e)$ şeklinde tanımlanır ve $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, L)$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.28. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. İki esnek kümenin kesişimi $\forall e \in E$ için $(\widetilde{\varphi} \cap \widetilde{\chi})(e) = \widetilde{\varphi}(e) \cap \widetilde{\chi}(e)$ şeklinde tanımlanır ve $(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, L)$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Önerme 2.2.29. $(\widetilde{\varphi}, K)$ ve $(\widetilde{\chi}, L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun.

1. $[(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, L)]^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi}, K)^{\widetilde{c}}\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, L)^{\widetilde{c}}$

2. $[(\widetilde{\varphi}, K)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, L)]^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi}, K)^{\widetilde{c}}\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, L)^{\widetilde{c}}$

dir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat. $\forall e \in E$ için

1. $[(\widetilde{\varphi}\cup\widetilde{\chi})(e)]^c=[\widetilde{\varphi}(e)\cup\widetilde{\chi}(e)]^c=\widetilde{\varphi}^c(e)\widetilde{\cap}\widetilde{\chi}^c(e)$ olduğundan
   $[(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi},L)]^{\widetilde{c}}=(\widetilde{\varphi},K)^{\widetilde{c}}\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi},L)^{\widetilde{c}}$ elde edilir.

2. $[(\widetilde{\varphi}\cap\widetilde{\chi})(e)]^c=[\widetilde{\varphi}(e)\cap\widetilde{\chi}(e)]^c=\widetilde{\varphi}^c(e)\widetilde{\cup}\widetilde{\chi}^c(e)$ olduğundan
   $[(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi},L)]^{\widetilde{c}}=(\widetilde{\varphi},K)^{\widetilde{c}}\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi},L)^{\widetilde{c}}$ elde edilir.

Önerme 2.2.30. $(\widetilde{\varphi},K),(\widetilde{\chi},L)ve(\widetilde{\psi},M)$ U üzerinde esnek kümeler olsun.

1. $(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cup}[(\widetilde{\chi},L)\widetilde{\cap}(\widetilde{\psi},M)]=[(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi},L)]\widetilde{\cap}[(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cup}(\widetilde{\psi},M)]$

2. $(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cap}[(\widetilde{\psi},L)\widetilde{\cup}(\widetilde{\psi},M)]=[(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi},L)]\widetilde{\cup}[(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cap}(\widetilde{\psi},M)]$

dir (Çağman ve Enginoğlu, 2010). Benzer şekilde sağdan dağılma kuralları da sağlanır.

İspat. $\forall e\in E$ için

1.
$$\begin{aligned}
[\widetilde{\varphi}\cup(\widetilde{\chi}\cap\widetilde{\psi})](e) &= \widetilde{\varphi}(e)\cup(\widetilde{\chi}\cap\widetilde{\psi})(e)\\
&= \widetilde{\varphi}(e)\cup[\widetilde{\chi}(e)\cap\widetilde{\psi}(e)]\\
&= [\widetilde{\varphi}(e)\cup\widetilde{\chi}(e)]\cap[\widetilde{\varphi}(e)\cup\widetilde{\psi}(e)]\\
&= (\widetilde{\varphi}\cup\widetilde{\chi})(e)\cap(\widetilde{\varphi}\cup\widetilde{\psi})(e)\\
&= [(\widetilde{\varphi}\cup\widetilde{\chi})\cap(\widetilde{\varphi}\cup\widetilde{\psi})](e)
\end{aligned}$$

   olur. Buradan $(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cup}[(\widetilde{\chi},L)\widetilde{\cap}(\widetilde{\psi},M)]=[(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi},L)]\widetilde{\cap}[(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cup}(\widetilde{\psi},M)]$ elde edilir.

2.
$$\begin{aligned}
[\widetilde{\varphi}\cap(\widetilde{\chi}\cup\widetilde{\psi})](e) &= \widetilde{\varphi}(e)\cap(\widetilde{\chi}\cup\widetilde{\psi})(e)\\
&= \widetilde{\varphi}(e)\cap[\widetilde{\chi}(e)\cup\widetilde{\psi}(e)]\\
&= [\widetilde{\varphi}(e)\cap\widetilde{\chi}(e)]\cup[\widetilde{\varphi}(e)\cap\widetilde{\psi}(e)]\\
&= (\widetilde{\varphi}\cap\widetilde{\chi})(e)\cup(\widetilde{\varphi}\cap\widetilde{\psi})(e)\\
&= [(\widetilde{\varphi}\cap\widetilde{\chi})\cup(\widetilde{\varphi}\cap\widetilde{\psi})](e)
\end{aligned}$$

olur. Buradan $(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cap}[(\widetilde{\chi},L)\widetilde{\cup}(\widetilde{\psi},M)] = [(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi},L)]\widetilde{\cup}[(\widetilde{\varphi},K)\widetilde{\cap}(\widetilde{\psi},M)]$ elde edilir.

Tanım 2.2.31. $(\widetilde{\varphi},K)$ ve $(\widetilde{\chi},L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. "$(\widetilde{\varphi},K)$ ve $(\widetilde{\chi},L)$" esnek kümesi $\forall e_1,e_2 \in E$ için $(\widetilde{\varphi}\wedge\widetilde{\chi})(e_1,e_2) = \widetilde{\varphi}(e_1)\cap\widetilde{\chi}(e_2)$ ile tanımlanır ve $(\widetilde{\varphi},K)\wedge(\widetilde{\chi},L)$ şeklinde gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.32. $(\widetilde{\varphi},K)$ ve $(\widetilde{\chi},L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. "$(\widetilde{\varphi},K)$ veya $(\widetilde{\chi},L)$" esnek kümesi $\forall e_1,e_2 \in E$ için $(\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\chi})(e_1,e_2) = \widetilde{\varphi}(e_1)\cup\widetilde{\chi}(e_2)$ ile tanımlanır ve $(\widetilde{\varphi},K)\vee(\widetilde{\chi},L)$ şeklinde gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Önerme 2.2.33. $(\widetilde{\varphi},K)$ ve $(\widetilde{\chi},L)$, U üzerinde iki esnek küme olsun.

1. $[(\widetilde{\varphi},K)\vee(\widetilde{\chi},L)]^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi},K)^{\widetilde{c}}\wedge(\widetilde{\chi},L)^{\widetilde{c}}$
2. $[(\widetilde{\varphi},K)\wedge(\widetilde{\chi},L)]^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi},K)^{\widetilde{c}}\vee(\widetilde{\chi},L)^{\widetilde{c}}$

dir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat. $\forall e_1,e_2 \in E$ için

1.

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\chi})]^{\widetilde{c}}(e_1,e_2) &= U\setminus[\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\chi}](e_1,e_2)\\
&= U\setminus[\widetilde{\varphi}(e_1)\cup\widetilde{\chi}(e_2)]\\
&= [U\setminus\widetilde{\varphi}(e_1)]\cap[U\setminus\widetilde{\chi}(e_2)]\\
&= \widetilde{\varphi}^c(e_1)\cap\widetilde{\chi}^c(e_2)\\
&= [\widetilde{\varphi}^{\widetilde{c}}\wedge\widetilde{\chi}^{\widetilde{c}}](e_1,e_2)
\end{aligned}$$

olduğundan

$[(\widetilde{\varphi},K)\vee(\widetilde{\chi},L)]^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi},K)^{\widetilde{c}}\wedge(\widetilde{\chi},L)^{\widetilde{c}}$ elde edilir.

2.

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\chi})]^{\widetilde{c}}(e_1, e_2) &= U \setminus [\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\chi}](e_1, e_2) \\
&= U \setminus [\widetilde{\varphi}(e_1) \cap \widetilde{\chi}(e_2)] \\
&= [U \setminus \widetilde{\varphi}(e_1)] \cup [U \setminus \widetilde{\chi}(e_2)] \\
&= \widetilde{\varphi}^{\widetilde{c}}(e_1) \cup \widetilde{\chi}^{\widetilde{c}}(e_2) \\
&= [\widetilde{\varphi}^{\widetilde{c}} \vee \widetilde{\chi}^{\widetilde{c}}](e_1, e_2)
\end{aligned}
$$

olduğundan
$[(\widetilde{\varphi}, K) \wedge (\widetilde{\chi}, L)]^{\widetilde{c}} = (\widetilde{\varphi}, K)^{\widetilde{c}} \vee (\widetilde{\chi}, L)^{\widetilde{c}}$ elde edilir.

2.3. Kesişimsel Esnek Gruplar

Bu bölümde kesişimsel esnek grup, kesişimsel esnek alt grup, normal kesişimsel esnek alt grup tanımı verilecektir. Daha sonra kesişimsel esnek gruplar üzerindeki işlemlere yer verilecektir. Burada U evrensel küme ve G grubu parametre kümesi olarak alınacaktır.

Tanım 2.3.1. G bir grup ve $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\widetilde{\varphi}(g_1.g_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2)$ ise $(\widetilde{\varphi}, G)$ ye U üzerinde bir kesişimsel esnek yarıgruptur denir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.2. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için

1. $\widetilde{\varphi}(g_1 \cdot g_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2)$
2. $\widetilde{\varphi}(g_1) = \widetilde{\varphi}(g_1^{-1})$

şartları sağlanıyorsa $(\widetilde{\varphi}, G)$ esnek kümesine U üzerinde kesişimsel esnek grup denir (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 2.3.3. $G = V_4 = \{e, a, b, c\}$ grubunu alalım. Bu grubun işlem tablosu

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

şeklindedir. Ayrıca $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ve

$\widetilde{\varphi}$=$\{(e_G, U), (a, \{u_1, u_2, u_4, u_5\}), (b, \{u_1, u_2, u_4\}), (c, \{u_1, u_2, u_3, u_4\})\}$ olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ esnek kümesinin kesişimsel esnek grup olup olmadığını inceleyelim.

Öncelikle $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\widetilde{\varphi}(g_1.g_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2)$ şartına bakalım.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(e_G.a) &\supseteq \widetilde{\varphi}(e_G) \cap \widetilde{\varphi}(a) \\
\widetilde{\varphi}(a) &\supseteq U \cap \{u_1, u_2, u_4, u_5\} \\
\{u_1, u_2, u_4, u_5\} &\supseteq \{u_1, u_2, u_4, u_5\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(a.a) &\supseteq \widetilde{\varphi}(a) \cap \widetilde{\varphi}(a) \\
\widetilde{\varphi}(e_G) &\supseteq \{u_1, u_2, u_4, u_5\} \cap \{u_1, u_2, u_4, u_5\} \\
U &\supseteq \{u_1, u_2, u_4, u_5\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(a.b) &\supseteq \widetilde{\varphi}(a) \cap \widetilde{\varphi}(b) \\
\widetilde{\varphi}(c) &\supseteq \{u_1, u_2, u_4, u_5\} \cap \{u_1, u_2, u_4\} \\
\{u_1, u_2, u_3, u_4\} &\supseteq \{u_1, u_2, u_4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(a.c) &\supseteq \widetilde{\varphi}(a) \cap \widetilde{\varphi}(c) \\
\widetilde{\varphi}(b) &\supseteq \{u_1, u_2, u_4, u_5\} \cap \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\
\{u_1, u_2, u_4\} &\supseteq \{u_1, u_2, u_4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(b.c) &\supseteq \widetilde{\varphi}(b)\cap\widetilde{\varphi}(c)\\
\widetilde{\varphi}(a) &\supseteq \{u_1,u_2,u_4\}\cap\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\\
\{u_1,u_2,u_4,u_5\} &\supseteq \{u_1,u_2,u_4\}
\end{aligned}$$

Diğer elemanlarda benzer şekilde incelenirse $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\widetilde{\varphi}(g_1.g_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1)\cap\widetilde{\varphi}(g_2)$ olduğu görülür. Ayrıca V_4 grubunda her elemanın tersi kendisine eşit olduğundan $\widetilde{\varphi}(g_1^{-1}) = \widetilde{\varphi}(g_1)$ şartı da sağlanmış olur. Böylece $(\widetilde{\varphi}, G)$ esnek kümesi U üzerinde bir kesişimsel esnek gruptur.

Teorem 2.3.4. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup olsun. Bu durumda $\forall g \in G$ için $\widetilde{\varphi}(e_G) \supseteq \widetilde{\varphi}(g)$ dır (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde kesişimsel esnek grup olduğundan $\forall g \in G$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(e_G) &= \widetilde{\varphi}(g\cdot g^{-1})\\
&\supseteq \widetilde{\varphi}(g)\cap\widetilde{\varphi}(g^{-1})\\
&= \widetilde{\varphi}(g)\cap\widetilde{\varphi}(g)\\
&= \widetilde{\varphi}(g)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.5. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde esnek küme olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde kesişimsel esnek grup olması için gerek ve yeter şart $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\widetilde{\varphi}(g_1\cdot g_2^{-1}) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1)\cap\widetilde{\varphi}(g_2)$ olmasıdır (Çağman ve ark., 2011).

İspat. Kabul edelim ki $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde kesişimsel esnek grup olsun.
$\forall g_1, g_2 \in G$ için
$\widetilde{\varphi}(g_1\cdot g_2^{-1}) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1)\cap\widetilde{\varphi}(g_2^{-1}) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1)\cap\widetilde{\varphi}(g_2)$ elde edilir.
Diğer taraftan kabul edelim ki $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\widetilde{\varphi}(g_1\cdot g_2^{-1}) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1)\cap\widetilde{\varphi}(g_2)$ olsun.
Öncelikle $g_1 = e_G$ alalım.
$\widetilde{\varphi}(g_2^{-1}) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_2)$ ve $\widetilde{\varphi}(g_2) = \widetilde{\varphi}((g_2^{-1})^{-1}) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_2^{-1})$ elde edilir.

Dolayısıyla $\widetilde{\varphi}(g_2) = \widetilde{\varphi}(g_2^{-1})$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(g_1 \cdot g_2) &= \widetilde{\varphi}(g_1 \cdot (g_2^{-1})^{-1}) \\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2^{-1}) \\ &= \widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2) \end{aligned}$$

Buradan $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup olur.

Teorem 2.3.6. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde kesişimsel esnek grup ve $g_1 \in G$ olsun. $\forall g_2 \in G$ için $\widetilde{\varphi}(g_1 \cdot g_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_2)$ olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{\varphi}(g_1) = \widetilde{\varphi}(e_G)$ olmasıdır (Çağman ve ark., 2011).

İspat. Kabul edelim ki $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$\widetilde{\varphi}(g_1 \cdot g_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_2)$ olsun. İlk olarak $g_2 = e_G$ alalım.$\widetilde{\varphi}(g_1) \supseteq \widetilde{\varphi}(e_G)$ olur. Teorem 2.3.5 den $\widetilde{\varphi}(g_1) = \widetilde{\varphi}(e_G)$ dir.
Tersine $\widetilde{\varphi}(g_1) = \widetilde{\varphi}(e_G)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(g_1 \cdot g_2) &\supseteq \widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2) \\ &= \widetilde{\varphi}(e_G) \cap \widetilde{\varphi}(g_2) \\ &= \widetilde{\varphi}(g_2) \end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.3.7. $(\widetilde{\varphi}, G)$ ve $(\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek grup olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, G) \wedge (\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek gruptur (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $\forall (g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G \times H$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\chi}(g_1, h_1)(g_2, h_2)^{-1} &= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\chi}(g_1 g_2^{-1}, h_1 h_2^{-1}) \\
&= \widetilde{\varphi}(g_1 g_2^{-1}) \cap \widetilde{\chi}(h_1 h_2^{-1}) \\
&\supseteq (\widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2)) \cap (\widetilde{\chi}(h_1) \cap \widetilde{\chi}(h_2)) \\
&= (\widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\chi}(h_1)) \cap (\widetilde{\varphi}(g_2) \cap \widetilde{\chi}(h_2)) \\
&= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\chi}(g_1, h_1) \cap \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\chi}(g_2, h_2)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(\widetilde{\varphi}, G) \wedge (\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek gruptur.

Tanım 2.3.8. $(\widetilde{\varphi}, G)$ ve $(\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek grup olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ ve $(\widetilde{\chi}, H)$ kesişimsel esnek grupların çarpımı $(\widetilde{\varphi}, G) \times (\widetilde{\chi}, H) = (\widetilde{\varphi} \times \widetilde{\chi}, G \times H)$ olarak tanımlanır ve $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\widetilde{\varphi} \times \widetilde{\chi}(g_1.g_2) = \widetilde{\varphi}(g_1) \times \widetilde{\chi}(g_2)$ şeklinde ifade edilir (Çağman ve ark., 2011).

Teorem 2.3.9. $(\widetilde{\varphi}, G)$ ve $(\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek grup olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, G) \times (\widetilde{\chi}, H)$, $U \times U$ üzerinde bir kesişimsel esnek gruptur (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $\forall (g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G \times H$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} \times \widetilde{\chi}((g_1, h_1)(g_2, h_2)^{-1}) &= \widetilde{\varphi} \times \widetilde{\chi}((g_1 g_2^{-1}, h_1 h_2^{-1})) \\
&= \widetilde{\varphi}(g_1 g_2^{-1}) \cap \widetilde{\chi}(h_1 h_2^{-1}) \\
&\supseteq (\widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2)) \cap (\widetilde{\chi}(h_1) \cap \widetilde{\chi}(h_2)) \\
&= (\widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\chi}(h_1)) \cap (\widetilde{\varphi}(g_2) \cap \widetilde{\chi}(h_2)) \\
&= \widetilde{\varphi} \times \widetilde{\chi}(g_1, h_1) \cap \widetilde{\varphi} \times \widetilde{\chi}(g_2, h_2)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $(\widetilde{\varphi}, G) \times (\widetilde{\chi}, H)$, $U \times U$ üzerinde kesişimsel esnek gruptur.

Teorem 2.3.10. $(\widetilde{\varphi}, G)$ ve $(\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek grup olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, G) \widetilde{\cap} (\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek gruptur (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $\forall \in g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi}(g_1g_2^{-1}) &= \widetilde{\varphi}(g_1g_2^{-1}) \cap \widetilde{\chi}(g_1g_2^{-1}) \\
&\supseteq (\widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2)) \cap (\widetilde{\chi}(g_1) \cap \widetilde{\chi}(g_2)) \\
&= (\widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\chi}(g_1)) \cap (\widetilde{\varphi}(g_2) \cap \widetilde{\chi}(g_2)) \\
&= (\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(g_1) \cap (\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(g_2)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $(\widetilde{\varphi}, G)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde kesişimsel esnek gruptur.

Not 2.3.11. $(\widetilde{\varphi}, G)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde kesişimsel esnek grup değildir.

Örnek 2.3.12. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}$ evrensel küme ve $G = H = \mathbb{Z}_4$ parametreler kümesinin alt kümesi olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ ve $(\widetilde{\chi}, H)$ kesişimsel esnek gruplarını şöyle tanımlayalım.
$\widetilde{\varphi}(0) = Z$, $\widetilde{\varphi}(1) = \{0, 1, 2\}$, $\widetilde{\varphi}(2) = \{0, 1, 10\}$, $\widetilde{\varphi} = \{0, 1\}$,

$\widetilde{\chi}(0) = Z$, $\widetilde{\chi}(1) = \{6, 7\}$, $\widetilde{\chi}(2) = \{6, 7, 10, 12\}$, $\widetilde{\chi}(3) = \{6, 7\}$
Buradan

$$\begin{aligned}
((\widetilde{\varphi}, G)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, H))(1+2) &\not\supseteq ((\widetilde{\varphi}, G)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, H))(1) \cap ((\widetilde{\varphi}, G)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, H))(2) \\
((\widetilde{\varphi}, G)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, H))(3) &= \widetilde{\varphi}(3) \cup \widetilde{T}(3) = \{0, 1, 2\} \cup \{6, 7\} = \{0, 1, 6, 7\} \\
((\widetilde{\varphi}, G)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, H))(1) \cap ((\widetilde{\varphi}, G)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, H))(2) &= \{0, 1, 6, 7, 10\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $(\widetilde{\varphi}, G)\widetilde{\cup}(\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde kesişimsel esnek grup değildir.

Tanım 2.3.13. $H \leq G$, $(\widetilde{\varphi}, G)$ U üzerinde bir kesişimsel esnek grup ve $(\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin boştan farklı esnek alt kümesi olsun. $(\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde kesişimsel esnek grup ise $(\widetilde{\chi}, H)$ ye $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin U üzerindeki kesişimsel esnek altgrubu denir. $(\widetilde{\chi}, H)\widetilde{\leqslant}(\widetilde{\varphi}, G)$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Teorem 2.3.14. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup ve $(\widetilde{\chi}, H)$,$(\widetilde{\vartheta}, N)\widetilde{\leq}(\widetilde{\varphi}, G)$ olsun. Bu durumda $(\widetilde{\chi}, H)\widetilde{\cap}(\widetilde{\vartheta}, N)$ de $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin U üzerinde kesişimsel esnek altgrubudur (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{\chi}\widetilde{\cap}\widetilde{\vartheta}(g_1g_2^{-1}) &= \widetilde{\chi}(g_1g_2^{-1}) \cap \widetilde{\vartheta}(g_1g_2^{-1}) \\
&\supseteq (\widetilde{\chi}(g_1) \cap \widetilde{\chi}(g_2)) \cap (\widetilde{\vartheta}(g_1) \cap \widetilde{\vartheta}(g_2)) \\
&= (\widetilde{\chi}(g_1) \cap \widetilde{\vartheta}(g_1)) \cap (\widetilde{\chi}(g_2) \cap \widetilde{\vartheta}(g_2)) \\
&= \widetilde{\chi}\widetilde{\cap}\widetilde{\vartheta}(g_1) \cap \widetilde{\chi}\widetilde{\cap}\widetilde{\vartheta}(g_2)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $(\widetilde{\chi}, H)\widetilde{\cap}(\widetilde{\vartheta}, N)$, $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin U üzerinde kesişimsel esnek altgrubudur.

Tanım 2.3.15. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir esnek küme (kesişimsel esnek grup olmak zorunda değil) olsun. $N \leq G$ ve $(\widetilde{\vartheta}, N)$, $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin U üzerinde boştan farklı esnek alt kümesi olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\widetilde{\vartheta}(g_1g_2) = \widetilde{\vartheta}(g_2g_1)$ oluyorsa $(\widetilde{\vartheta}, N)$ ye $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin abelyen esnek alt kümesi denir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.16. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup ve $(\widetilde{\vartheta}, N)$, $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin U üzerinde boştan farklı kesişimsel esnek altgrubu olsun. $(\widetilde{\vartheta}, N)$, $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin U üzerinde abelyan esnek alt kümesi ise $(\widetilde{\vartheta}, N)$ ye $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin normal kesişimsel esnek altgrubu denir. $(\widetilde{\vartheta}, N)\widetilde{\lhd}(\widetilde{\varphi}, G)$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

2.4. Kesişimsel Esnek Grupların Uygulamaları

Bu bölümde esnek yan küme, seviye kümesi, esnek görüntü, esnek ters görüntü, çekirdek kavramlarına yer verilecek ve bu notasyonların kesişimsel esnek grupla uyumu incelenecektir. Ayrıca grup teorisinin kesişimsel esnek gruplarla uyumu için uygulamalara yer verilecektir.

Tanım 2.4.1. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir esnek küme ve A, U nun bir altkümesi olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$, esnek kümesinin seviye kümesi $(\widetilde{\varphi}, G)^A$ ile gösterilir ve $(\widetilde{\varphi}, G)^A = \{g \in G : \widetilde{\varphi}(g) \supseteq A\}$ şeklinde tanımlanır (Çağman ve ark., 2011).

Not 2.4.2. Eğer $A = \emptyset$ ise $(\widetilde{\varphi}, G)^{\emptyset} = \{g \in G : \widetilde{\varphi}(g) \supset \emptyset\}$, $(\widetilde{\varphi}, G)$ nın dayanağı olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.3. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}$ evrensel küme olsun. $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ parametreler kümesinin altkümesi ve $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, U nun bir altkümesi olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ esnek kümesi şu şekilde tanımlansın.
$\widetilde{\varphi}(1) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$
$\widetilde{\varphi}(2) = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$
$\widetilde{\varphi}(3) = \{-6, -4, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11\}$
$\widetilde{\varphi}(4) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
$\widetilde{\varphi}(5) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$\widetilde{\varphi}(6) = \emptyset$
O halde $(\widetilde{\varphi}, G)^A = \{2, 3\}$ ve $(\widetilde{\varphi}, G)^{\emptyset} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ elde edilir.

Teorem 2.4.4. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup ve $A \subseteq U$ olsun. Bu durumda $A \neq \emptyset$ olduğunda $(\widetilde{\varphi}, G)^A$, G nin bir altgrubu olur (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $(\widetilde{\varphi}, G)^A \neq \emptyset$ olduğu açıktır. $g_1, g_2 \in (\widetilde{\varphi}, G)^A$ olsun. Buradan $\widetilde{\varphi}(g_1) \supseteq A$, $\widetilde{\varphi}(g_2) \supseteq A$ ve

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(g_1 g_2^{-1}) &\supseteq \widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2^{-1}) \\ &= \widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2) \\ &\supseteq A \end{aligned}$$

Böylece $g_1 g_2^{-1} \in (\widetilde{\varphi}, G)^A$ olduğundan $(\widetilde{\varphi}, G)^A$ nın G nin bir alt grubu olur.

Tanım 2.4.5. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin çekirdeği $(\widetilde{\varphi}, G_*)$ ile gösterilir ve $(\widetilde{\varphi}, G_*) = \{g \in G : \widetilde{\varphi}(g) = \widetilde{\varphi}(e_G)\}$ şeklinde tanımlanır (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 2.4.6. Kabul edelim ki $U = S_3$ simetrik grubu evrensel küme ve $G = \mathbb{Z}_6$ parametreler kümesinin altkümesi olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ esnek kümesi şu şekilde tanımlansın.
$\widetilde{\varphi}(0) = \{(12), (123), (132)\}$
$\widetilde{\varphi}(1) = \{(13)\}$
$\widetilde{\varphi}(2) = \{(23)\}$
$\widetilde{\varphi}(3) = \{(12), (123), (132)\}$

$\widetilde{\varphi}(4) = \{(12), (123), (132)\}$

$\widetilde{\varphi}(5) = \{(1), (23), (132)\}$

O halde $(\widetilde{\varphi}, G_*) = \{0, 3, 4\}$ olur.

Teorem 2.4.7. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, G_*)$, G nin bir altgrubu olur (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $(\widetilde{\varphi}, G_*) \neq \emptyset$ olduğu açıktır. $g_1, g_2 \in (\widetilde{\varphi}, G_*)$ olsun. Buradan $\widetilde{\varphi}(g_1) = \widetilde{\varphi}(e_G)$, $\widetilde{\varphi}(g_2) = \widetilde{\varphi}(e_G)$ ve

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(g_1 g_2^{-1}) &\supseteq \widetilde{\varphi}(g_1) \cap \widetilde{\varphi}(g_2^{-1}) \\ &= \widetilde{\varphi}(e_G) \cap \widetilde{\varphi}(e_G) \\ &= \widetilde{\varphi}(e_G) \end{aligned}$$

$\widetilde{\varphi}(e_G) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1 g_2^{-1})$ olduğu için $\widetilde{\varphi}(g_1 g_2^{-1}) = \widetilde{\varphi}(e_G)$, $g_1 g_2^{-1} \in (\widetilde{\varphi}, G_*)$ olur ve buradan $(\widetilde{\varphi}, G_*)$, G nin bir altgrubudur.

Tanım 2.4.8. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup ve $g_1 \in G$ olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin sol esnek koseti $g_1\widetilde{\varphi}$ ile gösterilir ve $\forall g_2 \in G$ için $g_1\widetilde{\varphi}(g_2) = \widetilde{\varphi}(g_1^{-1} g_2)$ şeklinde tanımlanır (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 2.4.9. Kabul edelim ki $U = S_3$ simetrik grubu evrensel küme ve $G = \mathbb{Z}_4$ parametreler kümesinin altkümesi olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ esnek kümesi şu şekilde tanımlansın.

$\widetilde{\varphi}(0) = S_3$

$\widetilde{\varphi}(1) = \{(12), (23)\}$

$\widetilde{\varphi}(2) = \{(1), (12), (23), (123)\}$

$\widetilde{\varphi}(3) = \{(12), (23)\}$

O halde $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin esnek sol koseti

$0\widetilde{\varphi} = \{(0, S_3), (1, \{(12), (23)\}), (2, \{(1), (12), (23), (123)\}), (3, \{(12), (23)\})\}$

$1\widetilde{\varphi} = \{(0, \{(12), (23)\}), (1, S_3), (2, \{(12), (23)\}), (3, \{(1), (12), (23), (123)\}\}$

$2\widetilde{\varphi} = \{(0, \{(1), (12), (23), (123)\}), (1, \{(12), (23)\}, (2, S_3), (3, \{(12), (23)\})\}$

$3\widetilde{\varphi} = \{(0, \{(12), (23)\}), (1, \{(1), (12), (23), (123)\}), (2, \{(12), (23)\}), (3, S_3)\}$

Teorem 2.4.10. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup olsun. O halde $\forall g_1, g_2 \in G$ için $g_1\widetilde{\varphi} = g_2\widetilde{\varphi} \Leftrightarrow g_1(\widetilde{\varphi}, G_*) = g_2(\widetilde{\varphi}, G_*)$ dir (Çağman ve ark., 2011).

İspat. Kabul edelim ki $g_1\widetilde{\varphi} = g_2\widetilde{\varphi}$ olsun. Buradan $\forall g_3 \in G$ için
$g_1\widetilde{\varphi}(g_3) = g_2\widetilde{\varphi}(g_3) \Rightarrow \widetilde{\varphi}(g_1^{-1}g_3) = \widetilde{\varphi}(g_2^{-1}g_3)$ dir.
$g_3 = g_2$ seçilirse

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(g_1^{-1}g_2) &= \widetilde{\varphi}(g_2^{-1}g_2)\\ &= \widetilde{\varphi}(e_G)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $g_1^{-1}g_2 \in (\widetilde{\varphi}, G_*)$ için $g_1(\widetilde{\varphi}, G_*) = g_2(\widetilde{\varphi}, G_*)$ olur.
Tersine kabul edelimki ve $g_1(\widetilde{\varphi}, G_*) = g_2(\widetilde{\varphi}, G_*)$ olsun. Bu durumda $g_1^{-1}x \in (\widetilde{\varphi}, G_*)$ ve $g_2^{-1}x \in (\widetilde{\varphi}, G_*)$ olur. Buradan $\forall g_3 \in G$ için

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(g_1^{-1}g_3) &= \widetilde{\varphi}(g_1^{-1}bg_2g_2^{-1}g_3))\\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(g_1^{-1}g_2) \cap \widetilde{\varphi}(g_2^{-1}g_3)\\ &= \widetilde{\varphi}(e_G)\\ &= \widetilde{\varphi}(g_2^{-1}g_3)\\ &= \widetilde{\varphi}(g_2^{-1}g_3)\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\forall g_3 \in G$ için $\widetilde{\varphi}(g_2^{-1}g_3) \supseteq \widetilde{\varphi}(g_1^{-1}g_3)$ dir. Bu yüzden $\forall g_3 \in G$ için $\widetilde{\varphi}(g_2^{-1}g_3) = \widetilde{\varphi}(g_1^{-1}g_3)$ olur ki buda $g_1\widetilde{\varphi} = g_2\widetilde{\varphi}$ anlamına gelir.

$*$: G bir grup, $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde esnek küme ve $(\widetilde{\vartheta}, N)$, $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin boştan farklı esnek alt kümesi olsun. Aşağıdaki eşitlikler birbirine denktir. $\forall g_1, g_2 \in G$ için

1. $\widetilde{\vartheta}(g_1g_2) = \widetilde{\vartheta}(g_2g_1)$
2. $\widetilde{\vartheta}(g_1g_2g_1^{-1}) = \widetilde{\vartheta}(g_2)$
3. $\widetilde{\vartheta}(g_1g_2g_1^{-1}) \supseteq \widetilde{\vartheta}(g_2)$
4. $\widetilde{\vartheta}(g_1g_2g_1^{-1}) \subseteq \widetilde{\vartheta}(g_2)$

Teorem 2.4.11. $(\widetilde{\varphi}, G)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup ve $(\widetilde{\vartheta}, N)$, U üzerinde $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin normal kesişimsel esnek altgrubu olsun. $\forall n_1, n_2 \in N$ için $n_1\widetilde{\varphi} = n_2\widetilde{\varphi}$ ise $\widetilde{\vartheta}(n_1) = \widetilde{\vartheta}(n_2)$ dir (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $n_1\widetilde{\varphi} = n_2\widetilde{\varphi}$ olsun. Teoremden 2.4.10 dan $n_1^{-1}n_2 \in (\widetilde{\varphi}, G_*)$ ve $n_2^{-1}n_1 \in (\widetilde{\varphi}, G_*)$ dır.

$(\widetilde{\vartheta}, N)$, U üzerinde $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin normal kesişimsel esnek altgrubu olduğundan $*$ dan dolayı

$$\begin{aligned} \widetilde{\vartheta}(n_1) &= \widetilde{\vartheta}(n_2^{-1}n_1n_2) \\ &\supseteq \widetilde{\vartheta}(n_2^{-1}n_1) \cap \widetilde{\vartheta}(n_2) \\ &= \widetilde{\vartheta}(e_G) \cap \widetilde{\vartheta}(n_2) \\ &= \widetilde{\vartheta}(n_2) \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\widetilde{\vartheta}(n_2) \supseteq \widetilde{\vartheta}(n_1)$ dır. Bu yüzden $\widetilde{\vartheta}(n_1) = \widetilde{\vartheta}(n_2)$ olur.

Tanım 2.4.12. $f : G \to H$ bir foksiyon ve $(\widetilde{\varphi}, G), (\widetilde{\chi}, H)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ nin f altındaki esnek görüntüsü $f(\widetilde{\varphi}, G)$ ve $(\widetilde{\chi}, H)$ nın f altındaki esnek ters görüntüsü $f^{-1}(\widetilde{\chi}, H)$ esnek kümeleridir öyleki sırasıyla $\forall h \in H$,

$$f(\widetilde{\varphi}, G)(h) = \begin{cases} \cup\{\widetilde{\varphi}(g) : g \in G, f(g) = h\}, & f^{-1}(h) \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ve $\forall g \in G$ için $f^{-1}(\widetilde{\chi}(g)) = \widetilde{\chi}(f(g))$ şeklinde tanımlanır. $f(\widetilde{\varphi}, G)$ nin görüntü kümesi $Im(\widetilde{\varphi}, G)$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 2.4.13. Kabul edelimki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ bir evrensel küme, $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $H = \{a, b, c, 3, 4, 5\}$ parametreler kümesinin altkümesi olsun. $(\widetilde{\varphi}, G)$ ve $(\widetilde{\chi}, H)$ esnek kümeleri sırasıyla şu şekilde tanımlansın.

$\widetilde{\varphi} = \{(1, \emptyset)(2, \{u_3, u_4, u_7\}), (3, \{u_1\}), (4, \{u_1, u_2, u_3\}), (5, \{u_6\})$

$\widetilde{\chi} = \{(a, \{u_5\})(b, \emptyset), (c, \emptyset), (3, \{u_1, u_2, u_4, u_6\}), (4, \{u_7\}), (5, \emptyset)\}$

$f : G \to H$ bir foksiyon olmak üzere

$f(1) = b, f(2) = 3, f(3) = a, f(4) = 4, f(5) = a$ olsun.
Bu durumda $f((\widetilde{\varphi}, G)) = \{(a, \{u_1, u_6\}), (b, \emptyset), (c, \emptyset), (3, \{u_3, u_4, u_7\}), (4, \{u_7\}), (5, \emptyset)\}$
$f^{-1}(\widetilde{\chi}, H) = \{(1, \emptyset), (2, \{u_1, u_2, u_4, u_6\}), (c, \emptyset), (3, \{u_5\}), (4, \{u_7\}), (5, \{u_5\})\}$ elde edilir.

Teorem 2.4.14. $f : G \to H$ bir foksiyon ve $G_1, G_2 \subseteq G$ ve $(\widetilde{\varphi}, G_1), (\widetilde{\varphi}, G_2)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Buradan $(\widetilde{\varphi}, G_1) \widetilde{\subseteq} (\widetilde{\varphi}, G_2) \Rightarrow f(\widetilde{\varphi}, G_1) \widetilde{\subseteq} f(\widetilde{\varphi}, G_2)$ dir (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $\forall h \in H$ için

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\varphi}, G_1)(h) &= \bigcup \{(\widetilde{\varphi}, G_1)(g) : g \in G_1, f(g) = h\} \\ &\subseteq \bigcup \{(\widetilde{\varphi}, G_2)(g) : g \in G_2, f(g) = h\} \\ &= f(\widetilde{\varphi}, G_2)(h) \end{aligned}$$

2.5. Kesişimsel Esnek Halkalar ve Kesişimsel Esnek İdealler

Bu bölümde kesişimsel esnek halkaların tanımı, kesişimsel esnek halkalar ile ilgili temel teoremler ve kesişimsel esnek ideal tanımı verilerek kesişimsel esnek ideallerle ilgili teoremler incelenecektir. Burada U evrensel küme ve $(R, +, \cdot)$ halkası parametre kümesi olarak alınacaktır.

Tanım 2.5.1. R," + ","." ikili işlemi ile bir halka ve $(\widetilde{\varphi}, R)$, U bir esnek küme olsun. R de " + " işlemi ile $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek grup ve R de "." işlemi ile $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek yarı grup ise $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halkadır (Çıtak ve Çağman, 2015).

Teorem 2.5.2. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka olması için gerek ve yeter şart $\forall r_1, r_2 \in R$ için

1. $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)$

2. $\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)$

olmasıdır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka olsun.
$\widetilde{\varphi}(r_1 + r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)$ ve $\widetilde{\varphi}(-r_1) = \widetilde{\varphi}(r_1)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(-r_2)\\ &= \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek yarı grup olduğundan $\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)$ dir.

Diğer taraftan kabul edelim ki $\forall r_1, r_2 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)$ ve $\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)$ olsun. $x = O_R$ seçelim.

$\widetilde{\varphi}(O_R - r_2) = \widetilde{\varphi}(-r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_2)$ ve $\forall r_2 \in R$ için
$\widetilde{\varphi}(r_2) = \widetilde{\varphi}(-(-r_2)) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_2)$ elde edilir.
Böylece $\forall r_1 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(-r_1) = \widetilde{\varphi}(r_1)$ olur.

Ayrıca

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(r_1 + r_2) &= \widetilde{\varphi}(r_1 - (-r_2))\\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(-r_2)\\ &= \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)\end{aligned}$$

elde edilir.
Böylece $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka olur.

Tanım 2.5.3. R bir halka ve $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halka olsun.
Eğer $\forall r_1, r_2 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_2)$ ise $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sol ideal denir.
Eğer $\forall r_1, r_2 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1)$ ise $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sağ ideal denir.

Eğer $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek sol ve sağ ideal ise $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek ideal olarak adlandırılır (Çıtak ve Çağman, 2015).

Teorem 2.5.4. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka olsun. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek ideal olması için gerek yeter şart $\forall r_1, r_2 \in R$ için

1. $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)$

2. $\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cup \widetilde{\varphi}(r_2)$

olmasıdır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek ideal olsun. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halka olduğundan $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_1)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1)$ ve $\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_2)$ olduğundan $\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cup \widetilde{\varphi}(r_2)$ elde edilir.
Diğer taraftan $\forall r_1, r_2 \in R$ için
$\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)$ ve $\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cup \widetilde{\varphi}(r_2)$ olduğunu kabul edelim.
$\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cup \widetilde{\varphi}(r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1)$
$\widetilde{\varphi}(r_1 \cdot r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cup \widetilde{\varphi}(r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_2)$
olur. Böylece $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek idealdir.

Teorem 2.5.5. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halka (kesişimsel esnek ideal) olsun. $\forall r \in R$ için $\widetilde{\varphi}(0_R) \supseteq \widetilde{\varphi}(r)$ dir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $\forall r \in R$ için $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halka (kesişimsel esnek ideal) olsun. Buradan
$\widetilde{\varphi}(0_R) = \widetilde{\varphi}(r - r) \supseteq \widetilde{\varphi}(r) \cap \widetilde{\varphi}(r) = \widetilde{\varphi}(r)$
elde edilir.

Teorem 2.5.6. R, birimli bir halka olmak üzere $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halka (kesişimsel esnek ideal) olsun. $\forall r \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r) \supseteq \widetilde{\varphi}(1_R)$ dir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. Kabul edelim ki $\forall r \in R$ için, $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halka (kesişimsel esnek ideal) olsun. Buradan $\widetilde{\varphi}(r) = \widetilde{\varphi}(r \cdot 1_R) \supseteq \widetilde{\varphi}(1_R)$ elde edlir.

Teorem 2.5.7. R bölüm halkası ve $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halka olsun. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek ideali olması için gerek ve yeter şart $\forall O_R \neq r \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r) = \widetilde{\varphi}(1_R) \subseteq \widetilde{\varphi}(O_R)$ dır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek ideal olsun.$\forall r \in R$ için
$\widetilde{\varphi}(O_R) \supseteq \widetilde{\varphi}(r)$ olduğundan
$\widetilde{\varphi}(O_R) \supseteq \widetilde{\varphi}(1_R)$ olur.
Şimdi $O_R \neq r \in R$ için
$\widetilde{\varphi}(r) = \widetilde{\varphi}(r1_R) \supseteq \widetilde{\varphi}(1_R)$ ve $\widetilde{\varphi}(1_R) = \widetilde{\varphi}(r^{-1}r) \supseteq \widetilde{\varphi}(r)$ olduğundan
$\widetilde{\varphi}(r) = \widetilde{\varphi}(1_R) \subseteq \widetilde{\varphi}(O_R)$ olur.
Tersine

1. $r_1, r_2 \in R$ olsun. Eğer $r_1 - r_2 \neq O_R$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) &= \widetilde{\varphi}(1_R) \\ &= \widetilde{\varphi}(r_1) \\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) \end{aligned}$$

   ve eğer $r_1 - r_2 = O_R$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) &= \widetilde{\varphi}(O_R) \\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) \end{aligned}$$

   olur.

2. $r_1, r_2 \in R$ olsun. Eğer $r_1 \neq O_R$ ve $r_2 = O_R$ ise bu durumda $\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) = \widetilde{\varphi}(O_R) \supseteq \widetilde{\varphi}(1_R) = \widetilde{\varphi}(r_1)$ ve $\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) = \widetilde{\varphi}(O_R) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_2)$ olur. Böylece $\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cup \widetilde{\varphi}(r_2)$ dır.

   Eğer $r_1 \neq O_R$ ve $r_2 \neq O_R$ ise bu durumda $r_1 r_2 \neq O_R$ yada $r_1 r_2 = O_R$ olur.

   Eğer $r_1 r_2 \neq O_R$ ise bu durumda $\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) = \widetilde{\varphi}(1_R) = \widetilde{\varphi}(r_1)$ ve $\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) = \widetilde{\varphi}(1_R) = \widetilde{\varphi}(r_2)$ dır.

Eğer $r_1 r_2 = O_R$ ise bu durumda

$\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) = \widetilde{\varphi}(O_R) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1)$ ve $\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) = \widetilde{\varphi}(O_R) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_2)$ olur. Böylece $\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cup \widetilde{\varphi}(r_2)$, $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin U üzerinde bir kesişimsel esnek ideal olmasını gerektirir.

Teorem 2.5.8. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka(kesişimsel esnek ideal) olsun. Herhangi $r_1, r_2 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) = \widetilde{\varphi}(O_R)$ ise bu durumda $\widetilde{\varphi}(r_1) = \widetilde{\varphi}(r_2)$ dir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. Herhangi $r_1, r_2 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) = \widetilde{\varphi}(O_R)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(r_1) &= \widetilde{\varphi}(r_1 - r_2 + r_2) \\
&\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) \\
&= \widetilde{\varphi}(O_R) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) \\
&= \widetilde{\varphi}(r_2)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) &= \widetilde{\varphi}(-(r_1 - r_2)) \\
&= \widetilde{\varphi}(r_2 - r_1) \\
&= \widetilde{\varphi}(O_R)
\end{aligned}$$

kullanılarak $\widetilde{\varphi}(r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 2.5.9. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka(kesişimsel esnek ideal) olsun öyleki $\forall r_1, r_2 \in R$ için $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin görüntüsü kapsama tarafından derecelendirilir. Eğer $\forall r_1, r_2 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_2) \supset \widetilde{\varphi}(r_1)$ ise bu durumda $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) = \widetilde{\varphi}(r_1) = \widetilde{\varphi}(r_2 - r_1)$ dir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. Kabul edelim ki $r_1, r_2 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_2) \supset \widetilde{\varphi}(r_1)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) \\
&= \widetilde{\varphi}(r_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(r_1) &= \widetilde{\varphi}(r_1 - r_2 + r_2)\\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)\end{aligned}$$

$r_1, r_2 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_2) \supset \widetilde{\varphi}(r_1)$ ve $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) = \widetilde{\varphi}(r_1) = \widetilde{\varphi}(r_2 - r_1)$ olduğundan

$\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \subseteq \widetilde{\varphi}(r_1)$ dir . Böylece $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) = \widetilde{\varphi}(r_1) = \widetilde{\varphi}(r_2 - r_1)$ olur.

Teorem 2.5.10. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde $\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi}, R) = \{\emptyset, A\}$ ile bir kesişimsel esnek halka (kesişimsel esnek ideal) $\emptyset \neq A \subseteq U$ olsun. Eğer $(\widetilde{\chi}, R)$ ve $(\widetilde{\psi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek idealler iken $(\widetilde{\varphi}, R) = (\widetilde{\chi}, R)\widetilde{\cup}(\widetilde{\psi}, R)$ ise bu durumda $(\widetilde{\chi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\psi}, R)$ ya da $(\widetilde{\psi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, R)$ dir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. İspatı çelişki yöntemi ile elde edelim. Kabul edelim ki $r_1, r_2 \in R$ için
$\widetilde{\chi}(r_1) \supset \widetilde{\psi}(r_1)$ ve $\widetilde{\psi}(r_2) \supset \widetilde{\chi}(r_2)$ olsun.$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\chi}\widetilde{\cup}\widetilde{\psi}$ olur. Buradan
$\widetilde{\varphi}(r_1) = \widetilde{\chi}(r_1) \supset \widetilde{\psi}(r_1) \supseteq \emptyset$ ve $\widetilde{\varphi}(r_2) = \widetilde{\psi}(r_2) \supset \widetilde{\chi}(r_2) \supseteq \emptyset$ dir.
$\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi}, R) = \{\emptyset, A\}$ olduğundan $\widetilde{\varphi}(r_1) = A = \widetilde{\varphi}(r_2) = \widetilde{\chi}(r_1) = \widetilde{\psi}(r_2) = \widetilde{\varphi}(r_1 - r_2)$ elde edilir.

Önerme 2.5.9 ve bu durumlardan $\widetilde{\chi}(r_2) \supset A = \widetilde{\chi}(r_1)$ ve $\widetilde{\psi}(r_1) \supset A = \widetilde{\psi}(r_2)$ dir. Böylece $\widetilde{\chi}(r_1 - r_2) = \widetilde{\chi}(r_2)$ ve $\widetilde{\psi}(r_1 - r_2) = \widetilde{\psi}(r_1)$ dir. Bundan dolayı $\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) = \widetilde{\chi}(r_2) \cup \widetilde{\psi}(r_1) \subset A$ elde edilir.

Teorem 2.5.11. $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\psi}, H)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek halka olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R) \wedge (\widetilde{\psi}, H)$ da U üzerinde bir kesişimsel esnek halkadır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $\forall (r_1, r_2), (h_1, h_2) \in R \times H$ için

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}((r_1,h_1)-(r_2,h_2)) &= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_1-r_2,h_1-h_2)\\
&= \widetilde{\varphi}(r_1-r_2) \cap \widetilde{\psi}(h_1-h_2)\\
&\supseteq (\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)) \cap (\widetilde{\psi}(h_1) \cap \widetilde{\psi}(h_2))\\
&= (\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\psi}(h_1)) \cap (\widetilde{\varphi}(r_2) \cap \widetilde{\psi}(h_2))\\
&= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_1,h_1) \cap \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_2,h_2)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}((r_1,r_2)(h_1,h_2)) &= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_1r_2,h_1h_2)\\
&= \widetilde{\varphi}(r_1r_2) \cap \widetilde{\psi}(h_1h_2)\\
&\supseteq (\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)) \cap (\widetilde{\psi}(h_1) \cap \widetilde{\psi}(h_2))\\
&= (\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\psi}(h_1)) \cap (\widetilde{\varphi}(r_2) \cap \widetilde{\psi}(h_2))\\
&= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_1,h_1) \cap \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_2,h_2)
\end{aligned}
$$

Böylece $(\widetilde{\varphi}, R) \wedge (\widetilde{\psi}, H)$ da U üzerinde bir kesişimsel esnek halkadır.

Teorem 2.5.12. $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\psi}, H)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek ideal olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R) \wedge (\widetilde{\psi}, H)$ de U üzerinde bir kesişimsel esnek idealdir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $\forall (r_1,r_2),(h_2,h_2) \in R \times H$ için

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}((r_1,h_1)(r_2,h_2)) &= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_1r_2,h_1h_2)\\
&= \widetilde{\varphi}(r_1r_2) \cap \widetilde{\psi}(h_1h_2)\\
&\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\psi}(h_1)\\
&= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_1,h_1)
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}((r_1, r_2)(h_2, h_2)) &= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_1 r_2, h_1 h_2) \\
&= \widetilde{\varphi}(r_1 r_2) \cap \widetilde{\psi}(h_1 h_2) \\
&\supseteq \widetilde{\varphi}(r_2) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) \\
&= \widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi}(r_2, h_2)
\end{aligned}$$

Bundan dolayı $(\widetilde{\varphi}, R) \wedge (\widetilde{\psi}, H)$ da U üzerinde bir kesişimsel esnek ideal olur.

Teorem 2.5.13. $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek halka olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, R)$ de U üzerinde bir kesişimsel esnek halkadır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $\forall r_1, r_2 \in R$ için

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1 - r_2) &= \widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_1 - r_2) \\
&\supseteq (\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)) \cap (\widetilde{\chi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \\
&= (\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_1)) \cap (\widetilde{\varphi}(r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \\
&= (\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1) \cap (\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1.r_2) &= \widetilde{\varphi}(r_1.r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_1.r_2) \\
&\supseteq (\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)) \cap (\widetilde{\chi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \\
&= (\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_1)) \cap (\widetilde{\varphi}(r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \\
&= (\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1) \cap (\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_2)
\end{aligned}$$

Bundan dolayı $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, R)$ de U üzerinde bir kesişimsel esnek halkadır.

Teorem 2.5.14. $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek ideal olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, R)$ de U üzerinde bir kesişimsel esnek idealdir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. Teorem 2.5.13 den $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek halka ise $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, R)$ da U üzerinde bir kesişimsel esnek halka olduğunu biliyoruz. $\forall r_1, r_2 \in R$ için

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1r_2) &= \widetilde{\varphi}(r_1r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_1r_2)\\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_1)\\ &= (\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1r_2) &= \widetilde{\varphi}(r_1r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_1r_2)\\ &\supseteq (\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2)) \cap (\widetilde{\chi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_2))\\ &= \widetilde{\varphi}(r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_2)\\ &= \widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi}(r_2)\end{aligned}$$

Böylece $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, R)$ de U üzerinde bir kesişimsel esnek idealdir.

Tanım 2.5.15. R bir halka ve H, R nin bir alt halkası olsun. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka ve $(\widetilde{\chi}, R)$, $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin U üzerinde bir esnek alt kümesi olsun. Eğer $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka ise $(\widetilde{\chi}, R)$,$(\widetilde{\varphi}, R)$ nin U üzerinde bir kesişimsel esnek alt halkasıdır denir (Çıtak ve Çağman, 2015).

Örnek 2.5.16. $U = S_3$ evrensel küme, $R = Z_4$ ve $H = \{1, 2, 3\}$ parametreler kümesi olsun. $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin $U = S_3$ üzerindeki bir kesişimsel esnek halkası

$\widetilde{\varphi}(0) = S_3$

$\widetilde{\varphi}(1) = \{(1), (12), (123), (132)\}$

$\widetilde{\varphi}(2) = \{(12), (13), (123)\}$

$\widetilde{\varphi}(3) = \{(12), (23), (123)\}$

$\widetilde{\chi}$ nin $U = S_3$ üzerindeki bir esnek kümesi

$\widetilde{\chi}(1) = \{(1), (12), (13), (132)\}$

$\widetilde{\chi}(2) = \{(12), (13)\}$

$\widetilde{\chi}(3) = \{(12), (13)\}$ ile tanımlansın. Buradan $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin bir kesişimsel esnek alt halkasıdır.

Teorem 2.5.17. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka ve $(\widetilde{\psi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin iki kesişimsel esnek alt halkası olsun. Bu durumda $(\widetilde{\psi}, R)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, R)$ U üzerinde $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin bir kesişimsel esnek alt halkasıdır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $r_1, r_2 \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(\widetilde{\psi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1 - r_2) &= \widetilde{\psi}(r_1 - r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_1 - r_2) \\ &\supseteq (\widetilde{\psi}(r_1) \cap \widetilde{\psi}(r_2)) \cap (\widetilde{\chi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \\ &= (\widetilde{\psi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_1)) \cap (\widetilde{\psi}(r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \\ &= (\widetilde{\psi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1) \cap (\widetilde{\psi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\widetilde{\psi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1 r_2) &= \widetilde{\psi}(r_1 r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_1 r_2) \\ &\supseteq (\widetilde{\psi}(r_1) \cap \widetilde{\psi}(r_2)) \cap (\widetilde{\chi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \\ &= (\widetilde{\psi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_1)) \cap (\widetilde{\psi}(r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \\ &= (\widetilde{\psi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1) \cap (\widetilde{\psi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_2)\end{aligned}$$

Böylece $(\widetilde{\psi}, R)\widetilde{\cap}(\widetilde{\chi}, R)$ de U üzerinde $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin bir kesişimsel esnek alt halkası olur.

Tanım 2.5.18. R bir halka ve $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, U iki kesişimsel esnek halka olsun. $(\widetilde{\varphi}, R)\mp(\widetilde{\chi}, R), -(\widetilde{\varphi}, R), (\widetilde{\varphi}, R).(\widetilde{\chi}, R)$ ifadelerini sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın.
$\forall r_1 \in R$ için
$\widetilde{\varphi}(r_1) \mp \widetilde{\chi}(r_1) = \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_3) : r_2, r_3 \in R, r_2 \mp r_3 = r_1\}$

$-\widetilde{\varphi}(r_1) = \widetilde{\varphi}(r_1)$

$(\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi})(r_1) = \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_3) : r_2, r_3 \in R, r_2 r_3 = r_1\}$

$(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$ için toplam, fark ve çarpım sırasıyla $\widetilde{\varphi} + \widetilde{\chi}, \widetilde{\varphi} - \widetilde{\chi}, \widetilde{\varphi}\widetilde{\chi}$ ile ve $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin negatifi $-(\widetilde{\varphi}, R)$ ile ifade edilir (Çıtak ve Çağman, 2015).

Teorem 2.5.19. R bir halka ve $(\widetilde{\varphi}, R), (\widetilde{\chi}, R), (\widetilde{\psi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halkalar olsun. Bu durumda $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\chi} + \widetilde{\psi}) \subseteq (\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi}) + (\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi})$ dir.

İspat. $h_2h_3 = h_1$ olacak şekilde $h_1, h_2, h_3 \in R$ alalım.
$\widetilde{\varphi}(\widetilde{\chi} + \widetilde{\psi})(h_1) = \cup\{\widetilde{\varphi}(h_2) \cap (\widetilde{\chi} + \widetilde{\psi})(h_3) : h_2, h_3 \in R, h_2, h_3 = h_1\}$
ve

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(h_2) \cap (\widetilde{\chi} + \widetilde{\psi})(h_3) &= \widetilde{\varphi}(h_2) \cap \{\widetilde{\chi}(r_2) \cap \widetilde{\psi}(r_3) : r_2, r_3 \in R, r_2 + r_3 = h_3\} \\
&= \bigcup\{(\widetilde{\varphi}(h_2) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \cap (\widetilde{\varphi}(h_2) \cap \widetilde{\psi}(r_3)) : r_2, r_3 \in R, r_2 + r_3 = h_3\} \\
&= \bigcup\{(\widetilde{\varphi}(h_2) \cap \widetilde{\chi}(r_2)) \cap (\widetilde{\varphi}(h_2) \cap \widetilde{\psi}(r_3)) : r_2, r_3 \in R, h_2r_2 + h_2r_3 = h_2h_3\} \\
&\subseteq \bigcup\{(\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi}(h_2r_2)) \cap (\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}(h_2r_3) \cap : r_2, r_3 \in R, h_2r_2 + h_2r_3 = h_2h_3\} \\
&= (\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi} + \widetilde{\varphi}\widetilde{\psi})(h_1)
\end{aligned}$$

Böylece $\forall r \in R$ için $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\chi} + \widetilde{\psi})(r) \subseteq (\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi} + \widetilde{\varphi}\widetilde{\psi})(r)$ elde edilir. Dolayısıyla $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\chi} + \widetilde{\psi}) \subseteq (\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi}) + (\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi})$ olur.

Teorem 2.5.20. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sağ ideal ve $(\widetilde{\chi}, R)$ de bir kesişimsel esnek sol ideal olsun. Bu durumda $\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi} \widetilde{\subseteq} \widetilde{\varphi} \widetilde{\cap} \widetilde{\chi}$ dir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $(\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi})(r_1) = \emptyset$ ise $\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi} \widetilde{\subseteq} \widetilde{\varphi} \widetilde{\cap} \widetilde{\chi}$ olduğu açıktır. $(\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi})(r_1) \neq \emptyset$ ve $(\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi})(r_1) = \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_2) \cap \widetilde{\chi}(r_3) : r_2, r_3 \in R, r_1 = r_2r_3\}$ olsun.
U üzerinde $(\widetilde{\varphi}, R)$ kesişimsel esnek sağ ideal ve $(\widetilde{\chi}, R)$ kesişimsel esnek sol ideal olduğundan

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(r_1) &= \widetilde{\varphi}(r_2r_3) \\
&\supseteq \widetilde{\varphi}(r_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\widetilde{\chi}(r_1) &= \widetilde{\chi}(r_2r_3) \\
&\supseteq \widetilde{\chi}(r_3)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi})(r_1) &= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_2)\cap\widetilde{\chi}(r_3) \mid r_2, r_3 \in R, r_1 = r_2r_3\}\\ &\subseteq \widetilde{\varphi}(r_1)\cap\widetilde{\chi}(r_1)\\ &= (\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi})(r_1)\end{aligned}$$

olur. Böylece $\widetilde{\varphi}\widetilde{\chi}\widetilde{\subseteq}\widetilde{\varphi}\widetilde{\cap}\widetilde{\chi}$ elde edilir.

Tanım 2.5.21. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halka olsun. $(\widetilde{\varphi}, R)$ kümesinin çekirdeği $(\widetilde{\varphi}, R_*) = \{r \in R : \widetilde{\varphi}(r) = \widetilde{\varphi}(O_R)\}$ olarak tanımlanır (Çıtak ve Çağman, 2015).

Teorem 2.5.22. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek halka olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R_*)$, R nin alt halkasıdır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $O_R \in (\widetilde{\varphi}, R_*) \subseteq R$ olduğu açıktır. $r_1, r_2 \in (\widetilde{\varphi}, R_*)$ olsun. Bu durumda

$\widetilde{\varphi}(r_1) = \widetilde{\varphi}(r_2) = \widetilde{\varphi}(O_R)$ olur. $r_1 - r_2, r_1r_2 \in (\widetilde{\varphi}, R_*)$ yi sırasıyla

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1)\cap\widetilde{\varphi}(r_2)\\ &= \widetilde{\varphi}(O_R)\cap\widetilde{\varphi}(O_R)\\ &= \widetilde{\varphi}(O_R)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(r_1r_2) &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1)\cap\widetilde{\varphi}(r_2)\\ &= \widetilde{\varphi}(O_R)\cap\widetilde{\varphi}(O_R)\\ &= \widetilde{\varphi}(O_R)\end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı $(\widetilde{\varphi}, R_*)$, R nin alt halkasıdır.

Teorem 2.5.23. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka ve $A \subseteq \widetilde{\varphi}(O_R)$ olsun. Buradan $(\widetilde{\varphi}, R)^A$, R nin bir alt halkasıdır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $O_R \in (\widetilde{\varphi}, R)^A \subseteq R$ olduğu açıktır.$r_1, r_2 \in (\widetilde{\varphi}, R)^A$ için $\widetilde{\varphi}(r_1) \supseteq A$ ve $\widetilde{\varphi}(r_2) \supseteq A$. Buradan

$\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) \supseteq A$

ve

$\widetilde{\varphi}(r_1 r_2) \supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) \supseteq A$

Böylece $r_1 - r_2, r_1 r_2 \in (\widetilde{\varphi}, R)^A$ dır. Dolayısıyla $(\widetilde{\varphi}, R)^A$,$R$ nin bir alt halkasıdır.

Teorem 2.5.24. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka ve $f : R \longrightarrow H$ bir örten homomorfizma olsun. Buradan $f(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halkadır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $f : R \longrightarrow H$ bir örten homomorfizma olduğundan öyle $r_1, r_2 \in R$ vardır ki $\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1 = f(r_1)$ ve $h_2 = f(r_2)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
(f(\widetilde{\varphi}, R))(h_1 - h_2) &= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_3) : r_3 \in R, f(r_3) = h_1 - h_2\} \\
&= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1 - r_2) : r_1, r_2 \in R, f(r_1) = h_1, f(r_2) = h_2\} \\
&\supseteq \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) : r_1, r_2 \in R, f(r_1) = h_1, f(r_2) = h_2\} \\
&= (\bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1) : r_1 \in R, f(r_1) = h_1\}) \cap (\bigcup f(r_2) : y \in R, f(r_2) = h_2\}) \\
&= (f(\widetilde{\varphi}, R))(h_1) \cap (f(\widetilde{\varphi}, R))(h_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(f(\widetilde{\varphi}, R))(h_1 h_2) &= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_3) : r_3 \in R, f(r_3) = h_1 h_2\} \\
&= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1 . r_2) : r_1, r_2 \in R, f(r_1) = h_1, f(r_2) = h_2\} \\
&\supseteq \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) : r_1, r_2 \in R, f(r_1) = h_1, f(r_2) = h_2\} \\
&= (\bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1) : r_1 \in R, f(r_1) = h_1\}) \cap (\bigcup\{f(r_2) : r_2 \in R, f(r_2) = h_2\}) \\
&= (f(\widetilde{\varphi}, R))(h_1) \cap (f(\widetilde{\varphi}, R))(h_2)
\end{aligned}$$

Buradan $f(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halkadır.

Teorem 2.5.25. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek ideal ve $f : R \longrightarrow H$ bir örten homomorfizma olsun. Buradan $f(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek idealdir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. Teorem 2.5.24 den gösterilen şartlar altında $f(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki bazı $r_1, r_2 \in R$ için $h_1 = f(r_1)$ ve $h_2 = f(r_2)$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in H$ var olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
(f(\widetilde{\varphi}, R))(h_1, h_2) &= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_3) : r_3 \in R, f(r_3) = h_1 h_2\} \\
&= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1.r_2) : r_1, r_2 \in R, f(r_1) = h_1, f(r_2) = h_2\} \\
&\supseteq \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) : r_1, r_2 \in R, f(r_1) = h_1, f(r_2) = h_2\} \\
&= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1) : r_1 \in R, f(r_1) = h_1\} \\
&= (f(\widetilde{\varphi}))(h_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(f(\widetilde{\varphi}, R))(h_1 h_2) &= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_3) : r_3 \in R, f(r_3) = h_1 h_2\} \\
&= \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1.r_2) : r_1, r_2 \in R, f(r_1) = h_1, f(r_2) = h_2\} \\
&\supseteq \bigcup\{\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\varphi}(r_2) : r_1, r_2 \in R, f(r_1) = h_1, f(r_2) = h_2\} \\
&= \bigcup\{f(r_2) : r_2 \in R, f(r_2) = h_2\} \\
&= (f(\widetilde{\varphi}, R))(h_2)
\end{aligned}$$

Buradan $f(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek idealdir.

Teorem 2.5.26. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka ve $f : R \longrightarrow H$ bir homomorfizma olsun. Buradan $f^{-1}(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halkadır (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. $\forall r_1, r_2 \in R$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(\widetilde{\varphi})(r_1 - r_2) &= \widetilde{\varphi}(f(r_1 - r_2)) \\ &= \widetilde{\varphi}(f(r_1) - f(r_2)) \\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(f(r_1)) \cap \widetilde{\varphi}(f(r_2)) \\ &= f^{-1}(\widetilde{\varphi}(r_1) \cap f^{-1}(\widetilde{\varphi})(r_2)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f^{-1}(\widetilde{\varphi})(r_1 r_2) &= \widetilde{\varphi}(f(r_1 r_2)) \\ &= \widetilde{\varphi}(f(r_1) f(r_2)) \\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(f(r_1)) \cap \widetilde{\varphi}(f(r_2)) \\ &= f^{-1}(\widetilde{\varphi}(r_1)) \cap f^{-1}(\widetilde{\varphi}(r_2)) \end{aligned}$$

Buradan $f^{-1}(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halkadır.

Teorem 2.5.27. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek ideal ve $f : R \longrightarrow H$ bir homomorfizma olsun. Buradan $f^{-1}(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek idealdir (Çıtak ve Çağman, 2015).

İspat. Teorem 2.5.26 dan gösterilen şartlar altında $f^{-1}(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek halka olduğunu biliyoruz. Buradan $\forall r_1, r_2 \in R$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(\widetilde{\varphi})(r_1 r_2) &= \widetilde{\varphi}(f(r_1)) \\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(r_1) \\ &= f^{-1}(\widetilde{\varphi})(r_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f^{-1}(\widetilde{\varphi})(r_1 r_2) &= \widetilde{\varphi}(f(r_1 r_2)) \\ &\supseteq \widetilde{\varphi}(f(r_2)) \\ &= f^{-1}(\widetilde{\varphi})(r_2) \end{aligned}$$

Buradan $f^{-1}(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek idealdir.

Tanım 2.5.28. P, R halkasının bir ideali olsun. $\forall r \in R$ için $\lambda_P : R \longrightarrow P(U)$ olmak üzere

$$\lambda_P(\mathrm{r}) = \begin{cases} U, & r \in P, \\ \emptyset, & r \notin P. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona esnek karakteristik fonksiyon denir.

Teorem 2.5.29. P, R halkasının bir ideali olsun. Bu durumda λ_p karakteristik fonksiyonu bir kesişimsel esnek halkadır.

İspat. Öncelikle $\forall r_1, r_2 \in P$ için $\lambda_P(r_1 - r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ olduğunu gösterelim. $\forall r_1, r_2 \in P$ için P ideal olduğundan $r_1 - r_2 \in P$ olur. Bu durumda $\lambda_P(r_1) = U$ ve $\lambda_P(r_2) = U$ ve $\lambda_P(r_1 - r_2) = U$ olur. Böylece $\lambda_P(r_1 - r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ elde edilir.
$\forall r_1, r_2 \notin P$ için $\lambda_P(r_1) = \emptyset$ ve $\lambda_P(r_2) = \emptyset$ olur. Buradan $\lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2) = \emptyset$ olacağından $\lambda_P(r_1 - r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ elde edilir.
$\forall r_1 \in P, r_2 \notin P$, için $\lambda_P(r_1) = U$ ve $\lambda_P(r_2) = \emptyset$ olur. Buradan $\lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2) = \emptyset$ olacağından $\lambda_P(r_1 - r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ elde edilir.

Şimdi $\forall r_1, r_2 \in R$ için $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ olduğunu gösterelim.

$\forall r_1, r_2 \in P$ için P ideal olduğundan $r_1 \cdot r_2 \in P$ olur. O halde $\lambda_P(r_1) = U$ ve $\lambda_P(r_2) = U$ ve $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) = U$ olur. Böylece $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ elde edilir.
$\forall r_1, r_2 \notin P$ için P ideal olduğundan $r_1 \cdot r_2 \in P$ ve $r_1 \cdot r_2 \in P$ olur. Bu durumda

$\lambda_P(r_1 \cdot r_2) = U$ ve $\lambda_P(r_1) = U$ ve $\lambda_P(r_2) = \emptyset$ olur. Böylece $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ elde edilir.

Teorem 2.5.30. P, R halkasının bir ideali olsun. Bu durumda λ_p karakteristik fonksiyonu bir kesişimsel esnek idealdir.

İspat. Öncelikle $\forall r_1, r_2 \in P$ için $\lambda_P(r_1 - r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ olduğunu gösterelim. $\forall r_1, r_2 \in P$ için P ideal olduğundan $r_1 - r_2 \in P$ olur. Bu durumda $\lambda_P(r_1) = U$ ve $\lambda_P(r_2) = U$ ve $\lambda_P(r_1 - r_2) = U$ olur. Böylece $\lambda_P(r_1 - r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ elde edilir.

$\forall r_1, r_2 \notin P$ için $\lambda_P(r_1) = \emptyset$ ve $\lambda_P(r_2) = \emptyset$ olur. Buradan $\lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2) = \emptyset$ olacağından $\lambda_P(r_1 - r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ elde edilir.

$\forall r_1 \in P, r_2 \notin P$, için $\lambda_P(r_1) = U$ ve $\lambda_P(r_2) = \emptyset$ olur. Buradan $\lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2) = \emptyset$ olacağından $\lambda_P(r_1 - r_2) \supseteq \lambda_P(r_1) \cap \lambda_P(r_2)$ elde edilir.

Şimdi $\forall r_1, r_2 \in R$ için $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) \supseteq \lambda_P(r_1)$ ve $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) \supseteq \lambda_P(r_2)$ olduğunu gösterelim.

$\forall r_1, r_2 \in P$ için P ideal olduğundan $r_1 \cdot r_2 \in P$ olur. O halde $\lambda_P(r_1) = U$ ve $\lambda_P(r_2) = U$ ve $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) = U$ olur. Böylece $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) \supseteq \lambda_P(r_1)$ ve $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) \supseteq \lambda_P(r_2)$ elde edilir.

$\forall r_1, r_2 \notin P$ için P ideal olduğundan $r_1 \cdot r_2 \in P$ ve $r_1 \cdot r_2 \in P$ olur. Bu durumda $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) = U$ ve $\lambda_P(r_1) = U$ ve $\lambda_P(r_2) = \emptyset$ olur. Böylece $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) \supseteq \lambda_P(r_1)$ ve $\lambda_P(r_1 \cdot r_2) \supseteq \lambda_P(r_2)$ elde edilir.

3. BULGULAR

Bu bölümde kesişimsel esnek halkalar üzerinde asal ve maksimal idealler tanımlanacaktır ve bunlarla ilgili bazı temel teoremler ispatlanacaktır.

3.1. Kesişimsel Esnek Halkalar Üzerinde Asal İdealler

Bu bölüm boyunca R bir halka olarak alınacaktır.

Tanım 3.1.1. $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. $\forall r_1, r_2 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_1) \cap \widetilde{\chi}(r_2) \neq \emptyset$ ise $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$ ye ortak esnek küme denir.

Tanım 3.1.2. R bir halka ve $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek ideal olsun. $(\widetilde{\chi}, R)$ ve $(\widetilde{\psi}, R)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek ideal olmak üzere $(\widetilde{\chi}, R)(\widetilde{\psi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\varphi}, R)$ iken $(\widetilde{\chi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\varphi}, R)$ ya da $(\widetilde{\psi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\varphi}, R)$ ise $(\widetilde{\varphi}, R)$ ye U üzerinde bir kesişimsel esnek asal ideal denir.

Teorem 3.1.3. Eğer P, R halkasının bir asal ideali ise bu durumda λ_P karakteristik fonksiyonu bir kesişimsel esnek asal idealdir.

İspat. $(\widetilde{\chi}, R)(\widetilde{\psi}, R)\widetilde{\subseteq}\lambda_P$ ve $(\widetilde{\chi}, R)\widetilde{\nsubseteq}\lambda_P$, $(\widetilde{\psi}, R)\widetilde{\nsubseteq}\lambda_P$ olacak şekilde $(\widetilde{\chi}, R)$ ve $(\widetilde{\psi}, R)$, U üzerinde ortak kesişimsel esnek idealler olsun. Böylece $\widetilde{\chi}(r_1)\widetilde{\nsubseteq}\lambda_P(r_1)$, $\widetilde{\psi}(r_2)\widetilde{\nsubseteq}\lambda_p(r_2)$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. Buradan $\widetilde{\chi}(r_1) \neq \emptyset$ ve $\widetilde{\psi}(r_2) \neq \emptyset$ olur. Aynı zamanda $\lambda_P(r_1) \neq U$ ve $\lambda_P(r_2) \neq U$ olur. Bundan dolayı $\lambda_P(r_1) = \emptyset$ ve $\lambda_P(r_2) = \emptyset$ olur. Böylece $r_1 \notin P$ ve $r_2 \notin P$ dir. P, R halkasının bir asal ideali olduğundan $r_1 r_2 \notin P$ ve $\lambda_p(r_1 r_2) = \emptyset$ dir. $(\widetilde{\chi}, R)(\widetilde{\psi}, R)\widetilde{\subseteq}\lambda_p$ olduğundan $\widetilde{\chi}\widetilde{\psi}(r_1 r_2) = \emptyset$ olur.
$r_3 = r_1 r_2$ olsun.

$$\widetilde{\chi}\widetilde{\psi}(r_3) = \bigcup_{r_3 = r_1 r_2}(\widetilde{\chi}(r_1) \cap \widetilde{\psi}(r_2)) \supseteq \widetilde{\chi}(r_1) \cap \widetilde{\psi}(r_2)$$

elde edilir. $(\widetilde{\chi}, R)$ ve $(\widetilde{\psi}, R)$, U üzerinde ortak kesişimsel esnek idealler olduğundan $\widetilde{\chi}(r_1) \cap \widetilde{\psi}(r_2) \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece $\widetilde{\chi}\widetilde{\psi}(r_1 r_2) \neq \emptyset$ olur. Fakat bu bir çelişkidir. Dolayısıyla λ_P bir kesişimsel esnek asal idealdir.

Teorem 3.1.4. P, R halkasının bir ideali olsun. Eğer λ_P, U üzerinde bir kesişimsel esnek asal ideal ise bu durumda P bir asal idealdir.

İspat. λ_P, U üzerinde bir kesişimsel esnek asal ideal olsun. A ve B, $AB \subseteq P$ olacak şekilde R nin iki ideali olsunlar. Eğer $r_1 \in R$ için $\lambda_A\lambda_B = \emptyset$ ise o zaman $(\lambda_A\lambda_B)(r_1) \subseteq \lambda_P(r_1)$ olur. Kabul edelim ki $(\lambda_A\lambda_B)(r_1) \neq \emptyset$ olsun. Buradan

$$(\lambda_A\lambda_B)(r_1) = \bigcup_{r_1=r_2r_3}\{\lambda_A(r_2) \cap \lambda_B(r_3)\}$$

olur. $(\lambda_A\lambda_B)(r_1) \neq \emptyset$ olduğundan

$$\bigcup_{r_1=r_2r_3}\{\lambda_A(r_2) \cap \lambda_B(r_3)\} \neq \emptyset$$

olur. Buradan $r_1 = r_2r_3$ ve $\lambda_A(r_2) \neq \emptyset$, $\lambda_B(r_3) \neq \emptyset$ olacak şekilde $r_2, r_3 \in R$ vardır. Böylece $\lambda_A(r_2) = U$ ve $\lambda_B(r_3) = U$ olur ki bu da $r_2 \in A$ ve $r_3 \in B$ olmasını gerektirir. Buradan $r_1 = r_2r_3 \in AB \subseteq P$ olur. Bundan dolayı $\lambda_P(r_1) = U$ olur. Böylece $\forall r_1 \in R$ için $(\lambda_A\lambda_B)(r_1) \subseteq \lambda_P(r_1)$ olur. Buradan $\lambda_A\lambda_B \widetilde{\subseteq} \lambda_P$ olur. λ_P, U üzerinde bir kesişimsel esnek asal ideal olduğundan $\lambda_A \widetilde{\subseteq} \lambda_P$ ya da $\lambda_B \widetilde{\subseteq} \lambda_P$ olur. Buradan $\forall r_1 \in R$ için $\lambda_A(r_1) \subseteq \lambda_P(r_1)$ ya da $\lambda_B(r_1) \subseteq \lambda_P(r_1)$ olur. Böylece eğer $r_1 \in A$ ise $\lambda_A(r_1) = U$ ve buradan $\lambda_P(r_1) = U$ dur. Bu yüzden $r_1 \in P$ olur.
Benzer şekilde eğer $r_1 \in B$ ise $r_1 \in P$ olur. Dolayısıyla $A \subseteq P$ ya da $B \subseteq P$ olur. Böylece P, R nin bir asal idealdir.

3.2. Kesişimsel Esnek Halkalar Üzerinde Maksimal İdealler

Tanım 3.2.1. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir esnek küme ve $\emptyset \subseteq P \subseteq U$ olsun.
$(\widetilde{\varphi}, R)^P = \{r \in R : \widetilde{\varphi}(r) \supseteq P\}$ kümesi seviye kümesi olarak adlandırılır.

$(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sol(sağ) ideal olsun. Bu durumda herhangi $\emptyset \subseteq P \subseteq \widetilde{\varphi}(O_R)$ için $(\widetilde{\varphi}, R)^P$, U üzerinde bir sol(sağ) ideal olur. Buradan $(\widetilde{\varphi}, R)^P$, U üzerinde (φ, R) ye göre seviye sol(sağ) ideal olarak adlandırılır. Eğer $P_1, P_2 \in Im(\widetilde{\varphi}, R)$ ise bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R)^{P_1} = (\widetilde{\varphi}, R)^{P_2}$ dir. Fakat $P_1 = P_2$ olur

Not 3.2.2. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $(\widetilde{\varphi}, R_*)$ kümesi,

$$(\widetilde{\varphi}, R_*) = \{r \in R : \widetilde{\varphi}(r) = \widetilde{\varphi}(O_R)\}$$

ile tanımlansın. Eğer $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek sol(sağ) ideal ise $(\widetilde{\varphi}, R_*)$ da R nin bir sol(sağ) idealdir.

Lemma 3.2.3. $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde iki kesişimsel esnek ideal olsunlar. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R_*) \cap (\widetilde{\chi}, R_*) \subseteq ((\widetilde{\varphi}, R) \cap (\widetilde{\chi}, R))_*$ olur.

İspat. $\forall r \in R$ için $r \in (\widetilde{\varphi}, R_*) \cap (\widetilde{\chi}, R_*)$ olsun. Bu durumda $\widetilde{\varphi}(r) = \widetilde{\varphi}(O_R)$ ve $\widetilde{\chi}(r) = \widetilde{\chi}(O_R)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi} \cap \widetilde{\chi})(r) &= \widetilde{\varphi}(r) \cap \widetilde{\chi}(r) \\ &= \widetilde{\varphi}(O_R) \cap \widetilde{\chi}(O_R) \\ &= (\widetilde{\varphi} \cap \widetilde{\chi})(O_R)\end{aligned}$$

olur. Böylece $r \in ((\widetilde{\varphi}, R) \cap (\widetilde{\chi}, R))_*$ olur. Buradan

$$(\widetilde{\varphi}, R_*) \cap (\widetilde{\chi}, R_*) \subseteq ((\widetilde{\varphi}, R) \cap (\widetilde{\chi}, R))_*$$

olur.

Genelde bu lemmada eşitlik geçerli olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2.4. R bir halka olsun. $\forall r \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r) = \emptyset$ ve eğer $r \neq O_R$ ise $\widetilde{\chi}(r) = \emptyset$, $r = O_R$ ise $\widetilde{\chi}(r) = U$ olacak şekilde $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde kesişimsel esnek ideallerdir. Buradan $(\widetilde{\varphi}, R_*) \cap (\widetilde{\chi}, R_*) = R \cap \{O_R\} = \{O_R\}$ ve $((\widetilde{\varphi}, R) \cap (\widetilde{\chi}, R))_* = R$ olur.

Lemma 3.2.5. $(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $(\widetilde{\chi}, R)$, $\widetilde{\varphi}(O_R) = U = \widetilde{\chi}(O_R)$ olacak şekilde U üzerinde iki kesişimsel esnek ideal olsunlar. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R_*) \cap (\widetilde{\chi}, R_*) = ((\widetilde{\varphi}, R) \cap (\widetilde{\chi}, R))_*$ olur.

İspat. $r \in ((\widetilde{\varphi}, R) \cap (\widetilde{\chi}, R))_*$ olsun. Bu durumda

$$(\widetilde{\varphi} \cap \widetilde{\chi})(r) = (\widetilde{\varphi} \cap \widetilde{\chi})(O_R)$$

olur. Böylece

$$\widetilde{\varphi}(r) \cap \widetilde{\chi}(r) = \widetilde{\varphi}(O_R) \cap \widetilde{\chi}(O_R) = U$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\widetilde{\varphi}(r) = U = \widetilde{\chi}(r)$$

olur. Buradan

$$r \in (\widetilde{\varphi}, R_*) \cap (\widetilde{\chi}, R_*)$$

elde edilir. Böylece

$$((\widetilde{\varphi}, R) \cap (\widetilde{\chi}, R))_* \subseteq (\widetilde{\varphi}, R_*) \cap (\widetilde{\chi}, R_*)$$

olur. Ayrıca Lemma 3.2.3 den

$$(\widetilde{\varphi}, R_*) \cap (\widetilde{\chi}, R_*) \subseteq ((\widetilde{\varphi}, R) \cap (\widetilde{\chi}, R))_*$$

olduğundan

$$(\widetilde{\varphi}, R_*) \cap (\widetilde{\chi}, R_*) = ((\widetilde{\varphi}, R) \cap (\widetilde{\chi}, R))_*$$

olur.

Teorem 3.2.6. $(\widetilde{\varphi}, R)$, bazı $r_1 \in R$ için $\widetilde{\varphi}(r_1) \neq U$ olacak şekilde U üzerinde bir kesişimsel esnek sol(sağ) ideal olsun. Bu durumda bazı $r_2 \in R$ için $\widetilde{\chi}(r_2) \neq U$ ve $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, R)$ olacak şekilde U üzerinde bir $(\widetilde{\chi}, R)$ kesişimsel esnek sol(sağ) ideali vardır.

İspat. 1. Durum
$\widetilde{\varphi}(O_R) \neq U$ ve $\widetilde{\varphi}(O_R) \subset P \subset U$ olsun. $\forall r \in R$ için $\widetilde{\chi}(r) = P$ olacak şekilde $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir esnek kümesi olsun. Buradan $\forall r \in R$ için $\widetilde{\chi}(r) \neq U$ ve $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, R)$ olacak şekilde $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sol idealdir.
2. Durum
$\widetilde{\varphi}(O_R) = U$ olsun. Hipotezden $\widetilde{\varphi}(r) \neq U$ olacak şekilde $r \in R$ vardır.
$\widetilde{\varphi}(r) \subset P \subset \widetilde{\varphi}(O_R)$ olsun. Böylece $(\widetilde{\varphi}, R)^P$, R nin sol idealidir. $u \in (\widetilde{\varphi}, R)^P$ ise $\widetilde{\chi}(u) = U$ ve $u \notin (\widetilde{\varphi}, R)^P$ ise $\widetilde{\chi}(u) = P$ olacak şekilde $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. Buradan $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sol idealdir. $r \notin (\widetilde{\varphi}, R)^P$ olduğundan $\widetilde{\chi}(r) = P \neq U$ olur. Ayrıca $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, R)$ olur.

Tanım 3.2.7. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek ideal olsun. Eğer $\widetilde{\varphi}$ sabit değil ve U üzerindeki herhangi $(\widetilde{\chi}, R)$ kesişimsel esnek sol(sağ) ideali için $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, R)$ iken ya $(\widetilde{\varphi}, R_*) = (\widetilde{\chi}, R_*)$ ya da $(\widetilde{\chi}, R) = \lambda_R$ şartları sağlanıyorsa $(\widetilde{\varphi}, R)$ ye U üzerinde bir kesişimsel esnek maksimal sol(sağ) ideal denir.

Teorem 3.2.8. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek maksimal sol(sağ) ideal olsun. Bu durumda $\widetilde{\varphi}(O_R) = U$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\widetilde{\varphi}(O_R) \neq U$ olsun. $\widetilde{\varphi}(O_R) \subset P \subset U$ ve $\forall r \in R$ için $\widetilde{\chi}(r) = P$ olacak şekilde U üzerinde bir esnek küme $(\widetilde{\chi}, R)$ olsun. Buradan $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek ideal olur. Buradan $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\subset}(\widetilde{\chi}, R)$, $(\widetilde{\chi}, R_*) = R$ ve $(\widetilde{\chi}, R) \neq \lambda_R$ dir. Böylece $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\subset}(\widetilde{\chi}, R)$ fakat $(\widetilde{\varphi}, R_*) \neq (\widetilde{\chi}, R_*)$ dir. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek maksimal ideal olduğundan $(\widetilde{\chi}, R) \neq \lambda_R$ olur. Bu da $(\widetilde{\varphi}, R)$ nin bir kesişimsel esnek maksimal sol ideal olması ile çelişir. Dolayısıyla $\widetilde{\varphi}(O_R) = U$ olur.

Teorem 3.2.9. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek maksimal sol(sağ) ideal olsun. Bu durumda $|Im(\widetilde{\varphi}, R)| = 2$ dir.

İspat. Teorem 3.2.8 den $\widetilde{\varphi}(O_R) = U$ olduğunu biliyoruz. $\emptyset \subseteq P \subset U$ için eğer $P \in Im(\widetilde{\varphi}, R)$ ise bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R)^P = R$ olduğunu ispatlayacağız. $\emptyset \subseteq P \subset U$ ve $P \in Im(\widetilde{\varphi}, R)$ olsun. Şimdi $(\widetilde{\varphi}, R)^P$, R nin bir sol idealidir ve $P \subset U$ olduğundan $(\widetilde{\varphi}, R_*) \subset (\widetilde{\varphi}, R)^P$ olur. $r \in (\widetilde{\varphi}, R)^P$ ise $\widetilde{\chi}(r) = U$ ve $r \notin (\widetilde{\varphi}, R)^P$ ise $\widetilde{\chi}(r) = P$ olacak şekilde $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. Buradan $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sol idealdir ve $(\widetilde{\chi}, R_*) = (\widetilde{\varphi}, R)^P$ olur. Bundan dolayı $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, R)$ dir. $(\widetilde{\varphi}, R)$ bir kesişimsel esnek maksimal ideal ve $(\widetilde{\varphi}, R_*) \subset (\widetilde{\varphi}, R)^P = (\widetilde{\chi}, R_*)$ olduğundan $(\widetilde{\chi}, R) = \lambda_R$ elde edilir. Böylece $\forall r \in R$ için $\widetilde{\chi}(r) = U$ olur. Buradan $(\widetilde{\varphi}, R)^P = (\widetilde{\chi}, R_*) = R$ olur ki bu da bizim ispatımızdır. Şimdi $\forall P_1, P_2 \in Im(\widetilde{\varphi}, R)$, $\emptyset \subseteq P_1, P_2 \subset U$ için $(\widetilde{\varphi}, R)^{P_1} = R = (\widetilde{\varphi}, R)^{P_2}$ dir. Fakat $P_1 = P_2$ olur. Böylece $(\widetilde{\varphi}, R)$ iki değerlidir.

Teorem 3.2.10. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek maksimal sol(sağ) ideal olsun. Bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R_*)$, R nin bir maksimal sol(sağ) idealidir.

İspat. $(\widetilde{\varphi}, R)$ sabit olmadığından $(\widetilde{\varphi}, R_*) \neq R$ dir. Teorem 3.2.9 dan $(\widetilde{\varphi}, R)$ iki değerliydi. $\emptyset \subseteq P \subset U$ iken $Im(\widetilde{\varphi}, R) = \{P, U\}$ olsun. $(\widetilde{\varphi}, R_*) \subseteq M$ olacak şekilde M, R nin bir sol ideali olsun. $P \subset K \subset U$ olmak üzere $m \in M$ için $\widetilde{\chi}(m) = U$ ve $m \notin M$ için $\widetilde{\chi}(m) = K$ olacak şekilde $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. Buradan $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sol idealdir. Bundan dolayı $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, R)$ olur. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek maksimal sol ideal olduğundan $(\widetilde{\varphi}, R_*) = (\widetilde{\chi}, R_*)$ ya da $(\widetilde{\chi}, R) = \lambda_R$ dir. $(\widetilde{\chi}, R_*) = M$ olduğundan $(\widetilde{\varphi}, R_*) = (\widetilde{\chi}, R_*)$ ise $(\widetilde{\varphi}, R_*) = M$ olur. $(\widetilde{\chi}, R) = \lambda_R$ ise $M = R$ dir. Böylece $(\widetilde{\varphi}, R_*)$, R nin bir maksimal sol idealidir.

Lemma 3.2.11. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sol(sağ) ideal olsun. Eğer $(\widetilde{\varphi}, R_*)$, R nin bir maksimal sol(sağ) ideali ise $(\widetilde{\varphi}, R)$ iki değerlidir.

İspat. $(\widetilde{\varphi}, R_*)$, R nin bir maksimal sol ideali olduğundan $(\widetilde{\varphi}, R_*) \neq R$ dir. Böylece $\widetilde{\varphi}(r) \neq \widetilde{\varphi}(O_R)$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $(\widetilde{\varphi}, R)$ en az iki değerlidir. $\emptyset \subseteq P \subset \widetilde{\varphi}(O_R)$ ve $P \in Im(\widetilde{\varphi}, R)$ olsun. Buradan $(\widetilde{\varphi}, R)^P$, $(\widetilde{\varphi}, R_*) \subset (\widetilde{\varphi}, R)^P$ olacak şekilde R nin sol idealidir. $(\widetilde{\varphi}, R_*)$ maksimal sol ideal olduğundan $(\widetilde{\varphi}, R)^P = R$ dir. Böylece eğer $P_1, P_2 \in Im(\widetilde{\varphi}, R)$ ve $P_1 \neq \widetilde{\varphi}(O_R)$, $P_2 \neq \widetilde{\varphi}(O_R)$ ise $(\widetilde{\varphi}, R)^{P_1} = R = (\widetilde{\varphi}, R)^{P_2}$ dir. Fakat $P_1 = P_2$ olur. Böylece $(\widetilde{\varphi}, R)$ iki değerlidir.

Teorem 3.2.12. $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sol(sağ) ideal olsun. Eğer $(\widetilde{\varphi}, R_*)$, R nin bir maksimal sol(sağ) ideali ve $(\widetilde{\varphi}, R)(O_R) = U$ ise bu durumda $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek maksimal sol(sağ) idealdir.

İspat. Lemma 3.2.11 den $(\widetilde{\varphi}, R)$ iki değerli idi. $\emptyset \subseteq P \subset U$ olmak üzere $Im(\widetilde{\varphi}, R) = \{P, U\}$ olsun. $(\widetilde{\varphi}, R)\widetilde{\subseteq}(\widetilde{\chi}, R)$ olacak şekilde $(\widetilde{\chi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek sol ideal olsun. Buradan $\widetilde{\chi}(O_R) = U$ dur. $r \in (\widetilde{\varphi}, R_*)$ olsun. Buradan

$$U = \widetilde{\varphi}(O_R) = \widetilde{\varphi}(r) \subseteq \widetilde{\chi}(r)$$

dir. Böylece

$$\widetilde{\chi}(r) = U = \widetilde{\chi}(O_R)$$

olur. Bundan dolayı $r \in (\widetilde{\chi}, R_*)$ dır. Buradan $(\widetilde{\varphi}, R_*) \subseteq (\widetilde{\chi}, R_*)$ dır. $(\widetilde{\varphi}, R_*)$, R nin bir maksimal sol ideali olduğundan $(\widetilde{\varphi}, R_*) = (\widetilde{\chi}, R_*)$ ya da $(\widetilde{\chi}, R_*) = R$ olur. Eğer $(\widetilde{\chi}, R_*) = R$ ise $(\widetilde{\chi}, R) = \lambda_R$ dir. Buradan $(\widetilde{\varphi}, R)$, U üzerinde bir kesişimsel esnek maksimal sol idealdir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Dört bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde temel tanım ve teoremler, tezin ikinci kısımında kullanacağımız esnek kümeler ve esnek kümeler üzerindeki işlemler tanıtıldı. Esnek gruplar, kesişimsel esnek gruplar, esnek halkalar ve kesişimsel esnek halkalara yer verildi. Kesişimsel esnek idealler incelendi.

Bizde, yapılan bu çalışmalardan faydalanarak kesişimsel esnek halkalar üzerinde asal ve maksimal idealleri tanımladık ve bazı cebirsel özelliklerini inceledik.

Ulaştığımız bu sonuçlar esnek cebirsel yapılar için temel oluşturabilecek sonuçlardır. Bu sonuçlar kullanılarak esnek cebirsel yapıların farklı konuları çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Ahmad B. ve Kharal A., 2010. Mappings on soft classes . New Mathematics and Natural Computation, 7.

Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007. Soft sets and soft groups. Informations Sciences, 177, 2726-2735.

Ahsan J., Saifullah K., Farid Khan M., 1993. Fuzzy semirings, Fuzzy sets and systems, 60, 309-320.

Ali, M.I., Davvaz B., Li C., Feng F., 2010. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach. Soft Comput., 14, 899-911.

Aras Çiğdem, Bayramov Sadi, 2011. Fuzzy soft modules. International Mathematical Forum, 6 (11), 517-527.

Atanassov K., 1986. Intuitionistic fuzyy sets. Fuzzy Sets and System, 20, 87-96.

Aygünoğlu, A. ve Aygün, H., 2009. Indroduction to fuzzy soft groups. Computers and Mathematics with Applications, 58, 1279-1286.

Biswas B.K. ve Dutta T.K., 1995. Fuzyy k-ideals of semirings, Bull. Calcutta. Math. Soc., 87, 91-96.

Chitra V., Jayasree S., Inthumathi V., 2017. The role of operators on soft sets in decision making problems, International Journal of Computational and Applied Math., 3, 899-910.

Chun, Y. B., Kim, H. S., 1983. A study on the structure of semiring, J. Natural Sei.Res.Inst., 11, 69-74.

Çağman N., Çıtak, F. ve Aktaş, H., 2012. Soft int-group and its applications to group theory. Neural Computing and Applications, 21 (1), 151-158.

Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S., 2010. Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. Turkish Journal of Fuzzy Systems, 1 (1), 21-35.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010a. Soft matrix theory and decision making, Computers and Mathematics with Application, 59, 3308-3314.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010b. Soft set theory and uni-int decision making, Eur. J. Oper. Res., 207, 847-855.

Çağman, N., Enginoğlu, S. ve Çıtak, F. 2011a. Fuzzy soft set theory and its applications. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 8 (3), 137-147.

Çağman, N., Enginoğlu, S. ve Çıtak, F., 2011b. FP-soft set theory and its applications. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2 (2), 219-226.

Çıtak, F., 2018. Soft k-uni ideals of semirings and its algebraic applications. Journal of the Institute of Science and Technology, 8 (4), 281-294.

Çıtak, F. ve Çağman, N., 2015. Soft int-rings and its algebraic applications. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 28, 1225-1233.

Çıtak, F. ve Çağman N., 2017. Soft k-int-ideals of semiring and its algebraic structures. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 13 (4), 531-538.

Dubois D. ve Prade H., 1984. Criteria aggregation and ranking of alternatives in the framework of fuzzy set theory. TIMS/Studies in the Management Sciences, 20, 209-240.

Dubois D. ve Prade H., 1980. Fuzzy sets and systems: Theory and applications. Academic Press, Newyork.

Feng, F., Jun, Y. B. ve Zhao, X., 2008. Soft semiring. Computers and Mathematics with Applications, 10, 10-16.

George J.K. ve Yuan B., 1995. Fuzzy seys and fuzzy logic theory and appl., New Jersey.

Golan, J.S., 1992. The theory of semirings with applications in mathematics and theoritical. Computer Science and Tecnical, U.K.

Giles R, 1979. A formal system for fuzzy reasoning, 2, 233-257.

Jana, C. ve Pal, M., 2016. Application of new soft intersection set on groups. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 11 (6), 923-944.

Jun, Y. B., 2008. Soft BCK/BCI-algebras. Computer and Mathematics with Applications, 56 1408-1413.

Jun, Y.B., Lee, K,J. ve Zhan, J., 2009. Intersectional soft BCK/BCI-ideals. Annals of Fuzzy Math. and Informatics, 1, 2060-2068 .

Lui Jing, Zhang Zi-Liong, Sun Qiu-Mei, 2008. Soft sets and soft modules. Lecture Notes in Comput. Sci., 5009, 403-409.

Kandel A., 1986. Fuzyy mathematical tecniques with applications. Addison Wesley.

Lopez-Permouth S.R, ve Malik D.S., 1990. On categories of fazzy modules. Information Sciences, 52, 211-220.

Lopez-Permouth S.R, 1992. Lifting moria equivalence to categories of fazzy modules. Information Sciences, 64, 191-201.

Mahmood Tahir, Tariq Usman, 2015. Generalized k-ideals in semirings using soft intersectional sets. International Journal of Algebra and Statistics, 4, 20-38 .

Maji, P.K., Biswas R. ve Roy, A.R., 2003. Soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 45, 555-562.

Mehmood T. ve Aslam M., 2012. On interval-valued fuzzy k-ideals in hemirings. Neural Comput. Appl., 21, S231-S244.

Mizumoto M. ve Tanaka K., 1976. Some properties of fuzzy sets of type 2. inf. control, 31, 312-340.

Molodtsov, D., 1999. Soft set theory-first result. Computers and Mathematics with Applications, 37, 19-31.

Molodtsov, D.A.,Yu., V., Leonov ve Kovkov, D.V., 2006. Soft sets technique and its application.Nechetkie Sistemi i Myakic Vychisleniya, 1 (1), 8-39.

Pawlak Z., 1982. Rough sets. International Journal of Information and Computer Sciences, 11, 341-356.

Pawlak Z., 1994. Hard set and soft sets, ICS report. Institute of Computer Science, Poland.

Sezgin, A., 2017. Characterizations of certain classes of semigroups via soft intersection ideals. Italian Journal of Pure and Applied Mafhematics, 38 (1).

Sezgin, A., Atagün, A.O., ve Çağman, N., 2014. Un-soft substructures of rings and modules. Inf. Sci. Lett., 1, 1-6.

Sezgin, A., Çağman, N. ve Çıtak, F., 2018. α-inclusions applied to group theory via soft and logic. Faculty of Scienses Universty of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics, 68 (1), 334-352.

Sezgin, Sezer. A., 2012. Soft union rings, ideal and bi-ideals; a new approach to ring theory I, Knowledge-Based Systems, 36, 300-314.

Steinfeld, O., 1978.Quasi-ideals in ring and semigroup. Akademia Kiado, Budabest, 1978.

Sezgin, A. ve Atagün, A.O., 2011. On operations of soft sets. Comput. Math. Appl., 61 (5), 1457-1467.

Sezgin, A., Atagün, A.O. ve Aygün E., 2011. A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings. Filomat, 25, 53-68.

Singh D., Onyeozili I.A., 2013. On the the ring structure of soft set theory. International Journal of Scientific and Technology Research, 2, 2277-8616.

Sun, Q. M., Zhang, Z.L. ve Liu, J., 2008. Soft sets and soft modules. Lecture Notes in Computer Science, 5009, 403-409.

Tuncay, M. ve Sezgin A., 2016. Soft union ring and its applications to ring theory. International Journal of Computer Application, 151 (9), 7-13.

Xiao Z, Q.M. ve Zhang, 2005. Recognition for soft informationbased on the theory soft sets. Proceedings of ICSSSM, 1104-1106.

Zadeh L.A., 1965. Fuzzy Sets. Information and Control, 8, 338-353.

Zahedi M.M. ve Ameri R., 1995. On fuzzy projective and injective modules. The Journal of Fuzzy Mathematics,Vol.3 No.1, 181-190.

Zou. Y. ve Xiao Z., 2008. Data analysis approaches of soft sets under incomplete information. Knowledge Based Systems, 21, 941-945.

Zhan J. Liu. Q. ve Herawan. T., 2017. A novel soft rough set: soft rough hemirings and its multicriteria group decision making. Applied Soft Computing, 54, 393-402.

Zhan, J. ve Zhu, K., 2017. Z- soft rough fuzzy ideals of hemirings and corresponding decision making. Soft Computing, 21, 1923-1936.

Zhan, J., Ali, M.I ve Mehmood, N., 2017. On a novel uncertain of set model: Z-soft fuzzy rough set model and corresponding decision making methods. Applied Soft Computing, 56, 446-457.

Zhang Z.L., Lui J. ve Sun Q.M., 2008. Soft sets and soft modules. Lecture Notes in Computer Science, 5009,403-409

Zhang J., Yin Y., ve Jun Y.B., 2011. Vague soft hemirings. Comput. Math. Appl., 62, 199-213.

Zhan J., Cagman N., ve Sezer A.S., 2014. Applications of soft union sets to hemirings via SU-h-ideals. J. Intell Fuzzy Syst., 26, 1363-1370.

Zou Y., Xia S., Xiao Z. ve Gong K., 2010. Exlusive disjunctive soft sets. Computer Mathematics Applications, 59, 2028-2137.

6. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : RECEP AYDIN

Doğum Yeri : Horasan/ERZURUM

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 05070763771

E-posta : pfs.25a@gmail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2013
Lise	Horasan Anadolu Lisesi	2008