MUTLAK OLMAYAN TİPTEN BLOK DİZİ UZAYLARI

GÖZDE KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DOÇ. DR. SERKAN DEMİRİZ
Temmuz - 2019

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUTLAK OLMAYAN TİPTEN BLOK DİZİ UZAYLARI

GÖZDE KILIÇ

TOKAT
Temmuz - 2019

GÖZDE KILIÇ tarafından hazırlanan "**Mutlak Olmayan Tipten $l_p(E)$ Blok Dizi Uzayları**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **18 TEMMUZ 2019** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / ~~Oy Çokluğu~~ ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR Amasya Üniversitesi	....

ONAY

....

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
../08/2019

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Gözde KILIÇ

18 Temmuz 2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUTLAK OLMAYAN TİPTEN BLOK DİZİ UZAYLARI

GÖZDE KILIÇ

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. SERKAN DEMİRİZ)

Dört bölümden oluşan bu çalışmada 2015 yılında tanımlanan Blok Dizi Uzayı kavramı incelenmiştir. Birinci bölümde konu ile ilgili literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde bazı temel tanımlara, teoremlere ve eşitsizliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde $X \in \{c_0, c, l_\infty\}$ olmak üzere $X(E)$ blok dizi uzaylarının tanımı verilmiş ve bu dizi uzaylarının bazı cebirsel ve topolojik özellikleri incelenmiştir. Arıca bu bölümde $X(E)$ dizi uzayları üzerinde bazı matris sınıflarının karakterizasyonu yapılmıştır. Son olarak dördüncü bölümde $1 \leq P \prec \infty$ olmak üzere $l_p(E)$ blok dizi uzayı incelenmiştir.

2019, 43 Sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Blok Dizi Uzayları, Dizi Uzayları, Bir Üçgensel Matrisin Etki alanı, $\alpha-, \beta-, \gamma-$ dual,

ABSTRACT

MASTER THESIS

BLOCK SEQUENCE SPACE OF NON-ABSOLUTE TYPE

GÖZDE KILIÇ

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ASSOC. PROF. DR SERKAN DEMİRİZ

In the study consisting of four parts, the concept of block array space defined in 2015 was examined. In the first chapter, a summary of the literature is given. In the second part, some basic definitons, theorems and inequalities are given. In the third chapter, the definition of $X(E)$, block array spaces including $X \in \{c_0, c, l_\infty\}$ is given and some algebraic and topological properties of these array spaces are examined. In this section, characterization of some matrix classes are made on $X(E)$ array spaces. Finally, $1 \leq P \prec \infty$ block array space is examined.

2019, 43 Pages

KEYWORDS: Block Sequence spaces, Sequence spaces, Matrix domain of a triangle matrix, , $\alpha-, \beta-, \gamma-$ dual,

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmamın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Serkan DEMİRİZ’ e minnettarlığımı sunarım. Yüksek Lisans çalışmalarımda bana yardımcı olan sayın Orhan ÖZDEMİR hocama özellikle teşekkür etmeyi kendime borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen bölümümüzün değerli hocalarına şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan kıymeti anne ve babama, kardeşime, beni bu tarz çalışmalara teşvik eden sonsuz desteklerini benden esirgemeyen sevgili eşime teşekkür ederim.

GÖZDE KILIÇ

SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayıların cümlesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayıların cümlesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayıların cümlesi
ω	Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı
ℓ_∞	Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
c	Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
cs	Yakınsak seri oluşturan reel terimli dizilerin uzayı
bs	Sınırlı seri oluşturan reel terimli dizilerin uzayı
ℓ_1	Mutlak yakınsak seri oluşturan reel terimli dizilerin uzayı
$B = (b_{nk})$	Reel terimli sonsuz bir matris
$(E : F)$	E' den F' ye tanımlı matrislerin cümlesi
$\lim_n$	$\lim_{n\to\infty}$
$\sum_k$	$\sum_{k=0}^{\infty}$
X_A	A sonsuz matrisinin X etki alanı
C_1	Cesàro dönüşümü
$\sup_k$	$\sup_{k\in\mathbb{N}}$
$\mathcal{F}$	$\mathbb{N}$'nin bütün sonlu alt kümelerinin kolleksiyonu
φ	Sonlu sayıda terimi sıfır olmayan dizilerin cümlesi

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Bütün kompleks veya reel terimli dizilerin uzayını ω ile gösterelim. ω uzayının herhangi bir alt uzayı, bir dizi uzayı olarak adlandırılır. Toplanabilme teorisinde genel olarak dizi uzayları ile ilgili problemler incelenir.

Toplanabilme teorisinde dizi uzayları ile ilgili olarak yapılan nitelikli çalışmalar

a) Yeni bir dizi uzayı inşa etmek

b) Bu uzayın üzerinde tanımlanan bir norm veya paranormla tamlığını göstermek

c) Bu uzayla bilinen dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntılarını incelemek

d) Varsa Schauder tabanını(bazını)incelemek

e) Uzayın $\alpha-$,$\beta-$ ve $\gamma-$duallerini hesaplamak

f) Bu uzaydan bilinen dizi uzaylarına ve bilinen uzaylardan bu uzaya matris dönüşümlerini karakterize etmek gibi problemlerin bir veya birkaçını ele alarak çözüme kavuşturur.

X bir dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel terimli sonsuz bir matris olmak üzere, $x = (x_k) \in X$ için, $(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ serileri her $n \in \mathbb{N}$ için yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine, x dizisinin $A-$ dönüşümü denir.

$A-$ dönüşümü X dizi uzayında yatan dizilerin

$$X_A = \left\{ x = (x_k) \in \omega : Ax \in X \right\}$$

cümlesi, A matrisinin X etki alanı olarak adlandırılır. X_A cümlesi, dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle vektör uzayı teşkil ettiğinden bir dizi uzayıdır. Bu düşünce ile yeni dizi uzayları inşa etmek üzere birtakım çalışmalar yapıldı. İlk olarak 1978 yılında Ng ve Lee (Ng ve Lee, 1978), 1.mertebeden Cesàro ortalamasının ℓ_p etki alanını kullanarak X_p dizi uzayını inşa etti ve bu uzayı inceledi. Aynı yıl Wang (Wang, 1978), Nörlund ortalamasına karşılık gelen üçgensel matrisin ℓ_p dizi uzayı üzerinde etki alanını kullanarak $(\ell_p)_{N_q}$ ile gösterdiği Nörlund dizi uzayını tanımladı ve bu uzayın Banach uzayı olduğunu göstererek bazı kapsama bağıntılarını inceledi. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, X_p ve ℓ_p dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri ise 2000 yılında Başar tarafından (Başar, 2000) künyeli çalışmada ele alındı.

$$a_{nk}^r = \begin{cases} \dfrac{1+r^k}{n+1}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $A^r = (a_{nk}^r)$ üçgensel matrisin $0 < r < 1$ için regüler olduğu ve C_1-Cesàro metodundan kuvvetli olduğu Başar tarafından (Başar, 1993)'de ispat edildi.

$A^r = (a_{nk}^r)$ matrisinin c_0 ve c dizi uzayları üzerindeki sırasıyla a_0^r ve a_c^r ile gösterilen etki alanları Aydın ve Başar tarafından (Başar ve Aydın, 2004) künyeli çalışmada incelendi. Bu çalışmada a_0^r ve a_c^r dizi uzaylarının sırasıyla c_0 ve c uzaylarını kapsadığı gösterilerek bu uzayların α-,β- ve γ-dualleri hesaplanmıştır. Aynı matrisin ℓ_p dizi uzayı üzerindeki a_p^r ile gösterilen etki alanı Aydın tarafından doktora tezi çalışması olarak sunuldu (Aydın, 2000). Fark dizi uzayları ilk olarak 1981 yılında Kızmaz tarafından $\mu \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere,

$$\mu(\Delta) = \Big\{ x = (x_k) \in \omega : \Delta x = (x_k - x_{k+1}) \in \mu \Big\}$$

şeklinde tanımlandı (Kızmaz, 1981). $\mu = \ell_p$ olması durumu ise 1995 yılında farklı bir çalışmada yine aynı yazar tarafından ele alındı (Kızmaz, 1995). Daha sonraki yıllarda fark dizi uzayları ile ilgili bir çok çalışma yapıldı. 2003 yılında Altay ve Başar (Başar ve Altay, 2003) farkları ℓ_p uzayında olan bütün dizilerin oluşturduğu bv_p uzayını tanımladılar ve bu uzayı incelediler. Başar ve Altay bv_p uzayını tanımlarken, Kızmaz ve onu izleyen yazarların yaptığından çok farklı olarak

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}, & n-1 \leq k \leq n, \\ 0, & 0 \leq k < n-1 \quad \text{veya} \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\Delta = (\delta_{nk})$ fark matrisinin etki alanlarını kullandılar. Yani bv_p dizi uzayını $bv_p = (\ell_p)_\Delta$ olarak tanımladılar.

2004 yılında Aydın ve Başar, fark matrisinin a_0^r ve a_c^r dizi uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak sırasıyla $a_0^r(\Delta)$ ve $a_c^r(\Delta)$ ile gösterdikleri dizi uzaylarını inşa ettiler (Aydın ve Başar, 2004). a_p^r dizi uzayının fark karşılığı da 2011 yılında Demiriz ve Çakan tarafından incelendi (Demiriz ve Çakan, 2011). Yazarlar, bu çalışmada tanımladıkları $a_p^r(\Delta)$ dizi uzayının bv_p dizi uzayını kapsadığını ve bu kapsamanın kesin olduğunu gösterdiler. Ayrıca, yazarlar yine bu çalışmada $a_p^r(\Delta)$ dizi uzayının bazı geometrik özellikleri de incelemişlerdir.

Toplanabilme teorisinde yeni tanımlanan bir dizi uzayının en azından standart dizi uzaylarından en az birini kapsaması beklenir. Özellikle yakınsak diziler uzayı c yi kapsayan yeni bir uzay tanımlamak demek, aynı zamanda yeni bir toplanabilme metodu tanımlamak anlamına geldiğinden yapılan çalımalarda kapsama bağıntılarının incelenmesi son derece önemlidir.

Son yıllarda fark matrisinin bazı genellemeleri yapıldı ve bu matrisler etki alanlarında kullanılarak farklı dizi uzayları inşa edildi. r ve s sıfırdan farklı reel sayılar olsun. $B(r,s) = \{b_{nk}(r,s)\}$ genelleştirilmiş fark matrisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk}(r,s) = \begin{cases} r, & (k = n), \\ s, & (k = n-1), \\ 0, & (0 \leq k < n-1 \text{ veya } k > n), \end{cases}$$

şeklinde tanımlandı. Bu matrisin standart normlu uzaylar üzerindeki etki alanı kullanılarak tanımlanan

$\{c_0\}_{B(r,s)} = \widehat{c}_0$, $\{c\}_{B(r,s)} = \widehat{c}$, $\{\ell_\infty\}_{B(r,s)} = \widehat{\ell}_\infty$ ve $\{\ell_p\}_{B(r,s)} = \widehat{\ell}_p$

dizi uzayları Kirişçi ve Başar tarafından incelendi (Kirişci ve Başar, 2010). $B(r,s) = \{b_{nk}(r,s)\}$ matrisinde $r = 1$ ve $s = -1$ olarak alınırsa Δ fark matrisi elde ediir. Bu nedenle $B(r,s)$ matrisi kullanılarak yapılan çalışmalar fark matrisi kullanılarak yapılan çalışmalardan daha geneldir.

2015 yılında S. Erfanmanesh ve D.Foroutannia üçgensel olmayan bir sonsuz matris yardımıyla blok dizi uzayı adını verdikleri $\ell_\infty(E), c(E)$ ve $c_0(E)$ dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların birtakım cebirsel ve topolojik özelliklerini incelediler (Foroutannıa ve Erfanmanesh, 2015).

$E = (E_n)$ pozitif tam sayıların sonlu alt kümelerinin bir parçalanması olsun. Ayrıca

$$\max E_n < \min E_{n+1}; \quad n = 1, 2, 3, ...$$

sağlansın. Bu taktirde $X \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere $X(E)$ dizi uzayları

$$X(E) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \Big(\sum_{i \in E_k} x_i \Big) \in X \right\}$$

olarak tanımlanır. $X(E)$ dizi uzayı

$$||x||_E = \sup_k \Big| \sum_{i \in E_k} x_i \Big|$$

biçiminde tanımlanan $||.||_E$ ile bir semi-normlu uzaydır.

Diğer taraftan $\ell_\infty(E), c(E), c_0(E)$ dizi uzayları etki alanı yardımıyla yeniden tanımlanabilir. $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{eğer} \quad k \in E_n, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa bu durumda

$$\ell_\infty(E) = (\ell_\infty)_A, \quad c(E) = (c)_A, \quad c_0(E) = (c_0)_A$$

yazılabilir.

Bu uzaylara bu gözle bakıldığında kullanılan matrisin üçgensel olmaması sebebiyle klasikte yapılan çalışmalardan farklı özelliklere sahip olduğu gözlemlenebilir. Örneğin kullanılan matris üçgensel olduğunda yeni uzayımız normlu uzay olmasına rağmen bu çalışmadaki incelenen uzaylar normlu uzay yapısına sahip değildir.

2015 yılında Davoud Foroutannia $\ell_p(E) \quad (1 \leq p < \infty)$ dizi uzayının blok dizi uzayı karşılığını

$$\ell_p(E) = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{j \epsilon E_n} x_j \Big|^p < \infty \right\}$$

olarak tanımladı (Foroutannıa, 2015). D.Foroutannia bu çalışmasında $\ell_p(E)$ dizi uzayının bazı cebirsel ve topolojik özelliklerini inceledi.

Yine 2015 yılında S. Erfanmanesh ve D. Foroutannia standart dizi uzayları olarak isimlendirilen c_0, c ve ℓ_∞ dizi uzaylarının blok karşılıkları olarak $X \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$

olmak üzere $X(E)$ dizi uzaylarını

$$X(E) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{i \epsilon E_n} x_i \right) \in X \right\}$$

biçiminde tanımladılar. Ayrıca, yazarlar bu çalışmada standart uzaylarla blok dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntılarını incelediler. Bunun yanısıra yeni elde edilen dizi uzaylarının $\alpha-$ ve $\beta-$duallerini hesapladılar.

Bizim bu tez çalışmasındaki temel amacımız 2015 yılında ilk kez tanımlanan blok dizi uzayı kavramını tanıtmak ve bu alanda yapılan yukarıdaki temel çalışmaları ayrıntılı bir biçimde incelemek olacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde gerekli olacak bazı tanımlara, teoremlere ve eşitsizliklere yer verildi.

2.1. Vektör Uzayları

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

ve

$$\cdot : \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$$

olmak üzere, eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

L1) $x + y = y + x$,

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır,

L4) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır,

L5) $1 \cdot x = x$,

L6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

L7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

L8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

şartları sağlanıyorsa, X cümlesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir *lineer uzay* denir.
Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı ω, dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir lineer uzay yapısına sahiptir. (Maddox, 1988)

Tanım 2.1.2. X, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $Y \subset X$ olsun. Bu durumda; her $y_1, y_2 \in Y$ vektörleri ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ skalerleri için $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ olması halinde Y'ye, X uzayının bir *lineer alt uzayı* denir.

Örnek 2.1.3. Sıfıra yakınsayan gerçel ya da karmaşık terimli bütün dizilerin c_0 kümesi c lineer uzayının ve dolayısıyla ℓ_∞ lineer uzayının birer alt uzayıdır.

2.2. Metrik Uzaylar

Tanım 2.2.1. Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$\begin{aligned} d: \quad X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to d(x,y) \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü $\forall x,y,z \in X$ için

(M_1) $d(x,y) \geq 0$

(M_2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M_3) $d(x,y) = d(y,x)$

(M_4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir *metrik* adını alır ve bu durumda (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Örnek 2.2.2. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik olur.

Tanım 2.2.3. (X,d) metrik uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun.
Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$$

ise, başka bir deyişle, eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{için} \quad \exists_{n_\varepsilon} \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_\varepsilon \quad \text{için} \quad d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

oluyorsa, (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve

$$x_n \to x_0$$

ya da

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.4. (X, d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir altkümesi olsun.

$$d(A) = \sup\Big\{d(x, y) : x, y \in A\Big\}$$

sayısına A kümesinin *çapı* denir. $d(A) < \infty$ ise A ya X de *sınırlı bir küme* denir. X içindeki (x_n) dizisinin terimlerinden oluşan küme X de sınırlı ise (x_n) dizisine X de *sınırlı bir dizi* adı verilir.

Tanım 2.2.5. (X, d) metrik uzay ve X'in içinde bir dizi (x_n) olsun.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{için} \quad \forall m, n > n_\varepsilon \quad \text{olduğunda} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde ε'a bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine X içinde bir *Cauchy dizisi* adı verilir.

Önerme 2.2.6. a) Metrik uzay içindeki yakınsak her dizi Cauchy dizisidir.

b) Metrik uzay içindeki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

Tanım 2.2.7. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, bu (X, d) metrik uzayına *tam metrik uzay* adı verilir.

Örnek 2.2.8. $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayı Örnek 2.2.2 de ki d_2 metriğine göre tamdır.

2.3. Normlu Uzaylar

Tanım 2.3.1. X bir lineer uzay ve $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her α skaleri için;

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

şartları sağlanıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir. X lineer uzayı üzerinde tanımlanan $\|.\|$ fonksiyonu normun özelliğini sağlarsa $(X, \|.\|)$ ikilisine de *normlu lineer uzay* veya *normlu uzay* adı verilir (**?**).

Örnek 2.3.2. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dönüşümü ℓ_p lineer uzayı üzerinde bir norm olur.

Tanım 2.3.3. X bir lineer uzay ve $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her α skaleri için;

SN1) $\|x\| \geq 0$

SN2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

SN3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

şartları sağlanıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *semi-norm* ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de *semi-normlu uzay* denir (**?**).

Örnek 2.3.4. c ile yakınsak dizilerin uzayını gösterelim.

$$\begin{aligned} \lim : \quad c \quad &\to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \left| \lim_{n \to \infty} x_n \right| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm c üzerinde bir semi-normdur.

Tanım 2.3.5. $(X, \|.\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) de bu uzayda bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\|x_m - x_n\| \longrightarrow 0 \quad (m, n \longrightarrow \infty)$$

ise (x_n) dizisine X uzayında bir *Cauchy dizisi* denir.

Şimdi, normlu uzaylarda yakınsaklık, Cauchy dizisi ve sınırlılık kavramları arasındaki ilişkiyi ifade eden önermeyi verelim.

Önerme 2.3.6. a) Normlu uzayda yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir.

b) Normlu uzayda Cauchy dizisi sınırlıdır.

Tanım 2.3.7. X normlu lineer uzayında $d(x,y) = \|x-y\|$ metriğine göre verilen her Cauchy dizisi yakınsak ise yani X uzayı normdan elde edilen metriğe göre tamsa X'e bir *Banach uzayı* adı verilir(Kreyszıg, 1978).

Örnek 2.3.8. $\ell_p, \quad (1 \leq p < \infty)$ uzayı

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.4. Dizi Uzayları

Tanım 2.4.1. $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w = \Big\{ x = (x_k) | \quad x : \mathbb{N} \to F, k \to x(k) = (x_k) \Big\}$$

kümesine bütün dizilerin kümesi denir. w kümesi,

$$\big((x_k),(y_k)\big) \to (x_k + y_k)$$

ve

$$\big(\lambda,(x_k)\big) \to (\lambda(x_k))$$

ikili işlemleri ile F üzerinde bir vektör uzayıdır. w'nın herhangi bir alt vektör uzayına bir *dizi uzayı* denir (Boss ve Peter, 2000).

Örnek 2.4.2. Toplanabilme teorisinde sıkça kullanılan ve standart dizi uzayları olarak adlandırılan kümeleri sşağıda listeleyelim:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \Big\{x = (x_k) \in w : \exists N \in \mathbb{N}; \forall k \geq N \quad \text{için} \quad x_k = 0\Big\} \\
c_0 &= \Big\{x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\Big\} \\
c &= \Big\{x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} x_k = m, \exists m \in \mathbb{R}\Big\} \\
\ell_\infty &= \{x = (x_k) \in w : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\Big\} \\
\ell_p &= \Big\{x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k|^p < \infty \quad 1 \leq p < \infty\Big\} \\
bs &= \Big\{x = (x_k) \in w : \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big|\sum_{k=0}^{n} x_k\Big| < \infty\Big\} \\
cs &= \Big\{x = (x_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k - l\Big) = 0 \quad \exists l \in \mathbb{R}\Big\} \\
cs_0 &= \Big\{x = (x_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k\Big) = 0\Big\}
\end{aligned}$$

Yukarıda tanımlanan kümelerin her biri birer dizi uzayıdır.

2.5. İç Çarpım Uzayları

Tanım 2.5.1. X kompleks lineer uzay ve $\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için;

(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y + z\rangle$

(2) $\langle \alpha x, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle$

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(4) $\langle x, x\rangle \geq 0$

şartlarını sağlarsa $\langle .,. \rangle$ dönüşümüne X üzerinde bir *yarı-iç çarpım*, $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de *yarı-iç çarpım uzayı* denir. Eğer $\langle x, x\rangle = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektiriyorsa o zaman bu dönüşüm *iç çarpım* adını alır (**?**).

Örnek 2.5.2. $f, g \in \big(C[a,b], K\big) \quad K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

olarak tanımlanırsa $<,>$ bir iç çarpım ve dolayısıyla $\big(C[a,b], K\big)$ da bir iç çarpım uzayıdır.

Önerme 2.5.3. $(X, < . >)$ bir iç çarpım uzayı ve $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ için

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2)$$

(Paralelkenar Kuralı) eşitliği sağlanır.

Tanım 2.5.4. $(X, < . >)$ iç çarpım uzayı $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ normuna göre yani; iç çarpım yardımıyla tanımlanan norm metriğine göre tam ise bu iç çarpım uzayına *Hilbert Uzayı* denir (**?**).

Örnek 2.5.5. $p \neq 2$ olmak üzere ℓ_p uzay; bir iç çarpım ve dolayısıyla Hilbert Uzayı değildir.

İspat. İfademiz, $p \neq 2$ olmak üzere ℓ_p'nin normunun, bir iç çarpımdan elde edilemeyeceği anlamındadır. Bunu normun;

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

paralelkenar eşitliğini sağlamadığını göstererek ispat edeceğiz. Gerçekten ℓ_p uzayındaki x ve y noktalarını,

$$x = (1, 1, 0, 0, ...) \quad y = (1, -1, 0, 0, ...)$$

olarak aldığımızda

$$\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}, \quad \|x+y\| = \|x-y\| = 2$$

bulunur. Bu durumda; tanımladığımız x, y noktaları ve $p \neq 2$ için

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

özdeşliğinin sağlanmadığı kolayca görülür.

2.6. Lineer Dönüşümler

Tanım 2.6.1. X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olsun. Her $x, y \in X$ vektörü ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ skaleri için

$$T(x+y) = Tx + Ty \quad \text{ve} \quad T(\alpha x) = \alpha Tx$$

şartlarını sağlayan bir $T : X \longrightarrow Y$ dönüşümüne bir *lineer dönüşüm* denir (Choudhary ve Nanda, 1989).

Örnek 2.6.2. $C([a, b])$ uzayından $\mathbb{R}$ içine, $a \leq t \leq b$ olmak üzere,

$$T(x) = \int_a^b x(t)dt$$

biçiminde tanımlanan T dönüşümü bir lineer dönüşümdür.

Tanım 2.6.3. $T : X \longrightarrow Y$ lineer dönüşümü verilmiş olsun.

$$\text{çek}T = \left\{x \in X : Tx = \theta\right\}$$

kümesine T dönüşümünün *çekirdeği (veya sıfırı)* denir.

Tanım 2.6.4. $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ iki normlu uzay olsun. $T : X \rightarrow Y$ lineer dönüşümünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için

$$\|T(X)\|_Y \leq M\|X\|_X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısının bulunabilmesidir.

Tanım 2.6.5. T, X'den Y'ye bir lineer dönüşüm olsun. T birebir ve örtense T'ye X'den Y'ye bir *lineer izomorfizm*; X ve Y uzaylarına da *izomorfik uzaylar* denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir.

X uzayından Y uzayına T izomorfizmi uzaklıkları da koruyorsa T'ye X'den Y'ye bir izometri X ve Y'ye de *izometrik olarak izomorfik uzaylar* denir.

2.7. Matris Dönüşümleri

Tanım 2.7.1. λ ve μ iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk}) \quad (n, k = 0, 1, 2, ...)$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için A matrisinin n. satır dizisi A_n ile gösterilir. Yani $A_n = (a_{nk})_{k=0}^{\infty}$'dır. Ayrıca her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ise $A(x) = (A_n(x))$ yazılır. Eğer $x = (x_k) \in \lambda$ için $A(x) = (A_n(x)) \in \mu$ ise o zaman A'ya λ dizi uzayından μ uzayına bir *matris dönüşümü* denir ve bu durum $A : \lambda \to \mu$ olarak gösterilir. Ax dizisine de x'in $A-$ dönüşümü adı verilir. $A : \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi (λ, μ) ile gösterilir (Choudhary ve Nanda, 1989).

Tanım 2.7.2. $T = (t_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Eğer $T = (t_{nk})$ sonsuz matrisi,

$$t_{nk} = \begin{cases} 0 & ,(k \leq n) \\ t_{nn} \neq 0 & ,(k = n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyorsa T matrisine *üçgensel matris* denir.

Örnek 2.7.3. $C = (c_{nk})$ matrisini

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & ,(0 \leq k \leq n) \\ 0 & ,(k > n) \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. C matrisi üçgensel bir matristir. (alt üçgensel) C matrisinin açılımı;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & . \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Tanım 2.7.4. λ, μ herhangi iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için $((A_x)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve μ uzayında ise: A matrisi λ uzayından μ uzayına bir matris dönüşümü tanımlar denir. λ uzayını μ uzayına taşıyan bütün sonsuz matrislerin sınıfı, $(\lambda : \mu)$ ile gösterilir.

Tanım 2.7.5. I herhangi bir indis kümesi olmak üzere, bir A kümesinin alt kümelerinin bir $A = \{A_i : i \in I\}$ ailesi

(1) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

(2) $i, j \in I$ ve $i \neq j$ için $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ şartlarını sağlarsa bu A ailesine A *kümesinin bir parçalanması* denir.

Tanım 2.7.6. A da bir denklik bağıntısı β olsun. Herhangi bir $a \in A$ elemanına β vasıtasıyla bağlı olan bütün $x \in A$ elemanlarının cümlesine a nın *denklik sınıfı* denir ve $[a]$ ile gösterilir. O halde;

$$[a] = \{x = (a, x) \in \beta\}$$

dır. A nın denklik sınıflarının koleksiyonuna A nın β tarafından elde edilen *bölüm cümlesi* denir ve $Q = A/B$ şeklinde gösterilir. O halde;

$$Q = A/B = \{[a] : a \in A\}$$

dır.

2.8. Bazı Temel Eşitsizlikler

Bu kısımda tezde bazı ispatlarda kullandığımız Fonksiyonel Analizdeki temel eşitsizliklere yer vereceğiz.

a)*Hölder Eşitsizliği*

p ve q, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki reel sayı olmak üzere

$$\forall x = (x_n) \in \ell_p \quad \text{ve} \quad \forall y = (y_n) \in \ell_q$$

için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

b)*Minkowski Eşitsizliği*

p ve q, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki reel sayı olmak üzere

$$\forall x = (x_n) \in \ell_p \quad ve \quad \forall y = (y_n) \in \ell_p$$

için

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır.

3. $\ell_\infty(E), c(E), c_0(E)$ BLOK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, $X \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere $X(E)$ blok dizi uzaylarını inceleyeceğiz.

3.1. $\ell_\infty(E)$,$c(E)$,$c_0(E)$ Blok Dizi Uzayları

İlk olarak bu dizi uzaylarının tanımı ile başlayalım.

$n = 1, 2, ...$ olmak üzere $E = (E_n)$, pozitif tamsayıların sonlu alt kümelerinin

$$\max E_n < \min E_{n+1} \tag{3.1.1}$$

şartını sağlayan bir parçalanması olsun. $X \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere $X(E)$ dizi uzayı

$$X(E) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{i \epsilon E_n} x_i \right) \in X \right\}$$

olarak tanımlanır.

$X(E)$ dizi uzayı

$$\|x\|_E = \sup_k \left| \sum_{i \in E_k} x_i \right| \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|_E$ fonksiyonu ile bir semi-normlu uzaydır. (3.1.2) eşitliğinde tanımlanan $\|.\|_E$ fonksiyonu bir norm belirtmez. Aşağıda vereceğimiz önerme bu hususla ilgilidir.

Önerme 3.1.1. (3.1.2) eşitliği ile tanımlı $\|.\|_E$ fonksiyonu $X(E)$ üzerinde bir norm belirtmez.

İspat. Eğer $x = (1, -1, 0, 0, ...)$ ve her n için $E_n = \{2n - 1, 2n\}$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
\|x\|_E &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i\in E_k} x_i \right| \\
&= \sup_{k\in N} \left| x_{2k-1} + x_{2k} \right| \\
&= \sup_{k\in N} \left\{ |x_1 + x_2| + |x_3 + x_4| + ... \right\} \\
&= \sup_{k\in N} \left\{ 0 + 0 + ... \right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olmasına rağmen $x \neq \theta$ dır. Bu ise (3.1.2) eşitliği tanımlanan $\|.\|_E$ fonksiyonunun bir norm belirtmediğini gösterir.

$E = (E_n)$, pozitif tamsayıların sonlu alt kümelerinin (3.1.1) şartını sağlayan bir parçalanması olsun. Eğer $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi

$$
a_{nk} = \begin{cases} 1, & k \in E_n, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}
$$

biçiminde tanımlanırsa $\ell_\infty(E), c(E), c_o(E)$ blok dizi uzayları etki alanı yardımıyla yeniden ifade edilebilir.

Önerme 3.1.2.

$$
\ell_\infty(E) = (\ell_\infty)_A, \quad c(E) = (c)_A \quad \text{ve} \quad c_0(E) = (c_0)_A
$$

dır.

İspat. Yukarıdaki eşitliklerden sadece birini gösterelim. Diğerleri de buna benzer olarak yapılabilir. $\ell_\infty(E) = (\ell_\infty)_A$ eşitliğinin sağlandığını görelim:

$$
\begin{aligned}
(\ell_\infty)_A &= \Big\{x = (x_k) :\in w : Ax \in \ell_\infty\Big\} \\
&= \Big\{x = (x_k) \in w : \big(\sum_k a_{nk}x_k\big) \in \ell_\infty\Big\} \\
&= \Big\{x = (x_k) \in w : \big(\sum_{k \in E_n} a_{nk}x_k + \sum_{k \notin E_n} a_{nk}x_k\big) \in \ell_\infty\Big\} \\
&= \Big\{x = (x_k) \in w : \big(\sum_{k \in E_n} 1x_k + \sum_{k \notin E_n} 0x_k\big) \in \ell_\infty\Big\} \\
&= \Big\{x = (x_k) \in w : \big(\sum_{k \in E_n} x_k\big) \in \ell_\infty\Big\} \\
&= \Big\{x = (x_k) \in w : \sup_n \big|\sum_{k \in E_n} x_k\big| < \infty\Big\} \\
&= \ell_\infty(E)
\end{aligned}
$$

Şimdi ilk teoremimizi vererek devam edelim. İlk teoremimiz bu uzayların vektör uzayı olması hususu ile ilgilidir.

Teorem 3.1.3. $X \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere $X(E)$ cümlesi diziler üzerinde tanımlanan koordinatsal toplama ve skaler ile çarpma işlemleri altında bir vektör uzayıdır.

İspat. $X = \ell_\infty$ olmak üzere ispatı sadece $\ell_\infty(E)$ dizi uzayı için yapalım.

$\forall x, y \in \ell_\infty(E)$ ve $\forall \alpha \in \mathcal{C}$ verilsin. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\sup_{k \in N} \Big|\sum_{j \in E_k} (x_j + y_j)\Big| &= \sup_{k \in N} \Big|\sum_{j \in E_k} x_j\Big| + \sup_{k \in N} \Big|\sum_{j \in E_k} y_j\Big| \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

olduğundan dolayı $x + y \in \ell_\infty(E)$ ve

$$
\begin{aligned}
\sup_{k\in N}\left|\sum_{j\in E_k}\alpha x_j\right| &= \sup_{k\in N}\left|\alpha\sum_{j\in E_k}x_j\right| \\
&= \sup_{k\in E_n}|\alpha|\left|\sum_{j\in E_k}x_j\right| \\
&= |\alpha|\sup_{k\in N}\left|\sum_{j\in E_k}x_j\right| \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

olduğundan $\alpha x\in\ell_\infty(E)$ elde edilir.

Sonuç olarak $\ell_\infty(E)$ cümlesi bir vektör uzayıdır.

Teorem 3.1.4. $X\in\{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere $X(E)$ dizi uzayları $\forall x\in X(E)$ için

$$
\|x\|_E=\sup_{k\in N}\left|\sum_{j\in E_k}x_j\right| \tag{3.1.3}
$$

ile tanımlı $\|x\|_E$ fonksiyonu ile bir semi-normlu uzaydır.

İspat. $X=\ell_\infty$ olmak üzere sadece $\ell_\infty(E)$ için ispatı yapalım. Bunun için (3.1.3) da tanımlanan $\|.\|_E$ fonksiyonunun semi-norm şartlarını sağladığını göstermeliyiz.

SN1:$\forall x\in\ell_\infty(E)$ için

$$
\|x\|_E\geq 0
$$

olduğu açıktır.

SN2:$\forall x \in \ell_\infty(E)$ için

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_E &= \sup_{k\in N}\left|\sum_{j\in E_k}(\alpha x)_j\right| \\
&= \sup_{k\in N}\left|\sum_{j\in E_k}\alpha x_j\right| \\
&= \sup_{k\in N}|\alpha|\left|\sum_{j\in E_k}x_j\right| \\
&= |\alpha|\sup_{k\in N}\left|\sum_{j\in E_k}x_j\right| \\
&= |\alpha|\|x\|_E
\end{aligned}$$

SN3:$\forall x, y \in \ell_\infty(E)$ için

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \sup_{k\in N}\left|\sum_{j\in E_k}(x+y)_j\right| \\
&= \sup_{k\in N}\left|\sum_{j\in E_k}(x_j+y_j)\right| \\
&= \sup_{k\in N}\left|\sum_{j\in E_k}x_j+\sum_{j\in E_k}y_j\right| \\
&\leq \sup_{k\in N}\left\{\left|\sum_{j\in E_k}x_j\right|+\left|\sum_{j\in\in E_k}y_j\right|\right\} \\
&\leq \sup_{k\in N}|\sum_{j\in E_k}x_j|+\sup_{k\in N}|\sum_{j\in E_k}y_j| \\
&= \|x\|_E+\|y\|_E \\
&\Rightarrow \|x+y\|_E \leq \|x\|_E+\|y\|_E
\end{aligned}$$

Dolayısı ile (3.1.2) de tanımlanan $\|.\|_E$ fonksiyonu SN1-SN3 aksiyomlarını sağladığından $\ell_\infty(E)$ üzerinde bir semi-norm belirtir.

Sonuç olarak $\ell_\infty(E)$ bir semi-normlu uzaydır.

Teorem 3.1.5.

$$M = \left\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{j\in E_n} x_j = 0, \forall n\right\}$$

olsun. $\ell_\infty(E)/M, c(E)/M, c_0(E)/M$ bölüm uzayları sırası ile ℓ_∞, c, c_0 uzaylarına lineer olarak izomorfiktir.

İspat. $\forall X \in \{\ell_\infty(E), c, c_0\}$ için

$$Tx = \Big(\sum_{j\in E_n} x_j\Big)_{n=1}^{\infty}$$

biçiminde tanımlanan

$$T : X(E) \to X$$

dönüşümünü göz önüne alalım. T'nin lineerliği aşikardır. $y \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ ve her n için $\alpha_n = |E_n|$ olarak alınırsa her $k \in E_n$ için $x_k = y_n/\alpha_n$ yardımıyla $x = (x_k)$ dizisini tanımlayalım. $x \in \{\ell_\infty(E), c(E), c_0(E)\}$ ve $T_x = y$ olduğu açıktır ve dolayısıyla T dönüşümü örtendir. Birinci izomorfizm teoremini uygulayarak

$$\ell_\infty(E)/M \cong \ell_\infty, \quad c(E)/M \cong c, \quad c_0(E)/M \cong c_0$$

elde ederiz.

3.2. $\ell_\infty(E)$,$c(E)$,$c_0(E)$ DİZİ UZAYLARININ $\alpha-$,$\beta-$ DUALLERİ

Bu kısımda $\ell_\infty(E)$,$c(E)$,$c_0(E)$ dizi uzaylarının $\alpha-$,$\beta-$ duallerini hesaplıyoruz.

Lemma 3.2.1. $X, Y, Z \subset \omega$ için

$(i) X \subset Z$ ise $M(Z,Y) \subset M(X,Y)$

$(ii) Y \subset Z$ ise $M(X,Y) \subset M(X,Z)$ Özel olarak $X^\alpha \subset X^\beta$

Teorem 3.2.2. d cümlesini

$$d = \Big\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} \big(\sup_{i\in E_k} |a_i| \big) < \infty \Big\}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu taktirde

$$\{c_0(E)\}^\beta = \{c(E)\}^\beta = \{\ell_\infty(E)\}^\beta = d$$

dır.

İspat. Lemma 3.1'in (i) kısmı gereğince

$$\left\{c_0(E)\right\}^\beta \subset \left\{c(E)\right\}^\beta \subset \left\{\ell_\infty(E)\right\}^\beta$$

kapsamalarının sağlandığı açıktır. Bu yüzden teoremi kanıtlamamız için

$$d \subset \left\{\ell_\infty(E)\right\}^\beta, \left\{c_0(E)\right\}^\beta \subset d$$

kapsamalarının sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Keyfi $a \in d$ alalım.$E = (E_n)$ pozitif tamsayıların bir parçalanması olduğundan $\forall x \in \ell_\infty(E)$ için

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i\in E_k} a_i x_i\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{i\in E_k}|a_i|\right)\left|\sum_{i\in E_k} x_i\right|\end{aligned}$$

$$\leq \sup_k \left|\sum_{i\in E_k} x_i\right| \sum_{k=1}^{\infty}(\sup_{i\in E_k}|a_i|) < \infty \tag{3.2.4}$$

yazılabilir.Bu ise $ax \in cs$ olmasını gerektirir. Dolayısı ile $a \in \{\ell_\infty E\}^\beta$ olur. O halde

$$d \subset \left\{\ell_\infty(E)\right\}^\beta$$

kapsamı sağlanır.

Şimdi, kabul edelim ki $a \in \left\{c_0(E)\right\}^\beta$ keyfi olsun. $n = 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned} f_n :\ & c_0(E) \to \mathbb{R} \\ & x \to f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in E_k} a_i x_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan f_n lineer fonksiyonelini göz önüne alalım. (3.2.4) ye benzer olarak $\forall x \in c_0(E)$ için

$$\left|f_n(x)\right| \leq \sup_k \left|\sum_{i\in E_k}(x_i)\right| \sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{i\in E_k}|a_i|\right)$$

yazılabilir. Dolayısı ile f_n lineer fonksiyoneli sınırlıdır ve

$$\|f_n\| \leq \sum_{k=1}^{n}\big(\sup_{i\in E_k}|a_i|\big) \tag{3.2.5}$$

sağlanır. Şimdi (3.2.5) eşitsizliğinin ters yönünü kanıtlayacağız. $1 \leq i \leq \max E_n$ olacak biçimde biz i indeksinin var olduğunu ve de $a_i \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Genel terimi,

$$x_i = sgna_i$$

biçiminde tanımlı $x = (x_i)$ dizisini göz önüne alalım. Burada

$$|a_k| = \begin{cases} \sup\limits_{j\in E_k}|a_j|, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$\|f_n\| \geq \frac{|f_n(x)|}{\|x\|_E} = \sum_{k=1}^{n}\big(\sup_{j\in E_k}|a_j|\big) \tag{3.2.6}$$

elde edilir.

(3.2.5) ve (3.2.6) birleştirilirse $n = 1, 2, ...$ için

$$\|f_n\| = \sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{j\in E_k}|a_j|\right)$$

olur. $a \in \left\{ c_o(E) \right\}^{\beta}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_n : \quad c_0(E) &\to \mathbb{R} \\ x \quad &\to f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in E_k} a_i x_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f_n dönüşümü iyi tanımlıdır ve lineerdir ve de aynı zamanda $\{f_n\}$ dizisi f_a ya noktasal yakınsaktır, Banach-Steinhaus teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f_a\| &= \sup f_n \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_{i \in E_k} |a_i| \right) < \infty \\ &\Rightarrow a \in d \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. $X(E)$ DİZİ UZAYI ÜZERİNDE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu kısımda $X(E)$ dizi uzaydından $\{\ell_\infty, c, c_0\}$ uzaylarına bazı matris sınıfları karakterize edildi. Şimdi temel sonuçları ispatlamada ihtiyaç duyacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.3.1. Eğer $a = (a_k) \in d$ ise bu taktirde

$$\begin{aligned} f_n : \ c_0(E) &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $f-$lineer fonksiyoneli sınırlıdır ve

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\sup_{i \in E_n} |a_i| \big)$$

dır.

İspat.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in E_k} a_i x_i$$

olduğundan teoremin ispatı teorem 3.1.1 den elde edilir.

$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. Aşağıdaki şartları göz önüne alalım.

$$\sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{i \in E_k} |a_{ni}| \right) < \infty \tag{3.3.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i \in E_k} a_{ni} = 0 \quad (k = 1, 2, ..) \tag{3.3.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{i \in E_k} a_{ni} \big) = 0 \tag{3.3.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i \in E_k} a_{ni} = \ell_k \quad \exists \ell_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, ..) \tag{3.3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{i\in E_k} a_{ni}\Big)=\ell \quad \exists\ell\in\mathbb{R} \tag{3.3.11}$$

Şimdi bu kısımda ki ilk teoremimizi verelim.

Teorem 3.3.2. $X\in\{c_0,c,\ell_\infty\}$ olmak üzere A'nın $X(E)$ den ℓ_∞'a $A\in\{X(E),\ell_\infty\}$ olması için gerek ve yeter koşul (3.3.7) şartının sağlanmasıdır.

İspat. İspatı sadece $A\in\{\ell_\infty(E),\ell_\infty\}$ için yapacağız. Kabul edelim ki (3.2.4) şartı sağlansın. Bu şart altında ispat edeceğiz ki A matrisi $\{\ell_\infty(E),\ell_\infty\}$ sınıfına aittir. $A_n=(a_{nk})_{k=1}^{\infty}$ ile A matrisinin n. satırında ki diziyi gösterelim. (3.2.4)'den dolayı $A_n\in d$ olur. Teorem 3.1.1'den ise $n=1,2,...$ için $A_n\in\{\ell_\infty(E)\}^{\beta}$ yazabiliriz.

Şimdi keyfi bir $X\in\ell_\infty(E)$ dizisi alalım. Bu taktirde Lemma 3.2.1 den $\forall n$,

$$\begin{aligned}
|A_n(X)| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}x_k)\Big| \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\big|(a_{nk}x_k)\big| \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sup\big(\sum_{i\in(E_k)}(a_{ni})\big)\Big|\,\|X\|_E
\end{aligned}$$

Tersine olarak kabul edelim ki $A\in\{\ell_\infty(E),\ell_\infty\}$ olsun. Şimdi $x=(x_i)$ dizisini $x_i=sgn(a_{ni})$ biçiminde tanımlayalım. Burada

$$|a_{ni}|=\begin{cases}\sup\limits_{j\in E_k}|a_j|, & i\in E_k\\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

şeklindedir. Bu şekilde tanımlı $x=(x_i)$ dizisi için $x\in\ell_\infty(E)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $Ax\in\ell_\infty$ olur ve (3.2.4) şartı sağlanmış olur.

Teorem 3.3.3. $A\in\{c_0(E),c_0\}$ olması için gerek ve yeter koşul (3.3.7) ve (3.3.8) şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $A\in\{c_0(E),c_0\}$ olsun. Şimdi $e^k=(e_i^k)_{i=1}^{\infty}$ dizisini

$$e_i^k = \begin{cases} 1, & i \in E_k \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $e^k \in c_0(E)$ olduğu açıktır ve dolayısı ile de $Ae^k \in c_0$ dır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} a_{ni}e^k = 0$$

dır. Burada

$$a_{ni} = \begin{cases} \sup_{\ell\in E_k}(|a_{ni}|), & k = 1, 2, ... \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

biçimindedir. Dolayısı ile

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\ell\in E_k} |a_{ni}|e^k = \lim_{n\to\infty} \sup_{\ell\in E_k} |a_{ni}| = 0$$

Bu ise (3.3.8) şartının gerekliliğini ispatlar. (3.3.7) şartının gerekliliği Teorem 3.2.1 ile benzer olarak yapılabilir.

Tersine olarak (3.3.7) ve (3.3.8) sağlansın. Keyfi bir $x = (x_k) \in c_0(E)$ alalım. $\forall x \in c_0(E)$ için

$$\begin{aligned} |A_n(X)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i\in E_k} a_{ni}x_i \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{i\in E_k} |a_{ni}| \left| \sum_{i\in E_k} x_i \right| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sup_{i\in E_k} |a_{ni}| \left| \sum_{i\in E_k} x_i \right| \\ &\leq \|x\|_E \sum_{k=1}^{m} \sup_{i\in E_k} |a_{ni}| + \sup_{k\geq m+1} \left| \sum_{i\in E_k} x_i \right| \sum_{k=m+1}^{\infty} \sup_{i\in E_k} |a_{ni}| \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in E_k} |a_{ni}| = 0$$

olması sebebiyle yeterince büyük m ve n doğal sayıları için

$$\sup_{k\geq m+1} |\sum_{i\in E_k} x_i| < \varepsilon \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{m} \sup_{i\in E_k} |a_{ni}| < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu ise $Ax \in c_0$ olması anlamına gelir.

Teorem 3.3.4. $A \in \{c(E), c_0\}$ olması için gerek ve yeter koşul (3.3.7),(3.3.8),(3.3.9) şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $A \in \{c(E), c_0\}$ olsun. $e^k \in c(E)$ olduğundan $k = 1, 2, ...$ için $Ae^k \in c_0$'dır. Bu ise $\left\{\sup_{i\in E_k} |a_{ni}|\right\}_{k=1}^{\infty} \in c_0$ olmasını gerektirir ki böylece (3.2.5) şartı sağlanır. Şimdi (3.2.6) şartının gerekliliğini gösterelim. $e = (e_i) = \{1, 1, ...\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda $c \in c(E)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$A_e = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\ell\in E_k} |a_{n\ell}|\right)_{n=1}^{\infty} \in c_0$$

olur ki bu da (3.2.6) şartının gerekliliğini gösterir. (3.3.7) şartının sağlandığı aşikardır.

Tersine olarak (3.3.7),(3.3.8),(3.3.9) şartı sağlansın. Herhangi bir $x \in c(E)$ dizisini alalım. Bu taktirde

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i\in E_k} x_i = \ell$$

olacak şekilde sonlu bir ℓ sayısı mevcuttur. Şimdi $y = (y_i)$ dizisini

$$y_i = \frac{1}{|E_k|}, \quad (i \in E_k)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu taktirde

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x_k - y_k) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}y_k = s_n + t_n$$

yazılabilir. Burada

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x_k - y_k) \quad t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}y_k$$

dır. $x_k - y_k \in c_0 E$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

dır. Bu yüzden teorem 3.2.2 den dolayı $A \in \{c_0(E), c_0\}$ olur. Diğer taraftan

$$t_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i\in E_k} |a_{ni} y_i| \leq \ell \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{i\in E_k} |a_{ni}|$$

olduğundan (3.3.9) şartı göz önünde bulundurulursa

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak göstermiş olduk ki A matrisi $\{c(E), c(0)\}$ sınıfına aittir.

4. $\ell_p(E)$ BLOK DİZİ UZAYI

4.1. $\ell_p(E)$ BLOK DİZİ UZAYI

Bu bölümde

$$\ell_p(E) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{j \in E_n} x_j \right|^p < \infty \right\}$$

dizi uzayının bazı cebirsel ve topolojik özellikleri incelenecektir.

Teorem 4.1.1. $\ell_p(E)$ cümlesi diziler üzerinde tanımlanan koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır.

İspat. $\theta = (0) \in \ell_p(E)$ olduğundan $\ell_p(E)$ cümlesi boş değilidir.

$x, y \in \ell_p(E)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Şimdi $(\alpha x + y) \in \ell_p(E)$ olduğunu gösterelim.

$$\left| \sum_{j \in E_n} (\alpha x_j + y_j) \right| = \left| \sum_{j \in E_n} \alpha x_j + \sum_{j \in E_n} y_j \right| \leq \left| \sum_{j \in E_n} \alpha x_j \right| + \left| \sum_{j \in E_n} y_j \right|$$

olduğundan

$$\sum_n \left| \sum_{j \in E_n} \alpha x_j + y_j \right|^p \leq \sum_n \left\{ | \sum_{j \in E_n} \alpha x_j | + | \sum_{j \in E_n} y_j | \right\}^p$$

yazılabilir. $1 \leq p < \infty$ için Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\left[\sum_n \left| \sum_{j \in E_n} \alpha x_j + y_j \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_n \left| \sum_{j \in E_n} \alpha x_j \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_n \left| \sum_{j \in E_n} y_j \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left|\alpha\right| \left\{ \sum_n \left| \sum_{j \in E_n} x_j \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_n \left| \sum_{j \in E_n} y_j \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$< \infty$$

elde edilir. Bu ise $(\alpha x + y) \in \ell_p(E)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.2. $\ell_p(E)$ blok dizi uzayı

$$\|x\|_{p,E} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sum_{j\in E_n} x_j\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlı $\|.\|_{p,E}$ ile bir semi-normlu uzaydır.

İspat. $X = (1,-1,0,0,.....)$ ve $E_n = \{2n-1, 2n\}$

$$\begin{aligned}\|x\|_{p,E} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sum_{j\in E_n} x_j\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big|x_{2n-1}+x_{2n}\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$n = 1$ için $\left(|x_1 + x_2|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$n = 2$ için $\left(|x_3 + x_4|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$

.

.

.

$\|x\|_{p,E} = 0$ fakat $x = (1,-1,0,0,....) \neq 0$ olduğundan dolayı $\ell_p(E)$ blok dizi uzayı

$$\|x\|_{p,E} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sum_{j\in E_n} x_j\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlı $\|.\|_{p,E}$ ile bir semi-normlu uzaydır.

Not 4.1.3. $\ell_p(E)$ block dizi uzayını üçgensel bir matrisin etki alanı olarakta düşünebiliriz. Bunun için $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisini

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{eğer} \quad k \in E_n, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

biçiminde almak yeterlidir. Bu durumda aşağıdaki önermeyi ifade edebiliriz.

Önerme 4.1.4. $\ell_p(E) = (\ell_p)_A$ dır.

İspat. Özel olarak $n = 1, 2, ...$ için $E_n = \{n\}$ alınırsa ,

$$\begin{aligned}
(\ell_p)_A &= \Big\{ x = (x_k) \in \omega : Ax \in \ell_p \Big\} \\
&= \Big\{ x = (x_k) \in \omega : \Big\{ \sum_k a_{nk} x_k \Big\} \in \ell_p \Big\} \\
&= \Big\{ x = (x_k) \in \omega : \Big\{ \sum_{k \in E_n} a_{nk} x_k + \sum_{k \notin E_n} a_{nk} x_k \Big\} \in \ell_p \Big\} \\
&= \Big\{ x = (x_k) \in \omega : \Big\{ \sum_{k \in E_n} x_k \Big\} \in \ell_p \Big\} \\
&= \Big\{ x = (x_k) \in \omega \sum_n \Big| \sum_{k \in E_n} \Big|^p < \infty \Big\} \\
&= \ell_p(E)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5. $M = \Big\{ x = (x_n) : \sum_{j \in E_n} x_j = 0, \forall n \Big\}$ olsun. $\ell_p(E)/M$ bölüm uzayı ℓ_p uzayına lineer olarak izomorftur yani

$$\ell_p(E)/M \cong \ell_p$$

dir.

İspat. $\forall x \in \ell_p(E)$ için

$$Tx = \Big(\sum_{j \in E_n} x_j \Big)_{n=1}^{\infty}$$

biçiminde tanımlanan

$$T : \ell_p(E) \to \ell_p$$

dönüşümünü göz önüne alalım. T'nin lineerliği aşikardır. $y \in \ell_p$ ve her n için $\alpha_n = |E_n|$ olarak alınırsa her $k \in E_n$ için $x_k = y_n/\alpha_n$ yardımıyla $x = (x_k)$ dizisini tanımlayalım. $x \in \ell_p(E)$ ve $T_x = y$ olduğu açıktır ve dolayısıyla T dönüşümü örtendir. Birinci izomorfizm teoremini uygulayarak

$$\ell_p(E)/M \cong \ell_p$$

elde ederiz.

Teorem 4.1.6. $p = 2$ olması durumu hariç $\ell_p(E)$ uzayı bir yarı iç çarpım uzayı değildir.

İspat.

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j \in E_n} x_i y_j$$

ifadesini tanımlarsak, bu $\ell_2(E)$ üzerinde bir yarı iç çarpımdır ve

$$|||x|||_{2,E}^2 = < x, x >$$

tir. Şimdi;

$$\sum_{j\in E_1} x_j = 1, \sum_{j\in E_2} x_j = 2, \sum_{j\in E_3} x_j = \sum_{j\in E_4} x_j = ... = 0$$
$$\sum_{j\in E_1} y_j = 1, \sum_{j\in E_2} y_j = \sum_{j\in E_3} y_j = ... = 0$$

olarak x ve y dizileri düşünüldüğünde,

$$|||x+y|||_{p,E}^2 + |||x-y|||_{p,E}^2 \neq 2\bigg(|||x|||_{p,E}^2 + |||y|||_{p,E}^2\bigg) \quad (p \neq 2)$$

olduğu görülür.

$$\big(2^p + 1\big)^{\frac{2}{p}} + 2^{(\frac{2}{p})+1} = 9$$

denklemi yalnız $p = 2$ durumunda geçerli olacağından $\ell_p(E)$ uzayı üzerindeki yarınorm paralelkenar eşitliğini sağlamaz ki bu da, yarınormun yarı iç çarpımdan elde edilemeyeceği anlamına gelir. Böylece, $\ell_p(E)$ uzayı $p \neq 2$ için bir yarı iç çarpım uzayı değildir.

4.2. $\ell_p(E)$ DİZİ UZAYININ $\alpha-$,$\beta-$ DUALLERİ

Bu kısımda $\ell_p(E)$ dizi uzayının $\alpha-$ ve $\beta-$ duallerini hesaplayacağız.

Teorem 4.2.1. d_q cümlesini, $1 < p < \infty$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ olacak şekilde

$$d_q = \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} (\sup_{i\in E_k} |a_i|^q) < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu taktirde $\big\{\ell_p(E)\big\}^\beta = d_q$ dır.

İspat. Keyfi bir $a \in d_q$ alalım. $E = (E_n)$ pozitif tam sayıların bir parçalanması olduğundan Hölder Eşitsizliğince $\forall x \in \ell_p(E)$ için

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i\in E_k} a_i x_i\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{i\in E_k}|a_i|\right)\left|\sum_{i\in E_k} x_i\right| \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sup|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\sum_{i\in E_k} x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise $ax \in cs$ olmasını gerektirir. Dolayısı ile $a \in \{\ell_p(E)\}^{\beta}$ olur. O halde $d_q \subset \left\{\ell_p(E)\right\}^{\beta}$ kapsamı sağlanır. Şimdi kabul edelim ki $a \in \left\{\ell_p(E)\right\}^{\beta}$ keyfi olsun. $n = 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned}
f_n: \ \ell_p(E) &\to \mathbb{R} \\
x &\to f(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in E_k} a_i x_i
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan f_n lineer fonksiyonelini göz önüne alalım. $\forall x \in \ell_p(E)$ için

$$|f_n(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\sup|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\sum_{i\in E_k} x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılabilir. Dolayısı ile f_n lineer fonksiyoneli sınırlıdır ve

$$\|f_n\| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\sup|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.12}$$

sağlanır. Şimdi (4.2.12) eşitsizliğinin ters yönünü kanıtlayacağız. $1 \leq i \leq \max(E_n)$ olacak biçimde bir i indeksinin var olduğunu ve de $a_i \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Genel terimi $x_i = (sgna_i)|a_i|^{q-1}$ biçiminde tanımlı $x = (x_i)$ dizisini göz önüne alalım. Burada

$$a_{nk} = \begin{cases} \sup\limits_{j\in E_k}|a_j|, & 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$\left|\sum_{j\in E_k} x_j\right| = \sup_{j\in E_k}|a_j|^{q-1}, \quad x \in \ell_p(E)$$

için,

$$\|f_n\| \geq \frac{|f_n(x)|}{\||x\||_{p,E}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sup_{j\in E_k} |a_j|^q}{\left(\sum_{k=1}^{n} \sup_{j\in E_k} |a_j|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sup_{i\in E_k} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.13}$$

elde edilir. (4.0) ve (4.2) birleştirilirse $n = 1, 2, ...$ için

$$\|f_n\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \sup_{i\in E_k} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. $a \in \left\{\ell_p(E)\right\}^{\beta}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_a : \quad \ell_p(E) \quad & \rightarrow \mathbb{R} \\ x \quad & \rightarrow f_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i\in E_k} a_i x_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f_a dönüşümü iyi tanımlıdır ve lineerdir ve de aynı zamanda $\{f_n\}$ dizisi f_a- ya noktasal yakınsaktır.

Banach- Steinhaus teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f_a\| &= \sup_n \|f_n\| < \infty \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_{i\in E_k} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \\ &\Rightarrow a \in d_q \end{aligned}$$

4.3. $\ell_p(E)$ DİZİ UZAYI ÜZERİNDE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu kısımda $\ell_p(E)$ dizi uzayından ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarına bazı matris sınıfları karakterize edildi. Şimdi temel sonuçları ispatlamada ihtiyaç duyacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.3.1. Eğer $a = (a_k) \in W$ ise bu taktirde

$$\begin{aligned} f: \ \ell_p(E) &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $f-$ lineer fonksiyoneli sınırlıdır ve

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{i \in E_k} |a_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dır.

İspat.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in E_k} a_i x_i$$

olduğundan teoremin ispatı teorem 4.1.1 den elde edilir.

$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. Aşağıdaki şartları göz önüne alalım.

$$\sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{i \in E_k} |a_{ni}|^q \right) < \infty \quad (1 < q < \infty) \tag{4.3.14}$$

$$\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty \tag{4.3.15}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0 \quad (k = 1, 2, ...) \tag{4.3.16}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_{nk} = \ell_k \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, ...) \tag{4.3.17}$$

Teorem 4.3.2. $A \in \{\ell_p(E), \ell_\infty\}$ olması için gerek ve yeter koşul (4.3.14) şartının sağlanmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (4.3.14) şartı sağlansın. Bu şart altında ispat edeceğiz ki A matrisi $\{\ell_p(E), \ell_\infty\}$ sınıfına aittir. Teorem 4.2.1 den dolayı $A_n \in d_q$ olur.

Şimdi keyfi bir $x \in \ell_p(E)$ dizisi alalım. Bu taktirde Lemma 4.2.1. den dolayı

$$\forall n, \quad |A_n(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{i \in E_k} |a_{ni}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{p,E}$$

yazılabilir. Bu ise her bir $x \in \ell_p(E)$ için $Ax \in \ell_\infty$ olmasını gerektirir.

Teorem 4.3.3. $A \in \{\ell_P(E), c_0\}$ olması için gerek ve yeter koşul (4.3.14) ve (4.3.16) şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $A \in (\ell_p(E), c_0)$ olsun. Şimdi $e^k = (e_i^k)_{i=1}^{\infty}$ dizisini

$$e_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $e^k \in \ell_p(E)$ olduğu açıktır ve dolayısı ile de $Ae^k \in c_0$'dır. Tersine (4.3.14) ve (4.3.16) sağlansın.
Keyfi bir $x = (x_k) \in \ell_p(E)$ alalım. $\forall x \in \ell_p(E)$ için Hölder Eşitsizliğince

$$\begin{aligned}
\|A_n(x)\| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in E_k} a_{ni} x_i\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{i \in E_k} |a_{ni}| \left|\sum_{i \in E_k} x_i\right| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sup_{i \in E_k} |a_{ni}| \left|\sum_{i \in E_k} x_i\right| \\
&\leq \||x|\|_{p,E} \left(\sum_{k=1}^{m} \sup_{i \in E_k} |a_{ni}|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |\sum_{i \in E_k} x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \sup_{i \in E_k} |a_{ni}|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{i \in E_k} |a_{ni}| = 0$$

olması sebebiyle yeterince büyük m ve n doğal sayıları için

$$\left(\sum_{k=m+1} |\sum_{i \in E_k} x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ve

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \sup_{i \in E_k} |a_{ni}|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu ise $Ax \in c_0$ olması anlamına gelir.

Teorem 4.3.4. $A \in \{\ell_P(E), c\}$ olması için gerek ve yeter koşul (4.2.14) ve (4.2.17) şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. $A \in \{\ell_p(E), c\}$ olsun. (e^k) dizilerini kullanarak (4.2.17) şartının gerekliliği hemen görülür. (4.2.14) şartının gerekliliğinin ispatı da bu teoremin i kısmına benzerdir. Tersine kabul edelim ki (4.2.14) ve (4.2.17) şartları sağlansın. $B = (b_{nk})$ matrisinin elemanlarını $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk} = a_{nk} - l_k$$

biçiminde tanımlayalım. İlk olarak göstereceğiz ki B matrisi $(\ell_p(E), c_0)$ sınıfına aittir. $m > 0$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. (4.2.17) eşitliği gereğince

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in E_k} |a_{ni} - \ell_i| = 0$$

yazılabilir. lim sup özelliğinden

$$\forall n \geq N_k, \sup_{i\in E_k} |a_{ni} - \ell_i| \leq \frac{\varepsilon}{M^{\frac{1}{q}}}$$

olacak biçimde pozitif bir N_k sayısı mevcuttur. Şimdi N_k sayıları yardımıyla N sayısını

$$N = \max N_k \quad 1 \leq k \leq n$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde Minkowski eşitsizliği yardımıyla her $n \geq N$ için

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{M} \sup_{i\in E_k} |\ell_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{M} \sup_{i\in E_k} |a_{ni} - \ell_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{M} \sup_{i\in E_k} |a_{ni}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \varepsilon + \left(\sup_n \sum_{k=1}^{M} \sup_{i\in E_k} |a_{ni}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $M \to \infty$ ile limite geçilir ve (4.2.14) şartı gözönünde bulundurulursa $\ell_k \in d_q$ olduğu görülür. Bu ise $B \in \{\ell_p(E), c_0\}$ olması anlamına gelir. $Bx \in c_0$ olduğundan $\forall x \in \ell_p(E)$ için $Bx \in c_0$ dır. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k x_k \tag{4.3.18}$$

olması anlamına gelir. $\ell_k \in \{\ell_p(E)\}^\beta$ olduğundan Teorem 3.2.2 den dolayı

$$\forall x \in \ell_p(E), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k x_k < \infty$$

yazılabilir. Bu sonuç ve (4.3.18) eşitliği bize gösteriyor ki A matrisi $(\ell_p(E), c)$ sınıfına aittir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

5. BULGULAR VE SONUÇ

5.1. SONUÇ

Bu tezde 2015 yılında ilk kez tanımlanan blok dizi uzayları ele alınmıştır. 1. bölümde ele aldığımız konu ile ilgili literatür özeti yapılıp 2. bölümde tezde kullanacağımız bazı temel tanım, teorem ve eşitsizliklere yer verilmiştir. 3. bölümde ise $X \in \{c, c_0, \ell_\infty\}$ olmak üzere $X(E)$ blok dizi uzayını

$$X(E) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{i \epsilon E_n} x_i \right) \in X \right\}$$

olarak tanımladık ve bu uzayın normluğu, vektör uzayı olup olmadığı, semi-normluğu, $\ell_\infty(E)/M \cong \ell_\infty$ olduğu, $\alpha-, \beta-$ duallerini ve matris dönüşümlerini inceledik. 4. bölümde ise

$$\ell_p(E) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{j \in E_n} x_j \right|^p < \infty \right\}$$

olacak şekilde $\ell_p(E)$ blok dizi uzayınının normluğu, vektör uzayı olup olmadığı, semi-normluğu, $\ell_p(E)/M \cong \ell_p$ olduğu, $\alpha-, \beta-$ duallerini ve matris dönüşümlerini inceledik.

Tezde ele aldığımız konu güncelliği bakımından önemlidir. Bilhassa dizi uzayları çalışan araştırmacılar için kaynak niteliğindedir.

KAYNAKLAR

Aydın, C., 2000. İzometrik dizi uzayları ve sonsuz matrisler Doktora Tezi. İnönü Ün. Fen Bilimleri Ens., 202

Aydın, C., ve Başar, F., 2004. Some new difference sequence spaces. Applied Mathematics and Computation., **157**, 677-693

Başar, F., 1993. A note on the triagle limitation methods. Fırat Ün. Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi, **5(1)**, 113-117

Başar, F., 2000. Matrix transformations between certain sequence spaces of X_p and ℓ_p. Soochow J.Math, **26(2)**, 191-204.

Başar, F., ve Altay, B., 2003. On the space of sequence of p-bounded variation and related matrix mappings. Ukr.Math.J., **55**, 136-147

Başar, F., ve Aydın, C., 2004. On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c. Hokkaido Mathematical Journal, **33**, 383-398

Boss,J., and Peter, C., 2000. Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, 2000

Choudhary, B., and Nanda, S., 1989. Functional Analysis with Applications, John Winley and Sons Inc. New Delhi, 1989

Choudhary, B., and Nanda, S., 1989. Functional Analysis with Applications, John Winley and Sons Inc. New Delhi, 1989

Demiriz, S., ve Çakan, C., 2011. Some topological and geometrical properties of a new difference sequence space. Abstract and Applied Analysis., **2011**, 1-14

Foroutannia, D., ve Erfanmanesh, S., 2015. Some new semi-normed sequence spaces of non-absolute type and matrix transformations. Deparment of Mathematics Vali-e-Asr Universty of Rafsanjan., **4**, 96-108

Foroutannia, D., 2015. On the black sequence $\ell_p(E)$ and related matrix transformations. Deparment of Mathematics, Vali-e-As Universty of Rafsanjan, **39**, 830-841

Kızmaz, H., 1981. On certain sequence spaces I. Canad.Math.Bull, **25**, 169-176

Kızmaz, H., 1995. On certain sequence spaces II. Internal.J.Math.Sci, **18**, 721-724

Kirişçi, M., ve Başar, F., 2010. Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix. Mathematics with Applications., **60**, 1299-1309

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis, 55-65

I.J.Maddox, 1988. Elements of Functional Analysis, second ed., The University Press, Cambridge

Musayev, B., ve Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz (Birinci Baskı), Kütahya: Dumlupınar Ünv. Balcı Yayınları, 75-105

Ng, P. N. ve Lee, P. Y., 1978. Cesàro sequence spaces of non-absolute type. Comment. Math. Prace Mat., **20**, 429-433.

Wang C. S., 1978. On Nörlund sequence spaces. Tamkang J. Math, **9**, 269-274.

7.ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Gözde KILIÇ
Doğum Tarihi :08.02.1992
Doğum Yeri :TOKAT
Medeni Hali :EVLİ
Yabancı Dili :İNGİLİZCE
Telefon :0 544 299 17 03
E-posta :gozdekilic60@gmail.com

Eğitim:

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2019
Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2014
Lise	Atatürk Lisesi	2010