İKİNCİ BASAMAKTAN İNDİRGEME DİZİLERİ İLE HESSENBERG DETERMİNANTLARIN KARAKTERİZASYONU

MENŞUR TUĞBA (KAYAALP) YALÇIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2009

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Yücel ERCAN

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ömer AKIN

Anabilim Dalı Başkanı

Menşur Tuğba (KAYAALP) YALÇIN tarafından hazırlanan İKİNCİ BASAMAKTAN İNDİRGEME DİZİLERİ İLE HESSENBERG DETERMİNANTLARIN KARAKTERİZASYONU adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Emrah KILIÇ

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan :Yrd. Doç. Dr. Yücel TÜRKER ULUTAŞ

Üye :Yrd. Doç. Dr. Zülfükar SAYGI

Üye :Yrd. Doç. Dr. Neşe ÖMÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Menşur Tuğba (KAYAALP) YALÇIN

Üniversitesi : **TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü : **Fen Bilimleri Enstitüsü**
Anabilim Dalı : **Matematik**
Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Emrah Kılıç**
Tez Türü ve Tarihi : **Yüksek Lisans – Nisan 2009**

Menşur Tuğba (KAYAALP) YALÇIN

İKİNCİ BASAMAKTAN İNDİRGEME DİZİLERİ İLE HESSENBERG DETERMİNANTLARIN KARAKTERİZASYONU

ÖZET

Bu çalışmada genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile n boyutlu çeşitli Hessenberg matrislerin determinantları arasındaki bazı yeni ilişkiler verildi. Ayrıca pozitif bir k tamsayısı için, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin k-ardışık terimleri göz önüne alınarak n boyutlu çeşitli Hessenberg ve üç bant matrislerin determinantları ile aralarındaki ilişkiler elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Hessenberg matris, Hessenberg determinant, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş Lucas sayıları

University : TOBB University Of Economics and Technology
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Mathematics
Supervisor : Associate Professor Dr. Emrah KILIÇ
Degree Awarded and Date : M.Sc. – April 2009

Menşur Tuğba (KAYAALP) YALÇIN

CHARACTERIZATION OF HESSENBERG DETERMINANTS

WITH SECOND ORDER RECURRENCE RELATIONS

ABSTRACT

In this study, some relations between the generalized Fibonacci, Lucas numbers and determinants of some n dimensional Hessenberg matrices were given. Also for a positive integer k, k-consecutive terms of the generalized Fibonacci, Lucas sequences were considered and their relations with determinants of Hessenberg and tridiagonal matrices were obtained.

Keywords: Hessenberg matrix, Hessenberg determinant, generalized Fibonacci numbers, generalized Lucas numbers

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Doç. Dr. Emrah KILIÇ'a, tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve aynı odayı paylaştığım sevgili çalışma arkadaşlarıma, beni Yüksek Lisans yapmam için yüreklendiren, her zaman bana destek olan aileme ve eşim Serkan YALÇIN'a, bu tezi yazarken beni yalnız bırakmayarak yazım sürecinin kısalmasına vesile olan doğmamış bebeğimize teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
A_n	n boyutlu A kare matrisi
$detA$	A matrisinin determinantı
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
P_n	n. Pell sayısı
u_n	n. genelleştirilmiş Fibonacci sayısı
v_n	n. genelleştirilmiş Lucas sayısı
$\{u_n\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{v_n\}$	Genelleştirilmiş Lucas dizisi

1. GİRİŞ

Fibonacci sayıları her $n \geq 2$ doğal sayısı ve $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1.1}$$

indirgeme kuralı ile tanımlanır.

Lucas sayıları ise her $n \geq 2$ doğal sayısı ve $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{1.2}$$

indirgeme kuralı ile tanımlanır.

Benzer şekilde, Pell sayıları her $n \geq 2$ ve $P_0 = 0,\ P_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \tag{1.3}$$

kuralı ile tanımlanır.

Bugüne kadar Fibonacci ve Lucas dizilerinin birçok genelleştirilmesi tanımlanmıştır. Burada ikinci basamaktan en genel Fibonacci ve Lucas sayı dizileri göz önüne alınacaktır. Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ ve genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$; her $n \geq 2$ doğal sayısı için, $a^2 - 4b \neq 0$ olmak üzere sırasıyla $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ ve $v_0 = 2$, $v_1 = a$ başlangıç koşulları için

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \tag{1.4}$$

ve

$$v_n = av_{n-1} + bv_{n-2} \tag{1.5}$$

bağıntıları ile tanımlanır. (1.4) ve (1.5) eşitliklerinde a = 1 ve $b = 1$ alınırsa $u_n = F_n$ (n. Fibonacci sayısı) ve $v_n = L_n$ (n. Lucas sayısı) elde edilir. Benzer şekilde (1.4)' te $a = 2$ ve $b = 1$ alınarak $u_n = P_n$ (n. Pell sayısı) elde edilir.

$\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin karakteristik denklemi olan $x^2 - ax + b = 0$' ın kökleri α ve β olmak üzere $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin Binet formülleri

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{1.6}$$

ve

$$v_n = \alpha^n + \beta^n \tag{1.7}$$

şeklindedir. Burada $\alpha + \beta = a$ ve $\alpha\beta = b$' dir. Bu formül, bir sayı dizisinin $n.$ teriminin sadece n' ye ve sabitlere bağlı olarak verilmesi sebebiyle oldukça kullanışlı bir gösterimdir.

Bir A; $n \times n$ kare matrisinin determinantı $detA$ ile gösterilir ve n elemanlı bir kümenin simetri grubu S_n olmak üzere

$$detA = \sum_{\pi \epsilon S_n} sgn(\pi)\, a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)} \tag{1.8}$$

ile tanımlanır.

Bir n boyutlu $A_n = (a_{ij})$ matrisi için eğer $\mathrm{j} > (i+1)$ iken $a_{ij} = 0$ oluyorsa A_n matrisine "Alt Hessenberg Matris" denir. Açıkça A_n matrisi

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ddots & \vdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

formundadır. [1] nolu çalışmada her $n \geq 2$ için A_n Hessenberg matrisin determinantı

$$detA_n = a_{n,n} detA_{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{n-r} a_{n,r} \prod_{j=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} a_{j,j+1} detA_{r-1}$$

eşitliği ile verilmiştir. Ayrıca yazarlar

$$D_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} , \tag{1.9a}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} , \tag{1.9b}$$

$$C_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.9c}$$

ve

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 2 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{bmatrix} \tag{1.9d}$$

matrislerini göz önüne alarak $detD_n = F_{n+2}$, $detB_n = F_{2n}$, $detC_n = F_{2n+1}$ ve $detL_n = L_n$ sonuçlarını elde etmişlerdir.

[2] nolu çalışmada elemanları yalnızca 0 ve 1 olan n boyutlu bir alt Hessenberg matrisin determinantının maksimum değerinin F_n olduğu gösterilmiştir.

[3]' te çeşitli Hessenberg matrisler tanımlanarak bu matrislerin determinantları ile genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri arasında yeni bağıntılar elde edilmiştir. Bu yeni sonuçlar (1.9a-1.9c) ile ilgili verilen sonuçların genel durumlarıdır. Benzer şekilde [4] nolu çalışmada da bazı ilişkiler verilmiştir. Örneğin n boyutlu $R_{n,t}$ matrisi

$$R_{n,t} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanarak

$$detR_{n,t} = tF_{n+1} + F_n$$

olduğu gösterilmiştir. Açıkça $detR_{n,0} = F_n$, $detR_{n,3} = L_{n+2}$' dir. Ayrıca $R_{n,1}$ matrisi (1.9a)' daki D_n matrisidir.

Herhangi bir $n \times n$ "Üç Bant Matris"

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

formundadır. Tanım gereği bir üç bant matris aynı zamanda özel bir Hessenberg matristir. Strang [5,6]' da

$$det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = F_{n+1}$$

ve

$$det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = F_{2n+2}$$

olduğunu göstermiştir.

Üç bant matrislerin determinantları ile genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri arasındaki ilişkiler [7] nolu çalışmada

$$det\begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & \alpha+\beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = u_n$$

ve

$$det\begin{bmatrix} \alpha+\beta & 2\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & \alpha+\beta \end{bmatrix} = \alpha^n+\beta^n = v_n$$

şeklinde verilmiştir.

“Fibonacci Polinomu” ; $F_0(x) = 0,\ F_1(x) = 1$ başlangıç koşulları ve

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \qquad n \geq 2$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyon dizisidir. [8] nolu çalışmada Fibonacci polinomları ile Hessenberg determinantlar arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir. Örneğin,

$$det\begin{bmatrix} x+\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{x} & x+\frac{1}{x} & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^{n-1}\frac{1}{x} & (-1)^{n}\frac{1}{x} & \cdots & -\frac{1}{x} & x+\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & xt+1 \end{bmatrix} = F_n(x) + tF_{n+1}(x)$$

$$det\begin{bmatrix} x^2+2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x^2+2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x^2+2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & xt+1 \end{bmatrix} = F_{2n-1}(x) + tF_{2n}(x)$$

olduğu gösterilmiştir. Yukarıda $t = x$ alınırsa Fibonacci polinomunun terimleri elde edilir.

[9] nolu çalışmada ise bu polinom dizisi genelleştirilerek başlangıç koşulları $A_0 = a(x),\ A_1 = b(x)$ olan ve $n \geq 2$ için

$$A_{n+1}(x) = p(x)A_n(x) + q(x)A_{n-1}(x)$$

şeklinde tanımlanan $\{A_n(x)\}$ dizisi ile bazı üç bant matrislerin determinantları arasındaki ilişkiler verilmiştir. Örneğin,

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2},\ \ \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

olmak üzere n boyutlu $M_{n,k}$ matrisi

$$M_{n,k}=\begin{bmatrix} A_{k+c} & A_c(\alpha\beta)^{k/2} & 0 & 0 & 0 \\ (\alpha\beta)^{k/2} & \alpha^k+\beta^k & (\alpha\beta)^{k/2} & \ddots & \vdots \\ 0 & (\alpha\beta)^{k/2} & \alpha^k+\beta^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (\alpha\beta)^{k/2} \\ 0 & \cdots & 0 & (\alpha\beta)^{k/2} & \alpha^k+\beta^k \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış ve $detM_{n,k}=A_{nk+c}$ olduğu gösterilmiştir. Ayrıca matris metotları kullanılarak $\{A_n(x)\}$ polinom dizisinin trigonometrik gösterimleri elde edilmiştir.

(1.4) ve (1.5) ile verilen dizileri $\{u_n(a,b)\}$ ve $\{v_n(a,b)\}$ ile gösterelim. Bu durumda $\{u_n(a,1)\}$ ve $\{v_n(a,1)\}$ dizilerinin terimleri ile çeşitli Hessenberg determinantlar arasındaki ilişkiler [10,11] nolu çalışmalarda elde edilmiştir.

Pozitif bir k tamsayısı için [12] nolu çalışmada $\{u_{kn}\}$ ve $\{v_{kn}\}$ dizilerinin terimlerinin

$$u_{kn}=v_k u_{k(n-1)}+(-1)^{k+1}b^k u_{k(n-2)} \tag{1.10}$$

ve

$$v_{kn}=v_k v_{k(n-1)}+(-1)^{k+1}b^k v_{k(n-2)} \tag{1.11}$$

indirgeme bağıntılarını sağladıkları gösterilmiştir. Ayrıca yine aynı çalışmada $\{u_{kn}\}$ ve $\{v_{kn}\}$ dizilerinin terimlerinin, üç bant matrislerin determinantları ile ilgili gösterimleri kullanılarak bu dizilerin trigonometrik gösterimleri elde edilmiştir.

[13] nolu çalışmada Fibonacci ve Lucas dizilerinin alt dizileri ile üç bant matrisler arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir. Burada $M_{\alpha,\beta}(k)$ matrisi

$$m_{1,1} = F_{\alpha+\beta}\,, \qquad m_{2,2} = \left\lceil \frac{F_{2\alpha+\beta}}{F_{\alpha+\beta}} \right\rceil,$$

$$m_{j,j} = F_\alpha\,,\ 3 \le j \le k$$

$$m_{1,2} = m_{2,1} = \sqrt{m_{2,2}F_{\alpha+\beta} - F_{2\alpha+\beta}}\,,$$

$$m_{j,j+1} = m_{j+1,j} = \sqrt{(-1)^\alpha}\,,\ 2 \le j < k$$

şeklinde tanımlanarak $detM_{\alpha,\beta}(k) = F_{\alpha k+\beta}$ olduğu gösterilmiştir. Benzer şekilde $T_{\alpha,\beta}(k)$ matrisi

$$t_{1,1} = L_{\alpha+\beta}\,, \qquad t_{2,2} = \left\lceil \frac{L_{2\alpha+\beta}}{L_{\alpha+\beta}} \right\rceil,$$

$$t_{j,j} = L_\alpha\,,\ 3 \le j \le k$$

$$t_{1,2} = t_{2,1} = \sqrt{t_{2,2}L_{\alpha+\beta} - L_{2\alpha+\beta}}\,,$$

$$t_{j,j+1} = t_{j+1,j} = \sqrt{(-1)^\alpha}\,,\ 2 \le j < k$$

olarak tanımlanmış ve $detT_{\alpha,\beta}(k) = L_{\alpha k+\beta}$ olduğu gösterilmiştir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ İLE HESSENBERG DETERMİNANTLARIN KARAKTERİZASYONU

2.1. Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi

Bu bölümde çeşitli Hessenberg matrislerin determinantları ile genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin terimleri arasındaki ilişkiler verilecektir.

Her $n \geq 1$ için $R_n(a,b)$=$\left(r_{i,j}(a,b)\right)$ alt Hessenberg matris; her $i \in \{1,\dots,n\}$ için $r_{i,i}(a,b) = a^2 + b$, her $i \in \{1,\dots,n-1\}$ için $r_{i,i+1}(a,b) = b$ ve her $i > j$ için $r_{ij}(a,b) = b$ olarak tanımlansın.

Genel olarak $R_n(a,b)$ gösterimi için kısaca R_n kullanılacaktır. Açıkça R_n matrisi

$$R_n = \begin{bmatrix} a^2+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a^2+b & b & \ddots & \vdots \\ b & b & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \cdots & b & a^2+b \end{bmatrix}$$

formundadır. Şimdi R_n matrisinin determinantı ile $\{u_n\}$ dizisinin terimleri arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 2.1.1: Her $n \geq 1$ için

$$detR_n = a^{n-1}u_{n+2} \tag{2.1.1}$$

olur.

İspat: Bu teoremin ispatında, n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılacaktır. Kabul edelim ki $n = 1$ olsun. O halde

$$detR_1 = |a^2 + b| = a^2 + b = u_3$$

olup $n = 1$ için ifade doğrudur. Kabul edelim ki $n = 2$ olsun.

$$detR_2 = \begin{vmatrix} a^2 + b & b \\ b & a^2 + b \end{vmatrix} = a(a^3 + 2ab) = au_4$$

olduğundan ifade $n = 2$ için de doğrudur. Kabul edelim ki $n = 3$ olsun. Kolay bir hesaplama ile

$$detR_3 = \begin{vmatrix} a^2 + b & b & 0 \\ b & a^2 + b & b \\ b & b & a^2 + b \end{vmatrix} = a^2 u_5$$

eşitliği elde edilir. Kabul edelim ki $n - 1$ için ifade doğru olsun. Yani $detR_{n-1} = a^{n-2}u_{n+1}$ olsun. Şimdi iddianın n için de doğru olduğu gösterilecektir. $detR_n$ öncelikle $n.$ sütuna göre açılırsa

$$detR_n = (a^2 + b) \begin{vmatrix} a^2 + b & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a^2 + b & b & \ddots & \vdots \\ b & b & a^2 + b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \cdots & b & a^2 + b \end{vmatrix}$$

$$-b\begin{vmatrix} a^2+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a^2+b & b & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & a^2+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ b & b & \cdots & b & a^2+b & b \\ b & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix} \qquad (2.1.2)$$

elde edilir. Burada R_n matrisinin tanımı göz önüne alınır ve (2.1.2) eşitliğinin sağında bulunan ikinci determinantın hesabı sırasında $(n-1)$. satırdan $(n-2)$. satır çıkarılırsa,

$$detR_n = (a^2+b)detR_{n-1}$$

$$-b\begin{vmatrix} a^2+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a^2+b & b & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & a^2+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ b & b & \cdots & b & a^2+b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki determinant sırasıyla önce son satıra ve daha sonra son sütuna göre açılırsa

$$detR_n = (a^2+b)detR_{n-1}$$

$$-b^2a^2\begin{vmatrix} a^2+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a^2+b & b & \ddots & \vdots \\ b & b & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \cdots & b & a^2+b \end{vmatrix}$$

olarak bulunur. Burada R_n matrisinin tanımı göz önüne alınırsa,

$$detR_n = (a^2 + b)detR_{n-1} - b^2a^2detR_{n-3} \tag{2.1.3}$$

eşitliği bulunur. Tümevarım hipotezi gereği (2.1.3) eşitliği

$$detR_n = (a^2 + b)a^{n-2}u_{n+1} - b^2a^2a^{n-4}u_{n-1}$$

olarak elde edilir. $\{u_n\}$ dizisinin tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} detR_n &= a^n u_{n+1} + ba^{n-2}(au_n + bu_{n-1}) - b^2a^{n-2}u_{n-1} \\ &= a^n u_{n+1} + ba^{n-1}u_n \\ &= a^{n-1}(au_{n+1} + bu_n) \\ &= a^{n-1}u_{n+2} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

Şimdi $\{u_n\}$ dizisinin tek indisli terimlerinin Hessenberg determinantlar cinsinden gösterimleri için n boyutlu $H_n(a,b)$ Hessenberg matris aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$H_n = \begin{bmatrix} a^2+b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & a^2+b & -b & \ddots & \vdots \\ a^2 & a^2 & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2+b \end{bmatrix}.$$

Teorem 2.1.2: Her $n \geq 1$ için

$$detH_n = u_{2n+1} \tag{2.1.4}$$

olur.

İspat: Bu teoremin ispatı tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. Kabul edelim ki $n = 1$ olsun. Buna göre

$$detH_1 = |a^2 + b| = u_3$$

olur. O halde $n = 1$ için ifade doğrudur. Kabul edelim ki $n = 2$ olsun. O halde

$$detH_2 = \begin{vmatrix} a^2 + b & -b \\ a^2 & a^2 + b \end{vmatrix} = a^4 + 3a^2b + b^2 = u_5$$

olur ki ifade $n = 2$ için doğrudur. Kabul edelim ki $n = 3$ olsun. Bu durumda

$$detH_3 = \begin{vmatrix} a^2 + b & -b & 0 \\ a^2 & a^2 + b & -b \\ a^2 & a^2 & a^2 + b \end{vmatrix} = a^6 + 5a^4b + 6a^2b^2 + b^3 = u_7$$

olup ifade $n = 3$ için de doğrudur. Kabul edelim ki ifade $n - 1$ için doğru olsun, o halde $detH_{n-1} = u_{2n-1}$' dir. Buna göre ifadenin n için doğru olduğunu gösterelim. Eğer $n.$ sütuna göre $detH_n$ açılırsa

$$detH_n = (a^2+b)\begin{vmatrix} a^2+b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & a^2+b & -b & \ddots & \vdots \\ a^2 & a^2 & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2+b \end{vmatrix}$$

$$+b\begin{vmatrix} a^2+b & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & a^2+b & -b & \ddots & \vdots & 0 \\ a^2 & a^2 & a^2+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b & 0 \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2+b & -b \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

sonucuna ulaşılır. Burada H_n matrisinin tanımı göz önüne alınırsa

$$detH_n = (a^2+b)detH_{n-1}$$

$$+b\begin{vmatrix} a^2+b & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & a^2+b & -b & \ddots & \vdots & 0 \\ a^2 & a^2 & a^2+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b & 0 \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2+b & -b \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağında bulunan determinant, $(n-1)$. satırdan $(n-2)$. satır çıkarıldıktan sonra son sütuna göre açılırsa,

$$detH_n = (a^2+b)detH_{n-1}$$

$$+b(a^2+b)\begin{vmatrix} a^2+b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & a^2+b & -b & \ddots & \vdots \\ a^2 & a^2 & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2+b \end{vmatrix}$$

$$+b^2\begin{vmatrix} a^2+b & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & a^2+b & -b & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^2 & a^2 & a^2+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b & 0 \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2+b & -b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

olduğu görülür. Kolay bir hesaplama yapılarak ve H_n matrisinin tanımı göz önüne alınarak

$$detH_n = (a^2+b)detH_{n-1} + b(a^2+b)detH_{n-2} - b^3 detH_{n-3} \qquad (2.1.5)$$

sonucu elde edilir. Tümevarım hipotezi ve $\{u_n\}$ dizisinin indirgeme kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} detH_n &= (a^2+b)u_{2n-1} + b(a^2+b)u_{2n-3} - b^3u_{2n-5} \\ &= a^2u_{2n-1} + bu_{2n-1} + a^2bu_{2n-3} + b^2u_{2n-3} - b^3u_{2n-5} \\ &= a^2u_{2n-1} + bu_{2n-1} + a^2bu_{2n-3} + b^2(au_{2n-4} + bu_{2n-5}) \\ &\quad -b^3u_{2n-5} \\ &= a^2u_{2n-1} + bu_{2n-1} + a^2bu_{2n-3} + ab^2u_{2n-4} \\ &= a^2u_{2n-1} + bu_{2n-1} + ab(au_{2n-3} + bu_{2n-4}) \\ &= a^2u_{2n-1} + bu_{2n-1} + abu_{2n-2} \\ &= bu_{2n-1} + a(au_{2n-1} + bu_{2n-2}) \\ &= bu_{2n-1} + au_{2n} \\ &= u_{2n+1} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar. ■

$\{u_n\}$ dizisinin tek indisli terimleri için yukarıdaki ilişkiye benzer yeni bir ilişki $\{u_n\}$ dizisinin çift indisli terimler için aşağıda verilecektir. Bunun için n boyutlu $T_n(a,b)$ alt Hessenberg matris aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_n(a,b) = \begin{bmatrix} a^2 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & a^2+b & -b & \ddots & \vdots \\ a^2 & a^2 & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2+b \end{bmatrix}.$$

O halde aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 2.1.3: Her $n \geq 2$ için

$$detT_n = au_{2n} \tag{2.1.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Bu ispat, tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. Kabul edelim ki $n = 2$ olsun. Buna göre

$$detT_2 = \begin{vmatrix} a^2 & -b \\ a^2 & a^2+b \end{vmatrix} = a(a^3 + 2ab) = au_4$$

olup $n = 2$ için ispatı tamamlar.

Kabul edelim ki ifade $n-1$ için doğru olsun. Yani $detT_{n-1} = au_{2n-2}$ olsun. Eğer T_n ve H_n matrislerini göz önüne alır ve 1. satıra göre $detT_n$' i hesaplarsak

$$detT_n = a^2 detH_{n-1} + bdetT_{n-1} \tag{2.1.7}$$

olur. Tümevarım hipotezi ve Teorem 2.1.2' nin sonucunu kullanarak

$$\begin{aligned} detT_n &= a^2 u_{2n-1} + bau_{2n-2} \\ &= a(au_{2n-1} + bu_{2n-2}) \\ &= au_{2n} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.1.1, 2.1.2 ve 2.1.3' ün sonuçlarını kullanarak (1.9a)-(1.9c) ile verilen sonuçlar; $R_n(1,1) = D_n$, $H_n\,(1,1) = C_n$, $T_n(1,1) = B_n$ olarak elde edilir. Ayrıca bu teoremlerde yalnızca $b = 1$ alınırsa [10] nolu kaynakta verilen eşitlikler elde edilir. Böylece [1] ve [10]' da verilen sonuçların genelleştirilmiş olduğu görülür.

2.2.Genelleştirilmiş Lucas Dizisi

Önceki bölümde çeşitli alt Hessenberg matrislerin determinantları ile genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin terimleri arasındaki ilişkiler verilmiştir. Bu bölümde benzer ilişkileri genelleştirilmiş Lucas dizileri için vereceğiz.

Her $n \geq 2$ için, $K_n(a,b)$; n boyutlu alt Hessenberg matris aşağıdaki formda tanımlansın;

$$K_n = \begin{bmatrix} a^2+2b & 2b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a^2+b & b & \ddots & \vdots \\ b & b & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \cdots & b & a^2+b \end{bmatrix}.$$

Teorem 2.2.1: Her $n \geq 2$ için

$$detK_n = a^{n-1}v_{n+1} \tag{2.2.1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Açıkça $n = 2$ için

$$detK_2 = \begin{vmatrix} a^2+2b & 2b \\ b & a^2+b \end{vmatrix} = av_3$$

olup $n = 2$ için ifade doğrudur. Ayrıca $n = 3$ için

$$detK_3 = \begin{vmatrix} a^2+2b & 2b & 0 \\ b & a^2+b & b \\ b & b & a^2+b \end{vmatrix}$$

$$= a^6 + 4a^4b + 2a^2b^2$$

$$= a^2v_4$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $n = 4$ için,

$$detK_4 = \begin{vmatrix} a^2+2b & 2b & 0 & 0 \\ b & a^2+b & b & 0 \\ b & b & a^2+b & b \\ b & b & b & a^2+b \end{vmatrix}$$

$$= a^8 + 5a^6b + 5a^4b^2$$

$$= a^3v_5$$

olur, yani $n = 3$ ve $n = 4$ için de ifade doğrudur. $n > 4\ için\ detK_n$ ilk satırına göre açılır ve Teorem 2.1.1' deki R_n matrisi göz önünde bulundurulursa

$$detK_n = (a^2+2b)R_{n-1} - 2b \begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a^2+b & b & \ddots & \vdots \\ b & b & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \cdots & b & a^2+b \end{vmatrix} \qquad (2.2.2)$$

elde edilir. (2.2.2) eşitliğinin sağında bulunan determinantı hesaplamak için 1. sütundan 2. sütun çıkarılıp determinant önce ilk satırına ve daha sonra birinci sütununa göre açılırsa

$$
\begin{aligned}
detK_n = & \; (a^2+2b)R_{n-1} - 2b \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ -a^2 & a^2+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & b & \cdots & b & a^2+b \end{vmatrix} \\
& = (a^2+2b)R_{n-1} - 2b^2a^2 \begin{vmatrix} a^2+b & b & \ddots & \vdots \\ b & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a^2+b \end{vmatrix} \\
& = (a^2+2b)R_{n-1} - 2b^2a^2R_{n-3} \qquad (2.2.3)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.2.3) eşitliğinde Teorem 2.1.1' in sonucu ve $\{u_n\}$ dizisinin indirgeme kuralı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
detK_n &= (a^2+2b)a^{n-2}u_{n+1} - 2b^2a^2a^{n-4}u_{n-1} \\
&= a^n u_{n+1} + 2ba^{n-2}(au_n + bu_{n-1}) - 2b^2a^{n-2}u_{n-1} \\
&= a^n u_{n+1} + 2ba^{n-1}u_n \\
&= a^{n-1}(au_{n+1} + bu_n) + ba^{n-1}u_n \\
&= a^{n-1}u_{n+2} + ba^{n-1}u_n \\
&= a^{n-1}(u_{n+2} + bu_n)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri arasında

$$v_n = u_{n+1} + bu_{n-1} \tag{2.2.4}$$

ilişkisi olduğundan,

$$detK_n = a^{n-1}v_{n+1}$$

olduğu görülür, böylece ispat tanımlanır. ■

Şimdi n boyutlu $Y_n(a,b)$ matrisini $n \geq 2$ için

$$Y_n = \begin{bmatrix} a^2 & -2b & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & a^2+b & -b & \ddots & \vdots \\ a^2 & a^2 & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2+b \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 2.2.2: Her $n \geq 2$ için

$$detY_n = av_{2n-1} \tag{2.2.5}$$

olur.

İspat: $n = 2$ için,

$$detY_2 = \begin{vmatrix} a^2 & -2b \\ a^2 & a^2 + b \end{vmatrix} = a^4 + 3a^2 b = av_3$$

olduğundan ifade $n = 2$ için doğrudur. $n > 2$ için $detY_n$ ilk satırına göre açılarak Teorem 2.1.2 ve 2.1.3' teki H_n ve T_n matrislerinin tanımı göz önünde bulundurulursa

$$detY_n = a^2 detH_{n-1} + 2bdetT_{n-1} \tag{2.2.6}$$

elde edilir. (2.2.6) eşitliğinde Teorem 2.1.2 ve 2.1.3' ün sonuçları kullanılırsa

$$detY_n = a^2 u_{2n-1} + 2bau_{2n-2}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu son eşitlikte $\{u_n\}$ dizisinin genel kuralı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} detY_n &= a^2 u_{2n-1} + 2bau_{2n-2} \\ &= a(au_{2n-1} + bu_{2n-2}) + abu_{2n-2} \\ &= au_{2n} + abu_{2n-2} \\ &= a(u_{2n} + bu_{2n-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.2.4) eşitliği kullanılarak

$$detY_n = av_{2n-1}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi çift indisli genelleştirilmiş Lucas sayılarını göz önüne alacağız. Bunun için her $n \geq 2$ için *n* boyutlu M_n matrisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$M_n = \begin{bmatrix} a^2+2b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & a^2+b & -b & \ddots & \vdots \\ a^2 & a^2 & a^2+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ a^2 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2+b \end{bmatrix}.$$

Teorem 2.2.3: Her $n \geq 2$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$detM_n = v_{2n} \tag{2.2.7}$$

İspat: $n = 2$ durumu için

$$detM_2 = \begin{vmatrix} a^2+2b & -b \\ a^2 & a^2+b \end{vmatrix}$$

$$= a^4 + 4a^2b + 2b^2$$

$$= v_4$$

olup ifade doğrudur. $n > 2$ için $detM_n$ birinci satırına göre açılır ve H_n ile T_n matrislerinin tanımı göz önüne alınırsa

$$detM_n = (a^2 + 2b)detH_{n-1} + bdetT_{n-1} \tag{2.2.8}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.8)' de Teorem 2.1.2 ve 2.1.3' ün sonuçları ve $\{u_n\}$ dizisinin genel kuralı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} detM_n &= (a^2 + 2b)u_{2n-1} + bau_{2n-2} \\ &= a(au_{2n-1} + bu_{2n-2}) + 2bu_{2n-1} \\ &= (au_{2n} + bu_{2n-1}) + bu_{2n-1} \\ &= u_{2n+1} + bu_{2n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.4) eşitliği kullanılarak

$$detM_n = v_{2n}$$

sonucuna ulaşılır. ■

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİNİN k −ARDIŞIK TERİMLERİ İLE HESSENBERG DETERMİNANTLARIN KARAKTERİZASYONU

Önceki bölümlerde çeşitli alt Hessenberg matrislerin determinantları ile genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir. Bu bölümde pozitif bir k tamsayısı için, $\{u_{kn}\}$ ve $\{v_{kn}\}$ dizilerinin terimleri ile ilgili yeni bazı ilişkiler verilecektir.

3.1. Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisinin k-Ardışık Terimleri

Bu bölümde ilk olarak $\{u_{kn}\}$ dizisinin terimleri için Hessenberg determinantlar cinsinden gösterimler verilecektir. Bunun için $r = (-1)^{k+1}b^k$ olmak üzere, n boyutlu B_n alt Hessenberg matrisi aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$B_n = \begin{bmatrix} u_{3k} & ru_k & 0 & \cdots & 0 \\ ru_k & u_{3k} & ru_k & \ddots & \vdots \\ ru_k & ru_k & u_{3k} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & ru_k \\ ru_k & ru_k & \cdots & ru_k & u_{3k} \end{bmatrix}.$$

Teorem 3.1.1: Her $k, n \geq 1$ tamsayısı için

$$detB_n = u_{2k}^{n-1}u_{(n+2)k} \qquad (3.1.1)$$

olur.

İspat: Bu teoremin ispatı tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. $n = 1$ için durum aşikardır. Kabul edelim ki $n = 2$ olsun.

$$detB_2 = \begin{vmatrix} u_{3k} & ru_k \\ ru_k & u_{3k} \end{vmatrix} = u_{3k}^2 - r^2u_k^2 \tag{3.1.2}$$

olarak bulunur. (1.10) eşitliğindeki indirgeme kuralı göz önüne alınırsa (3.1.2) eşitliği

$$detB_2 = u_k v_k(u_k v_k^3 + 2ru_k v_k) = u_{2k}u_{4k}$$

şeklinde elde edilir. O halde ifade $n = 2$ için doğrudur. Kabul edelim ki $n = 3$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} detB_3 &= \begin{vmatrix} u_{3k} & ru_k & 0 \\ ru_k & u_{3k} & ru_k \\ ru_k & ru_k & u_{3k} \end{vmatrix} \\ &= (u_k v_k)^2(r^2u_k + 3u_k v_k^2 + u_k v_k^4) \\ &= u_{2k}^2 u_{5k} \end{aligned}$$

olup ifade $n = 3$ için de doğrudur. Tümevarım hipotezi gereği kabul edelim ki (3.1.1)' deki ifade $n - 1$ için doğru olsun, yani $detB_{n-1} = (u_k v_k)^{n-2}u_{(n+1)k}$ olsun. Buna göre, iddianın n için de doğru olduğu gösterilecektir. Eğer $detB_n$ son sütununa göre açılırsa

$$detB_n = u_{3k} \begin{vmatrix} u_{3k} & ru_k & 0 & \cdots & 0 \\ ru_k & u_{3k} & ru_k & \ddots & \vdots \\ ru_k & ru_k & u_{3k} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & ru_k \\ ru_k & ru_k & \cdots & ru_k & u_{3k} \end{vmatrix}$$

$$-ru_k \begin{vmatrix} u_{3k} & ru_k & 0 & \cdots & 0 \\ ru_k & u_{3k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ru_k & 0 \\ ru_k & \cdots & ru_k & u_{3k} & ru_k \\ ru_k & \cdots & ru_k & ru_k & ru_k \end{vmatrix} \qquad (3.1.3)$$

sonucu bulunur. B_n matrisinin tanımı göz önüne alınır ve (3.1.3) eşitliğinin sağındaki ikinci determinantın hesabı için $(n-1)$. satırdan $(n-2)$. satır çıkarılırsa,

$$detB_n = u_{3k}detB_{n-1}$$

$$-ru_k \begin{vmatrix} u_{3k} & ru_k & 0 & \cdots & 0 \\ ru_k & u_{3k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ru_k & 0 \\ ru_k & \cdots & ru_k & u_{3k} & ru_k \\ 0 & \cdots & 0 & ru_k - u_{3k} & 0 \end{vmatrix}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikteki determinant önce son satırına, daha sonra son sütununa göre açılır ve B_n matrisinin tanımı göz önüne alınırsa

$$detB_n = u_{3k}detB_{n-1} + (ru_k)^2(ru_k - u_{3k})detB_{n-3} \qquad (3.1.4)$$

eşitliği bulunur. Tümevarım hipotezi ve (1.10) eşitliği kullanılarak, (3.1.4) eşitliği

$$\begin{aligned} detB_n &= u_{3k}(u_k v_k)^{n-2}u_{(n+1)k} + (ru_k)^2(ru_k - u_{3k})(u_k v_k)^{n-4}u_{(n-1)k} \\ &= (u_k v_k)^{n-2}[u_k(v_k^2 + r)u_{(n+1)k} - r^2 u_k u_{(n-1)k}] \\ &= (u_k v_k)^{n-2}[u_k v_k^2 u_{(n+1)k} - r^2 u_k u_{(n-1)k} + ru_k(v_k u_{kn} + ru_{k(n-1)})] \\ &= (u_k v_k)^{n-2}(u_k v_k^2 u_{(n+1)k} + ru_k v_k u_{kn}) \\ &= (u_k v_k)^{n-1}(v_k u_{(n+1)k} + ru_{kn}) \\ &= u_{2k}^{n-1}u_{(n+2)k} \end{aligned}$$

şeklini alır. Böylece ifadenin *n* için doğru olduğu gösterilmiş olur. ■

Şimdi $\{u_{kn}\}$ dizisinin tek indisli terimlerinin Hessenberg matrislerin determinantları cinsinden gösterimleri için *n* boyutlu C_n matrisini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$C_n = \begin{bmatrix} u_{3k} & -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & 0 & \cdots & \vdots \\ u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & \ddots & \vdots \\ u_{2k}^2 u_k^2 & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & u_{3k} & -r \\ u_{2k}^2 u_k^{n-2} & u_{2k}^2 u_k^{n-3} & \cdots & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} \end{bmatrix}.$$

Teorem 3.1.2: Her $k, n \geq 1$ tamsayısı için

$$detC_n = {u_k}^{n-1}u_{(2n+1)k} \tag{3.1.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Bu ispat tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. $n = 1$ için ifade açıkça doğrudur. Kabul edelim ki $n = 2$ olsun.

$$detC_2 = \begin{vmatrix} u_{3k} & -r \\ u_{2k}^2 & u_{3k} \end{vmatrix} = u_k(u_k r^2 + 3ru_k v_k^2 + u_k v_k^4) = u_k u_{5k}$$

bulunur, yani ifade $n = 2$ için de doğrudur. Kabul edelim ki $n = 3$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} detC_3 &= \begin{vmatrix} u_{3k} & -r & 0 \\ u_{2k}^2 & u_{3k} & -r \\ u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} \end{vmatrix} \\ &= {u_k}^2(r^3 u_k + 6r^2 u_k v_k^2 + 5ru_k v_k^4 + u_k v_k^6) \\ &= {u_k}^2 u_{7k} \end{aligned}$$

olur. Böylece ifadenin $n = 3$ için de doğru olduğu görülür. Kabul edelim ki ifade $n - 1$ için doğru olsun, yani $detC_{n-1} = {u_k}^{n-2} u_{(2n-1)k}$ olsun. Buna göre, iddianın n için de doğru olduğunu gösterelim. Eğer C_n matrisinin determinantı $n.$ sütuna göre açılırsa

$$detC_n = u_{3k} \begin{vmatrix} u_{3k} & -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & 0 & \cdots & \vdots \\ u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & \ddots & \vdots \\ u_{2k}^2 u_k^2 & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & u_{3k} & -r \\ u_{2k}^2 u_k^{n-2} & u_{2k}^2 u_k^{n-3} & \cdots & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} \end{vmatrix}$$

$$
+ru_k \begin{vmatrix}
u_{3k} & -r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\
u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & \ddots & \vdots & \vdots \\
u_{2k}^2 u_k^2 & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & u_{3k} & -r & 0 \\
u_{2k}^2 u_k^{n-4} & u_{2k}^2 u_k^{n-5} & \cdots & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} & -r \\
u_{2k}^2 u_k^{n-2} & u_{2k}^2 u_k^{n-3} & \cdots & u_{2k}^2 u_k^3 & u_{2k}^2 u_k^2 & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2
\end{vmatrix}
$$

bulunur. Burada C_n matrisinin tanımı göz önüne alınır ve yukarıdaki eşitliğin sağındaki ikinci determinantın hesabı için eğer $(n-2)$. satır u_k^2 ile çarpılarak $(n-1)$. satırdan çıkarılırsa

$$
detC_n = u_{3k} detC_{n-1}
$$

$$
+ru_k \begin{vmatrix}
u_{3k} & -r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & 0 & \vdots & \vdots \\
u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -r & 0 \\
u_{2k}^2 u_k^{n-4} & u_{2k}^2 u_k^{n-5} & \cdots & u_{2k}^2 & u_{3k} & -r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & u_{2k}^2 u_k - u_k^2 u_{3k} & u_{2k}^2 + u_k^2 r
\end{vmatrix}
$$

elde edilir. Bu son eşitlikteki determinant $(n-1)$. satırına göre hesaplanırsa

$$
detC_n = u_{3k} detC_{n-1}
$$

$$
+r(u_{2k}^2 + u_k^2 r) \begin{vmatrix}
u_{3k} & -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & 0 & \cdots & \vdots \\
u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & \ddots & \vdots \\
u_{2k}^2 u_k^2 & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & u_{3k} & -r \\
u_{2k}^2 u_k^{n-4} & u_{2k}^2 u_k^{n-5} & \cdots & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k}
\end{vmatrix}
$$

$$-r(u_{2k}^2u_k-u_k^2u_{3k})\begin{vmatrix} u_{3k} & -r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{2k}^2u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} & \ddots & 0 & \vdots \\ u_{2k}^2u_k^2 & u_{2k}^2u_k & u_{2k}^2 & \ddots & -r & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & u_{3k} & 0 \\ u_{2k}^2u_k^{n-4} & u_{2k}^2u_k^{n-5} & \cdots & u_{2k}^2u_k & u_{2k}^2 & -r \end{vmatrix}$$

olarak bulunur. Son olarak C_n matrisinin tanımından

$$\begin{aligned} detC_n &= u_{3k}detC_{n-1}+r(u_{2k}^2+u_k^2r)detC_{n-2} \\ &\quad +r^2(u_{2k}^2u_k-u_k^2u_{3k})detC_{n-3} \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

eşitliğine ulaşılır. Tümevarım hipotezi ve (1.10) eşitliği ile (3.1.6) eşitliği

$$\begin{aligned} detC_n &= u_{3k}u_k^{n-2}u_{(2n-1)k}+r(u_{2k}^2+u_k^2r)u_k^{n-3}u_{(2n-3)k} \\ &\quad +r^2(u_{2k}^2u_k-u_k^2u_{3k})\,u_k^{n-4}u_{(2n-5)k} \\ &= u_k(v_k^2+r)\,u_k^{n-2}u_{(2n-1)k}+r[(u_kv_k)^2+u_k^2r]u_k^{n-3}u_{(2n-3)k} \\ &\quad +r^2[(u_kv_k)^2u_k-u_k^2u_k(v_k^2+r)]\,u_k^{n-4}u_{(2n-5)k} \\ &= u_k^{n-1}\big[(v_k^2+r)u_{(2n-1)k}+rv_k^2u_{(2n-3)k}+r^2u_{(2n-3)k}-r^3u_{(2n-5)k}\big] \\ &= u_k^{n-1}[(v_k^2+r)\,u_{(2n-1)k}+rv_k^2u_{(2n-3)k} \\ &\quad +r^2(v_ku_{(2n-4)k}+ru_{(2n-5)k})-r^3u_{(2n-5)k}] \\ &= u_k^{n-1}[(v_k^2+r)u_{(2n-1)k}+rv_k\big(v_ku_{(2n-3)k}+ru_{(2n-4)k}\big)] \\ &= u_k^{n-1}\big(v_k^2u_{(2n-1)k}+ru_{(2n-1)k}+rv_ku_{(2n-2)k}\big) \end{aligned}$$

$$= u_k^{n-1}[ru_{(2n-1)k} + v_k(v_k u_{(2n-1)k} + ru_{(2n-2)k})]$$

$$= u_k^{n-1}(ru_{(2n-1)k} + v_k u_{2nk})$$

$$= u_k^{n-1} u_{(2n+1)k}$$

şeklini alır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Bu bölümde son olarak $\{u_{kn}\}$ dizisinin çift indisli terimlerinin Hessenberg determinantlarla gösterimleri için, $n \times n$ D_n matrisini

$$D_n = \begin{bmatrix} u_{2k}^2 & -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{2k}^2 u_k & u_{3k} & -r & 0 & \cdots & \vdots \\ u_{2k}^2 u_k^2 & u_{2k}^2 & u_{3k} & -r & \ddots & \vdots \\ u_{2k}^2 u_k^3 & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & u_{3k} & -r \\ u_{2k}^2 u_k^{n-1} & u_{2k}^2 u_k^{n-3} & \cdots & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.1.3: Her $k \geq 1$ ve $n \geq 2$ tamsayısı için

$$detD_n = u_k^n v_k u_{2nk} \tag{3.1.7}$$

olur.

İspat: Tümevarım yöntemine göre, kabul edelim ki $n=2$ olsun. Bu durumda

$$detD_2 = \begin{vmatrix} u_{2k}^2 & -r \\ u_{2k}^2 u_k & u_{3k} \end{vmatrix} = u_k^2 v_k (u_k v_k^3 + 2ru_k v_k) = u_k^2 v_k u_{4k}$$

elde edilir, ki böylece ifadenin $n=2$ için doğru olduğu görülür. Kabul edelim ki $n=3$ olsun.

$$detD_3 = \begin{vmatrix} u_{2k}^2 & -r & 0 \\ u_{2k}^2 u_k & u_{3k} & -r \\ u_{2k}^2 u_k^2 & u_{2k}^2 & u_{3k} \end{vmatrix}$$

$$= {u_k}^3 v_k \left(u_k v_k^5 + 3r^2 u_k v_k + 4ru_k v_k^3\right)$$

$$= {u_k}^3 v_k u_{6k}$$

olur, yani ifade $n=3$ için de doğrudur. Şimdi kabul edelim ki $n=4$ olsun.

$$detD_4 = \begin{vmatrix} u_{2k}^2 & -r & 0 & 0 \\ u_{2k}^2 u_k & u_{3k} & -r & 0 \\ u_{2k}^2 u_k^2 & u_{2k}^2 & u_{3k} & -r \\ u_{2k}^2 u_k^3 & u_{2k}^2 u_k & u_{2k}^2 & u_{3k} \end{vmatrix}$$

$$= {u_k}^4 v_k \left(u_k v_k^7 + 6ru_k v_k^5 + 10r^2 u_k v_k^3 + 4r^3 u_k v_k\right)$$

$$= {u_k}^4 v_k u_{8k}$$

elde edilir. Bu durumda ifade $n=4$ için doğrudur. Kabul edelim ki ifade $n-1$ doğru olsun, yani $detD_{n-1}=u_k^{n-1}v_k u_{(2n+2)k}$ olsun. Şimdi iddianın n için de doğru olduğunu gösterelim. Gerekli hesaplamalar yapılır ve tümevarım hipotezi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
detD_n &= u_{3k}detD_{n-1}+r(u_{2k}^2+u_k^2r)detD_{n-2}\\
&\quad +r^2(u_{2k}^2u_k-u_k^2u_{3k})detD_{n-3}\\
&= u_{3k}u_k^{n-1}v_k u_{(2n-2)k}+r(u_{2k}^2+u_k^2r)u_k^{n-2}v_k u_{(2n-4)k}\\
&\quad +r^2(u_{2k}^2u_k-u_k^2u_{3k})u_k^{n-3}v_k u_{(2n-6)k}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (1.10) eşitliği ile

$$\begin{aligned}
detD_n &= u_k(v_k^2+r)\,u_k^{n-1}v_k u_{(2n-2)k}+r[(u_kv_k)^2+u_k^2r]u_k^{n-2}v_k u_{(2n-4)k}\\
&\quad +r^2[(u_kv_k)^2u_k-u_k^2u_k(v_k^2+r)]u_k^{n-3}v_k u_{(2n-6)k}\\
&= u_k^n v_k(v_k^2\,u_{(2n-2)k}+ru_{(2n-2)k}+rv_k^2u_{(2n-4)k}+r^2u_{(2n-4)k}\\
&\quad -r^3u_{(2n-6)k})\\
&= u_k^n v_k[v_k^2\,u_{(2n-2)k}+ru_{(2n-2)k}+rv_k^2u_{(2n-4)k}\\
&\quad +r^2\big(v_ku_{(2n-5)k}+ru_{(2n-6)k}\big)-r^3u_{(2n-6)k}]\\
&= u_k^n v_k(v_k^2\,u_{(2n-2)k}+ru_{(2n-2)k}+rv_k^2u_{(2n-4)k}+r^2v_ku_{(2n-5)k})\\
&= u_k^n v_k[v_k^2\,u_{(2n-2)k}+ru_{(2n-2)k}+rv_k(v_ku_{(2n-4)k}+ru_{(2n-5)k})]\\
&= u_k^n v_k(v_k^2\,u_{(2n-2)k}+ru_{(2n-2)k}+rv_ku_{(2n-3)k})
\end{aligned}$$

$$= u_k^n v_k [r u_{(2n-2)k} + v_k (u_{(2n-2)k} + r u_{(2n-3)k})]$$

$$= u_k^n v_k (r u_{(2n-2)k} + v_k \, u_{(2n-1)k})$$

$$= u_k^n v_k u_{2nk}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.1, 3.1.2 ve 3.1.3' te $k = 1$ alınırsa 2. bölümdeki R_n, H_n ve T_n matrisleri elde edilir.

3.2. Genelleştirilmiş Lucas Dizisinin k-Ardışık Terimleri

Bu bölümde $\{v_{kn}\}$ dizisinin terimlerinin, üç bant matrislerin determinantları cinsinden gösterimleri verilecektir.

[12] nolu çalışmada T_n matrisi şu şekilde tanımlanmıştır:

$$T_n = \begin{bmatrix} v_k & 2(-b)^{k/2} & 0 & \cdots & 0 \\ (-b)^{k/2} & v_k & (-b)^{k/2} & \cdots & \vdots \\ 0 & (-b)^{k/2} & v_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (-b)^{k/2} \\ 0 & \cdots & 0 & (-b)^{k/2} & v_k \end{bmatrix} .$$

Her $n \geq 1$ için $detT_n = v_{kn}$ eşitliği verilmiştir. Burada ise $\{v_{kn}\}$ dizisinin tek veya çift indisli terimlerini veren W_n matrisi tanımlanacaktır.

$r = (-1)^{k+1} b^k$ olmak üzere, W_n matrisi

$$W_n = \begin{bmatrix} v_{(m+2)k} & r & 0 & \cdots & 0 \\ v_{mk} r & v_{2k} & r & \cdots & \vdots \\ 0 & r & v_{2k} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r \\ 0 & \cdots & 0 & r & v_{2k} \end{bmatrix}$$

olsun, bu durumda aşağıdaki eşitlik verilebilir.

Teorem 3.2.1: Her $n,\ k \geq 1$ ve $m \geq 0$ tamsayısı için,

$$detW_n = v_{(2n+m)k} \tag{3.2.1}$$

olur.

İspat: Bu teoremin ispatı n üzerinden tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. Kabul edelim ki $n = 1$ olsun. Bu durumda

$$detW_1 = |v_{(m+2)k}| = v_{(m+2)k}$$

olur, yani ifade $n = 1$ için doğrudur. Kabul edelim ki $n = 2$ olsun.

$$detW_2 = \begin{vmatrix} v_{(m+2)k} & r \\ v_{mk}r & v_{2k} \end{vmatrix} = v_{(m+2)k}v_{2k} - v_{mk}r^2$$

(1.11)' deki indirgeme bağıntısı göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} detW_2 &= (v_k v_{(m+1)k} + rv_{km})(v_k^2 + 2r) - v_{mk}r^2 \\ &= v_k^3 v_{(m+1)k} + v_k^2 r v_{km} + 2rv_k v_{(m+1)k} + r^2 v_{km} \\ &= v_k^2(v_k v_{(m+1)k} + rv_{km}) + r(v_k v_{(m+1)k} + rv_{km}) + rv_k v_{(m+1)k} \\ &= v_k^2 v_{(m+2)k} + rv_{(m+2)k} + rv_k v_{(m+1)k} \end{aligned}$$

$$= v_k(v_k v_{(m+2)k} + rv_{(m+1)k}) + rv_{(m+2)k}$$

$$= v_k v_{(m+3)k} + rv_{(m+2)k}$$

$$= v_{(m+4)k}$$

elde edilir, bu da ifadenin $n = 2$ için doğru olduğunu gösterir. Şimdi ifadenin $n - 1$ için doğru olduğunu varsayalım. Yani $detW_{n-1} = v_{(2n-2+m)k}$ olsun. Bu durumda iddianın *n* için de doğru olduğu gösterilecektir. $detW_n$ son sütununa göre açılırsa

$$detW_n = v_{2k}\begin{vmatrix} v_{(m+2)k} & r & 0 & \cdots & 0 \\ v_{mk}r & v_{2k} & r & \cdots & \vdots \\ 0 & r & v_{2k} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r \\ 0 & \cdots & 0 & r & v_{2k} \end{vmatrix}$$
$$-r\begin{vmatrix} v_{(m+2)k} & r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v_{mk}r & v_{2k} & r & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & r & v_{2k} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r & v_{2k} & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix}$$

olur. W_n matrisinin tanımı göz önüne alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$detW_n = v_{2k}detW_{n-1} - r^2 detW_{n-2} \tag{3.2.2}$$

sonucu elde edilir. Tümevarım hipotezi ve (1.11) eşitliğinden, (3.2.2) eşitliği

$$detW_n = v_{2k}v_{(2n-2+m)k} - r^2 v_{(2n-4+m)k}$$

$$= (v_k^2 + 2r)v_{(2n-2+m)k} - r^2 v_{(2n-4+m)k}$$

$$= v_k^2 v_{(2n-2+m)k} + r\left(v_k v_{(2n-3+m)k} + r v_{(2n-4)k}\right)$$

$$+r v_{(2n-2+m)k} - r^2 v_{(2n-4+m)k}$$

$$= v_k(v_k v_{(2n-2+m)k} + r v_{(2n-3+m)k}) + r v_{(2n-2+m)k}$$

$$= v_k v_{(2n-1+m)k} + r v_{(2n-2+m)k}$$

$$= v_{(2n+m)k}$$

şeklinde bulunur. ■

4. SONUÇ

Bu çalışmada $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin tek ve çift indisli terimlerinin yanı sıra bu dizilerin k-ardışık terimleri ile alt Hessenberg matrislerin determinantları arasındaki ilişkiler verildi.

$$u_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{b^n} u_n \tag{4.1}$$

ve

$$v_{-n} = \frac{(-1)^n}{b^n} v_n \tag{4.2}$$

eşitlikleri kullanılarak negatif indisli genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için de benzer ilişkiler verilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Cahill, N. D., D'errico, J. R., Narayan, D. A., Narayan, J. Y., Fibonacci Determinants, The College Mathematics Journal, Volume 33, No 3 (May 2002), 221-225

[2] Ching, L. The Maximum Determinant Of An $n \times n$ Lower Hessenberg (0,1) Matrix, Linear Algebra And Its Applications, *Elsevier Science*, 1993

[3] Benjamin, A. T., Shattuck, M. A., Recounting Determinants For A Class Of Hessenberg Matrices, Electronic Journal Of Combinatorial Number Theory 7 (2007), A55

[4] Esmaeli, M., More On The Fibonacci Sequence And Hessenberg Matrices, Electronic Journal Of Combinatorial Number Theory 6 (2006), #A32

[5] Strang, G., Linear Algebra And Its Applications, *Brooks Cole*, 1988

[6] Strang, G., Introduction To Linear Algebra, *Wellesley-Cambridge Press*, 1993

[7] Kılıç, E., Taşçı, D., On The Second Order Linear Recurrences By Tridiagonal Matrices, Ars Combinatoria, Baskıda

[8] Esmaeli, M., Esmaeli, M., Polynomial Fibonacci-Hessenberg Matrices, Chaos, Solutions And Fractals (2008), Doi:10.1016/J.Chaos.2008.10.012

[9] Kılıç, E., Stanica, P., Factorizations And Representations Of Binary Polynomial Recurrences By Matrix Methods, Rocky Mountain Journal Of Matematics, Baskıda

[10] Kılıç, E., Taşçı, D., On The Generalized Fibonacci And Pell Sequences By Hessenberg Matrices, Ars Combinatoria, Baskıda

[11] Kılıç, E., Taşçı, D., Haukkanen, P., On The Generalized Lucas Sequences By Hessenberg Matrices, Ars Combinatoria, Baskıda

[12] Kılıç, E., Stanica, P., Factorizations And Representations Of Second Order Linear Recurrences With Indices In Arithmetic Progressions, Bulletin Of The Mexican Mathematical Society, Baskıda

[13] Cahill, N. D., Narayan, D. A., Fibonacci And Lucas Numbers As Tridiagonal Matrix Determinants, Fibonacci Quart 42 (2004), 216–221

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: YALÇIN, Menşur Tuğba (KAYAALP)
Uyruğu	: T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	: 09.07.1985 Ankara
Medeni Hali	: Evli
Telefon	: 0 (312) 292 43 28
Faks	: 0 (312) 292 41 21
E-mail	: tkayaalp@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	ODTÜ Matematik Bölümü	Haziran 2007

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
Eylül 2007- Nisan 2009	TOBB ETÜ	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce