

**GECİKMELİ AV-AVCI SİSTEMLERİNDE
HOPF ÇATALLANMA
VE
KARARLILIK ANALİZİ**

Gökçen ÇEKİÇ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Bölümü**

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Temmuz 2009

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Yücel ERCAN

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ömer AKIN

Anabilim Dalı Başkanı

Gökçen ÇEKİÇ tarafından hazırlanan GECİKMELİ AV-AVCI SİSTEMLERİNDE
HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans
tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI _____

Üye : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN _____

Üye : Doç. Dr. Yeter Şahiner _____

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

.....

Gökçen ÇEKİÇ

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı : Matematik Bölümü
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Canan Çelik Karaaslanlı
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Temmuz 2009

Gökçen ÇEKİÇ

**GEÇİKMELİ AV-AVCI SİSTEMLERİNDE HOPF ÇATALLANMA VE
KARARLILIK ANALİZİ**

ÖZET

Bu tezde gecikmeli lojistik bir av-avcı sisteminin dinamiği incelenmiş ve τ gecikme parametresi, çatallanma parametresi olarak seçilerek kararlılık ve Hopf çatallanma analizi çalışılmıştır. Ayrıca normal form teori ve center manifold teoremi kullanılarak kritik τ değerinde çatallanan periyodik çözümün yönü, kararlılığı ve periyodu elde edilmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar ise nümerik simülasyonlarla desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Av-avcı sistemi, Gecikmeli diferansiyel denklem, Hopf çatallanma, Kararlılık.

University : TOBB University of Economics and Technology
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Department of Mathematics
Supervisor : Associate Professor Dr. Canan Çelik Karaaslanlı
Degree Awarded and Date : M.Sc. – July 2009

Gökçen ÇEKİÇ

**HOPF BIFURCATION AND STABILITY ANALYSIS FOR DELAY
DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS**

ABSTRACT

In this thesis, the dynamics of a logistic delayed prey-predator system is investigated and choosing τ delay parameter as bifurcating parameter the stability and Hopf bifurcation analysis are studied. Moreover, by using normal form theory and center manifold theorem the direction, stability and the period of the bifurcating periodic solution at critical values τ are obtained. Also the theoretical results are supported by numerical simulations.

Keywords: Prey-predator system, Delayed differential equation, Hopf bifurcation, Stability.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Canan Çelik Karaaslanlı'ya ve kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine, ayrıca bu süreç boyunca desteklerini esirgemeyen asistan arkadaşlarıma ve beni her zaman destekleyip bugünlere getiren sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
KISALTMALAR	ix
SİMGE LİSTESİ	x
BÖLÜM 1	1
1.GİRİŞ	1
1.1. Av-Avcı Popülasyon Modeli	1
1.2. Literatürde Gecikmeli Sistem	2
1.3. Çalışılan Problem	5
BÖLÜM 2	7
2. ÇATALLANMA VE HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ	7
2.1. Çatallanma Teorisi	7
2.1.1. Çatallanma Türleri	7
2.1.2. Lokal Çatallanma ve Türleri	7
2.2. Hopf Çatallanma	8
2.2.1. Hopf Çatallanma Teoremi	8
2.2.2. Hopf Çatallanma Türleri	9
2.2.3. Hopf Çatallanma Teorisi	10
2.3. Center Manifold Teoremi	28

BÖLÜM 3	30
3. KARARLILIK ANALİZİ VE HOPF ÇATALLANMA	30
BÖLÜM 4	39
4. HOPF ÇATALLANMANIN YÖNÜ VE KARARLILIK ANALİZİ	39
BÖLÜM 5	58
5. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR	58
BÖLÜM 6	63
6. SONUÇLAR	63
KAYNAKLAR	64
EKLER	67
ÖZGEÇMİŞ	71

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Süperkritik Hopf Çatallanma	5
Şekil 2.2. Subkritik Hopf Çatallanma	6
Şekil 5.1. $\tau=3$ İken Av Popülasyon Yoğunluğunun Zamana Göre Grafiği	39
Şekil 5.2. $\tau=3$ İken Avcı Popülasyon Yoğunluğunun Zamana Göre Grafiği	41
Şekil 5.3. $\tau=3$ İken Av ve Avcı Popülasyon Yoğunluklarının Faz Portresi	45
Şekil 5.4. $\tau=3.8$ İken Av Popülasyon Yoğunluğunun Zamana Göre Grafiği	48
Şekil 5.5. $\tau=3.8$ İken Avcı Popülasyon Yoğunluğunun Zamana Göre Grafiği	49
Şekil 5.6. $\tau=3.8$ İken Avcı Popülasyonunun Av Popülasyonuna Göre Faz Portresi	51

KISALTMALAR

Kısaltmalar Açıklama

ADD	Adi Diferansiyel Denklem
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem
GDD	Gecikmeli Diferansiyel Denklem

SİMGE LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
x	Av popülasyon yoğunluğu
y	Avcı popülasyon yoğunluğu
	Av popülasyonunun büyüme oranı
r_1	Avcı popülasyonunun ölüm oranı
r_2	Gecikme ve çatallanma parametresi
τ	Çatallanma değeri
	Denge noktası
τ_k	Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen parametre
E^*	Çatallanan periyodik çözümün kararlılığını belirleyen parametre
	Çatallanan periyodik çözümün periyodunu belirleyen parametre
μ_2	
β_2	
T_2	

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

1.1 Av-Avcı Popülasyon Modeli

Son yıllarda, dinamik sistemlerde biyolojik modellerin dinamik sistemleri alanındaki birçok bilim adamı ve araştırmacı tarafından yapılan çalışmalar, popülasyon modelleri üzerine yoğunlaşmıştır. Kararlılık teorisinin, özellikle bu sistemlerin kararlılık ve çatallanma analizi üzerine önemli uygulamalarından bazıları, aynı çevreyi paylaşan, iki ya da daha çok biyolojik popülasyon arasındaki etkileşimleri içerir. İki tür içeren av-avcı sistemleri incelenirse, avcı olarak tanımlanan bir tür, av olarak tanımlanan diğer türü yiyerek beslenir. Avlar ise ortamda bulunan başka yiyeceklerle beslenir. Bunun bilinen bir örneği ormanda yaşayan tilkiler ve tavşanların popülasyonudur. Tavşanlar ormanda belirli bitkileri yerken, avcı olarak tabir edilen tilkiler, av olarak tabir edilen tavşanları yer. Doğada bu tip örnekler çoğaltılabilir. Bunlardan bilinenleri; köpek balığı (avcı) ve yenen balık (av), levrek (avcı) ve güneşbalığı (av), uğur böceği (avcı) ve yaprak (av).

1920’de av-avcı ilişkisinin klasik matematiksel modeli, Adriyatik Denizinde, köpek balığı ve yenen balık popülasyonunda gözlenen döngüsel değişiklikleri analiz etmek için İtalyan Matematikçi Vito Volterra (1840-1940) tarafından geliştirildi. Böyle bir model oluşturmak için $x(t)$ ile t anındaki avların sayısı, $y(t)$ ile t anındaki avcılarının sayısı gösterilirse, aşağıdaki kabuller yapılır.

1) Avcıların yokluğunda, av popülasyonu $\frac{dx}{dt} = ax(t)$, $a > 0$ ile doğal oranda büyüyecek,

2) Avların yokluğunda, avcı popülasyonu $\frac{dy}{dt} = -by(t)$, $b > 0$ ile doğal oranda azalacaktır.

3) Avcıların ve avların her ikisinin de mevcut olduğu durumda, büyüme ve azalma doğal oranlarındaki birleşimde iki türün bireyleri arasındaki karşılaşmaların sıklık oranına göre av popülasyonunda bir azalma ve avcı popülasyonunda bir büyüme vardır. Ayrıca, böyle karşılaşma sıklığının, xy çarpımı ile orantılı olduğu kabul edilir. Çünkü herhangi bir popülasyonun iki katına çıkması karşılaşma sıklığını da iki katına çıkarır ve böylece her iki popülasyonun iki kat artması karşılaşma sıklığını dört kata çıkarır. Sonuç olarak, avcılar tarafından avların yok edilmesi;

- x av popülasyonunda $-pxy$ azalmasının bir etkileşim oranı,

- y avcı popülasyonunda qxy artmasının bir etkileşim oranı ile sonuçlanır.

x av popülasyonu için $-pxy$ etkileşim oranı ile ax doğal oranı ve y avcı popülasyonu için qxy etkileşim oranı ile $-by$ doğal oranı birleştirildiği zaman,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - pxy = x(a - py) \\ \frac{dy}{dt} &= -by + qxy = y(-b + qx)\end{aligned}$$

av-avcı sistemi elde edilir. Burada a, b, p ve q pozitif sabitlerdir. Yukarıdaki sistemde av avcı denklemleri farklı sıralanmış olabilir, burada önemli olan avcı denkleminin negatif lineer terim ve pozitif etkileşim terimine, av denkleminin ise pozitif lineer terim ve negatif etkileşim terimine sahip olduğunun görülmesidir [5].

1.2 Literatürde Gecikmeli Sistemler

Popülasyon modellerinde, geçmişin etkilerini göstermek için, bu modellere gecikme terimi eklenmektedir. Bu tip modeller, gecikmeli popülasyon modelleri olarak adlandırılmaktadır. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda, gecikmeli popülasyon modelleri arasında, gecikmeli av-avcı sistemleri büyük önem kazanmıştır. Özellikle, literatürlerde gecikmeli sistemlerin periyodik çözümlerinin Hopf çatallanma analizi geniş yer tutmaktadır.

1973'de May [25],

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t)]\end{aligned}\tag{1.1}$$

gecikmeli av-avcı sistemini ortaya koymuş ve incelemiştir. Burada $x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla av ve avcının t anındaki popülasyon yoğunluklarıdır. $\tau \geq 0$ avın kendi türü içinde büyümesindeki gecikme parametresidir, $r_1 > 0$ av popülasyonunun büyüme oranı, $r_2 > 0$ ise avcının ölüm

oranını vermektedir. a_{ij} ($i, j = 1, 2$) parametrelerinin hepsi pozitif sabitlerdir. (1.1) sistemi, avcı türü olmaksızın $\dot{x}(t) = x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau)]$ gecikmeli lojistik denklemindeki av türünün zamana göre popülasyonunu vermektedir.

Av-avcı sistemleri üzerine yapılan bir çok çalışmada, araştırmacılar çözümlerin sınırlılığını, sürekliliğini, denge noktalarının lokal ve global kararlılığını ve sabit olmayan periyodik çözümlerin varlığını incelemişlerdir.

2005'de Song ve Wei [33], (1.1) sistemini incelemişler ve τ gecikme parametresini çatallanma parametresi olarak almışlardır. Sistemin pozitif denge noktası belirli koşullar altında mutlak kararlı çıkmıştır ancak bazı diğer koşullar altında bu denge noktası şartlı kararlıdır.

Yan ve Lie [41], (1.1) sisteminin ikinci denklemindeki avcı popülasyon yoğunluğuna τ gecikme parametresini eklemişler,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t - \tau)]\end{aligned}\tag{1.2}$$

ve (1.2) sistemini elde etmişlerdir. Sistemin tek pozitif denge noktası mutlak kararlı olarak bulunmuş, bu denge noktasının kararlılığının değişip kararsızlığa geçmesi ve tekrar kararlı olduğu görülmüştür. Ayrıca normal form teoremi ve center manifold teoremi kullanılarak çatallanan periyodik çözümlerin özellikleri belirlenmiştir.

Faria [6], (1.3) sisteminde iki farklı gecikme parametresi kullanmıştır ve birinci denklemden avcı popülasyon yoğunluğuna $\tau_1 \geq 0$ birinci gecikme parametresi ve ikinci denklemden av popülasyon yoğunluğuna $\tau_2 \geq 0$ ikinci gecikme parametresi eklemiştir.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t - \tau_1)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t - \tau_2) - a_{22}y(t)]\end{aligned}\tag{1.3}$$

Burada Faria, pozitif denge noktasının kararlılığını incelerken, τ_2 parametresini çatallanma parametresi olarak almıştır. Yapılan inceleme sonucunda Hopf çatallanmanın varlığı gösterilmiş ve oluşan Hopf çatallanmadan, çatallanan periyodik çözümlerin yönü ve kararlılığı be-

lirlenmiştir.

Yan and Zhang [43], çalışmalarında (1.2) ve (1.3) modellerini birleştirmişler ve

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t - \tau)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t - \tau) - a_{22}y(t - \tau)]\end{aligned}\tag{1.4}$$

(1.4) gecikmeli av-avcı sistemini elde etmişlerdir. Bu çalışmada lineerleştirilen sistemin pozitif denge noktası kararlı olarak bulunmuştur, τ gecikme parametresi çatallanma parametresi olarak alınmıştır, seçilen çatallanma parametresiyle pozitif denge noktası kararlılığını kaybetmiş ve Hopf çatallanma oluşmuştur. Normal form teoremi ve center manifold teoremi kullanılarak, Hopf çatallanmanın yönü, çatallanan periyodik çözümlerin kararlılığı belirlenmiştir.

2007'de Yan ve Li [42], aşağıdaki (1.5) mutualizm sistemini ele almışlardır.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t - \tau)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[r_2 + a_{21}x(t - \tau) - a_{22}y(t - \tau)]\end{aligned}\tag{1.5}$$

Burada $x(t)$ ve $y(t)$, sırasıyla mutualist yaşayan iki türün populasyon yoğunluğudur. Bu sistemde, bir türün yoğunluk oranının büyümesi diğerinin büyümesine ve bir türün yoğunluk oranının azalması diğerinin de azalmasına bağlıdır. Yapılan çalışmada, pozitif denge noktasının kararlılığının bozulup kararsız hale geçtiği ve Hopf çatallanma oluştuğu gösterilmiş ve çatallanan periyodik çözümlerin kararlılığı incelenmiştir.

Song, Han ve Peng [32], (1.6) gecikmeli rekabet modeli üzerinde çalışmışlardır.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= r_1x(t)[1 - x(t) - ay(t - \sigma)] \\ \dot{y}(t) &= r_2y(t)[1 - bx(t - \gamma) - y(t)]\end{aligned}\tag{1.6}$$

Bu sistemde r_j ($j = 1, 2$), a , b , σ ve γ parametreleri pozitif sabitlerdir, $x(t)$ ve $y(t)$ ise birbirleriyle rekabet halinde olan iki türün populasyon yoğunluğudur. Burada σ ve γ olmak üzere iki farklı gecikme terimi vardır. Bu çalışmada, pozitif denge noktasının kararlı olduğu, Hopf çatallanmanın varlığı ve normal form teoremi ve center manifold teoremi kullanılarak çatallanan periyodik çözümlerin yönü, türü ve kararlılığı incelenmiştir. Ayrıca sayısal metodlar

kullanılarak teorik olarak elde edilen bu sonuçlar desteklenmiştir.

1.3 Çalışılan Problem

(1.1) sisteminde, avcı popülasyon yoğunluğuna τ gecikme parametresi eklenirse, aşağıdaki gecikmeli av-avcı sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t - \tau)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t - \tau)]\end{aligned}\tag{1.7}$$

Oluşan (1.7) sisteminde $x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla av ve avcının t anındaki popülasyon yoğunluklarıdır. $r_1 > 0$ sabiti av popülasyonunun büyüme oranı, $r_2 > 0$ sabiti ise avcının ölüm oranını vermektedir. $\tau \geq 0$ avcı yoğunluğundaki gecikme parametresidir ve a_{ij} ($i, j = 1, 2$) parametrelerinin hepsi pozitif sabitlerdir.

Bu çalışmada, gecikmeli av-avcı sistemi olan (1.7) sistemi incelenmiştir ve bu çalışmanın amacı, (1.7) sisteminin kararlılığını ve τ gecikme parametresinin bu sisteme olan etkilerini incelemektir. Sistem analiz edilirken, ilk önce, sistemin karakteristik denkleminin denge noktasının kararlılığı incelendi ve gecikme parametresini de ihtiva eden genel kararlılık kriteri bulundu. Sonra, τ gecikme parametresinin çatallanma parametresi olarak seçilmesiyle, pozitif denge noktasının kararlılığını kaybettiği ve Hopf çatallanma meydana geldiği gözlenmiştir. Daha sonra, Hassard [10] tarafından tanımlanan normal form teoremi ve center manifold teoreminden yararlanılarak, (1.7) sisteminin Hopf çatallanma özelliklerini tanımlayan çatallanma sabitleri elde edildi. Hopf çatallanmanın türünün subkritik çatallanma olduğu ve belirli koşullar altında çatallanan periyodik çözümlerin kararsız olduğu tespit edildi. Son olarak, bu teorik sonuçları desteklemek için nümerik simülasyonlar yapıldı.

Yapılan bu çalışmada sırasıyla, 1. bölümde, gecikmeli av-avcı sisteminden, daha önce literatürde yapılan çalışmalardan ve analiz edilen sistemden bahsedildi.

2. bölümde, çatallanma teorisi ve çatallanma türleri, Hopf çatallanma teoremi, Hopf çatallanma türleri ve center manifold teoremi ifade edilmiştir.

3. bölümde, sistemin pozitif denge noktasının kararlılığı ve Hopf çatallanması belirlenmiştir.

4. bölümde, normal form ve center manifold teorisi kullanılarak oluşan Hopf çatallanmanın kararlılığı, türü ve yönü belirlenmiştir.

5. bölümde, kararlılık sonuçlarını destekleyen nümerik simülasyonlar yapılmıştır.

Son olarak, 6. bölümde, yapılan bu çalışmayla ulaşılan sonuç verilmiştir.

BÖLÜM 2

2. ÇATALLANMA VE HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ

2.1 Çatallanma Teorisi

Çatallanma, bir sistemde sistemin pozitif denge noktası etrafında seçilen çatallanma parametresindeki küçük değişikliğin, sistemin davranışındaki topolojik değişikliğe neden olmasıyla meydana gelir. Çatallanma analizi sürekli (ADD, KDD ve GDD ler ile modellenen) ve kesikli denklemler ile modellenen sistemler için incelenir.

2.1.1 Çatallanma Türleri

Lokal ve global olmak üzere iki tür çatallanma vardır.

1) Lokal Çatallanma: Lokal çatallanmada, sistemdeki parametrelerin değişimiyle denge noktasının, periyodik yörüngelerin veya invaryant kümelerin özelliklerindeki değişimler analiz edilir.

2) Global Çatallanma: Global çatallanma, sistemin invaryant kümelerinin birbirleriyle veya sistemin denge noktasıyla çakışması durumunda ortaya çıkar. Bu çatallanma türü, sistemin denge noktasının kararlılık analiziyle tamamen tespit edilemez.

2.1.2 Lokal Çatallanma ve Türleri

Parametredeki değişimin, denge noktasının kararlılığını değiştirmesiyle lokal çatallanma ortaya çıkar. Bu durum sürekli sistemlerde, sistemin özdeğerinin reel kısmının sıfır olmasına karşılık gelir. Sistemin faz portresindeki topolojik değişimler, denge noktasının keyfi komşuluklarına çatallanma parametresinin çatallanma noktasına doğru hareketiyle sınırlanır.

$$\dot{x} = f(x, \tau), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sürekli dinamik sistemi için Jakobian matrisin özdeğerinin reel kısmı sıfır iken (x^*, y^*) noktasında lokal çatallanma ortaya çıkar. Sistemin özdeğeri sıfır imajiner ise çatallanmanın çeşidi Hopf çatallanmadır.

$$x_{n+1} = f(x_n, \tau)$$

kesikli dinamik sistemi için Jakobian matrisin özdeğerinin modülü 1 dir. Sistemin özdeğeri 1 ise çatallanmanın çeşidi fold, transkritik veya tırmık çatallanmadır. Özdeğer -1 ise, flip tür çatallanma vardır. Özdeğerin diğer durumlarında ise Hopf çatallanma ortaya çıkar.

Özetle lokal çatallanma türleri:

- Fold (saddle-node) çatallanma
- Transkritik (Transcritical) çatallanma
- Tırmık (Pitchfork) çatallanma
- Flip (Period-doubling) çatallanma
- Hopf çatallanmadır.

2.2 Hopf Çatallanma

Hopf çatallanma aynı zamanda Poincare-Andronov-Hopf çatallanma adıyla da bilinir. Fransız Matematikçi Jules Henri Poincare (1854-1912), Rus Matematikçi Alexander A. Andronov (1901-1952) ve Alman Matematikçi Heinz Hopf (1894-1971) un teorileri bu konuda önem taşıdığı için bu teori bu bilim adamlarının adlarıyla anılmaktadır.

2.2.1 Hopf Çatallanma Teoremi

Teorem:(Hopf Çatallanma Teoremi):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}(\tau)x + a_{12}(\tau)y + f_1(x, y, \tau) \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(\tau)x + a_{22}(\tau)y + g_1(x, y, \tau) \end{aligned} \quad (2.1)$$

diferansiyel denklem sisteminde, orijin (2.1) sisteminin denge noktası ve

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ a_{21}(\tau) & a_{22}(\tau) \end{pmatrix}$$

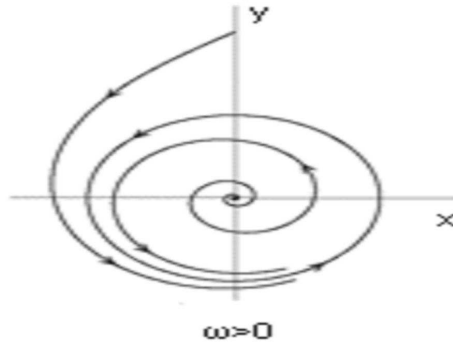
şeklinde tanımlanan $J(\tau)$ Jakobian matris, yeterince küçük tüm $|\tau|$ lar için geçerli olsun. Ayrıca $\alpha(0) = 0$ ve $\omega(0) \neq 0$ olmak üzere $J(\tau)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ dır öyle ki özdeğerler $\frac{d\alpha}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \neq 0$ olmak üzere imajiner eksenden geçsinler. $U \subset \mathbb{R}^2$ orijini içeren herhangi açık bir kümesi ve $\tau_0 > 0$ için $|\tau_k| < \tau_0$ koşulunu sağlayan öyle bir τ_k değeri vardır ki (2.1) diferansiyel denklem sistemi U da $\tau = \tau_k$ için periyodik bir çözüme sahiptir. (Periyod yaklaşık olarak $T = \frac{2\pi}{\omega(0)}$ dir.)

2.2.2 Hopf Çatallanma Türleri

Hopf çatallanma teoremi $\tau = \tau_k$ için periyodik çözümün varlığından bahseder. τ çatallanma parametresi, τ_k ise çatallanma değeridir.

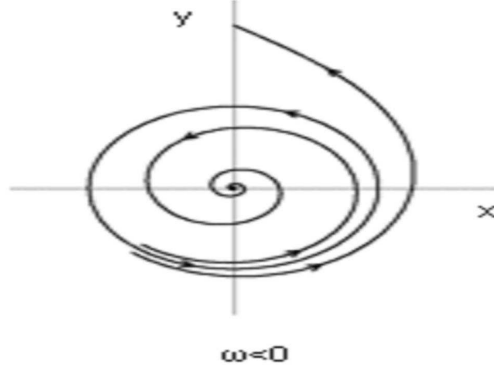
τ parametresi τ_k çatallanma değerinden geçerken süperkritik ve subkritik olmak üzere iki tür Hopf çatallanma oluşabilir.

(1) Süperkritik Hopf Çatallanma (Supercritical Hopf Bifurcation): Sistemin kararlı denge noktası asimtotik olarak kararlı bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya ‘Süperkritik Hopf Çatallanma’ adı verilir. (Şekil 2.1) [31]



Şekil 2.1. Süperkritik Hopf Çatallanma

(2) Subkritik Hopf Çatallanma (Subcritical Hopf Bifurcation): Sistemin kararlı denge noktası kararsız bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya ‘Subkritik Hopf Çatallanma’ adı verilir. (Şekil 2.2) [31]



Şekil 2.2. Subkritik Hopf Çatallanma

2.2.3 Hopf Çatallanma Teorisi

f düzgün bir fonksiyon olmak üzere,

$$\dot{x} = f(x, \tau), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

sistemi, $\tau = 0$ iken $x = 0$ denge noktasına ve $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ özdeğerlerine sahiptir. Kapalı fonksiyon teoreminden, $\lambda = 0$ Jakobian matrisin bir özdeğeri olmadığından, yeteri kadar küçük $|\tau|$ için orijinin bazı komşuluğunda, sistemin $x_0(\tau)$ tek denge noktası vardır. Koordinat değişikliği yapılmasıyla, denge noktası orijine taşınır. O halde, genellikle bir şey kaybetmeden kabul edilebilir ki, yeterince küçük $|\tau|$ için $x = 0$, sistemin denge noktasıdır. Böylece, F düzgün bir vektör fonksiyon olmak üzere

$$\dot{x} = A(\tau)x + F(x, \tau) \tag{2.2}$$

sistemi yazılabilir. $F_{1,2}$, F fonksiyonunun bileşenleri olup x deki Taylor açılımları en düşük kuadratik terimlerden başlar.

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} a(\tau) & b(\tau) \\ c(\tau) & d(\tau) \end{pmatrix}$$

$A(\tau)$ Jakobian matrisin özdeğerleri, $\sigma = \sigma(\tau) = a(\tau) + d(\tau) = \text{tr}A(\tau)$ ve $\Delta = \Delta(\tau) =$

$a(\tau)d(\tau) - b(\tau)c(\tau) = \det A(\tau)$ olmak üzere

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

karakteristik denkleminin kökleridir. Bu kökler,

$$\lambda_{1,2}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\sigma(\tau) \pm \sqrt{\sigma^2(\tau) - 4 \Delta(\tau)} \right)$$

şeklindedir.

$$\sigma(0) = 0, \quad \Delta(0) = \omega_0^2 > 0$$

Hopf çatallanma koşullarıdır. Yeterince küçük $|\tau|$ için

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{2}\sigma(\tau), \quad \omega(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\tau) - \sigma^2(\tau)}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau), \quad \alpha(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0$$

olmak üzere, özdeğerler

$$\lambda_1(\tau) = \lambda(\tau), \quad \lambda_2(\tau) = \overline{\lambda(\tau)}$$

dır.

Ayrıca sistemde, $\mu \in \mathbb{R}$ için $\tau = \tau_k + \mu$ ve

$$\begin{aligned} u_1(t) &= x(\tau t) - x^*, \\ u_2(t) &= y(\tau t) - y^* \end{aligned}$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa sistem $C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ de fonksiyonel diferansiyel denklem şekline dönüşür.

$L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C$ için,

$$L_\mu \phi = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} ax^* \phi_1 + bx^* \phi_2 \\ cy^* \phi_1 + dy^* \phi_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$f(\mu, \phi) = \begin{bmatrix} a\phi_1\phi_1 + b\phi_1\phi_2 \\ c\phi_2\phi_1 + d\phi_2\phi_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Riesz teoremine göre, $\theta \in [-1, 0]$ için, elemanları sınırlı değişimli 2×2 tipinde bir $\eta(\theta, \mu)$ matris fonksiyonu vardır öyle ki,

$$\phi \in C \text{ için } L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)\phi(\theta)$$

şeklinde yazılabilir. $\eta(\theta, \mu)$ fonksiyonunun

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} ax^* & 0 \\ cy^* & 0 \end{bmatrix} + (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & bx^* \\ 0 & dy^* \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilmesiyle, $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} -\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\mu, s)\phi(s), & \theta = 0. \end{cases}$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece sistem

$$\dot{u}_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t$$

formunda yazılır. Burada $\theta \in [-1, 0)$ için $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ dir. $\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$ için,

$$A^* \psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, 0) \psi(-t), & s = 0. \end{cases}$$

ve $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ iken bilineer iç çarpım

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0) \phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) \phi(\xi) d\xi$$

olarak tanımlanır. $A(0)$ ve A^* adjoint operatörlerdir. $A(0)$ ın $i\omega\tau_k$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q(\theta)$ ve A^* ın $-i\omega\tau_k$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $p(s)$ dir. $\langle p(s), q(\theta) \rangle = 1$ ve $\langle p(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$ olmak üzere

$$A(0)q(\theta) = i\omega\tau_k q(\theta)$$

ve

$$A^*p(s) = -i\omega\tau_k p(s)$$

yazılır.

$\mu = 0$ iken C_0 center manifoldu tanımlamak için, $u_t = (u_t^{(1)}, u_t^{(2)})$ sistemin çözümü olmak üzere, z ve \bar{z} , C_0 center manifoldun q ve p yönündeki lokal koordinatları belirlenir. C_0 center manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} W(t, \theta) &= W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = u_t - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\} \\ &= W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + W_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

dir. $u_t \in C_0$ çözümü için, $\mu = 0$ iken $\dot{u}_t = A(0)u_t + R(0)u_t$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \langle p(s), \dot{u}_t \rangle = \langle p(s), A(0)u_t + R(0)u_t \rangle \\ &= i\omega\tau_k z(t) + \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z \bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots,$$

iken

$$\dot{z}(t) = i\omega\tau_k z(t) + g(z(t), \bar{z}(t))$$

şeklinde yeniden yazılır.

$$u_t(u_{1t}(\theta), u_{2t}(\theta)) = W(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta)$$

ve

$$\begin{aligned} u_{1t}(0) &= z + \bar{z} + W_{20}^{(1)}(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0) z \bar{z} + W_{02}^{(1)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3), \\ u_{2t}(0) &= z\alpha + \bar{z}\bar{\alpha} + W_{20}^{(2)}(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(0) z \bar{z} + W_{02}^{(2)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3), \\ u_{1t}(-1) &= ze^{-i\omega\tau_k\theta} + \bar{z}e^{i\omega\tau_k\theta} + W_{20}^{(1)}(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(-1) z \bar{z} + W_{02}^{(1)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3), \\ u_{1t}(-1) &= z\alpha e^{-i\omega\tau_k\theta} + \bar{z}\bar{\alpha} e^{i\omega\tau_k\theta} + W_{20}^{(2)}(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(-1) z \bar{z} + W_{02}^{(2)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} u_t(\theta) &= W(t, \theta) + 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\} \\ &= W(t, \theta) + z(t)q(\theta) + \bar{z}(t)\bar{q}(\theta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_0(z(t), \bar{z}(t)) &= f(0, u_t(\theta)) \\ &= \tau_k \begin{pmatrix} au_t^{(1)}u_t^{(1)} + bu_t^{(1)}u_t^{(2)} \\ cu_t^{(2)}u_t^{(1)} + du_t^{(2)}u_t^{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots \\ &= \bar{q}^*(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitlikte her iki yanın katsayılarının karşılaştırılmasıyla g_{20} , g_{11} , g_{02} , g_{21} bulunur.

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{u}_t - 2Re\{\dot{z}(t)q(\theta)\} \\ &= A(0)u_t + R(0)u_t - 2Re\{[i\omega\tau_k z(t) + \bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))]q(\theta)\} \\ &= A(0)[W(t, \theta) + 2Re\{z(t)q(\theta)\}] + R(0)u_t - 2Re\{i\omega\tau_k z(t)q(\theta)\} \\ &\quad - 2Re\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\ &= A(0)W(t, \theta) + 2Re\{z(t)A(0)q(\theta)\} + R(0)u_t - 2Re\{i\omega\tau_k z(t)q(\theta)\} \\ &\quad - 2Re\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\ &= A(0)W(t, \theta) + R(0)u_t - 2Re\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\ &= \begin{cases} A(0)W(t, \theta) - 2Re\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \\ A(0)W(t, \theta) - 2Re\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} + f_0(z(t), \bar{z}(t)), & \theta = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{tnm}{=} A(0)W(t, \theta) + H(z(t), \bar{z}(t), \theta) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$A(0)W(t, \theta) - \dot{W} = -H(z, \bar{z}, \theta) = -H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} - H_{11}(\theta)z\bar{z} - H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} - \dots$$

yazılır.

$$\begin{aligned}\dot{W} &= W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} = W_{20}(\theta)z\dot{z} + W_{11}(\theta)(\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) + \dots \\ &= W_{20}(\theta)z(i\omega\tau_k z + g(z, \bar{z})) + W_{11}(\theta)\{[i\omega\tau_k z + g(z, \bar{z})]\bar{z} + z[-i\omega\tau_k \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z})]\} + \dots \\ &= 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + \dots\end{aligned}$$

ve

$$A(0)W(t, \theta) = A(0)W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + A(0)W_{11}(\theta)z\bar{z} + \dots$$

olduğundan

$$A(0)W(t, \theta) - \dot{W} = [A(0) - 2i\omega\tau_k]W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + A(0)W_{11}(\theta)z\bar{z} + \dots$$

dır. Buradan

$$[A(0) - 2i\omega\tau_k]W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + A(0)W_{11}(\theta)z\bar{z} + \dots = -H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} - H_{11}(\theta)z\bar{z} - H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} - \dots$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının katsayıları karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}[A(0) - 2i\omega\tau_k]W_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta) \\ A(0)W_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta), \dots\end{aligned}$$

ve $\theta \in [-1, 0)$ için

$$\begin{aligned}
H(z, \bar{z}, \theta) &= -2\text{Re}\{\bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\
&= \bar{p}(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta) - p(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))\bar{q}(\theta) \\
&= -g(z, \bar{z})q(\theta) - \bar{g}(z, \bar{z})\bar{q}(\theta) \\
&= -(g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta))\frac{z^2}{2} - (g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta))z\bar{z} + \dots
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
H_{20}(\theta) &= -(g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)) \\
H_{11}(\theta) &= -(g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta))
\end{aligned}$$

ve $A(0)$ tanımından

$$\begin{aligned}
\dot{W}_{20}(\theta) &= 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta) - g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta) \\
\dot{W}_{11}(\theta) &= g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)
\end{aligned}$$

bulunur. $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)})$, $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ sabit vektörler olmak üzere

$$\begin{aligned}
W_{20}(\theta) &= \frac{i g_{20}}{\tau_k \omega} q(\theta) + \frac{i \bar{g}_{02}}{3 \tau_k \omega} \bar{q}(\theta) + E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\
W_{11}(\theta) &= -\frac{i g_{11}}{\tau_k \omega} q(\theta) + \frac{i \bar{g}_{11}}{\tau_k \omega} \bar{q}(\theta) + E_2.
\end{aligned}$$

E_1 ve E_2 leri bulmak için $A(0)$ ın tanımı ve $q(\theta)$ ın $A(0)$ ın özvektörü olduğunun bilinmesin-

den, $d\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{20}(\theta) &= 2i\omega\tau_k W_{20}(0) - H_{20}(0) \\
&= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} \int_{-1}^0 d\eta(\theta)q(\theta) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \overline{\int_{-1}^0 d\eta(\theta)q(\theta)} + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\
&= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} \dot{q}(0) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \dot{\bar{q}}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\
&= -g_{20}q(0) + \frac{\bar{g}_{02}}{3}\bar{q}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{11}(\theta) = g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2$$

elde edilir.

$$-g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + (2i\omega\tau_k - \int_{-1}^0 d\eta(\theta)e^{2i\omega\tau_k\theta})E_1 = H_{20}(0)$$

ve

$$-(g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0)) - \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2 = H_{11}(0)$$

yazılarak E_1 ve E_2 bulunur. Buradan $W_{11}(\theta)$, $W_{20}(\theta)$ değerlerinin bulunmasıyla g_{ij} katsayıları belirlenir.

Böylece center manifoldda τ_k kritik değerlerinde oluşan Hopf çatallanmanın yönünü, çatallanan periyodik çözümün kararlılığını ve çatallanan çözümün periyodunu belirleyen μ_2 , β_2 ve T_2 katsayıları

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega\tau_k} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2},$$

$$\mu_2 = -\frac{Re\{c_1(0)\}}{Re\{\lambda'(\tau_k)\}},$$

$$\beta_2 = 2Re\{c_1(0)\},$$

$$T_2 = -\frac{Im\{c_1(0)\} + \mu_2 Im\{\lambda'(\tau_k)\}}{\omega\tau_k}$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıda verilen analizden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Lemma 2.1: (z, \bar{z}, τ) nın düzgün bir fonksiyonu $g = O(|z|^2)$ olmak üzere, z kompleks değişkeni kullanılarak, yeterince küçük $|\tau|$ için, (2.2) sistemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\dot{z} = \lambda(\tau)z + g(z, \bar{z}, \tau) \quad (2.3)$$

İspat: $A(\tau)$ nın $\lambda(\tau)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ olsun. O halde,

$$A(\tau)q(\tau) = \lambda(\tau)q(\tau)$$

dır ve $A^T(\tau)$ nın $\overline{\lambda(\tau)}$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $p(\tau) \in \mathbb{C}^2$ olsun. O halde,

$$A^T(\tau)p(\tau) = \overline{\lambda(\tau)}p(\tau)$$

dır. $\langle \cdot, \cdot \rangle$, \mathbb{C}^2 de standart skalar çarpma ve $\langle p, q \rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$ olmak üzere p nin q ya göre normalize edilmesi

$$\langle p(\tau), q(\tau) \rangle = 1$$

şeklindedir. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^2$ vektörü,

$$x = zq(\tau) + \bar{z}\bar{q}(\tau) \quad (2.4)$$

şeklinde tek olarak tanımlanabilir. z yi tanımlayan açık formül

$$z = \langle p(\tau), x \rangle$$

şeklindedir. Bu formülü gerçeklemek için, (2.4) denkleminin her iki yanı p ile skalar çarpılır

ve $\langle p(\tau), \bar{q}(\tau) \rangle = 0$ olduğunun gösterilmesi gereklidir

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle$$

ve buradan

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0$$

dır. Yeterince küçük her $|\tau|$ için $\omega(\tau) > 0$ olduğundan $\lambda \neq \bar{\lambda}$ dır. Böylece $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ olduğu görülür. Buradan z kompleks değişkeni aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\dot{z} = \lambda(\tau)z + \langle p(\tau), F(zq(\tau) + \bar{z}\bar{q}(\tau), \tau) \rangle$$

Burada (2.3) denklemi göz önüne alınarak

$$g(z, \bar{z}, \tau) = \langle p(\tau), F(zq(\tau) + \bar{z}\bar{q}(\tau), \tau) \rangle$$

olduğu görülür. \square

g fonksiyonu, $k + l \geq 2$, $k, l = 0, 1, \dots$ için

$$g_{kl}(\tau) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\tau), F(zq(\tau) + \bar{z}\bar{q}(\tau), \tau) \rangle |_{z=0}$$

olmak üzere, iki kompleks değişkenli (z ve \bar{z}) Taylor serisi şeklinde yazılırsa;

$$g(z, \bar{z}, \tau) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\tau) z^k \bar{z}^l$$

olur.

Uyarı: Ayrıca farklı bir yöntem olarak, kabul edelim ki, $B(x, y)$ ve $C(x, y, u)$, $x, y, u \in \mathbb{R}^2$ nin multilineer simetrik vektör fonksiyonları olmak üzere $\tau = 0$ da $F(x, \tau)$ fonksiyonu

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4)$$

şeklinde ifade edilir.

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2$$

ve

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2$$

dir. $q = q(0)$ ve $p = p(0)$ iken

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q})$$

dir. Böylece, $k + l = 2$ olacak şekilde $g(z, \bar{z}, 0)$ daki kuadratik terimlerin g_{kl} Taylor katsayıları

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle$$

şeklinde ve C de benzer hesaplarla

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle$$

bulunur.

Lemma 2.2: $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ ve $g_{ij} = g_{ij}(\tau)$ olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3) \quad (2.5)$$

denklemini, yeterince küçük her $|\tau|$ için

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle, kuadratik terim içermeyen

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3)$$

denklemine dönüşür.

İspat:

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} z^{-2} + O(|z|^3)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11} (\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) - h_{02} \dot{\bar{z}} z + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{z}^2 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w} \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}) \bar{w}^2 + O(|w|^3) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$$

yazılmasıyla (2.5) denklemindeki tüm kuadratik terimler yok olur. $\omega_0 > 0$, $\lambda(0) = i\omega_0$ iken, yeterince küçük her $|\tau|$ için paydalar sıfırdan farklı olduğundan yukarıdaki eşitlikler doğrudur. \square

Lemma 2.3: $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$, $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ ve $g_{ij} = g_{ij}(\tau)$ olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4)$$

denklemini, yeterince küçük her $|\tau|$ için

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle, $c_1 = c_1(\tau)$ olmak üzere yalnızca bir kübik terim içeren

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4)$$

denklemine dönüşür.

İspat:

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2} (\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2} \right) z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda} h_{21}}{2} \right) z^2 \bar{z} \\ &\quad + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z \bar{z}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w|^4) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda}$$

yazılmasıyla $w^2 \bar{w}$ terimi dışındaki tüm kübik terimler yok olur. Yeterince küçük her $|\tau|$ için paydalar sıfırdan farklı olduğundan yukarıdaki eşitlikler doğrudur.

$w^2 \bar{w}$ teriminin yok edilmesi için

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$$

yazılır. Fakat $\alpha = 0$ iken yukarıdaki denklemin paydası $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$ dır. α ya bağlı bir dönüşüm elde etmek için $h_{21} = 0$ yazılmasıyla

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}$$

bulunur. \square

Uyarı: Kalan $w^2 \bar{w}$ kübik terimi ‘rezonant terim’ olarak adlandırılır. Bu terimin katsayısı, orjinal denklemdeki $z^2 \bar{z}$ kübik teriminin katsayısıyla aynıdır.

Lemma 2.4: (Hopf Çatallanma için Poincare Normal Form)

$\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$, $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ ve $g_{ij} = g_{ij}(\tau)$ olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4) \quad (2.6)$$

denklemini, yeterince küçük her $|\tau|$ için

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle, $c_1 = c_1(\tau)$ olmak üzere yalnızca bir kübik terim içeren

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4) \quad (2.7)$$

denklemine dönüşür.

İspat: Lemma 2.2 de,

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$$

iken

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, tüm kuadratik terimleri yok etmekle birlikte kübik terimlerin katsayılarını da değiştirir. $w^2 \bar{w}$ nin katsayısı $\frac{1}{2} g_{21}$ yerine $\frac{1}{2} \tilde{g}_{12}$ olur ve Lemma 2.3 deki dönüşümle de, katsayısı $\frac{1}{2} \tilde{g}_{12}$ olan rezonant terim dışındaki tüm kübik terimler yok olur. \square

Böylece, (2.8) kuadratik dönüşümüyle, bulunması gereken c_1 katsayısı, $w^2 \bar{w}$ teriminin yeni katsayısı $\frac{1}{2} \tilde{g}_{12}$ dir.

\dot{z} , w ve \bar{w} cinsinden iki şekilde ifade edilebilir. (2.8) denklemi, (2.6) orjinal denkleminde yerine yazılır veya (2.6) nın (2.7) a dönüştürülebildiği bilindiğinden, \dot{z} , (2.8) in türevlenmesi ile hesaplanabilir

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20} w \dot{w} + h_{11} (w \dot{\bar{w}} + \bar{w} \dot{w}) + h_{02} \dot{\bar{w}}$$

ve (2.7) kullanılarak \dot{w} ve kompleks eşleniği yerlerine yazılır. Yukarıda h_{20} , h_{11} ve h_{02} leri içeren ifadede kuadratik terimlerin katsayılarının karşılaştırılmasıyla ve $w|w|^2$ teriminin katsayılarının eşitlenmesiyle

$$c_1 = \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}$$

elde edilir. $\tau = 0$ çatallanma parametresi değerinde yukarıdaki denklem

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}$$

denkleme indirgenir.

Lemma 2.5: $\alpha(0) = 0$ ve $\omega(0) = \omega_0 > 0$ olmak üzere

$$\frac{dw}{dt} = (\alpha(\tau) + i\omega(\tau))w + c_1(\tau)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

denkleme ele alınsın. Kabul edelim ki, $\alpha'(0) \neq 0$ ve $Rec_1(0) \neq 0$ olsun. Denklem, parametreye bağlı lineer koordinat dönüşümü, yeni zaman ölçeği ve lineer olmayan yeni zaman parametrizasyonu ile

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)$$

formuna dönüşür. $s = signRec_1(0) = \pm 1$, u yeni kompleks koordinatı, θ ve β sırasıyla yeni zaman ve yeni zaman parametresini gösterir.

İspat:

1.Adım: (Lineer zaman ölçeği) Yeni zaman parametresi $\gamma = \omega(\tau)t$ şeklinde tanımlanır. Yeterince küçük her $|\tau|$ için, $\omega(\tau) > 0$ olduğundan zaman korunur. Buradan,

$$\beta = \beta(\tau) = \frac{\alpha(\tau)}{\omega(\tau)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\tau(\beta))}{\omega(\tau(\beta))}$$

olmak üzere

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

elde edilir.

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = \frac{\alpha'(0)}{\omega(0)} \neq 0$$

olduğundan yeni β parametresi

$$\beta = \beta(\tau) = \frac{\mu(\tau)}{\omega(\tau)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\tau(\beta))}{\omega(\tau(\beta))}$$

olarak alınabilir ve ters fonksiyon teoremi, τ ya bağlı β fonksiyonunun lokal varlığını garanti eder. Ayrıca, d_1 kompleks bir fonksiyondur.

2.Adım: (Lineer olmayan zaman parametresi) $e_1(\beta) = \text{Im}d_1(\beta)$ için

$$d\theta = (1 + e_1(\beta) |w|^2) d\gamma$$

olmak üzere, yeni zaman parametresi $\theta = \theta(\gamma, \beta)$ şeklinde tanımlanarak orbitler boyunca zaman parametresi değişir. Zamandaki değişim orijinin küçük bir komşuluğunda özdeşlik dönüşümüdür. Zamanın yeni parametresinin kullanılmasıyla, $l_1(\beta) = \text{Re}d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$ reel olmak üzere

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

ve

$$l_1(0) = \frac{\text{Re}c_1(0)}{\omega(0)} \tag{2.9}$$

elde edilir.

3.Adım: (Lineer koordinat ölçeği) u yeni kompleks değişken olmak üzere,

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}$$

dır. $\text{Re}c_1(0) \neq 0$ olduğundan $l_1(0) \neq 0$ dir. Denklem, $s = \text{sign}l_1(0) = \text{sign}\text{Re}c_1(0)$ olmak üzere

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)$$

formunda yazılır. \square

Tanım: $l_1(\beta)$ fonksiyonu ‘birinci Lyapunov katsayısı’ olarak adlandırılır.

(2.9) denkleminde $\beta = 0$ daki birinci Lyapunov katsayısı

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0g_{21}) \quad (2.10)$$

şeklinde hesaplanır.

Böylece, çatallanma noktasındaki $l_1(0)$ in hesaplanması için sağ taraftaki ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerin bilinmesi gerekir. $l_1(0)$ değeri p ve q özdeğerlerinin normalizasyonuna bağlıdır ve bu değerlerin işareti, $\langle p, q \rangle = 1$ normalizasyonunu sağlayan p, q değerlerine invaryanttır.

Aşağıdaki teoremlerle, elde edilen sonuçlar özetlenir.

Teorem 2.1:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

iki boyutlu sistemi, yeterince küçük $|\tau|$ için $x = 0$ denge noktasına ve $\alpha(0) = 0$ ve $\omega(0) = \omega_0 > 0$ olmak üzere

$$\lambda_{1,2}(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\omega(\tau)$$

özdeğerlerine sahiptir.

Aşağıdaki koşullar sağlandığında;

$$(B.1) \alpha'(0) \neq 0$$

$$(B.2) l_1 \text{ birinci Lyapunov katsayısı olmak üzere, } l_1(0) \neq 0$$

koordinat, parametre değişimiyle ve zaman dönüşümüyle, (2.11) sistemi

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

olur. \square

Teorem 2.2: (Hopf Çatallanma için topolojik normal form)

$$\dot{x} = f(x, \tau)$$

bir parametrelili, iki boyutlu sistemi, $\tau = 0$ da $x = 0$ denge noktasına ve

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$$

özdeğerlerine sahiptir ve aşağıdaki normal formlardan bir tanesine orijin civarında lokal topolojik eşdeğerdir

$$\frac{d}{d\gamma} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4). \square$$

Teorem 2.1, teorem 2.2 ve (2.10) denklemi, iki boyutlu sistemlerde Hopf çatallanma analizi için tüm gereksinimleri sağlar.

2.3 Center Manifold Teoremi

$f(0) = 0$ iken,

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

dinamik sistemi için, $x_0 = 0$ denge noktasında A Jakobian matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun. Kabul edilsin ki, özdeğerlerin reel kısmı sıfır olsun ve $Re\lambda > 0$ olduğunda sayılabilir çoklukta n_+ özdeğerleri, $Re\lambda = 0$ olduğunda n_0 özdeğerleri ve $Re\lambda < 0$ olduğunda ise n_- özdeğerleri olsun. T^c imajiner eksen üzerindeki n_0 özdeğerlerinin birleşimine karşılık gelen lineer özvektör uzayı olsun. İmajiner eksen üzerindeki özdeğerler ($Re\lambda = 0$) T^c özvektör uzayında olduğu gibi genellikle kritik özdeğer olarak adlandırılırlar. φ^t fonksiyonu (2.12) eşitliğine karşılık gelen akı olarak tanımlansın.

Yukarıdaki kabullerle aşağıdaki teorem verilir.

Teorem: (Center Manifold Teoremi) (2.12) sisteminin n_0 boyutlu $W_{loc}^c(0)$ invaryant manifoldu, $x = 0$ da T^c özvektör uzayına teğettir. Ayrıca, $x_0 = 0$ ın bir U komşuluğunda, her $t \geq 0$ ($t \leq 0$) için $(\varphi^t)x \in U$ ise, $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) için $(\varphi^t)x \rightarrow W_{loc}^c(0)$ dir.

Tanım: W_{loc}^c manifoldu ‘center manifold’ olarak adlandırılır.

BÖLÜM 3

3. KARARLILIK ANALİZİ VE HOPF ÇATALLANMA

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t - \tau)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t - \tau)]\end{aligned}\tag{1.7}$$

(1.7) sisteminin denge noktaları $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (\frac{r_1}{a_{11}}, 0)$, $E_3 = (0, -\frac{r_2}{a_{22}})$ ve $E^* = (x^*, y^*)$ dir. Eğer aşağıdaki

$$(H) \quad r_1 a_{21} - r_2 a_{11} > 0$$

(H) koşulu sağlanır ise $E^* = (x^*, y^*)$

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{r_1 a_{22} + r_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}, \\ y^* &= \frac{r_1 a_{21} - r_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}\end{aligned}$$

(1.7) sisteminin tek pozitif denge noktasıdır. (1.7) sisteminde,

$$\begin{aligned}u_1(t) &= x(t) - x^* \\ u_2(t) &= y(t) - y^*\end{aligned}$$

değişken değişirmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\dot{u}_1(t) &= (u_1(t) + x^*)[-a_{11}u_1(t) - a_{12}u_2(t - \tau)] \\ \dot{u}_2(t) &= (u_2(t) + y^*)[a_{21}u_1(t) - a_{22}u_2(t - \tau)]\end{aligned}\tag{3.1}$$

sistemi elde edilir. (3.1) sisteminin (0,0) noktasında lineerleştirilmesiyle

$$\begin{aligned}\dot{u}_1(t) &= -a_{11}x^*u_1(t) - a_{12}x^*u_2(t - \tau) \\ \dot{u}_2(t) &= a_{21}y^*u_1(t) - a_{22}y^*u_2(t - \tau)\end{aligned}\quad (3.2)$$

(3.2) sistemi bulunur.

$$\begin{aligned}p &= a_{11}x^* \\ q &= a_{22}y^* \\ s &= (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})x^*y^*\end{aligned}$$

olmak üzere, lineerleştirilmiş sistemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + p\lambda + (q\lambda + s)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.3)$$

ile verilir. $\tau = 0$ olduğu durumda yani sistemde gecikmenin olmadığı durumda (3.3) denklemi

$$\lambda^2 + p\lambda + q\lambda + s = 0$$

şeklinde bir denklemdir ve bu denklemin özdeğerleri $\lambda_{1,2} = \frac{-p-q \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4s}}{2}$ olarak bulunur. $p = a_{11}x^*$, $q = a_{22}y^*$ ve $s = (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})x^*y^*$ pozitif sabitler olduğundan, (3.3) denklemi için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 3.1: $\tau = 0$ iken (3.3) denkleminin $\lambda_{1,2} = \frac{-p-q \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4s}}{2}$ köklerinin reel kısmı her zaman negatiftir. Başka bir deyişle, (3.2) sisteminin denge noktası $\tau = 0$ iken asimtotik karardır.

(3.2) lineer sisteminin (0,0) noktasındaki kararlılığı, (3.3) karakteristik denkleminin köklerinin konumlarına bağlıdır. Bu nedenle eğer (3.3) transandantal denkleminin köklerinin durumu incelenir ise $\lambda^2 + p\lambda + (q\lambda + s)e^{-\lambda\tau} = 0$ denkleminin köklerinin sürekli bağımlılığından ve Lemma 3.1'den, en az bir $\tau_0 > 0$ vardır $\tau \in [0, \tau_0)$ için $Re\lambda(\tau) < 0$ dir. $Re\lambda(\tau) = 0$ olduğunda (x^*, y^*) asimtotik kararlılığını kaybettiğinden $Re\lambda(\tau^*) = 0$ olacak şekilde bir $\tau^* > 0$ in olup olmadığı incelenir. Başka bir deyişle, (3.3) denkleminin sıfır imajiner olan köklerinin varolup olmadığı araştırılır.

Bu bölümde ilk olarak, denge noktasının lokal kararlılığı bulunur.

$\tau = \tau^*$ için, ω reel ve $\omega > 0$ olmak üzere $\lambda = i\omega$ kabul edildiğinde, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 3.2: (3.1) sistemi için, (3.3) transandantal denklemi sırf imajiner köke sahiptir.

İspat: $\tau = \tau^*$ ve ω reel olmak üzere $\lambda = i\omega$, (3.3) denkleminde yerine yazılırsa genellikle birşey kaybetmeden $\omega > 0$ alınabilir. Böylece

$$(i\omega)^2 + p(i\omega) + (q(i\omega) + s)e^{-(i\omega)\tau} = 0$$

elde edilir. Yani

$$-\omega^2 + [i(q\omega) + s](\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) + ip\omega = 0$$

dir. Reel ve imajiner kısımların ayrı ayrı yazılmasıyla

$$\omega^2 = q\omega \sin(\omega\tau) + s \cos(\omega\tau) \quad (3.4)$$

$$-p\omega = q\omega \cos(\omega\tau) - s \sin(\omega\tau) \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden

$$(\omega^2)^2 = (q\omega \sin(\omega\tau) + s \cos(\omega\tau))^2 \quad (3.6)$$

$$(-p\omega)^2 = (q\omega \cos(\omega\tau) - s \sin(\omega\tau))^2 \quad (3.7)$$

bulunur ve buradan

$$\omega^4 + (p^2 - q^2)\omega^2 - s^2 = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemde $t = \omega^2$ yazılırsa,

$$t^2 + (p^2 - q^2)t - s^2 = 0$$

denklemini elde edilir ve kökleri

$$t = \omega_{1,2}^2 = \frac{-(p^2 - q^2) \pm \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4s^2}}{2}$$

bulunur. Bu kökleri üç durumda incelenir.

1.Durum: $p^2 - q^2 > 0$ için

$$\omega = \left[\frac{-(p^2 - q^2) + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4s^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

pozitif kökü bulunur.

2.Durum: $p^2 - q^2 < 0$ için

$$\omega = \left[\frac{-(p^2 - q^2) + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4s^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

pozitif kökü bulunur.

3.Durum: $p^2 - q^2 = 0$ için

$$\omega = \sqrt{s}$$

pozitif kökü bulunur.

(3.4) denklemini $\cos(\omega\tau)$, (3.5) denklemini $\sin(\omega\tau)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa,

$$s = \omega^2 \cos(\omega\tau) + p\omega \sin(\omega\tau) \quad (3.8)$$

bulunur. (3.8) denklemini q ile, (3.4) denklemini p ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\cos(\omega\tau) = \frac{qs - p\omega^2}{q\omega^2 - sp}$$

elde edilir.

Ayrıca $\lambda^2 + p\lambda + (q\lambda + s)e^{-\lambda\tau} = 0$ denklemini

$$\omega\tau = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

bağıntısını gerçekleyen sırf imajiner köke sahip olduğundan

$$\omega = \left[\frac{-(p^2 - q^2) + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4s^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\tau_k = \frac{1}{\omega} \arccos \left(\frac{qs - p\omega^2}{q\omega^2 - sp} \right) + \frac{2\pi k}{\omega}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

özdeşlikleri elde edilir. Böylece Lemma 3.2'nin ispatı tamamlanmış olur. \square

ω_0 in

$$\omega_0 = \left[\frac{-(p^2 - q^2) + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4s^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

olduğunun belirtilmesiyle ve $\tau = \tau_k$ iken $\alpha_k(\tau_k) = 0$ ve $\omega_k(\tau_k) = \omega_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ olduğunun kabulü (3.3) denkleminin kökünü

$$\lambda_k(\tau) = \alpha_k(\tau) + i\omega_k(\tau)$$

şeklinde tanımlar.

Lemma 3.3: $k = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\frac{dRe\lambda_k(\tau_k)}{d\tau} > 0$$

dır. (1.7) sistemi için $\tau = \tau_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ iken (x^*, y^*) pozitif denge noktasında Hopf çatallanma oluşur.

İspat: (3.3) karakteristik denkleminin τ ya göre türevi alınırsa,

$$\left[\frac{d\lambda}{d\tau} \right] = 2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + q \left[\frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} - \lambda e^{-\lambda\tau} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \tau + \lambda \right) \right] + p \frac{d\lambda}{d\tau} - s e^{-\lambda\tau} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \tau + \lambda \right) = 0$$

elde edilir. Yani,

$$\frac{d\lambda}{d\tau} [2\lambda + qe^{-\lambda\tau} - q\lambda\tau e^{-\lambda\tau} + p - s\tau e^{-\lambda\tau}] = q\lambda^2 e^{-\lambda\tau} + s\lambda e^{-\lambda\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}(q\lambda + s)}{2\lambda + qe^{-\lambda\tau} - q\lambda\tau e^{-\lambda\tau} + p - s\tau e^{-\lambda\tau}}$$

dır. Buradan

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{-(q\lambda + s)\tau e^{-\lambda\tau} + 2\lambda + qe^{-\lambda\tau} + p}{\lambda e^{-\lambda\tau}(q\lambda + s)}$$

ve

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = -\frac{\tau}{\lambda} + \frac{2\lambda + qe^{-\lambda\tau} + p}{\lambda e^{-\lambda\tau}(q\lambda + s)}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\lambda=i\omega_0} &= \operatorname{Re} \left[-\frac{\tau_k}{i\omega_0} \right] + \operatorname{Re} \left[\frac{2i\omega_0 + qe^{-i\omega_0\tau_k} + p}{i\omega_0 e^{-i\omega_0\tau_k} (qi\omega_0 + s)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{2i\omega_0 + p + q(\cos(\omega_0\tau_k) - i\sin(\omega_0\tau_k))}{i\omega_0 ((iq\omega_0) + s)(\cos(\omega_0\tau_k) - i\sin(\omega_0\tau_k))} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{(p + q\cos(\omega_0\tau_k)) + i(2\omega_0 - q\sin(\omega_0\tau_k))}{(-q\omega_0^2 \cos(\omega_0\tau_k) + s\omega_0 \sin(\omega_0\tau_k)) + i(q\omega_0^2 \sin(\omega_0\tau_k) + s\omega_0 \cos(\omega_0\tau_k))} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

yazılır. (3.9) denkleminin sadeleştirilmesi için,

$$\begin{aligned} m &= p + q\cos(\omega_0\tau_k) \\ n &= 2\omega_0 - q\sin(\omega_0\tau_k) \\ a &= -q\omega_0^2 \cos(\omega_0\tau_k) + s\omega_0 \sin(\omega_0\tau_k) \\ b &= q\omega_0^2 \sin(\omega_0\tau_k) + s\omega_0 \cos(\omega_0\tau_k) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left[\frac{m + in}{a + ib} \right] &= \operatorname{Re} \left[\frac{(m + in)(a - ib)}{a^2 + b^2} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[\frac{ma + bn}{a^2 + b^2} \right] + \operatorname{Re} \left[\frac{i(an - bm)}{a^2 + b^2} \right] \\
&= \frac{ma + bn}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{ma}{a^2 + b^2} + \frac{bn}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{ma}{a^2 + b^2} = \frac{(p + q \cos(\omega_0 \tau_k)) (-q\omega_0^2 \cos(\omega_0 \tau_k) + s\omega_0 \sin(\omega_0 \tau_k))}{(-q\omega_0^2 \cos(\omega_0 \tau_k) + s\omega_0 \sin(\omega_0 \tau_k))^2 + (q\omega_0^2 \sin(\omega_0 \tau_k) + s\omega_0 \cos(\omega_0 \tau_k))^2}$$

eşitliğinde (3.7) denkleminde,

$$\begin{aligned}
\frac{ma}{a^2 + b^2} &= \frac{\left(p + \frac{-p\omega_0 + s \sin(\omega_0 \tau_k)}{\omega_0} \right) \{ [(-s \sin(\omega_0 \tau_k) + p\omega_0) \omega_0] + s\omega_0 \sin(\omega_0 \tau_k) \}}{\omega_0^2 (q^2 \omega_0^2 + s^2)} \\
&= \frac{\left(\frac{s}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau_k) \right) p\omega_0^2}{\omega_0^2 (q^2 \omega_0^2 + s^2)} \\
&= \frac{sp \sin(\omega_0 \tau_k)}{\omega_0 (q^2 \omega_0^2 + s^2)} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\frac{bn}{a^2 + b^2} = \frac{(q\omega_0^2 \sin(\omega_0 \tau_k) + s\omega_0 \cos(\omega_0 \tau_k)) (2\omega_0 - q \sin(\omega_0 \tau_k))}{(-q\omega_0^2 \cos(\omega_0 \tau_k) + s\omega_0 \sin(\omega_0 \tau_k))^2 + (q\omega_0^2 \sin(\omega_0 \tau_k) + s\omega_0 \cos(\omega_0 \tau_k))^2}$$

eşitliğinde (3.6) denkleminde,

$$\begin{aligned}
\frac{bn}{a^2 + b^2} &= \frac{\left(2\omega_0 - \omega_0 + \frac{s \cos(\omega_0 \tau_k)}{\omega_0}\right) (\omega_0^3 - s\omega_0 \cos(\omega_0 \tau_k) + s\omega_0 \cos(\omega_0 \tau_k))}{\omega_0^2 (q^2 \omega_0^2 + s^2)} \\
&= \frac{\left(\omega_0 + \frac{s}{\omega_0} \cos(\omega_0 \tau_k)\right) \omega_0^3}{\omega_0^2 (q^2 \omega_0^2 + s^2)} \\
&= \frac{\omega_0^2 + s \cos(\omega_0 \tau_k)}{(q^2 \omega_0^2 + s^2)} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.10) ve (3.11) eşitliklerinin toplanmasıyla ve

$$\frac{ma}{a^2 + b^2} + \frac{bn}{a^2 + b^2} = \frac{sp \sin(\omega_0 \tau_k)}{\omega_0 (q^2 \omega_0^2 + s^2)} + \frac{\omega_0^2 + s \cos(\omega_0 \tau_k)}{(q^2 \omega_0^2 + s^2)}$$

eşitliğinde (3.4) ün yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{ma}{a^2 + b^2} + \frac{bn}{a^2 + b^2} &= \frac{sp \sin(\omega_0 \tau_k)}{\omega_0 (q^2 \omega_0^2 + s^2)} + \frac{2\omega_0^2 - q\omega_0 \sin(\omega_0 \tau_k)}{(q^2 \omega_0^2 + s^2)} \\
&= \frac{sp \sin(\omega_0 \tau_k) + 2\omega_0^3 - q\omega_0^2 \sin(\omega_0 \tau_k)}{\omega_0 (q^2 \omega_0^2 + s^2)} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) denklemleri sırasıyla $\cos(\omega \tau_k)$ ve $-\sin(\omega \tau_k)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$s = \omega^2 \cos(\omega \tau_k) + p\omega \sin(\omega \tau_k) \tag{3.13}$$

eşitliği bulunur. (3.13) denklemini q ile, (3.5) denklemini $-\omega$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\sin(\omega \tau_k) = \frac{sq + p\omega^2}{pq\omega + s\omega} \tag{3.14}$$

bulunur. $\omega = \omega_0$ alınarak, (3.14) denkleminin, (3.12) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{ma}{a^2 + b^2} + \frac{bn}{a^2 + b^2} &= \frac{sp \frac{sq+p\omega_0^2}{pq\omega_0+s\omega_0} + 2\omega_0^3 - q\omega_0^2 \frac{sq+p\omega_0^2}{pq\omega_0+s\omega_0}}{\omega_0(q^2\omega_0^2 + s^2)} \\
&= \frac{\frac{s^2pq+sp^2\omega_0^2-sq^2\omega_0^2-pq\omega_0^4+2\omega_0^4(pq+s)}{\omega_0(pq+s)}}{\omega_0(q^2\omega_0^2 + s^2)} \\
&= \frac{s^2pq + s\omega_0^2(p^2 - q^2) + \omega_0^4(pq + 2s)}{\omega_0^2(q^2\omega_0^2 + s^2)(pq + s)} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (3.9) ve (3.15) denklemlerinin eşitlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\left. \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right|_{\lambda=i\omega_0} &= \frac{s^2pq + s\omega_0^2(p^2 - q^2) + \omega_0^4(pq + 2s)}{\omega_0^2(q^2\omega_0^2 + s^2)(pq + s)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Rouche teoremi [18], $k = 0, 1, 2, \dots$ için $\frac{d\operatorname{Re}\lambda_k(\tau_k)}{d\tau} > 0$ koşulu ve $\tau = \tau_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ için Hopf çatallanma koşullarının sağlandığı görülür. Böylece Lemma 3.3'ün ispatı tamamlanmış olur. \square

Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa, (1.7) sisteminin kararlılığı ve Hopf çatallanması aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 3.1: (1.7) sistemi için,

i)Eğer $\tau \in [0, \tau_0)$ ise, sistemin $E^* = (x^*, y^*)$ denge noktası asimtotik karardır.

ii)Eğer $\tau > \tau_0$ ise, sistemin $E^* = (x^*, y^*)$ denge noktası kararsızdır.

iii)Eğer $\tau = \tau_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ise, sistemin $E^* = (x^*, y^*)$ denge noktasında Hopf çatallanma meydana gelir.

BÖLÜM 4

4. HOPF ÇATALLANMANIN YÖNÜ VE KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde normal form teori ve center manifold teoremi kullanılarak Hopf çatallanmanın yönü ve periyodik çözümlerin kararlılığı incelenecektir. Burada Hopf çatallanmanın (1.7) sisteminin $\tau = \tau_k$ için $E_* = (x_*, y_*)$ pozitif denge noktasından geçtiği kabul edilecektir ve $\lambda = i\omega$, $E_* = (x_*, y_*)$ pozitif denge noktasında karakteristik denklemin sıfır imajiner köküdür. $\mu \in \mathbb{R}$ için $\tau = \tau_k + \mu$ yazılırsa, $\mu = 0$, (1.7) sisteminin Hopf çatallanma parametresi olur.

$$\begin{aligned}u_1(t) &= x(\tau t) - x^*, \\u_2(t) &= y(\tau t) - y^*\end{aligned}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa (1.7) sistemi ;

$$\begin{aligned}\dot{u}_1(t) &= \tau(u_1(t) + x^*)[-a_{11}u_1(t) - a_{12}u_2(t-1)] \\ \dot{u}_2(t) &= \tau(u_2(t) + y^*)[a_{21}u_1(t) - a_{22}u_2(t-1)]\end{aligned}\tag{4.1}$$

$C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ de fonksiyonel diferansiyel denklem şekline dönüşür.

$L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C$ için,

$$L_\mu \phi = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} -a_{11}x^*\phi_1(0) - a_{12}x^*\phi_2(-1) \\ a_{21}y^*\phi_1(0) - a_{22}y^*\phi_2(-1) \end{bmatrix}$$

ve

$$f(\mu, \phi) = \begin{bmatrix} -a_{11}\phi_1(0)\phi_1(0) - a_{12}\phi_1(0)\phi_2(-1) \\ a_{21}\phi_2(0)\phi_1(0) - a_{22}\phi_2(0)\phi_2(-1) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

elde edilir. Riesz teoremine göre, $\theta \in [-1, 0]$ için, elemanları sınırlı değişimli 2×2 tipinde bir $\eta(\theta, \mu)$ matris fonksiyonu vardır. Öyle ki,

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)\phi(\theta), \phi \in C.$$

şeklinde yazılabilir. $\eta(\theta, \mu)$ fonksiyonu

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} -a_{11}x^* & 0 \\ a_{21}y^* & 0 \end{bmatrix} + (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}x^* \\ 0 & -a_{22}y^* \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilirse, $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} -\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\mu, s)\phi(s), & \theta = 0. \end{cases}$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece (4.1) sistemi

$$\dot{u}_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t \quad (4.3)$$

formunda yazılır. Burada $\theta \in [-1, 0)$ için $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ dir. $\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$ için,

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, 0)\psi(-t), & s = 0. \end{cases}$$

ve $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ iken bilineer iç çarpım

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

olarak tanımlanır. $A(0)$ ve A^* operatörleri arasındaki bağlantı aşağıdaki lemma ile verilir.

Lemma 4.1 : $A(0)$ ve A^* adjoint operatörlerdir.

İspat : $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ ve $\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$ iken (4.4) , $A(0)$ ve A^* in tanımından,

$$\langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)A(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)A(0)\phi(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} \langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle &= \bar{\psi}(0)A(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)A(0)\phi(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(\theta)\phi(\theta) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(\theta)\phi(\theta) - \int_{-1}^0 [\bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi)]_{\xi=0}^{\theta} + \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^0 \bar{\psi}(-\theta) d\eta(\theta)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \left[\frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} \right] d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= A^*\bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} A^*\bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= \langle A^*\psi(s), \phi(\theta) \rangle \end{aligned}$$

Böylece $A(0)$ ve A^* in adjoint operatörler olduğu gösterilmiş ve ispat tamamlanmış olur. \square

Ayrıca $\pm i\omega\tau_k$, $A(0)$ in özdeğerleridir. Dolayısıyla bu özdeğerler A^* in da özdeğerleridir. $A(0)$ in $i\omega\tau_k$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q(\theta)$ ve A^* in $-i\omega\tau_k$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q^*(s)$ dir.

Yani;

$$A(0)q(\theta) = i\omega\tau_k q(\theta)$$

ve

$$A^*q^*(s) = -i\omega\tau_k q^*(s)$$

dir. Öyleyse

$$A(0)q(0) = i\omega\tau_k q(0),$$

$$A(0) = \begin{bmatrix} -a_{11}x^* & -a_{12}x^*e^{-i\omega\tau_k} \\ a_{21}y^* & -a_{22}y^*e^{-i\omega\tau_k} \end{bmatrix}$$

ve

$$q(\theta) = (1, \alpha)^T e^{i\omega\tau_k\theta} \implies q(0) = (1, \alpha)^T$$

dir. Bulunan $A(0)$ ve $q(0)$, $A(0)q(0) = i\omega\tau_k q(0)$ eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$\begin{bmatrix} -a_{11}x^* - i\omega & -a_{12}x^*e^{-i\omega\tau_k} \\ a_{21}y^* & -a_{22}y^*e^{-i\omega\tau_k} - i\omega \end{bmatrix} q(0) = 0$$

$$\implies \begin{cases} -a_{11}x^* - i\omega + \alpha(-a_{12}x^*e^{-i\omega\tau_k}) = 0 \\ a_{21}y^* + \alpha(-a_{22}y^*e^{-i\omega\tau_k} - i\omega) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left(\frac{a_{11}x^* + i\omega}{-a_{12}x^*} \right) e^{i\omega\tau_k} \\
\Rightarrow q(0) &= \left(1, \frac{a_{11}x^* + i\omega}{-a_{12}x^*} e^{i\omega\tau_k} \right)^T \\
\Rightarrow q(\theta) &= \left(1, -\frac{a_{11}x^* + i\omega}{a_{12}x^*} e^{i\omega\tau_k} \right)^T e^{i\omega\tau_k\theta}
\end{aligned}$$

bulunur. Aynı şekilde $A^*q^*(0) = -i\omega\tau_k q^*(0)$,

$$A^* = \begin{bmatrix} -a_{11}x^* & a_{21}y^* \\ -a_{12}x^* e^{-i\omega\tau_k} & -a_{22}y^* e^{-i\omega\tau_k} \end{bmatrix}$$

$$q^*(s) = D(\beta, 1) e^{i\omega\tau_k s} \quad \Rightarrow \quad q^*(0) = D(\beta, 1)$$

eşitliği elde edilir. Bulunan A^* ve $q^*(0)$, $A^*q^*(0) = -i\omega\tau_k q^*(0)$ eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$\begin{bmatrix} -a_{11}x^* + i\omega & a_{21}y^* \\ -a_{12}x^* e^{-i\omega\tau_k} & -a_{22}y^* e^{-i\omega\tau_k} + i\omega \end{bmatrix} q^*(0) = 0$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}
\beta &= -\frac{a_{22}y^* e^{-i\omega\tau_k} - i\omega}{-a_{12}x^*} e^{-i\omega\tau_k} \\
\Rightarrow q^*(0) &= D \left(-\frac{a_{22}y^* e^{-i\omega\tau_k} - i\omega}{-a_{12}x^*} e^{-i\omega\tau_k}, 1 \right) \\
\Rightarrow q^*(s) &= D \left(-\frac{a_{22}y^* e^{-i\omega\tau_k} - i\omega}{-a_{12}x^*} e^{-i\omega\tau_k}, 1 \right) e^{i\omega\tau_k s}
\end{aligned}$$

yazılır.

$$\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$$

olabilmesi için, bilineer iççarpımın tanımından ,

$$\begin{aligned} \langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \bar{D}(\bar{\beta}, 1)(1, \alpha)^T - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{D}(\bar{\beta}, 1)e^{-i\omega\tau_k(\xi-\theta)} d\eta(\theta)(1, \alpha)^T e^{i\omega\tau_k\xi} d\xi \\ &= \bar{D} \left\{ \alpha + \bar{\beta} - \int_{-1}^0 (\bar{\beta}, 1)\theta e^{i\omega\tau_k\theta} d\eta(\theta)(1, \alpha)^T \right\} \\ &= \bar{D} \{ \alpha + \bar{\beta} + \tau_k(-a_{22}\alpha y^*)e^{-i\omega\tau_k} \} = 1 \end{aligned}$$

ve bu eşitlikten

$$\bar{D} = \frac{1}{\alpha + \bar{\beta} + \tau_k(-a_{22}\alpha y^*)e^{-i\omega\tau_k}},$$

elde edilir. Yani, $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ ve $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$ eşitlikleri elde edilmiş olur.

$\mu = 0$ iken C_0 center manifoldu tanımlamak için ilk önce koordinatlar hesaplanmalıdır [10].

$\mu = 0$ iken $u_t = (u_t^{(1)}, u_t^{(2)})$ (4.1) denkleminin çözümüdür.

$$\begin{aligned} z(t) &= \langle q^*, u_t \rangle, \\ W(t, \theta) &= (W^{(1)}(t, \theta), W^{(2)}(t, \theta))^T = u_t - 2Re\{z(t)q(\theta)\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

ve C_0 center manifoldu üzerinde

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta)$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} W(z, \bar{z}, \theta) &= (W_{20}^{(1)}(\theta), W_{20}^{(2)}(\theta))^T \frac{z^2}{2} + (W_{11}^{(1)}(\theta), W_{11}^{(2)}(\theta))^T z\bar{z} \\ &\quad + (W_{02}^{(1)}(\theta), W_{02}^{(2)}(\theta))^T \frac{\bar{z}^2}{2} + (W_{30}^{(1)}(\theta), W_{30}^{(2)}(\theta))^T \frac{z^3}{6} + \dots \\ &= W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + W_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots, \end{aligned}$$

z ve \bar{z} , C_0 center manifoldun q ve q^* yönündeki lokal koordinatlarıdır. u_t reel ise W da reeldir. Burada yalnızca reel çözümler dikkate alınmıştır.

(4.1) sisteminin $u_t \in C_0$ çözümü için, (4.3) denkleminde $\mu = 0$ iken $\dot{u}_t = A(0)u_t + R(0)u_t$ dir. $R(\mu)$ nin tanımından, Lemma 4.1 den ve (4.5) den;

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \langle q^*(s), \dot{u}_t \rangle = \langle q^*(s), A(0)u_t + R(0)u_t \rangle \\ &= \langle q^*(s), A(0)u_t \rangle + \langle q^*(s), R(0)u_t \rangle \\ &= \langle A^*q^*(s), u_t \rangle + \bar{q}^*(0)R(0)u_t(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{q}^*(\xi - \theta) d\eta(\theta) A(0)R(0)u_t(\xi) d\xi \\ &= \langle -i\omega\tau_k q^*(s), u_t \rangle + \bar{q}^*(0)f(0, u_t(\theta)) \\ &= i\omega\tau_k z(t) + \bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t)) \end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) denklemi

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots,$$

iken

$$\dot{z}(t) = i\omega\tau_k z(t) + g(z(t), \bar{z}(t))$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.5) kullanılarak,

$$u_t(u_{1t}(\theta), u_{2t}(\theta)) = W(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta)$$

ve

$$q(\theta) = (1, \alpha)^T e^{i\omega\tau_k\theta}$$

ve

$$\begin{aligned} u_{1t}(0) &= z + \bar{z} + W_{20}^{(1)}(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0) z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3), \\ u_{2t}(0) &= z\alpha + \bar{z}\bar{\alpha} + W_{20}^{(2)}(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(0) z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3), \\ u_{1t}(-1) &= ze^{-i\omega\tau_k\theta} + \bar{z}e^{i\omega\tau_k\theta} + W_{20}^{(1)}(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(-1) z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3), \\ u_{2t}(-1) &= z\alpha e^{-i\omega\tau_k\theta} + \bar{z}\bar{\alpha} e^{i\omega\tau_k\theta} + W_{20}^{(2)}(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(-1) z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Notasyonların sadeleştirilmesi için

$$\begin{aligned} M &= -\frac{a_{11}x^* + i\omega}{a_{12}x^*} e^{i\omega\tau_k} \\ N &= -\frac{a_{22}y^* e^{-i\omega\tau_k} - i\omega}{-a_{12}x^*} e^{-i\omega\tau_k}. \end{aligned}$$

şeklinde yazılırsa ve $q(\theta) = (1, M)^T e^{i\theta\omega\tau_k}$, $q^*(s) = D(N, 1) e^{is\omega\tau_k}$ eşitlikleri bulunur. (4.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
u_t(\theta) &= W(t, \theta) + 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\} \\
&= W(t, \theta) + z(t)q(\theta) + \bar{z}(t)\bar{q}(\theta) \\
&= W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta)z\bar{z} + W_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + (1, M)^T e^{i\theta\omega\tau_k} z + (1, \bar{M})^T e^{-i\theta\omega\tau_k} \bar{z} + \dots
\end{aligned}$$

dır ve (4.2) eşitliğiyle

$$\begin{aligned}
f_0(z(t), \bar{z}(t)) &= f(0, u_t(\theta)) \\
&= \tau_k \begin{pmatrix} -a_{11}u_t^{(1)}(0)u_t^{(1)}(0) - a_{12}u_t^{(1)}(0)u_t^{(2)}(-1) \\ a_{21}u_t^{(2)}(0)u_t^{(1)}(0) - a_{22}u_t^{(2)}(0)u_t^{(2)}(-1) \end{pmatrix} \\
&= \tau_k \begin{pmatrix} -a_{11}[W_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + z + \bar{z} + \dots] \\ \quad \times [W_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + z + \bar{z} + \dots] \\ -a_{12}[W_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + z + \bar{z} + \dots] \\ \times [W_{20}^{(2)}(-1)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(-1)z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2} + zMe^{-i\omega\tau_k} + \bar{z}\bar{M}e^{i\omega\tau_k} + \dots] \\ a_{21}[W_{20}^{(2)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + zM + \bar{z}\bar{M} + \dots] \\ \quad \times [W_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + z + \bar{z} + \dots] \\ -a_{22}[W_{20}^{(2)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + zM + \bar{z}\bar{M} + \dots] \\ \times [W_{20}^{(2)}(-1)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(-1)z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2} + zMe^{-i\omega\tau_k} + \bar{z}\bar{M}e^{i\omega\tau_k} + \dots] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_0(z(t), \bar{z}(t)) &= \tau_k \left(\begin{aligned}
& -a_{11}\{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 \\
& + [\frac{W_{20}^{(1)}(0)}{2} + W_{11}^{(1)}(0) + \frac{W_{20}^{(1)}(0)}{2} + W_{11}^{(1)}(0)]z^2\bar{z} + \dots\} \\
& -a_{12}\{Me^{-i\omega\tau_k}z^2 + (Me^{-i\omega\tau_k} + \bar{M}e^{i\omega\tau_k}z\bar{z}) + \bar{M}e^{i\omega\tau_k}\bar{z}^2 \\
& + [\frac{W_{20}^{(1)}(0)\bar{M}e^{i\omega\tau_k}}{2} + W_{11}^{(1)}(0)Me^{-i\omega\tau_k} + \frac{W_{20}^{(1)}(-1)}{2} + W_{11}^{(2)}(-1)]z^2\bar{z} + \dots\} \\
& a_{21}\{Mz^2 + (M + \bar{M})z\bar{z} + \bar{M}\bar{z}^2 \\
& + [\frac{W_{20}^{(2)}(0)}{2} + W_{11}^{(2)}(0) + \frac{W_{20}^{(1)}(0)\bar{M}}{2} + W_{11}^{(1)}(0)M]z^2\bar{z} + \dots\} \\
& -a_{22}\{M^2e^{-i\omega\tau_k}z^2 + |M|^2(e^{i\omega\tau_k} + e^{-i\omega\tau_k})z\bar{z} + \bar{M}^2e^{i\omega\tau_k}\bar{z}^2 \\
& + [\frac{W_{20}^{(2)}(0)\bar{M}e^{i\omega\tau_k}}{2} + W_{11}^{(2)}(0)Me^{-i\omega\tau_k} + \frac{W_{20}^{(2)}(-1)}{2} + W_{11}^{(2)}(-1)M]z^2\bar{z} + \dots\}
\end{aligned} \right) \\
&= \tau_k \left(\begin{aligned}
& 2(-a_{11} - a_{12}Me^{-i\omega\tau_k})\frac{z^2}{2} + 2(-a_{11} - a_{12}\bar{M}e^{i\omega\tau_k})\frac{\bar{z}^2}{2} \\
& + 2(-2a_{11} - a_{12}Re\{\bar{M}e^{i\omega\tau_k}\})z\bar{z} \\
& + \{W_{20}^{(1)}(0)(-a_{11} - \frac{a_{12}\bar{M}e^{i\omega\tau_k}}{2}) - a_{12}[\frac{W_{20}^{(2)}(-1)}{2} + W_{11}^{(2)}(-1)] \\
& + W_{11}^{(1)}(0)(-a_{12}Me^{-i\omega\tau_k} - 2a_{11})\}z^2\bar{z} + \dots \\
& 2(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k})M\frac{z^2}{2} + 2(a_{21} - a_{22}\bar{M}e^{i\omega\tau_k})\bar{M}\frac{\bar{z}^2}{2} \\
& + 2(a_{21}(M + \bar{M}) - a_{22}|M|^2 Re\{e^{i\omega\tau_k}\})z\bar{z} \\
& + \{W_{20}^{(2)}(0)(\frac{a_{21}}{2} - a_{22}\frac{\bar{M}e^{i\omega\tau_k}}{2}) + W_{11}^{(2)}(0)(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k}) \\
& + a_{21}[W_{20}^{(1)}(0)\frac{\bar{M}}{2} + W_{11}^{(1)}(0)M] \\
& - a_{22}[W_{20}^{(2)}(-1)\frac{\bar{M}}{2} + W_{11}^{(2)}(-1)M]\}z^2\bar{z} + \dots
\end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) &= g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}\frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots \\
&= \bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^*(0)\tau_k \left(\begin{aligned} &2(-a_{11} - a_{12}Me^{-i\omega\tau_k})\frac{z^2}{2} + 2(-a_{11} - a_{12}\bar{M}e^{i\omega\tau_k})\frac{\bar{z}^2}{2} \\ &+ 2(-2a_{11} - a_{12}Re\{\bar{M}e^{i\omega\tau_k}\})z\bar{z} \\ &+ \{W_{20}^{(1)}(0)(-a_{11} - \frac{a_{12}\bar{M}e^{i\omega\tau_k}}{2}) - a_{12}[\frac{W_{20}^{(2)}(-1)}{2} + W_{11}^{(2)}(-1)] \\ &+ W_{11}^{(1)}(0)(-a_{12}Me^{-i\omega\tau_k} - 2a_{11})\}z^2\bar{z} + \dots \\ &2(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k})M\frac{z^2}{2} + 2(a_{21} - a_{22}\bar{M}e^{i\omega\tau_k})\bar{M}\frac{\bar{z}^2}{2} \\ &+ 2(a_{21}(M + \bar{M}) - a_{22}|M|^2 Re\{e^{i\omega\tau_k}\})z\bar{z} \\ &+ \{W_{20}^{(2)}(0)(\frac{a_{21}}{2} - a_{22}\frac{\bar{M}e^{i\omega\tau_k}}{2}) + W_{11}^{(2)}(0)(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k}) \\ &+ a_{21}[W_{20}^{(1)}(0)\frac{\bar{M}}{2} + W_{11}^{(1)}(0)M] \\ &- a_{22}[W_{20}^{(2)}(-1)\frac{\bar{M}}{2} + W_{11}^{(2)}(-1)M]\}z^2\bar{z} + \dots \end{aligned} \right) \\
&= \bar{D}\bar{N}\tau_k \{ 2(-a_{11} - a_{12}Me^{-i\omega\tau_k})\frac{z^2}{2} + 2(-a_{11} - a_{12}\bar{M}e^{i\omega\tau_k})\frac{\bar{z}^2}{2} \\
&+ 2(-2a_{11} - a_{12}Re\{\bar{M}e^{i\omega\tau_k}\})z\bar{z} \\
&+ [W_{20}^{(1)}(0)(-2a_{11} - a_{12}\bar{M}e^{i\omega\tau_k}) - a_{12}[W_{20}^{(2)}(-1) + 2W_{11}^{(2)}(-1)] \\
&+ W_{11}^{(1)}(0)(-2a_{12}Me^{-i\omega\tau_k} - 4a_{11})\} \frac{z\bar{z}^2}{2} + \dots \} \\
&+ \bar{D}\tau_k \{ 2(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k})M\frac{z^2}{2} + 2(a_{21} - a_{22}\bar{M}e^{i\omega\tau_k})\bar{M}\frac{\bar{z}^2}{2} \\
&+ 2(a_{21}(M + \bar{M}) - a_{22}|M|^2 Re\{e^{i\omega\tau_k}\})z\bar{z} \\
&+ [W_{20}^{(2)}(0)(a_{21} - a_{22}\bar{M}e^{i\omega\tau_k}) + 2W_{11}^{(2)}(0)(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k}) \\
&+ a_{21}[W_{20}^{(1)}(0)\bar{M} + 2W_{11}^{(1)}(0)M] \\
&- a_{22}(W_{20}^{(2)}(-1)\bar{M} + 2W_{11}^{(2)}(-1)M)]z^2\bar{z} + \dots \} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

(4.7) nin her iki yanının katsayılarının karşılaştırılmasıyla;

$$\begin{aligned}
g_{20} &= -2\bar{D}\bar{N}\tau_k(a_{11} + a_{12}Me^{-i\omega\tau_k}) + 2\bar{D}\tau_k(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k})M \\
g_{11} &= -2\bar{D}\bar{N}\tau_k(2a_{11} + a_{12}\bar{M}e^{i\omega\tau_k}) + 2\bar{D}\tau_k(2a_{21}Re\{M\} - a_{22}|M|^2 Re\{e^{i\omega\tau_k}\}) \\
g_{02} &= -2\bar{D}\bar{N}\tau_k(a_{11} + a_{12}\bar{M}e^{i\omega\tau_k}) + 2\bar{D}\tau_k(a_{21} - a_{22}\bar{M}e^{i\omega\tau_k})\bar{M}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{21} = & -\overline{D}N\tau_k[W_{20}^{(1)}(0)(2a_{11} + a_{12}\overline{M}e^{i\omega\tau_k}) + a_{12}(W_{20}^{(2)}(-1) + 2W_{11}^{(2)}(-1)) \\
& + 2W_{11}^{(1)}(0)(a_{12}Me^{-i\omega\tau_k} + 2a_{11})] + \overline{D}\tau_k[W_{20}^{(2)}(0)(a_{21} - a_{22}\overline{M}e^{i\omega\tau_k}) \\
& + 2W_{11}^{(2)}(0)(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k}) + a_{21}(W_{20}^{(1)}(0)\overline{M} + 2W_{11}^{(1)}(0)M) \\
& - a_{22}(W_{20}^{(2)}(-1)\overline{M} + 2W_{11}^{(2)}(-1)M)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden g_{21} i bulmak için , $\theta \in [-1, 0]$ olmak üzere $W_{20}(\theta)$ ve $W_{11}(\theta)$ hesaplanmalıdır. (4.3), (4.5) ve (4.7) dan;

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \dot{u}_t - 2Re\{\dot{z}(t)q(\theta)\} \\
&= A(0)u_t + R(0)u_t - 2Re\{[i\omega\tau_k z(t) + \bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))]q(\theta)\} \\
&= A(0)[W(t, \theta) + 2Re\{z(t)q(\theta)\}] + R(0)u_t - 2Re\{i\omega\tau_k z(t)q(\theta)\} \\
&\quad - 2Re\{\bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\
&= A(0)W(t, \theta) + 2Re\{z(t)A(0)q(\theta)\} + R(0)u_t - 2Re\{i\omega\tau_k z(t)q(\theta)\} \\
&\quad - 2Re\{\bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\
&= A(0)W(t, \theta) + R(0)u_t - 2Re\{\bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\
&= \begin{cases} A(0)W(t, \theta) - 2Re\{\bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \\ A(0)W(t, \theta) - 2Re\{\bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} + f_0(z(t), \bar{z}(t)), & \theta = 0 \end{cases} \\
&\stackrel{tnm}{=} A(0)W(t, \theta) + H(z(t), \bar{z}(t), \theta) \tag{4.8}
\end{aligned}$$

dır. Burada

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta)z\bar{z} + H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \tag{4.9}$$

(4.9) ve (4.10) dan

$$A(0)W(t, \theta) - \dot{W} = -H(z, \bar{z}, \theta) = -H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} - H_{11}(\theta)z\bar{z} - H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} - \dots \tag{4.10}$$

yazılır. (4.6) dan

$$A(0)W(t, \theta) = A(0)W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + A(0)W_{11}(\theta)z\bar{z} + \dots \quad (4.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \dot{W} &= W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} = W_{20}(\theta)z\dot{z} + W_{11}(\theta)(\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) + \dots \\ &= W_{20}(\theta)z(i\omega\tau_k z + g(z, \bar{z})) + W_{11}(\theta)\{[i\omega\tau_k z + g(z, \bar{z})]\bar{z} + z[-i\omega\tau_k \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z})]\} + \dots \\ &= 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.12) ve (4.13) taraf tarafa çıkarılırsa;

$$A(0)W(t, \theta) - \dot{W} = [A(0) - 2i\omega\tau_k]W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + A(0)W_{11}(\theta)z\bar{z} + \dots \quad (4.13)$$

(4.11) ve (4.14) karşılaştırılmasıyla,

$$[A(0) - 2i\omega\tau_k]W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + A(0)W_{11}(\theta)z\bar{z} + \dots = -H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} - H_{11}(\theta)z\bar{z} - H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} - \dots \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.15)in her iki yanının katsayılarının karşılaştırılmasıyla

$$\begin{aligned} [A(0) - 2i\omega\tau_k]W_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta) \\ A(0)W_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta), \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.9) dan $\theta \in [-1, 0)$ için

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}, \theta) &= -2Re\{\bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} \\ &= \bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta) - q^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))\bar{q}(\theta) \\ &= -g(z, \bar{z})q(\theta) - \bar{g}(z, \bar{z})\bar{q}(\theta) \\ &= -(g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta))\frac{z^2}{2} - (g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta))z\bar{z} + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

katsayıların (4.10) ile karşılaştırılmasıyla

$$H_{20}(\theta) = -(g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)) \quad (4.17)$$

ve

$$H_{11}(\theta) = -(g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)) \quad (4.18)$$

(4.16) , (4.18) ve $A(0)$ tanımından

$$\dot{W}_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta) - g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)$$

bulunur. $q(\theta) = q(0)e^{i\omega\tau_k\theta}$ olduğundan

$$\begin{aligned} W_{20}(\theta) &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega}q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_1e^{2i\omega\tau_k\theta} \\ &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega}q(\theta) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega}\bar{q}(\theta) + E_1e^{2i\omega\tau_k\theta}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Burada $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ sabit bir vektördür. Benzer şekilde (4.16) , (4.19) ve $A(0)$ ın tanımından

$$\dot{W}_{11}(\theta) = g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)$$

bulunur ve

$$\begin{aligned} W_{11}(\theta) &= -\frac{ig_{11}}{\tau_k\omega}q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k\omega}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_2 \\ &= -\frac{ig_{11}}{\tau_k\omega}q(\theta) + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k\omega}\bar{q}(\theta) + E_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

dir. Burada $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ sabit bir vektördür. (4.20) ve (4.21) deki E_1 ve E_2 leri bulmak için $A(0)$ ın tanımından ve (4.16)dan

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_k W_{20}(0) - H_{20}(0) \quad (4.21)$$

ve

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{11}(\theta) = -H_{11}(0) \quad (4.22)$$

dır. Burada $d\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ dır. $q(\theta)$ in $A(0)$ in özvektörü olduğunun bilinmesinden, (4.20) den ve $A(0)$ in tanımından,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{20}(\theta) &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} \int_{-1}^0 d\eta(\theta)q(\theta) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \overline{\int_{-1}^0 d\eta(\theta)q(\theta)} + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\ &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} \dot{q}(0) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \dot{\bar{q}}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\ &= -g_{20}q(0) + \frac{\bar{g}_{02}}{3}\bar{q}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \end{aligned} \quad (4.23)$$

ve

$$2i\omega\tau_k W_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \frac{2\bar{g}_{02}}{3}\bar{q}(0) + 2i\omega\tau_k E_1. \quad (4.24)$$

dır. Buradan (4.22) eşitliği

$$-g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + (2i\omega\tau_k - \int_{-1}^0 d\eta(\theta)e^{2i\omega\tau_k\theta})E_1 = H_{20}(0) \quad (4.25)$$

haline gelir. Benzer şekilde (4.21) den

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{11}(\theta) = g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2 \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.23) de

$$-(g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0)) - \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2 = H_{11}(0) \quad (4.27)$$

şeklinde yazılır. (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden biliniyor ki

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}, 0) &= H_{20}(0)\frac{z^2}{2} + H_{11}(0)z\bar{z} + H_{02}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \\ &= -2Re\{\bar{q}^*(0)f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\} + f_0(z(t), \bar{z}(t)) \\ &= (-g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0))\frac{z^2}{2} - (g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta))z\bar{z} + f_0(z(t), \bar{z}(t)) + \dots \end{aligned}$$

ve buradan

$$H_{20}(0) = -(g_{20}q(0) + \bar{g}_{02}\bar{q}(0)) + \tau_k \begin{pmatrix} 2(-a_{11} - a_{12}Me^{-i\omega\tau_k}) \\ 2(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k})M \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$H_{11}(0) = -(g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0)) + \tau_k \begin{pmatrix} 2(-2a_{11} - a_{12}Re\{\bar{M}e^{i\omega\tau_k}\}) \\ 2(2a_{21}Re\{M\} - a_{22}|M|^2 Re\{e^{i\omega\tau_k}\}) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

(4.29), (4.26) da yerine yazılırsa;

$$\left(2i\omega\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{2i\omega\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) E_1 = \tau_k \begin{pmatrix} 2(-a_{11} - a_{12}Me^{-i\omega\tau_k}) \\ 2(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k})M \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yani;

$$\begin{pmatrix} 2i\omega + a_{11}x^* & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ -a_{21}y^* & 2i\omega + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{pmatrix} E_1 = \tau_k \begin{pmatrix} 2(-a_{11} - a_{12}Me^{-i\omega\tau_k}) \\ 2(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k})M \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle,

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2wi + a_{11}x^* & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ -a_{21}y^* & 2wi + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$E_1^{(1)} = \frac{1}{A_1} \begin{vmatrix} 2(-a_{11} - a_{12}Me^{-i\omega\tau_k}) & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ 2M(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k}) & 2i\omega + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix} \quad (4.30)$$

$$E_1^{(2)} = \frac{1}{A_1} \begin{vmatrix} 2i\omega + a_{11}x^* & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ -a_{21}y^* & 2i\omega + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.30) eşitliği, (4.28) de yerine yazılırsa;

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) E_2 = -\tau_k \begin{pmatrix} 2(-2a_{11} - a_{12}Re\{\bar{M}e^{i\omega\tau_k}\}) \\ 2(2a_{21}Re\{M\} - a_{22}|M|^2 Re\{e^{i\omega\tau_k}\}) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yani;

$$\begin{pmatrix} a_{11}x^* & a_{12}x^* \\ -a_{21}y^* & a_{22}y^* \end{pmatrix} E_2 = \begin{pmatrix} 2(-2a_{11} - a_{12}Re\{\bar{M}e^{i\omega\tau_k}\}) \\ 2(2a_{21}Re\{M\} - a_{22}|M|^2 Re\{e^{i\omega\tau_k}\}) \end{pmatrix}$$

denklemlerden

$$\begin{aligned}
E_2^{(1)} &= -a_{22} \frac{4a_{11} + 2a_{12} \operatorname{Re}(Me^{i\omega\tau_k})}{a_{11}a_{22}x^* + a_{12}a_{21}x^*} - a_{12} \frac{4a_{21} \operatorname{Re}(M) - 2a_{22} \operatorname{Re}(e^{i\omega\tau_k}) |M|^2}{a_{11}a_{22}y^* + a_{12}a_{21}y^*}, \\
E_2^{(2)} &= a_{11} \frac{x^*}{y^*} \frac{4a_{21} \operatorname{Re}(M) - 2a_{22} \operatorname{Re}(e^{i\omega\tau_k}) |M|^2}{a_{11}a_{22}x^* + a_{12}a_{21}x^*} - a_{21} \frac{4a_{11} + 2a_{12} \operatorname{Re}(Me^{i\omega\tau_k})}{a_{11}a_{22}x^* + a_{12}a_{21}x^*}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. Böylece (4.20) ve (4.31) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
W_{20}^{(1)}(0) &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \\
&+ \frac{1}{\begin{vmatrix} 2wi + a_{11}x^* & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ -a_{21}y^* & 2wi + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2(-a_{11} - a_{12}Me^{-i\omega\tau_k}) & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ 2M(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k}) & 2i\omega + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}, \\
W_{20}^{(2)}(0) &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} M + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \bar{M} \\
&+ \frac{1}{\begin{vmatrix} 2wi + a_{11}x^* & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ -a_{21}y^* & 2wi + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2i\omega + a_{11}x^* & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ -a_{21}y^* & 2i\omega + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

ve

$$\begin{aligned}
W_{20}^{(1)}(-1) &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} e^{-i\omega\tau_k} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} e^{i\omega\tau_k} + \\
&\frac{1}{\begin{vmatrix} 2wi + a_{11}x^* & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ -a_{21}y^* & 2wi + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2(-a_{11} - a_{12}Me^{-i\omega\tau_k}) & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ 2M(a_{21} - a_{22}Me^{-i\omega\tau_k}) & 2i\omega + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}, \\
W_{20}^{(2)}(-1) &= \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} Me^{-i\omega\tau_k} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \bar{M}e^{i\omega\tau_k} + \\
&\frac{1}{\begin{vmatrix} 2wi + a_{11}x^* & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ -a_{21}y^* & 2wi + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2i\omega + a_{11}x^* & a_{12}x^*e^{-2i\omega\tau_k} \\ -a_{21}y^* & 2i\omega + a_{22}y^*e^{-2i\omega\tau_k} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (4.21) ve (4.32) den

$$\begin{aligned}
W_{11}^{(1)}(0) &= -\frac{ig_{11}}{\tau_k \omega} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k \omega} \\
&\quad - a_{22} \frac{4a_{11} + 2a_{12} \operatorname{Re}(Me^{i\omega\tau_k})}{a_{11}a_{22}x^* + a_{12}a_{21}x^*} - a_{12} \frac{4a_{21} \operatorname{Re}(M) - 2a_{22} \operatorname{Re}(e^{i\omega\tau_k}) |M|^2}{a_{11}a_{22}y^* + a_{12}a_{21}y^*}, \\
W_{11}^{(2)}(0) &= -\frac{ig_{11}}{\tau_k \omega} M + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k \omega} \bar{M} \\
&\quad + a_{11} \frac{x^*}{y^*} \frac{4a_{21} \operatorname{Re}(M) - 2a_{22} \operatorname{Re}(e^{i\omega\tau_k}) |M|^2}{a_{11}a_{22}x^* + a_{12}a_{21}x^*} - a_{21} \frac{4a_{11} + 2a_{12} \operatorname{Re}(Me^{i\omega\tau_k})}{a_{11}a_{22}x^* + a_{12}a_{21}x^*}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
W_{11}^{(1)}(-1) &= -\frac{ig_{11}}{\tau_k \omega} e^{-i\omega\tau_k} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k \omega} e^{i\omega\tau_k} \\
&\quad - a_{22} \frac{4a_{11} + 2a_{12} \operatorname{Re}(Me^{i\omega\tau_k})}{a_{11}a_{22}x^* + a_{12}a_{21}x^*} - a_{12} \frac{4a_{21} \operatorname{Re}(M) - 2a_{22} \operatorname{Re}(e^{i\omega\tau_k}) |M|^2}{a_{11}a_{22}y^* + a_{12}a_{21}y^*}, \\
W_{11}^{(2)}(-1) &= -\frac{ig_{11}}{\tau_k \omega} M e^{-i\omega\tau_k} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k \omega} \bar{M} e^{i\omega\tau_k} \\
&\quad + a_{11} \frac{x^*}{y^*} \frac{4a_{21} \operatorname{Re}(M) - 2a_{22} \operatorname{Re}(e^{i\omega\tau_k}) |M|^2}{a_{11}a_{22}x^* + a_{12}a_{21}x^*} - a_{21} \frac{4a_{11} + 2a_{12} \operatorname{Re}(Me^{i\omega\tau_k})}{a_{11}a_{22}x^* + a_{12}a_{21}x^*}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.33) ve (4.34) eşitliklerinden g_{ij} katsayıları belirlenir. Böylece center manifoldda τ_k kritik değerindeki çatallanan periyodik çözümlerin çatallanma katsayıları

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega\tau_k} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2},$$

$$\mu_2 = -\frac{\operatorname{Re}\{c_1(0)\}}{\operatorname{Re}\{\lambda'(\tau_k)\}},$$

$$\beta_2 = 2\operatorname{Re}\{c_1(0)\},$$

$$T_2 = -\frac{\operatorname{Im}\{c_1(0)\} + \mu_2 \operatorname{Im}\{\lambda'(\tau_k)\}}{\omega\tau_k}$$

şeklinde belirlenir. Burada μ_2 Hopf çatallanmanın yönünü, β_2 çatallanan periyodik çözümün kararlılığını ve T_2 çatallanan çözümün periyodunu ifade eder. Bu bilgilerle aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.1: Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen μ_2 için; eğer $\mu_2 > 0$ ise, $\tau > \tau_0$ için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma süperkritiktir, $\mu_2 < 0$ ise, $\tau > \tau_0$ için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma subkritiktir. Çatallanan periyodik çözümün kararlılığını belirleyen β_2 için; $\beta_2 < 0$ ise çatallanan periyodik çözüm kararlı, $\beta_2 > 0$ ise kararsızdır. Çatallanan çözümün periyodunu ifade eden T_2 için; $T_2 < 0$ iken periyod artar, $T_2 > 0$ iken periyod azalır.

BÖLÜM 5

5. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR

Bu bölümde, önceki bölümlerde elde edilen teorik sonuçlar MATLAB kullanılarak nümerik simülasyonlar ile gösterilecektir. Gecikmeli av-avcı sisteminde $r_1 = 1.5, r_2 = 0.6, a_{11} = 0.7, a_{12} = 0.8, a_{21} = 0.45, a_{22} = 0.006$ alınarak, (1.7) sistemi aşağıdaki

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[1.5 - 0.7x(t) - 0.8y(t - \tau)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-0.6 + 0.45x(t) - 0.006y(t - \tau)]\end{aligned}\quad (5.1)$$

sistemine dönüşür. (5.1) sisteminin tek pozitif denge noktası $E^* = (x^*, y^*) = (1.3427, 0.7001)$ dir. 4. bölümde yapılan çalışmalarda, Hopf çatallanmanın yönünü ve τ kritik değerinde çatallanan periyodik çözümün kararlılığını belirleyen katsayıların genel formülleri elde edilmiştir.

Bu sonuçlardan

$$\omega_0 = \left[\frac{-(p^2 - q^2) + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4s^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.3612$$

bulunur ve buradan da $\tau_0 = \frac{\pi}{2\omega_0} = 3.9965$ şeklinde hesaplanır. Teorem 4 den, E^* denge noktası $\tau \in [0, \tau_0) = [0, 3.9965)$ iken asimtotik kararlıdır ancak $\tau > 3.9965$ iken kararsızdır. $\tau = \tau_0$ da ise Hopf çatallanma meydana gelir. Eğer (5.1) sistemi için Hopf çatallanma parametreleri hesaplanırsa

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega\tau} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2} = 22.142 - 14.758i,$$

$$\mu_2 = -\frac{Re\{c_1(0)\}}{Re\{\lambda'(\tau)\}} = -188.12,$$

$$\beta_2 = 2Re\{c_1(0)\} = 44.284,$$

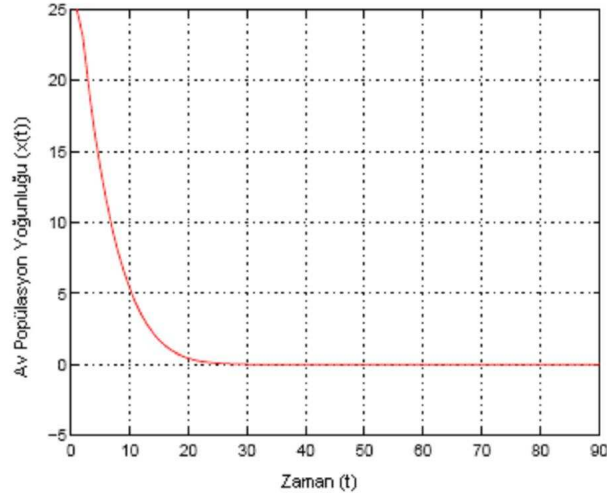
$$T_2 = -\frac{Im\{c_1(0)\} + \mu_2 Im\{\lambda'(\tau)\}}{\omega\tau} = 10.222$$

elde edilir. Buradan görülür ki,

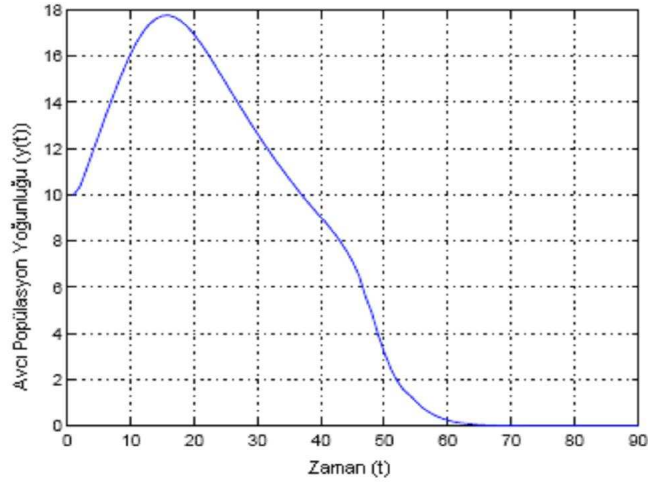
$$\mu_2 < 0, \beta_2 > 0, T_2 > 0$$

dır. Böylece (5.1) sisteminde $\tau_0 = 3.9965$ iken oluşan Hopf çatallanma subkritiktir. τ, τ_0 in soluna geçtiğinde periyodik çözüm çatallanır ve aşağıdaki şekillerden de görüldüğü üzere oluşan çatallanan periyodik çözüm kararsızdır.

Yapılan nümerik simülasyonlarda, başlangıç noktası $(x_0, y_0) = (25, 10)$ olarak alınmıştır. Şekil 5.1, şekil 5.2 ve şekil 5.3 gösteriyor ki, E^* denge noktası $\tau \in [0, 3.9965)$ iken asimtotik kararlıdır. İlk olarak, $\tau = 3 < \tau_0$ alındığında, $x(t)$ ve $y(t)$ yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri şekil 5.1 ve şekil 5.2 de gösterilmiştir. Burada $\tau < \tau_0$ için E^* denge noktasının asimtotik kararlı olduğu doğrulanmıştır.

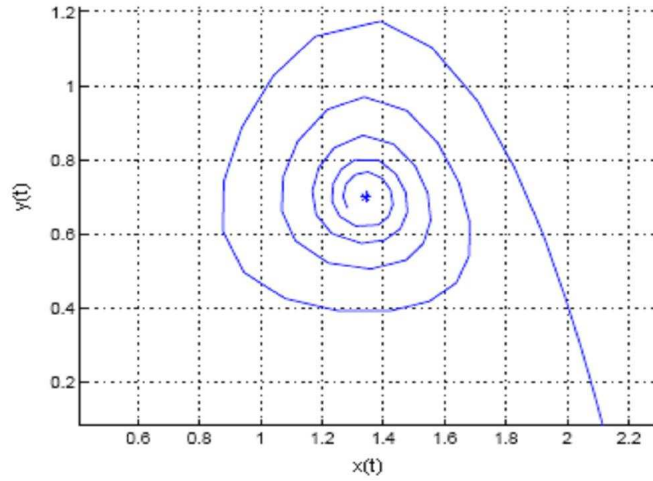


Şekil 5.1.: $\tau = 3 < \tau_0$ için $x_0 = 25, y_0 = 10$ başlangıç koşulları altında av popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



Şekil 5.2.: $\tau = 3 < \tau_0$ için $x_0 = 25$, $y_0 = 10$ başlangıç koşulları altında avcı popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği

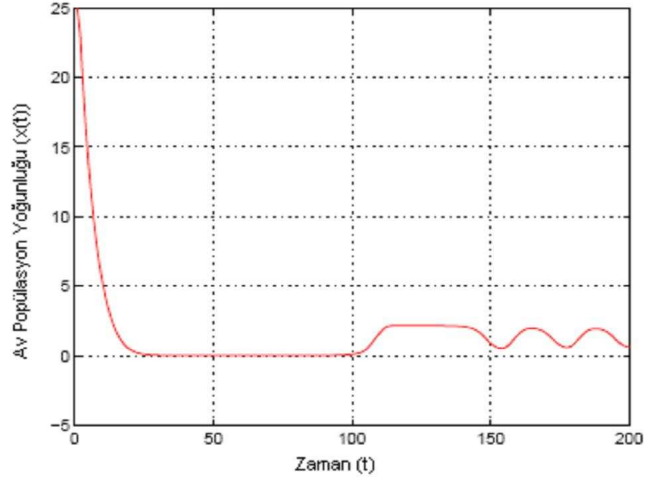
Şekil 5.3 te, gecikme parametresi tekrar $\tau = 3 < \tau_0$ alınarak, $x(t)$ av popülasyon yoğunluğuna karşılık gelen $y(t)$ avcı popülasyon yoğunluğunun grafiği verilmiştir. Burada iki boyutta, E^* denge noktasının asimtotik kararlı olduğu gerçekleşmiştir.



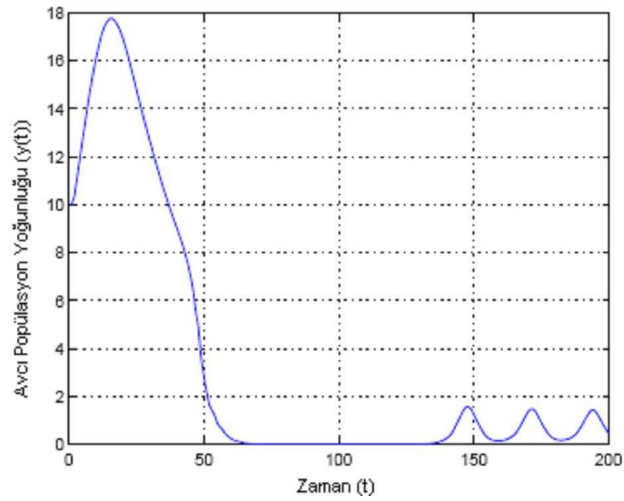
Şekil 5.3.: $x_0 = 25$, $y_0 = 10$ başlangıç koşulları altında av ve avcı popülasyon yoğunluklarının faz portreleri

Şekil 5.4, şekil 5.5 ve şekil 5.6 da $\tau = 3.8 < \tau_0$ için nümerik simülasyonlar yapılmıştır ve

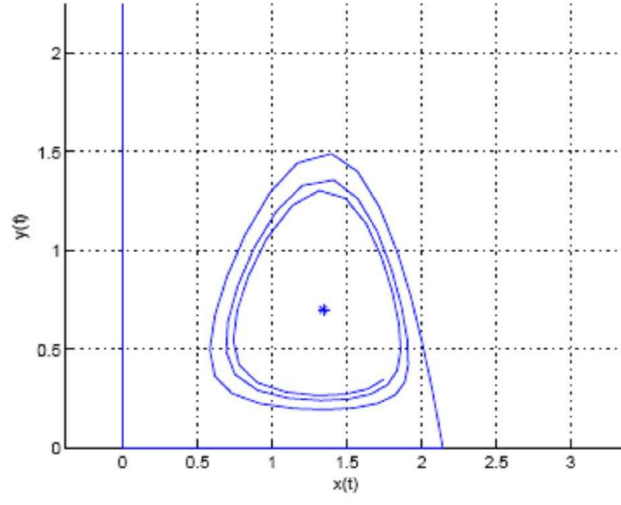
bu şekiller gösterir ki, E^* denge noktasında periyodik çözümler çatallanır ve bu çözümler kararsızdır.



Şekil 5.4.: $\tau = 3.8 < \tau_0$ için $x_0 = 25, y_0 = 10$ başlangıç koşulları altında av popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



Şekil 5.5.: $\tau = 3.8 < \tau_0$ için $x_0 = 25, y_0 = 10$ başlangıç koşulları altında avcı popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği



Şekil 5.6. $\tau = 3.8 < \tau_0$ iken avcı popülasyonunun av popülasyonuna göre faz portresi

Böylece, analitik çalışmalardan elde edilen, gecikme parametresindeki değişimin, denge noktasının kararlılığı üzerindeki etkisi, nümerik simülasyonlarla da desteklenmiş olur.

BÖLÜM 6

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada bir Lotka-Volterra tipi av-avcı diferansiyel denklem sisteminde avcı popülasyonuna gecikme terimi eklenerek bu gecikmenin sistemin dinamiğini nasıl etkilediği gösterilmiştir.

May [25] tarafından ortaya konulan gecikmeli diferansiyel denklem sistemini, Song ve Wei [33] analiz etmişler, av popülasyonundaki gecikme teriminin etkilerini incelemişlerdir. Yan ve Li [41], bu sistemde avcı popülasyonuna gecikme terimi eklemişler ve sistemin pozitif denge noktasının kararlılığındaki değişimi incelemişlerdir. Normal form teoremi ve center manifold teoremi kullanılarak periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemişlerdir. Yan ve Zhang [43], çalışmalarında av-avcı sistemindeki tüm av ve avcı popülasyonuna gecikme terimi eklemişlerdir. Burada pozitif denge noktasının kararlılığını kaybettiği ve Hopf çatallanma oluştuğu gösterilmiş ve normal form teoremi, center manifold teoremi kullanılarak Hopf çatallanmanın yönü ve çatallanan periyodik çözümler incelenmiştir.

Yapılan teorik analizle lineerleştirilmiş sistemin lokal kararlılığı incelenmiş ve τ gecikme parametresi Hopf parametresi olarak seçilerek τ için belirlenen koşullar altında sistemin tek pozitif denge noktasının kararlılığını kaybettiği ve Hopf çatallanma oluştuğu gösterilmiştir. Başka bir ifadeyle, periyodik çözümün pozitif denge noktası etrafında çatallandığı ispatlanmıştır. Ayrıca, normal form teoremi ve center manifold teoremi [10] kullanılarak τ nun kritik değerinde çatallanan periyodik çözümün kararlılığı, yönü ve periyodu bulunmuştur. Son olarak nümerik simülasyonlarla yapılan teorik analiz desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] L. J. S. Allen, An Introduction To Mathematical Biology, *Prentice Hall*, 2007.
- [2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations, *Wiley*, USA, 2005.
- [3] X. Chen, Periodicity in a nonlinear discrete predator-prey system with state dependent delays, *Nonlinear Anal. RWA* 8 (2007) 435-446.
- [4] C. Çelik, The stability and Hopf bifurcation for a predator-prey system with time delay, *Chaos Solitons & Fractals*, 37 (2008) 87-99.
- [5] C. H. Edwards, D. E. Penney, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Bilgisayar Destekli Matematiksel Modellemeli Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri, *Palme*, Ankara, 2006.
- [6] T. Faria, Stability and bifurcation for a delayed predator-prey model and the effect of diffusion, *J.Math. Anal. Appl.* 254 (2001) 433-463.
- [7] M. S. Fowler, G. D. Ruxton, Population dynamic consequences of Allee effects, *J. Theor. Biol.* 215 (2002) 39-46.
- [8] K. Gopalsamy Time lags and global stability in two species competition. *Bull Math Biol*, 42 (1980) 728--37.
- [9] J. K. Hale, Theory of Functional Differential Equations, *Springer-Verlag*, New York, 1977.
- [10] N. D. Hassard, Y. H. Kazarinoff, Theory and Applications of Hopf Bifurcation, Cambridge University Press, *Cambridge*, 1981.
- [11] X. He, Stability and delays in a predator--prey system, *J. Math. Anal. Appl.* 198 (1996) 355--370.
- [12] H. -F. Huo, W.-T. Li, Existence and global stability of periodic solutions of a discrete predator-prey system with delays, *Appl. Math. Comput.* 153 (2004) 337-351.
- [13] G. Iooss, D. D. Joseph, Elementary Stability And Bifurcation Theory, *Springer*, New York, 1997.
- [14] S. R. -J. Jang, Allee effects in a discrete-time host-parasitoid model, *J. Diff. Equ. Appl.* 12 (2006) 165-181.
- [15] G. Jiang, Q. Lu, Impulsive state feedback of a predator-prey model, *J. Comput. Appl. Math.* 200 (2007) 193-207.
- [16] H. Kielhöfer, Bifurcation Theory An Introduction With Applications to PDEs, *Springer-Verlag*, New york, 2004.
- [17] S. Krise, SR. Choudhury, Bifurcations and chaos in a predator--prey model with delay and a laser-diode system with self-sustained pulsations. *Chaos, Solitons & Fractals* 16 (2003) 59--77.

- [18] Y. Kuang, Delay differential equations with applications in population dynamics. Boston: Academic Press; 1993.
- [19] Yu. A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, *Springer-Verlag*, New York, 2004.
- [20] A. Leung, Periodic solutions for a prey--predator differential delay equation, *J. Differential Equations* 26 (1977) 391--403.
- [21] Z. Liu and R. Yuan Stability and bifurcation in a harvested one-predator--two-prey model with delays *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 27, Issue 5, March 2006, Pages 1395-1407.
- [22] B. Liu, Z. Teng, L. Chen, Analysis of a predator-prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy, *J. Comput. Appl. Math.* 193 (2006) 347-362.
- [23] X. Liu, D. Xiao, Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals* 32 (2007) 80-94.
- [24] J. E. Marsden, M. McCracken, The Hopf Bifurcation And Its Applications, *Springer-Verlag*, New York, 1976.
- [25] R. M. May, Time delay versus stability in population models with two and three trophic levels, *Ecology* 4 (1973) 315-325.
- [26] W. Ma, Y. Takeuchi, Stability analysis on a predator-prey system with disributed delays, *J. Comput. Appl. Math.* 88 (1998) 79-94.
- [27] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, *Springer-Verlag*, New York, 1993.
- [28] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, *Springer-Verlag*, New York, 1991.
- [29] S. Ruan, Absolute stability, conditional stability and bifurcation in Kolmogorov-type predator--prey systems with discrete delays. *Quart Appl Math* 2001; 59: 159--73.
- [30] S. Ruan, J. Wei, Periodic solutions of planar systems with two delays, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 129 (1999) 1017--1032
- [31] "Scholarpedia, Andronov-Hopf Bifurcation" erişim adresi: http://www.scholarpedia.org/article/Andronov-Hopf_bifurcation , erişim tarihi: 2 Mayıs 2008.
- [32] Y. Song, M. Han, Y. Peng, Stability and Hopf bifurcations in a competitive Lotka-Volterra system with two delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, 22 (2004) 1139-1148.
- [33] Y. L. Song, J. J. Wei, Local Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system, *J. Math. Anal. Appl.* 301 (2005) 1-21.
- [34] C. Sun, M. Han, Y. Lin, Y. Chen, Global qualitative analysis for a predator-prey system with delay, *Chaos, Solitons & Fractals* 32 (2007) 1582-1596.
- [35] Z. Teng, M. Rehim, Persistence in nonautonomous predator-prey systems with infinite delays, *J. Comput. Appl. Math.* 197 (2006) 302-321.

- [36] L. -L. Wang, W.-T. Li, P.-H. Zhao, Existence and global stability of positive periodic solutions of a discrete predator-prey system with delays, *Adv. Difference Equ.* 2004, no. 4, 321-336.
- [37] F. Wang, G. Zeng, Chaos in Lotka-Volterra predator-prey system with periodically impulsive ratio-harvesting the prey and time delays, *Chaos, Solitons & Fractals* 32 (2007) 1499-1512.
- [38] X. Wen, Z. Wang, The existence of periodic solutions for some models with delay, *Nonlinear Anal. RWA* 3 (2002) 567--581.
- [39] R. Xu, Z. Wang, Periodic solutions of a nonautonomous predator-prey system with stage structure and time delays, *J. Comput. Appl. Math.* 196 (2006) 70-86.
- [40] X. P. Yan, Y. D. Chu, Stability and bifurcation analysis for a delayed Lotka-Volterra predator-prey system, *J. Comput. Appl. Math.* 196 (2006) 198-210.
- [41] X. P. Yan, W. T. Li, Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system, *Appl. Math. Comput.* 177 (2006) 427-445.
- [42] X. P. Yan, W. T. Li, Bifurcation and global periodic solutions in a delayed facultative mutualism system, *Physica D* 227 (2007) 51-69.
- [43] X. P. Yan, C. H. Zhang, Hopf bifurcation in a delayed Lotka-Volterra predator-prey system, *Nonlinear Anal. :Real World Appl.* 9 (2008) 114-127.
- [44] L. Zhou, Y. Tang, S. Hussein, Stability and Hopf bifurcation for a delay competition diffusion system, *Chaos, Solitons & Fractals* 14 (2002) 1201--25.

EKLER

EK A: MATLAB-GDD KODLARI:

Çizelge EkA.1 MATLAB-GDD Kodları

```
tspan=[0,200];

sol = dde23(@ddex1de,[3.8],@ddex1hist,tspan)

d=sol.y

for i=1;

    for k=1:200;

        n(k,1)=d(i,k);

    end;

end;

for i=2;

    for k=1:200;

        p(k,1)=d(i,k);

    end;

end;

figure;
plot(n,'r')
ylabel('Prey density (x(t))');
xlabel('Time(t)');
grid on

figure;
plot(p)
ylabel('Predator density (y(t))');
xlabel('Time(t)');
grid on

r1=1.5;

r2=0.6;

a1=0.7;
```

```

a2=0.8;

a3=0.45;

a4=0.006;

test=r1*a3-r2*a1

x0=((r1*a4+r2*a2)/(a1*a4+a2*a3))

y0=((r1*a3-r2*a1)/(a1*a4+a2*a3))

g=a1*x0

q=a4*y0

s=(a1*a4+a2*a3)*(x0*y0)

w=sqrt(( -(g^2-q^2)+ sqrt((g^2-q^2)^2+4*(s^2) ))/2)

t0=(1/w)*( acos((q*s-g*(w^2))/(q*(w^2)-s*g) ))

figure;

hold on
plot(n,p)

grid on;

title('');

xlabel('x(t)');

ylabel('y(t)');

hold on

plot(x0,y0,'*')

function s = ddexlhist(t)

s =[25,10];

function dydt = ddexlde(t,y,Z)

```

```
r1=1.5;  
r2=0.6;  
a1=0.7;  
a2=0.8;  
a3=0.45;  
a4=0.006;  
ylag1 = Z(:,1);  
dydt = [ y(1)*(r1-a1*y(1)-a2*ylag1(2))  
         y(2)*(-r2+a3*y(1)-a4*ylag1(2)) ];
```


EK B : Terim Sözlüğü

Türkçe Terim

İngilizce Terim

asimtotik	asymptotic
av	prey
avcı	predator
çatallanma	bifurcation
denge noktası	equilibrium
döngü	cycle
düzgün	smooth
eyer-düğüm	saddle-node
gecikme	delay
invariant	invariant
kararlılık	stability
karakteristik	characteristic
kuadratik	quadratic
kübik	cubic
lineerleştirme	linearization
normalizasyon	normalisation
özdeğer	eigenvalue
özvektör	eigenvector
rezonant	resonant
subkritik	subcritical
süperkritik	supercritical
tırmık	pitchfork
transandantal	transcendental
transkritik	transcritical
yön	direction

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÇEKİÇ, Gökçen
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 18.10.1982 Ankara
Medeni hali : Bekâr
Telefon : 0 (312) 292 43 28
Faks : 0 (312) 292 40 76
e-mail : gcekic@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2006-2009	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayımlar

1.C.Çelik and G.Çekiç, “Bifurcation Analysis of a Logistic Delayed Predator-Prey System”, submitted to Journal of Computational and Applied Mathematics, June 2009.