LUCAS SAYILARININ BAZI BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİ

SADETTİN KARAGÖL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Doç. Dr. Adem ŞAHİN

Ocak - 2020

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LUCAS SAYILARININ BAZI BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİ

SADETTİN KARAGÖL

TOKAT
Ocak - 2020

Sadettin KARAGÖL tarafından hazırlanan "**Lucas Sayılarının Bazı Bölünebilme Özellikleri**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 16 OCAK 2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANA BİLİM DALI nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Adem ŞAHİN	....
Üye Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR Amasya Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....

ONAY

....

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
30/01/2020

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SADETTİN KARAGÖL

Ocak 2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LUCAS SAYILARININ BAZI BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİ

SADETTİN KARAGÖL

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ADEM ŞAHİN)

Bu tez çalışmasında öncelikle tamsayılarda temel bölünebilme özellikleri verildi. Fibonacci sayı dizisinin tanımı verildi. Altın orandan kısaca bahsedildi. Altın oran ile Lucas ve Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiye değinildi. Lucas sayılarına adı verilen François Edouard Anatole Lucas'ın hayatından bahsedildi. Geniş bir literatür taraması yapılarak Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilgili teoremler verildi. Daha önce bulunmuş olan ve çalışmamızın temel hareket noktasını oluşturan Lucas sayılarında bölünebilme özellikleri verildi. Özellikle Carlitz (1964), tarafından verilen bir Lucas sayısının başka bir Lucas sayısına bölünebilme şartı üzerinden hareket edildi. Bu şarttan yola çıkarak belirli indislere sahip Lucas sayıları arasında yeni teoremler bulundu. Bulunan teoremler ispatlandı ve teoremlere örnekler verildi. Yine Koşar (2013), tarafından verilen bir Fibonacci sayısının kaçıncı kuvvetinin başka bir Fibonacci sayısını bölebileceği şartı ve bulunan teoremler incelendi. Yapılan araştırmalar sonucunda bulunan yeni bölünebilme özelliklerinden de yararlanıldı. Çalışmanın esas amacı olan herhangi bir Lucas sayısının başka bir Lucas sayısının kaçıncı kuvvetine bölünebileceği şartı belirlendi.

2020, 65 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Binet formülü, Bölünebilme özellikleri

ABSTRACT

MASTER THESIS

SOME DIVISIBILITY PROPERTIES OF LUCAS NUMBERS

SADETTİN KARAGÖL

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ADEM ŞAHİN)

In this thesis, the basic divisibility properties of integers were first explained. Definition of the Fibonacci number sequence was given. The Golden Ratio was mentioned briefly. The relationship between Lucas and Fibonacci numbers and the Golden Ratio was also touched on. The life of François Edouard Anatole Lucas was given in the study. An extensive literature review was conducted and the theorems of Fibonacci and Lucas number sequences was given. Divisibility properties in the Lucas numbers which had been found before and had formed the main point of our study were explained. Specifically, Carlitz (1964) acted on the condition that a Lucas number given by it can be divided into another Lucas number. Based on this condition, new features were found among Lucas numbers. The theorems found in study were proved and exemplified. The divisibility condition explored by Koşar (2013) for the Fibonacci number was examined. The new divisibility features found as a result of the researches were also used. It has been identified that any Lucas number, which was the main purpose of the study, could be divided into the what forces of another Lucas number.

2020, 65 PAGE

KEYWORDS: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Binet Formula, Divisibility properties

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlamasına vesile olmakla kalmayıp, bitimine kadar olan her aşamasında beni destekleyen, hem maddi, hem manevi olarak yardımda bulunan kıymetli hocam Doç. Dr. Adem ŞAHİN'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Çalışma süresince beni cesaretlendiren ve bana güvenen canım eşim Buket'e ve biricik kızım Miray Beylem'e sevgilerimi iletiyorum.

SADETTİN KARAGÖL

Ocak 2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Simgeler	Açıklama
F_k	k. Fibonacci sayısı
L_k	k. Lucas sayısı
ϕ	Euler fi fonksiyonu
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$y \mid x$	y sayısı x sayısını böler
$y \nmid x$	y sayısı x sayısını bölmez
$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$ kümesi
$\sum$	Toplam sembolü
(x, y)	x ve y sayılarının en büyük ortak böleni
$[x, y]$	x ve y sayılarının en küçük ortak katı
$\lfloor x \rfloor$	x sayısından küçük en büyük tamsayı
$\lceil x \rceil$	x sayısından büyük en küçük tamsayı
$\binom{n}{r}$	n'nin r'li kombinasyonu

TABLO LİSTESİ

1. GİRİŞ

Matematik, sanat ve estetikte bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği düşünülen orana altın oran denilmektedir. Altın oran özellikle mimaride ve sanatta tarih boyunca kullanılagelmiştir. Ayrıca doğada birçok canlı ve nesnenin boyutlarının altın orana göre yaratıldığı gözlemlenmiştir. Altın oran ile Lucas sayıları arasında çok sıkı ilişki bulunmaktadır. Ardışık iki Lucas sayısının oranı altın orana yaklaşmakla kalmayıp, altın oranı veren $x^2 - x - 1 = 0$ denklemini sağlayan değerler α ve β ise n. Lucas sayısı $L_n = \alpha^n + \beta^n$ eşitliği ile bulunabilmektedir. Bu bağlamda doğada sıklıkla karşımıza çıkan altın oranla arasında sıkı ilişkilerin bulunduğu Lucas sayı dizileriyle ilgili bulunan her yeni özellik veya teorem bize farklı sonuçlar elde etmede yardımcı olacaktır.

Ardışık iki terimi arasında sabit bir fark olan sayı dizilerine aritmetik dizi, ardışık iki terimi arasında sabit bir oran olan sayı dizilerine geometrik dizi denir. Bu dizilerin dışında özel sayı dizileri de bulunmaktadır. Bazı sayı dizilerinde rekürans bağıntısı bulunmaktadır. Rekürans bağıntısı dizideki herhangi bir terimin kendisinden önceki terimler ile bulunabilmesidir. Rekürans ilişkisinin bulunduğu sayı dizilerinden, üzerinde en çok çalışma ve araştırma yapılanlardan biri Lucas sayı dizisidir. Lucas sayı dizilerinin bölünebilme özellikleriyle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. İlk olarak Carlitz (1964), $L_m | L_n$ ise $n = (2k-1)m,\ m > 1$ önermesini ispatlamıştır. Bu önerme bize Lucas sayılarının birbirlerine bölünebilmeleri için gerekli şartı vermektedir. Daha sonraki yıllarda Filipponi (1988) çalışmasında Lucas sayılarının modüler temsili yapmıştır. Vajda (1989), Lucas sayılarının kombinatorik gösterimini yapmıştır. Şahin (2010), Genelleştirilmiş k-Basamak Lucas sayıları ve matris gösterimini yapmıştır. Bu sayılan çalışmaların haricinde de çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Koşar (2013), Fibonacci sayılarında bölünebilme konusunda bir çalışma yapmıştır. Koşar çalışmasında ${F_n}^p | F_m$ şartını araştırmış ve sonuçlar elde etmiştir. Bu tez çalışmasında benzer ilişkinin Lucas sayılarında varlığı araştırılmıştır. Yapılan çalışmalar sonucunda Lucas sayılarında yeni bölünebilme özellikleri bulunmuş olup yeni sonuçlara ulaşılmıştır.

2. LİTERATÜR ÖZETLERİ

Tezin bu bölümünde Fibonacci sayılarında ve özellikle de Lucas sayılarında bölünebilme özellikleri alanında daha önce yapılmış çalışmalara yer verilmiştir.

Carlitz (1964), bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinde bölünebilme özellikleri yer almaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir. Bu özelliklerden üçüncüsü çalışmamızın başında kullanılan en temel özelliktir.

1. $F_m|F_n$ ise $n = km$, $m > 2$
2. $F_m|F_n$ ise $n = 2km$, $m > 1$
3. $L_m|L_n$ ise $n = (2k-1)m$, $m > 1$

Hoggatt ve Bergum (1974), **“**Divisibility and congruence relations” adlı çalışmada, Fibonacci veya Lucas sayılarını bölen sayıları araştırmışlardır. Zaten aralarında ilişki bulunan Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin arasında yeni ilişkiler bulmuşlardır.

Filipponi (1988), genelleştirilmiş Lucas sayılarının modüler temsilini yapmış ve bazı özellikler vermiştir. Bu özellikler;

1. Eğer n 3’e bölünmeyen tek tamsayı ve $L_n = 1(mod\ n)$ ise $L_{L_n} \equiv 1(mod\ L_n)$
2. $k \in N$ için $L_{L_2^k} \equiv 1(mod\ L_{2^k})$
3. Eğer $L_n \equiv 0(mod\ n)$ ise $L_{L_n-1} \equiv 1(mod\ L_n - 1)$ dir.

Vajda (1989), “Fibonacci & Lucas Numbers And The Golden Section” adlı kitabında Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili özellikler ve teoremler verilmiştir. Bu özelliklerden bazıları aşağıda verilmiştir.

1. t tek asal olmak üzere

$$L_{kt} = L_t^k + \sum_{i=1}^{k/2} \frac{k}{2}\binom{k-i-1}{i-1}.L_t^{k-2i}$$

2. Eğer $(s,t) = d$ ise $(L_s, L_t) = L_d$ olur.
3. $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$
4. $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
5. $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$

6. $F_n + L_n = 2F_{n-1}$

7. $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$

Singh (1990), Verner E. Hoggatt tarafından 1980 yılında ispatlanan " $\phi(n)$ Euler ϕ fonksiyonu olduğunda $\phi(F_n) \equiv 0\ (mod\ 4),\ n > 4$ " teoremini ϕ'yi toplam fonksiyonu kabul ederek incelemiş ve bölünebilme özellikleri bulmuştur.

Andre-Jeannin R. (1991), genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin indislerine göre dağılımını incelemiştir. Belirli bir kurala göre yinelenen sayı dizilerinden Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin, indislerine göre belirli terimler tarafından bölünebilirliğine ilişkin sonuçlar elde etmişlerdir.

Koshy (2001), "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications" adlı kitabında Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin günlük hayatta hemen hemen her yerde karşımıza çıktığını birçok örnekle anlatmıştır. Bu sayı dizilerine ait genel özelliklere yer verildiği gibi aşağıda yazılan bölünebilme özelliklerinden de bahsedilmiştir.

1. Her *n*. Fibonacci sayısı F_n yi böler.
2. Eğer $(m, n) = 1$ ise $F_m.F_n \mid F_{m.n}$
3. $L_m | F_n$ eğer $2m|n$, $m \geq 2$
4. $F_{2n} = F_n.L_n$
5. $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$
6. $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$
7. $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
8. $F_{2^m} = L_{2^{m-1}}.L_{2^{m-2}} \ldots .L_8.L_4.L_2.L_1$
9. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$
10. $F_{2n-1} = F_{n+1}.L_{n+2} - L_n.L_{n+1}$, $n \geq 2$

Yosma (2008), Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili genel özelliklere, teoremlere ve bölünebilme özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca Fibonacci matrislerine ve Fibonacci ve Lucas serilerine değinilmiştir.

Toy (2009), Fibonacci, Lucas, k-Fibonacci dizileriyle ilgili bazı çalışmalara yer verilmiştir. Ayrıca Fibonacci sayılarının bölünebilme özellikleri, m modülüne göre k-Fibonacci dizilerinin periyotları ve periyotlarının uzunlukları konularında yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Koşar (2013), ${F_n}^p|F_n$ şartını araştırmıştır. Bu şartı araştırırken Fibonacci sayılarının indisleriyle ilişkili bazı bölünebilme özelliklerine ulaşmıştır.

Koral (2018), tamsayılarda bölünebilme özellikleri, Fibonacci sayı dizisinin bölünebilme özellikleriyle birlikte Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının m modülüne göre periyot uzunlukları incelenmiştir. Ayrıca Fibonacci sayıları bir tamsayının kuvvetine bölündüğünde elde edilen kalan dizisinin periyodik yapısı araştırılmıştır.

3. GENEL BİLGİLER

3.1. Tamsayılarda Bölünebilme İle İlgili Temel Özellikler

Tezin bu bölümünde tamsayılarda bölünebilme konusunda temel bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Bu bölümde (Şenay, 2007) "Sayılar Teorisi Dersleri" kitabından yararlanılmıştır.

Teorem 3.1.1. (İyi Sıralama İlkesi) Pozitif tamsayılar kümesinin boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır. (Bu önermeye iyi sıralama ilkesi denir.)

İspat. Boş kümeden farklı bir $K \subseteq \mathbb{Z}^+$ kümesini alalım. $1 \in K$ ise ispat biter. $1 \notin K$ olsun. Herhangi bir $1 \neq x \in K$ için K kümesindeki $y < x$ şartını sağlayan y elemanlarının kümesi P olsun. O halde $P = \{y | y < x,\ x \in K\}$ olur. 1 kesinlikle P kümesinin elemanıdır. P kümesinin tanımına göre $y < x$ olduğundan $y + 1 \leq x$ olur. Buna göre $y + 1 \in P$ ise P kümesi bütün pozitif tamsayıları kapsar. Bu sonuç ise K kümesinin boş küme olduğu sonucunu verir. Hâlbuki K kümesi boştan farklı bir küme alınmıştı. O halde $y + 1 \leq x$ eşitsizliğini sağlayan $y + 1$ sayısı K kümesinin bir en küçük elemanıdır. Buna göre pozitif tamsayılar kümesi iyi sıralı bir kümedir.

Teorem 3.1.2. Her $x \in \mathbb{Z}^+$ için $x \geq 1$ dir. Başka bir deyişle, 1 en küçük pozitif tamsayıdır.

İspat. İddianın aksine $0 < x < 1$ eşitsizliğini gerçekleyen bir x tamsayısının var olduğunu kabul edelim. Eğer M bu şekilde belirlenen tamsayıların kümesi ise boş olamaz. Böylece İyi sıralanma ilkesine göre M kümesinin bir en küçük elemanı bulunacaktır. Şimdi y, M nin en küçük elemanı olsun. Bu durumda $0 < y < 1$ olacaktır. Bu son eşitsizlikten $0 < y^2 < y$ elde edilir. Fakat bu durumda y^2, M kümesinin y den küçük olan bir elemanı olup, bu y elemanının M kümesinin en küçük elemanı oluşu ile çelişir ki, bu her $x \in \mathbb{Z}^+$ için $x \geq 1$ olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.3. Herhangi $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x = y.t$ olacak biçimde bir t tamsayısı varsa *y*, *x*'i böler denir ve *y* | *x* şeklinde gösterilir. Eğer *y*, *x*'i bölmezse $y \nmid x$ şeklinde gösterilir.
y, *x*'i bölerse *y*, *x*'in bir bölenidir veya *x*, *y*'nin katıdır denir.
Eğer *y* | *x* ve $1 < y < x$ ise *y*'ye, *x*'in bir öz böleni denir.
Bir sayının öz bölenlerinden farklı bölenlerine ise aşikar bölenleri denir.

Teorem 3.1.4. (Tamsayılarda Bölünebilme Özellikleri)
$x, y, z \; ve \; t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

1) $1 \mid x$ (1 her tamsayıyı böler.)
2) $a \mid 0$ (Her tamsayı sıfırı böler.)
3) $0 \mid x$ ise $x = 0$ (Sıfırı ancak sıfır böler.)
4) $x \mid x$
5) $y \mid x$ ve $x \mid y$ ise $x = y$ veya $x = -y$
6) $y \mid x$ ve $x \mid z$ ise $y \mid z$
7) $y \mid x$ ise herhangi bir t için $y \mid x.t$
8) $y \mid x$ ve $y \mid z$ ise $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $y \mid ax+by$
9) $n \neq 0$ ve $y \mid x \Leftrightarrow ny \mid nx$
10) $y \mid x$ ve $y > 0$, $x > 0$ ise $y \leq x$
11) $y \mid x$ ve $y \neq 0$ ise $x/y \mid x$

Teorem 3.1.5. (Kalanlı Bölme Teoremi (Bölme Algoritması)) $a > 0$ olmak üzere, verilen *a* ve *b* tamsayıları için,

$$b = aq + r \quad \text{ve} \quad 0 \leq r < a \qquad (1)$$

olacak şekilde bir tek $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ sıralı ikilisi vardır. Eğer $a \nmid b$ ise r tamsayısı daha kuvvetli olan $0 < r < a$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. İlk olarak (1) koşuluna uyan en az bir $q, r \in \mathbb{Z}$ çiftinin var olduğunu gösterelim:
$S = \{b - ua \mid u \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$ olsun. Özel olarak

$$u = \begin{cases} -1, & b \geq 0 \\ b, & b < 0 \end{cases}$$

alınırsa $b - ua$ sayısı negatif değildir. Bu nedenle *S* kümesi negatif olmayan tamsayılar içerir. S nin sıfıra eşit veya sıfırdan büyük elemanlardan oluşan alt kümesini göz önüne alalım. İyi sıralama prensibine göre bu kümenin en küçük elemanı vardır. Bu elemanı r ile gösterelim. q da u'nun bu elemana karşılık aldığı değer olsun. Böyle bir durumda $r = b - qa \geq 0$ olacaktır. Şimdi $r < a$ olduğunu gösterelim. Eğer $r \geq a$ olsaydı hipoteze göre $a > 0$ olduğundan $r > r - a = b - qa - a = b - (1-q)a > 0$ olur ki bu $r \in S$ nin pozitif minimal eleman oluşu ile çelişmektedir. O halde $r - a < 0 \Rightarrow r < a$ dir. Böylece $b = aq + r, 0 \leq r < a$ elde edilir.

Şimdi en fazla bir tane $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ sıralı ikilisinin bulunduğunu gösterelim. Bunun için aynı şartları sağlayan q_1 ve r_1 tamsayı çiftinin bulunduğunu kabul edelim. $r = r_1$ olduğunu göstermeliyiz. Böylece q, r çifti ile beraber q_1, r_1 çifti için (1) e göre

$$b = aq + r\ , \quad 0 \leq r < a$$

$$b = aq_1 + r_1\ , \quad 0 < r_1 < a$$

olur. Eğer $r \neq r_1$ ise $0 < r_1 - r < a$ olacak şekilde $r < r_1$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $r_1 - r = a(q - q_1)$ ve buradan $a \mid r_1 - r$ elde edilir. Teorem 3.1.4.(10) a göre $a \leq r_1 - r$ olup $r_1 - r$ yerine en büyük değeri olan $a - 1$ yazılırsa $a \leq a - 1$ şeklinde anlamsız bir sonuç elde edilir ki bu da $r = r_1$ ve $q = q_1$ olmasını gerektirir.

Tanım 3.1.6. Teorem 3.1.5.'te b'nin a'ya bölünmesiyle bir tek şekilde elde edilen q, r tamsayılarına sırasıyla bölüm, kalan ve bu teoreme Bölme Algoritması denir.

Tanım 3.1.7. (Ortak Bölen) $a \mid x$ ve $a \mid y$ şartlarını sağlayan a tamsayısına x ve y sayılarının bir ortak böleni denir.

Tanım 3.1.8. (En Büyük Ortak Bölen) Sıfırdan farklı herhangi bir tamsayının sonlu sayıda böleni vardır. İki tamsayının ikisinin de sıfıra eşit olduğu durumlar dışında sonlu sayıda ortak bölenleri vardır. a ve b sayılarından en az biri sıfırdan farklı ise bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğüne a ve b nin en büyük ortak böleni denir ve (a, b) ile gösterilir.

Teorem 3.1.9. Herhangi a ve b tamsayılarının en büyük ortak böleni d ise
$d = (a, b) = a.x_0 + b.y_0$ olacak biçimde x_0 ve y_0 sayıları vardır.

Örnek 3.1.10. Şimdi 341 ve 187 sayılarının en büyük ortak bölenini bulalım.

$$341 = 187.1 + 154$$
$$187 = 154.1 + 33$$
$$154 = 33.4 + 22$$
$$33 = 22.1 + 11$$
$$22 = 11.2$$

olup en büyük ortak bölen son kalan sayı olan 11 dir. Yani,

$$(341,187) = (187,154) = (154,33) = (33,22) = 11$$

Şimdi Teorem 3.1.7. de ifade edilen $d = (a, b) = a.x_0 + b.y_0$ sayılarını elde edelim.
$a = 341$ ve $b = 187$ olmak üzere $(341,187) = 11$ dir.

$$\begin{aligned} 11 &= 33 - 22 \\ &= 33 - (154 - 33.4) \\ &= 5.33 - 154 \\ &= 5.(187 - 154) - 154 \\ &= 5.187 - 6.154 \\ &= 5.187 - 6(341 - 187) \\ &= (-6).341 + (11).187 \end{aligned}$$

Eşitliğinden $x_0 = -6$ ve $y_0 = 11$ bulunur. Yani,

$$11 = (341,187) = (-6).341 + (11).187 \text{ olur.}$$

Teorem 3.1.11. (Öklid Algoritması)

$x, y \in \mathbb{Z}$ için bölme algoritması aşağıdaki gibi art arda uygulanmış olsun.

$$\begin{aligned} x &= y.b_1 + r_1, \quad && 0 < r_1 < |y| \\ y &= r_1.b_2 + r_2, \quad && 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2.b_3 + r_3, \quad && 0 < r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{i-2} &= r_{i-1}.b_i + r_i, \quad && 0 < r_i < r_{i-1} \\ r_{i-1} &= r_i.b_{i+1} \end{aligned}$$

Bu durumda x ve y nin en büyük ortak böleni yukarıdaki eşitliklerde sıfırdan farklı son kalan olan $r_i\ dir$. Yani $(x, y) = r_i$ olur.

Tanım 3.1.12. (Modül) S tamsayıların $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{Z}$ şeklinde bir alt kümesi olmak üzere S deki iki elemanın farkı ve toplamı yine S nin elemanı ise S kümesine modül denir.

Teorem 3.1.13. Verilen a ve b tamsayıları ve keyfi $x, y \in \mathbb{Z}$ sayıları için $S = \{s = ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$ modülü $d = (a, b)$ nin bütün tam katlarının bir kümesidir.

Teorem 3.1.14. $ax + by = n$ denkleminin x, y tamsayılarına göre çözülebilir olmasının gerek ve yeter koşulu $(a, b)|n$ olmasıdır.

Tanım 3.1.15. (En Küçük Ortak Kat) Sıfırdan farklı herhangi iki *x* ve *y* tamsayıları ile bölünebilen en küçük pozitif tamsayıya, *x* ve *y* tamsayılarının en küçük ortak katı denir ve $[x, y]$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.1.16. $m = [x, y]$ olması için gerek ve yeter şart $m > 0$, $x|m$, $y|m$ ve *x,y* nin her *n* ortak katı için $m|n$ olmasıdır.

Tanım 3.1.17. (Apostol, 1976)
Pozitif bir *m* tamsayısı için m den küçük veya eşit ve *m* ile aralarında asal olan sayıların sayısı $\phi(m)$ ile ifade edilir. Buna, keşfeden Leonard Euler (1707-1783)'in isminden dolayı Euler'in ϕ fonksiyonu denir. Bu tanımdan
$\phi(1) = 1$ ve p asal olmak üzere $\phi(p) = p - 1$ dir.
$n \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ farklı asal sayılar $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ doğal sayılar olmak üzere eğer $n = {p_1}^{r_1}.{p_2}^{r_2}.{p_3}^{3} \ldots {p_k}^{r_k}$ ise

$$\phi(n) = ({p_1}^{r_1} - {p_1}^{r_1-1}).({p_2}^{r_2} - {p_2}^{r_2-1}).({p_3}^{r_3} - {p_3}^{r_3-1}) \ldots ({p_k}^{r_k} - {p_k}^{r_k-1})$$

$$veya\ \phi(n) = n.\left(1 - \frac{1}{p_1}\right).\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\ dır.$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.18. (Euler Teoremi)

Eğer $(a, b) = 1$ ise $a^{\phi(b)} \equiv 1(mod\ b)$ dir.

Teorem 3.1.19. (Fermat Teoremi)

p asal ve x, p ile bölünemeyen bir tamsayı ise $x^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$ dir.

Teorem 3.1.20. (Binom Teoremi) n pozitif tamsayı olmak üzere

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + y^n \quad \text{dir.}$$

Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

dir.

Teorem 3.1.21. n asal olmak üzere

$$\binom{n}{r} \equiv 0(mod\, n)\,,\ 1 \le r \le n-1\,.$$

Teorem 3.1.22. n asal olmak üzere

$$\binom{n-1}{r} \equiv (-1)^r(mod\, n)\,,\ 1 \le r \le n-1\,.$$

Teorem 3.1.23. n asal olmak üzere

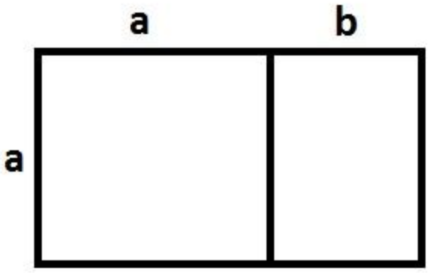
$$\binom{n+1}{r} \equiv 0(mod\, n)\,,\ 2 \le r \le n-1\,.$$

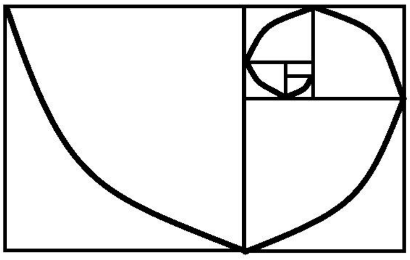
Tanım 3.1.24. Bir reel sayıyı kendisinden küçük en büyük tamsayı ile eşleştiren fonksiyona alt tam değer fonksiyonu denir. Alt tam değer fonksiyonu $\lfloor\ \ \rfloor$ şeklinde gösterilir. x sayısının alt tam değeri $\lfloor x \rfloor$ olur.

Tanım 3.1.25. Bir reel sayıyı kendisinden büyük en küçük tamsayı ile eşleştiren fonksiyona üst tam değer fonksiyonu denir. Üst tam değer fonksiyonu $\lceil\ \ \rceil$ şeklinde gösterilir. x sayısının üst tam değeri $\lceil x \rceil$ olur.

3.2. Altın Oran

Matematik biliminde ve sanatın dallarında, bir bütünün parçaları arasında uyumlu olması için altın oranın kullanılması gerektiği düşünülmektedir. (Anonim, 2014) Altın oranın eski çağlardan beri sanatta ve özellikle mimaride kullanıldığı bilinmektedir. Çevremizdeki bütün canlılar ve nesneler belli bir ölçüye ve orana sahiptir. Bu yüzden altın oran herkes tarafından duyulmasa da kesinlikle görülmüştür. Altın oran aslında bizim güzellik ve estetik anlayışımızı bile biçimlendirmektedir. Sanatçılardan bilim insanlarına, insan vücuduyla ilgilenenlerin altın oranı rehber olarak aldıkları düşünülmektedir. Örneğin burnumuzun ucu ile çenemiz arasındaki mesafenin, ağzımız ile çenemiz arasındaki mesafeye oranı yaklaşık olarak altın orana eşittir. Yine çenemiz ile ağzımız arasındaki mesafenin, ağzımız ile burnumuzun ucu arasındaki mesafeye oranı da altın orana eşittir.





Bir dikdörtgenin uzun kenarı kısa kenarına bölündüğünde çıkan sonuç altına orana eşit oluyorsa o dikdörtgene "altın dikdörtgen" denir. Öyle bir kare düşünün ki bir kenarı altın dikdörtgenin kısa kenarına eşit olsun. Bu karenin bir köşesini merkez kabul eden, yarıçapı karenin kenar uzunluğuna eşit olan çember yayı çizelim. Bu işlemi defalarca tekrar ettiğimizde sarmal bir şekil ortaya çıkmaktadır.

13. yüzyılda, İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, Fibonacci sayı dizisinin Altın oranla doğrudan bağlantılı olduğunu keşfetmiştir. İki ardışık Fibonacci sayısının oranları altın orana çok yakındır. Rakamlar yükseldikçe, oran 1.618 ’e daha da yakınlaşmaktadır.

Altın oran φ(Fi) ile gösterilir. $\varphi \approx 1.618$‘dir.

3.3. Fibonacci Sayı Dizisi

Başlangıç koşulları $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olan $n > 0$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ şeklinde tanımlanan sayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir. Yani Fibonacci sayı dizisi; $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 231, 375,$ ... şeklindedir.

Fibonacci sayı dizisinin ardışık iki terimi arasındaki oran altın orana yaklaşmaktadır. Bu yaklaşım aşağıda verilen Tablo 3.1. ile incelenmiştir.

Tablo 3.1. Ardışık Fibonacci sayıları arasındaki oran

n	F_{n+1}/F_n	n	F_{n+1}/F_n
1	$\frac{1}{1} = 1.00000000$	11	$\frac{144}{89} \approx 1.61797752$
2	$\frac{2}{1} = 2.00000000$	12	$\frac{233}{144} \approx 1.61805555$
3	$\frac{3}{2} = 1.50000000$	13	$\frac{377}{233} \approx 1.61802575$
4	$\frac{5}{3} \approx 1.66666666$	14	$\frac{610}{377} \approx 1.61803713$
5	$\frac{8}{5} = 1.60000000$	15	$\frac{987}{610} \approx 1.61803278$
6	$\frac{13}{8} = 1.62500000$	16	$\frac{1597}{987} \approx 1.61803444$
7	$\frac{21}{13} \approx 1.61538461$	17	$\frac{2584}{1597} \approx 1.61803381$
8	$\frac{34}{21} \approx 1.61904761$	18	$\frac{4181}{2584} \approx 1.61803405$
9	$\frac{55}{34} \approx 1.61764705$	19	$\frac{6765}{4181} \approx 1.61803396$
10	$\frac{89}{55} \approx 1.61818181$	20	$\frac{10946}{6765} \approx 1.61803399$

Tablo 3.1. de ardışık Fibonacci sayıları arasındaki oranın altın orana yaklaştığı rahatlıkla görülmektedir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

dir.

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ eşitliğinde her terim F_n ye bölünürse $(n \to \infty)$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olur.

Bu köklerden α, altın orana eşit olur. $(\alpha = \varphi)$

3.4. Binet Formülü

Fransız matematikçi Marie Binet $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin köklerini (α ve β) kullanarak Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin istenilen terimini veren formülü bulmuştur.

n. Fibonacci sayısı

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

n. Lucas sayısı

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

formülleriyle bulunur.

Burada tez çalışmamızda Binet formülü yardımıyla ispatlanan teoremlerde sıklıkla kullanılan bazı eşitlikleri verelim.

$ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere ;

Kökler toplamı

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

kökler çarpımı

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

dır.

Bu özelliği kullanırsak α ve β değerleri $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olduğundan

$$\alpha + \beta = 1\,, \qquad \alpha\beta = -1$$

olur. Ayrıca

$$\alpha^2 = \alpha + 1\,, \qquad \beta^2 = \beta + 1$$

eşitlikleri de elde edilir.

Örnek 3.4.1. Bu örnekte Binet formülüyle bazı Fibonacci ve Lucas sayılarının nasıl elde edildiği gösterilmiştir.

Aşağıdaki tabloda bu sayı dizilerinin bazı terimleri verilmiştir.

Tablo 3.2. İlk on iki Fibonacci ve Lucas sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199

α ve β , $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere $\alpha + \beta = 1$ ve $\alpha.\beta = -1$ dir.

$$F_0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = \frac{1-1}{\alpha - \beta} = 0, \quad F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1,$$

$$F_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta).(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1,$$

$$F_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta).(\alpha^2 + \alpha.\beta + \beta^2)}{\alpha - \beta} = \alpha + 1 - 1 + \beta + 1 = 2$$

olur. Benzer şekilde diğer terimler de bulunabilir.

$$L_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 1 + 1 = 2, \qquad L_1 = \alpha^1 + \beta^1 = 1$$

$$L_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha + 1 + \beta + 1 = 3$$

$$L_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta).(\alpha^2 - \alpha.\beta + \beta^2) = \alpha + 1 + 1 + \beta + 1 = 4$$

olur. Benzer şekilde diğer terimler de bulunabilir.

3.5. Lucas Sayı Dizisi

Öncelikle sayı dizisinin adını aldığı Lucas'ı yani tam adıyla François Edouard Anatole Lucas'ı tanıyalım. 1842'de Fransa'nın Amiens kentinde doğmuştur. Lucas École Normale Supérieure de eğitim görmüş ve Paris Rasathanesinde asistan olarak çalışmıştır. Fransa ile Rusya arasında yapılan Prusya savaşında topçu subay olarak görev yapmıştır. Paris Charlemagne lisesinde yetenekli bir öğretmenlik yapmıştır. Daha sonra Paris'te matematik profesörü olmuştur. Lucas bir şölende talihsiz bir kaza sonucu ölmüştür. Yanağı, yanlışlıkla düşürülen tabağın kırığından bir parça tarafından çizilmiş ve 3 Ekim 1891'de yani birkaç gün içinde enfeksiyondan ölmüştür (Koshy, 2001).

Lucas bir bilgisayar için planlar geliştirmiş, ama asla gerçekleşmemiştir. Onun yanında sayılar teorisine katkıları, oyun matematiği üzerine Récréations Mathématiques (1882-94) adlı dört ciltlik klasiği ile tanınmaktadır. 1883 yılında günümüzde Hanoi Kuleleri adıyla bilinen Brahma Kulesi oyununu icat etmiştir (Anonim, 1996).

Sayıların asallığını test etmek için yöntemler geliştirmiştir. 1857'de, 15 yaşında Lucas, Lucas dizilerini kullanarak $2^{127}-1$'in ilkelliğini elle test etmeye başladı. 1876'da, 19 yıllık testten sonra, sonunda $2^{127}-1$'in asal olduğunu kanıtlamıştır. Bu, 75 yıl boyunca bilinen en büyük Mersenne asalı olarak kalmıştır. Bu el ile kanıtlanmış en büyük asal sayıdır. Daha sonra Derrick Henry Lehmer, Lucas'ın ilkel testlerini rafine etti ve Mersenne sayıları için Lucas-Lehmer testini geliştirdi (Anonim, 1996). Fransız matematikçi Lucas, Fibonacci sayı dizisi için yaptığı çalışma ile de bilinir.
Aşağıda Lucas tarafından bulunan teoremlerden bazıları verilmiştir.

1. $\sum_{1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$
2. $\sum_{1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$
3. $\sum_{1}^{n} F_i^2 = F_n . F_{n+1}$

4. $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$

5. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$

Şimdi Lucas sayı dizisinin tanımını yapalım. İlk terimi 2, ikinci terimi 1 olan ve bundan sonraki her terimi, kendisinden önceki iki terimin toplamı olacak şekilde ifade edilen sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir. Yani;

Başlangıç koşulları $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olan $n > 0$ için $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ şeklinde tanımlanan sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir. Lucas sayı dizisinin terimleri;

$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322,$ ... şeklindedir.

Lucas sayı dizisinin ardışık iki terimi arasındaki oran da altın orana yaklaşmaktadır. Bu yaklaşımı aşağıda verilen Tablo 3.3. ile inceleyelim.

Tablo 3.3. Ardışık Lucas sayıları arasındaki oran

n	L_{n+1}/L_n	n	L_{n+1}/L_n
1	$\frac{3}{1} = 3.00000000$	11	$\frac{322}{199} \approx 1.61809045$
2	$\frac{4}{3} \approx 1.33333333$	12	$\frac{521}{322} \approx 1.61801242$
3	$\frac{7}{4} = 1.75000000$	13	$\frac{843}{521} \approx 1.61804222$
4	$\frac{11}{7} \approx 1.57142857$	14	$\frac{1364}{843} \approx 1.61803084$
5	$\frac{18}{11} = 1.63636363$	15	$\frac{2207}{1364} \approx 1.61803519$
6	$\frac{29}{18} = 1.61111111$	16	$\frac{3571}{2207} \approx 1.61803352$
7	$\frac{47}{29} \approx 1.61538461$	17	$\frac{5778}{3571} \approx 1.61803416$
8	$\frac{76}{47} \approx 1.61702127$	18	$\frac{9349}{5778} \approx 1.61803392$
9	$\frac{123}{76} \approx 1.61842105$	19	$\frac{15127}{9349} \approx 1.61803401$
10	$\frac{199}{123} \approx 1.61788617$	20	$\frac{24476}{15127} \approx 1.61803397$

Tablo 3.3.'de ardışık Lucas sayıları arasındaki oranın altın orana yaklaştığı rahatlıkla görülmektedir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \varphi$$

$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ eşitliğinde her terim L_n ye bölünürse $(n \to \infty)$

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = 1 + \frac{L_{n-1}}{L_n}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olur.

Bu köklerden α, altın orana eşit olur. $(\alpha = \varphi)$

4. LUCAS SAYILARIYLA İLGİLİ TEOREMLER

Tezin bu bölümünde Lucas sayılarıyla ilgili temel teoremlere ve bölünebilme özelliklerine yer verilmiştir.

4.1. Lucas Sayılarıyla İlgili Teoremler

Bu kısımda Lucas sayılarıyla ilgili teoremler ispatsız olarak verilmiştir. Bu teoremlerin bazıları gerek 4.2 deki teoremlerin ispatında, gerek bulgular bölümündeki teoremlerin ispatında kullanılmaktadır.

Teorem 4.1.1. **(**Carlitz, 1964) $L_m | L_n$ ise $n = (2k-1)m$, $m > 1$

Örnek 4.1.2. Bu örnekte Teorem 4.1.1.'in doğruluğu bazı n, m değerleri için gösterilecektir.

Tablo 4.1. İlk yirmi iki Lucas sayısı

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21
L_n	521	843	1364	2207	3571	5778	9349	15127	24476

$L_2 = 3$ için;

$n = 6$ için $L_6 = 18$ dir ve $L_2 | L_6$ dır. $m = 2$ ve $k = 2$ için $6 = 3.2$ olur.

$n = 10$ için $L_{10} = 123$ tür ve $L_2 | L_{10}$ dur. $m = 2$ ve $k = 3$ için $10 = 5.2$ olur.

$n = 14$ için $L_{14} = 843$ tür ve $L_2 | L_{14}$ tür. $m = 2$ ve $k = 4$ için $14 = 7.2$ olur.

$L_3 = 4$ için;

$n = 9$ için $L_9 = 76$ dır ve $L_3 | L_9$ dur. $m = 3$ ve $k = 2$ için $9 = 3.3$ olur.

$n = 15$ için $L_{15} = 1364$ tür ve $L_3 | L_{15}$ tir. $m = 3$ ve $k = 3$ için $15 = 5.3$ olur.

$n = 21$ için $L_{21} = 24476$ dır ve $L_3 | L_{21}$ dir. $m = 3$ ve $k = 4$ için $21 = 7.3$ olur.

Teorem 4.1.3. (Hoggatt, 1970)

$$L_n^m = L_{mn} + \sum_{j=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} C_{m,j} (-1)^{nj+j-1} L_n^{m-2j}$$

$C_{k,0} = 1,$

$C_{m,j} = C_{m-1,j} + C_{m-2,j-1}\ ,\quad 1 \leq j \leq \lfloor m/2 \rfloor$ ve $m \geq 2.$

$C_{m,j}$ sayıları Teorem 4.1.18. deki m. satır ve n. sütundaki katsayılardır. Bu katsayılar ;

1				
1	2			
1	3			
1	4	2		
1	5	5		
1	6	9	2	
1	7	14	7	
1	8	20	16	2

şeklindedir.

Teorem 4.1.4. (Vajda, 1989) t tek asal olmak üzere

$$L_{kt} = L_t^k + \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k}{i} (-1)^{i(t+1)} L_t^{k-2i} \binom{k-i-1}{i-1}$$

dir.

Teorem 4.1.5. (Vajda, 1989)

$$L_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left[1 + \binom{n}{2} 5 + \binom{n}{4} 5^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} 5^{\frac{n-1}{2}} \right]$$

dir.

Teorem 4.1.6. (Koshy, 2001) $F_{2n} = F_n L_n$.

Teorem 4.1.7. (Koshy, 2001) $5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1}$.

Teorem 4.1.8. (Koshy, 2001) $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{i+2} - 3$$

tür.

Teorem 4.1.9. (Koshy, 2001) $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$$

dir.

Teorem 4.1.10. (Koshy, 2001) $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$$

dir.

Teorem 4.1.11. (Koshy, 2001) $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$$

dir.

Teorem 4.1.12. (Koshy, 1999)

$$L_{n+1}^3 + L_n^3 - L_{n-1}^3 = 5L_{3n} \quad .$$

Teorem 4.1.13. (Koshy, 2001)

Koshy (2001) nin kitabında bu özdeşliğin Carlitz (1967), tarafından bulunduğu yazılmaktadır. Fakat orijinal kaynağa ulaşılamamıştır.

$$L_{n+1}^3 - L_n^3 - L_{n-1}^3 = 3L_{n+1}L_nL_{n-1} \quad .$$

Teorem 4.1.14. (Carlitz ve Hunter, 1969)

$$L_{n-1}^4 + L_n^4 + L_{n+1}^4 = 2[2L_n^2 - 5(-1)^n]^2 \quad .$$

Teorem 4.1.15. (Carlitz ve Hunter, 1969)

$$L_{n+1}^5 - L_n^5 - L_{n-1}^5 = 5L_{n+1}L_nL_{n-1}[2L_n^2 - 5(-1)^n] \quad .$$

Teorem 4.1.16. (Carlitz ve Hunter, 1969)

$$L_{n+1}^7 - L_n^7 - L_{n-1}^7 = 7L_{n+1}L_nL_{n-1}[2L_n^2 - 5(-1)^n]^2 \ .$$

Teorem 4.1.17. (Carlitz, 1970)

$$L_{5n} = L_n[L_{2n}^2 - (-1)^n L_{2n} - 1] \ .$$

Teorem 4.1.18. (Umansky, 1970)

$$L_n^1 = L_n$$

$$L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n$$

$$L_n^3 = L_{3n} + 3(-1)^n L_n$$

$$L_n^4 = L_{4n} + 4(-1)^n L_n^2 - 2$$

$$L_n^5 = L_{5n} + 5(-1)^n L_n^3 - 5L_n$$

$$L_n^6 = L_{6n} + 6(-1)^n L_n^4 - 9L_n^2 + 2(-1)^n$$

$$L_n^7 = L_{7n} + 7(-1)^n L_n^5 - 14L_n^3 + 7(-1)^n L_n$$

$$L_n^8 = L_{8n} + 8(-1)^n L_n^6 - 20L_n^4 + 16(-1)^n L_n^2 - 2 \ .$$

Teorem 4.1.19. (Koshy, 1999)

$$L_{m+r}L_{m+r+1} + L_{m-r}L_{m-r+1} = L_{2m+2r+1} + L_{2m-2r+1} + 2.(-1)^{m+r} \ .$$

Teorem 4.1.20. (Koshy, 1999)

$$L_{m+r}L_{m+r+1} + L_{m-r}L_{m-r+1} = L_{2m+1} + L_{2r} + 2.(-1)^{m+r} \ .$$

Teorem 4.1.21. (Umansky ve Tallman, 1968)

$$(L_nL_{n+1} - L_{n+2}L_{n+3})^2 = (L_nL_{n+3})^2 + (2L_{n+1}L_{n+2})^2 \ .$$

Teorem 4.1.22. (Usiskin, 1974)

$$L_{3^n} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(L_{2.3^k} + 1\right).$$

Aşağıda verilen Teorem 4.1.23., Teorem 4.1.24. ve Teorem 4.1.25. Teoremlerinin, Koshy (2001), Fibonacci and Lucas Numbers With Aplications adlı kitabında Hoggatt tarafından bulunduğu belirtilmiş, fakat teoremlerin Hoggatt tarafından hangi yılda bulunduğuna dair bilgi verilmemiştir. Orijinal kaynağa ulaşılamamıştır.

Teorem 4.1.23. (Koshy, 2001)

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{olmak üzere} \quad L_n = \left\lfloor \alpha^n + \frac{1}{2} \right\rfloor .$$

Örneğin;

$$\alpha^{13} + \frac{1}{2} \approx 521.5019$$

$$\left\lfloor \alpha^{13} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 521.5019 \rfloor = 521 = L_{13} \ \text{tür.}$$

Teorem 4.1.24. (Koshy, 2001)

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{olmak üzere} \quad L_{n+1} = \left\lfloor \alpha L_n + \frac{1}{2} \right\rfloor, \qquad n \geq 2 .$$

Örneğin;

$$L_{15} = 1364 \ \text{olmak üzere} \ 1364\alpha + \frac{1}{2} \approx 2207.4983$$

$$\left\lfloor 1364\alpha + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 220.,4983 \rfloor = 2207 = L_{16} \ \text{dır.}$$

Bu teorem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha = \varphi$$

Teoremini ispatlamak için kullanılır. Bu teorem ardışık iki Lucas sayısı arasındaki oranın altın orana yaklaştığını ifade etmektedir.

Teorem 4.1.25. (Koshy, 2001)

$$L_{n+1} = \left\lfloor \frac{L_n + \sqrt{5}L_n + 1}{2} \right\rfloor, \ n \geq 2 .$$

Teorem 4.1.26. (Koshy, 2001)

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{olmak üzere} \quad L_n = \left\lceil \alpha^n - \frac{1}{2} \right\rceil .$$

Örneğin;

$$\left\lceil \alpha^7 - \frac{1}{2} \right\rceil = \lceil 28.5344 \rceil = 29 = L_7 \text{ dir.}$$

Teorem 4.1.27. (Koshy, 2001)

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{olmak üzere} \quad L_{2n} = \lceil \alpha^{2n} \rceil \ \text{ ve } \ L_{2n+1} = \lfloor \alpha^{2n+1} \rfloor .$$

Örneğin; $L_8 = \lceil \alpha^8 \rceil = \lceil 49.9787 \rceil = 47$ ve $L_{11} = \lfloor \alpha^{11} \rfloor = \lfloor 199.0050 \rfloor = 199$ dur.

Teorem 4.1.28. (Koshy, 2001)

$$L_{n+1} = \left\lceil \alpha L_n - \frac{1}{2} \right\rceil , \ n \geq 2 .$$

Örneğin;

$$\left\lceil \alpha L_{13} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil 521\alpha - \frac{1}{2} \right\rceil = \lceil 842.4957 \rceil = 843 = L_{14} \text{ tür.}$$

Teorem 4.1.29. (Koshy, 2001)

$$L_{n+1} = \left\lceil \frac{L_n + \sqrt{5}L_n - 1}{2} \right\rceil , \ n \geq 2 .$$

Teorem 4.1.30. (Koshy, 2001)

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \sqrt{5[L_n^2 + 4(-1)^n]}}{2} .$$

Teorem 4.1.31. (Koshy, 2001)

$$L_{n+1} = \left\lfloor \frac{L_n + 1 + \sqrt{5L_n^2 - 2L_n + 1}}{2} \right\rfloor , \ n \geq 4 .$$

Örneğin; $L_{15} = 1364$ için

$$\left\lfloor \frac{1364 + 1 + \sqrt{5(1364)^2 - 2.1364 + 1}}{2} \right\rfloor = \lfloor 2207.2748 \rfloor = 2207 = L_{16} \text{ dır.}$$

Teorem 4.1.32. (Koshy, 2001)

$$L_n = \left\lfloor \frac{1}{\alpha}\left(L_{n+1} + \frac{1}{2}\right)\right\rfloor, \qquad n \geq 2 \ .$$

Örneğin; $L_{20} = 15127$ için

$$\left\lfloor \frac{1}{\alpha}\left(L_{20} + \frac{1}{2}\right)\right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\alpha}(15127.5)\right\rfloor = \lfloor 9349.3091 \rfloor = 9349 = L_{19} \text{ dur.}$$

Teorem 4.1.33. (Carlitz, 1972)

$$\left\lfloor \alpha^k L_n + \frac{1}{2} \right\rfloor = L_{n+k}, \ \ n \geq 4 \ \ ve \ \ k \geq 2 \ .$$

Örneğin; (Koshy, 2001) $n = 11$ ve $k = 3$ için

$$\left\lfloor \alpha^3 L_{11} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \alpha^3 199 + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 843.4775 \rfloor = 843 = L_{14} = L_{11+3} \text{ tür.}$$

Teorem 4.1.34. (Koshy, 2001)

$$\left\lceil \alpha^k L_n - \frac{1}{2} \right\rceil = L_{n+k}, \ \ n \geq 4 \ \ ve \ \ k \geq 1 \ .$$

Örneğin; $n = 10$ ve $k = 4$ için

$$\left\lceil \alpha^4 L_{10} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil 123\alpha^4 - \frac{1}{2} \right\rceil = \lceil 842.5545 \rceil = 843 = L_{14} = L_{10+4} \text{ tür.}$$

Teorem 4.1.35. (Hoggatt ve Bergum, 1974)

Eğer $k \geq 1$ ve $n = 2.3^k$ ise $n | L_n$ dir.

Teorem 4.1.36. (Hoggatt ve Bergum, 1974)

p **,** 3'ten farklı tek asal olmak üzere, eğer $p | L_{2.3^k}$ ve $n = 2.3^k.p^t$ ise $n | L_n$, $t \geq 1$ dir.

Teorem 4.1.37. (Hoggatt ve Bergum, 1974)

Eğer p tek asal ve $p|L_n$ ise $p^k|L_{np^{k-1}}$, $k \geq 1$ dir.

Teorem 4.1.38. (Hoggatt ve Bergum, 1974)

Eğer $p \neq q$, $p|L_n$ ve $q|L_m$, m ve n tekse $(pq)^k|L_{mn(pq)^{k-1}}$, $k \geq 1$ dir.

Teorem 4.1.39. (Hoggatt ve Bergum, 1974)

$p, q > 3$, p, q farklı asallar, $k \geq 1$ iken $p|L_{2.3^k}$, $q|L_{2.3^k}$ ve $r, t \geq 0$ iken $n = 2.3^k.p^t.q^r$ ise $n|L_n$ dir.

Teorem 4.1.40. (Yosma, 2008)

a) $n \equiv 0(mod\ 3) \Leftrightarrow L_n \equiv 0(mod\ 2)$

b) $n \equiv 2(mod\ 4) \Leftrightarrow L_n \equiv 0(mod\ 3)$

c) Eğer $n \equiv 0(mod\ 2)$ ve $n \not\equiv 0(mod\ 3)$ ise $L_n \equiv 3(mod\ 4)$

d) $k \equiv 0(mod\ 2)$ ve $k \not\equiv 0(mod\ 3)$ ise $L_{n+2k} \equiv -L_n(mod\ L_k)$

e) $k \equiv 0(mod\ 2)$ ve $k \not\equiv 0(mod\ 3)$ ise $F_{n+2k} \equiv -F_n(mod\ L_k)$

f) $L_{n+12} \equiv L_n(mod\ 8)$

Teorem 4.1.41. (Brökling, 1963)

$$L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 3\,.$$

Teorem 4.1.42. (Carlitz, 1971)

$$L_{5n}/L_n = L_{2n}^2 - (-1)^n L_{2n} - 1\,.$$

Teorem 4.1.43. (Hoggatt ve Bicknell, 1964)

$$\sum_{i=0}^{2n+2} \binom{2n+2}{i} L_{i+p}^2 = 5^{n+1} L_{2(n+p)}\,.$$

Teorem 4.1.44. (Brown, 1965)

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} 2^{k-1} L_k = 5^n\,.$$

Teorem 4.1.45. (Hoggatt, 1971)

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} (-1)^{n+k} L_{(4m+2)k} = L_{(2m+1)n} L_{2m+1}^{n} .$$

Teorem 4.1.46. (Hoggatt, 1971) p tek veya çift iken

$$L_{n+p} \pm L_{n-p} = L_p L_n .$$

Teorem 4.1.47. (Hoggatt, 1972)

$$L_{n+2}^2 = 3L_{n+1}^2 - L_n^2 .$$

Teorem 4.1.48. (Zeitlin, 1972)

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^3 L_{2k} = L_{2n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+k)!}{(k!)^3 (2n-2k)!} 5^{n-k} .$$

Teorem 4.1.49. (Hoggatt ve ark., 1971)

$$L_{mh+n+kt}^2 = L_{2mh+2n+2kt} + 2(-1)^{mh+n+kt} .$$

Teorem 4.1.50. (Carlitz, 1977)

$$L_{p^2} \equiv 1 (mod\ p^2) \quad ancak\ ve\ ancak \quad L_p \equiv 1 (mod\ p^2) .$$

Teorem 4.1.51. (Berzsenyi, 1977)

$$L_{2mn}^2 \equiv 4 (mod\ L_m^2) \quad her\ \ n, m = 1,2,3, \ldots$$

4.2. Lucas Sayılarıyla İlgili Bölünebilme Özellikleri

Bu kısımda Lucas sayılarıyla ilgili bölünebilme özellikleri ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Teorem 4.2.1. (Vajda, 1989) $L_{n+r} + (-1)^r L_{n-r} = L_r . L_n$ dir.

İspat. Binet formülüne göre $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğundan

$$L_r.L_n = (\alpha^r + \beta^r)(\alpha^n + \beta^n)$$
$$= \alpha^r\alpha^n + \alpha^r\beta^n + \beta^r\alpha^n + \beta^r\beta^n$$
$$= \alpha^{r+n} + \beta^{r+n} + \alpha^r\beta^r\beta^{n-r} + \alpha^r\beta^r\alpha^{n-r}$$
$$= \alpha^{r+n} + \beta^{r+n} + (\alpha\beta)^r(\beta^{n-r} + \alpha^{n-r})$$

$\alpha.\beta = -1$ olduğundan $\quad = \alpha^{n+r} + \beta^{n+r} + (-1)^r(\alpha^{n-r} + \beta^{n-r})$

$$= L_{n+r} + (-1)^r L_{n-r}$$

olur.

Teorem 4.2.2. (Vajda, 1989) $(L_n)^2 = L_{2n} + (-1)^n.2$ dir.

***İspat*.** Binet formülüne göre $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğundan

$$(L_n)^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + 2.\alpha^n.\beta^n + \beta^{2n}$$
$$= \alpha^{2n} + 2.(\alpha.\beta)^n + \beta^{2n}$$

$\alpha.\beta = -1$ olduğundan $\quad = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2.(-1)^n$

$$= L_{2n} + (-1)^n.2$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3. (Koshy, 2001) $r \geq 1$ için $L_{r-1}L_{r+1} - L_r^2 = 5.(-1)^{r-1}$ dir.

***İspat*.** Binet formülüne göre $L_r = \alpha^r + \beta^r$

$$L_{r-1}L_{r+1} - L_r^2 = (\alpha^{r-1} + \beta^{r-1})(\alpha^{r+1} + \beta^{r+1}) - (\alpha^r + \beta^r)^2$$
$$= \alpha^{2r} + (\alpha\beta)^r(\alpha^{-1}\beta + \alpha\beta^{-1}) + \beta^{2r} - \alpha^{2r} - 2(\alpha\beta)^r - \beta^{2r}$$
$$= (\alpha\beta)^r\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 2\right) = (\alpha\beta)^r\left(\frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right)$$

$\alpha^2 = \alpha + 1,\ \beta^2 = \beta + 1,\ \alpha\beta = -1,\ \alpha + \beta = 1$ olduğundan

$$= (\alpha\beta)^r\left(\frac{\beta + 1 + \alpha + 1 + 2}{\alpha\beta}\right) = (\alpha\beta)^r\left(\frac{5}{\alpha\beta}\right) = 5(\alpha\beta)^{r-1} = 5(-1)^{r-1}$$

olur.

Teorem 4.2.4. (Koshy, 1998) $L_{2m+2n} + L_{2m-2n} = L_{2m}.L_{2n}$ dir.

İspat. Binet formülüne göre $L_n = \alpha^n + \beta^n$

$$L_{2m+2n} + L_{2m-2n} = \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m-2n}$$

$$= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}}{\alpha^{2n}} + \frac{\beta^{2m}}{\beta^{2n}}$$

$$= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}\beta^{2n} + \beta^{2m}\alpha^{2n}}{\alpha^{2n}\beta^{2n}}$$

$$= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}\beta^{2n} + \beta^{2m}\alpha^{2n}}{(\alpha\beta)^{2n}}$$

$\alpha\beta = -1$ olduğundan $(\alpha\beta)^{2n} = 1$ olur.

$$= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \beta^{2m}\alpha^{2n}$$

$$= \alpha^{2m}(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + \beta^{2m}(\alpha^{2n} + \beta^{2n})$$

$$= (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n})$$

$$= L_{2m}.L_{2n}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.5. (Hoggatt, 1965) $L_n.L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$ dir.

İspat. $$L_n.L_{n+1} = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})$$

$$= \alpha^{2n+1} + \alpha^n\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^n + \beta^{2n+1}$$

$$= \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (\alpha\beta)^n(\alpha + \beta)$$

$\alpha\beta = -1$ ve $\alpha + \beta = 1$ olduğundan

$$= L_{2n+1} + (-1)^n$$

olur.

Teorem 4.2.6. (Koshy, 1998) $L_{n+r}^2 + L_{n-r}^2 = L_{2n}L_{2r} + 4(-1)^{n+r}$ dir.

İspat. $L_{n+r}^2 + L_{n-r}^2 = (\alpha^{n+r} + \beta^{n+r})^2 + (\alpha^{n-r} + \beta^{n-r})^2$

$$= \alpha^{2n+2r} + 2.\alpha^{n+r}\beta^{n+r} + \beta^{2n+2r} + \alpha^{2n-2r} + 2.\alpha^{n-r}\beta^{n-r} + \beta^{2n-2r}$$

$$= \alpha^{2n+2r} + \beta^{2n+2r} + \frac{\alpha^{2n}}{\alpha^{2r}} + \frac{\beta^{2n}}{\beta^{2r}} + 2.(\alpha\beta)^{n+r} + 2(\alpha\beta)^{n-r}.(\alpha\beta)^{2r}$$

$$= \alpha^{2n+2r} + \beta^{2n+2r} + \frac{\alpha^{2n}\beta^{2r} + \beta^{2n}\alpha^{2r}}{(\alpha\beta)^{2r}} + 4.(\alpha\beta)^{n+r}$$

$$= \alpha^{2n+2r} + \beta^{2n+2r} + \alpha^{2n}\beta^{2r} + \beta^{2n}\alpha^{2r} + 4.(\alpha\beta)^{n+r}$$

$$= \alpha^{2n}(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + \beta^{2n}(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + 4.(-1)^{n+r}$$

$$= (\alpha^{2n} + \beta^{2n})(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + 4.(-1)^{n+r}$$

$$= L_{2n}L_{2r} + 4(-1)^{n+r}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.7. (Koshy, 1999) $L_k^2 + L_{k+1}^2 = L_{2k} + L_{2k+2}$ dir.

İspat. $L_k^2 + L_{k+1}^2 = (\alpha^k + \beta^k)^2 + (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})^2$

$$= \alpha^{2k} + 2\alpha^k\beta^k + \beta^{2k} + \alpha^{2k+2} + 2.\alpha^{k+1}\beta^{k+1} + \beta^{2k+2}$$

$$= \alpha^{2k} + \beta^{2k} + \alpha^{2k+2} + \beta^{2k+2} + 2\alpha^k\beta^k + 2\alpha^k\beta^k(\alpha\beta)$$

$$= \alpha^{2k} + \beta^{2k} + \alpha^{2k+2} + \beta^{2k+2} + 2\alpha^k\beta^k - 2\alpha^k\beta^k$$

$$= \alpha^{2k} + \beta^{2k} + \alpha^{2k+2} + \beta^{2k+2}$$

$$= L_{2k} + L_{2k+2}$$

olur.

Teorem 4.2.8. (Jones, 1976) $L_{n+1}^2 - L_{n+1}.L_n - L_n^2 = 5(-1)^{n+1}$ dir.

İspat. Binet formülüne göre $L_n = \alpha^n + \beta^n$

$$L_{n+1}^2 - L_{n+1}.L_n - L_n^2 = (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})^2 - (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha^n + \beta^n) - (\alpha^n + \beta^n)^2$$

$$= \alpha^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n+1} - (\alpha\beta)^n\alpha - (\alpha\beta)^n\beta - \beta^{2n+1}$$

$$-\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n - \beta^{2n}$$

$$= \alpha^{2n}(\alpha^2 - 1) + \beta^{2n}(\beta^2 - 1) - \alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1} + 2(\alpha\beta)^{n+1} - (\alpha\beta)^n(\alpha + \beta + 2)$$

α ve β değerleri $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$, $\alpha^2 - 1 = \alpha$ ve $\beta^2 - 1 = \beta$ olur.

$$= \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - \alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1} + 2(\alpha\beta)^{n+1} - 3(\alpha\beta)^n$$

$$= 2(\alpha\beta)^{n+1} + 3(\alpha\beta)^n\alpha\beta$$

$$= 5(\alpha\beta)^{n+1} = 5(-1)^{n+1}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.9. (Koshy, 2001) $L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n-1}L_{n+2}$ dir.

İspat. $L_{n+1}^2 - L_n^2 = (L_{n+1} + L_n)(L_{n+1} - L_n) = L_{n+2}L_{n-1}$ elde edilir.

Teorem 4.2.10. (Koshy, 2001) $L_{3n} = L_n[L_{2n} - (-1)^n]$ dir.

İspat. $L_{3n} = \alpha^{3n} + \beta^{3n} = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{2n} - (\alpha\beta)^n + \beta^{2n})$

$$= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - (-1)^n)$$

$$= L_n[L_{2n} - (-1)^n]$$

Teorem 4.2.11. (Vajda, 1989) Eğer L_n tek sayı ise L_{np}/L_p de tek bir sayıdır.

İspat.

(a) L_p tek olsun. p kesinlikle 3'ün katı değildir. Çünkü L_n'yi tek kabul ettiğimiz için hem n hem de np 3'ün katı değildir. O halde L_{np} ' de tek sayı olur. İki tek sayının oranı tek sayı olduğundan L_{np}/L_p oranı tek sayıdır.

(b) L_p çift olsun. p, 3'ün katı olmalıdır. Dolayısıyla np'de 3'ün katıdır ve L_{np} çift sayı olur. Şimdi n tek sayısı için L_p ve L_{np}'nin 2'nin aynı en yüksek kuvvetini kapsadığını göstereceğiz. Biliyoruz ki, bir en yüksek kuvvet 2 veya 4'ten farklı olmayabilir. Şimdi L_p 'de en yüksek kuvvet 4 ise L_{np} aynı zamanda 4'ü içerecektir. Fakat hiçbir Lucas sayısı 2'nin daha büyük kuvvetini içermemektedir. Dolayısıyla bölünmede 2'nin kuvvetleri dikkate alınmayarak iptal edilir. Eğer L_p ‘de en yüksek kuvvet 2 ise o zaman Teorem 4.1.4.’e göre bu L_{np}’de içerilen en yüksek kuvvet olacaktır.

Buradan L_{np}/L_p her iki durumda da tektir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. L_p çift sayı olduğunda L_{np}/L_p oranı tek veya çift olabilir. Örneğin;

$$L_3 = 4$$

$$L_{15}/L_5 = 1364/11 = 124$$

$$L_{18}/L_6 = 5778/18 = 321$$

Teorem 4.2.12. (Vajda, 1989) Eğer $(m,n) = d$ olmak üzere m/d ve n/d oranları tek ise $(L_m, L_n) = L_d$ olur.

İspat. Teorem 4.1.6. ile hangi şartlarda L_m ve L_n ’nin ortak böleninin L_d olacağı bilinmektedir. L_d’nin ortak bölenlerin en büyüğü olduğunu göstermeliyiz.

Teorem 4.1.5.’e göre $F_{2m} = F_m L_m$ ve $F_{2n} = F_n L_n$ olur. $(2m, 2n) = 2d$ olduğunu varsayarsak (L_m, L_n), F_{2d}’nin bir ortak bölenidir.

$(F_{2m}, F_{2n}) = F_{2d}$ olduğundan F_{2d} , (L_m, L_n) ’nin bir katıdır. Dolayısıyla $F_d L_d$, (L_m, L_n)’nin bir katıdır.

Teorem 4.1.8.’e göre L_m ve F_m’nin 2’den büyük ortak çarpanı yoktur. Bu aynı zamanda L_n ve F_m’nin ve F_n’nin bir çarpanı olan $F_n F_d$ için de geçerlidir. Böylece L_m ve F_d’nin (aynı zamanda L_n ve F_d’nin) 2’den büyük ortak çarpanı yoktur diyebiliriz.

İki durumda da ortak çarpan 2 idi. O zaman $(L_m, L_n) = 2L_d$ olacaktı. Bu nedenle L_m/L_d ve L_n/L_d’nin her ikisinin de çift olamayacağını göstermeliyiz.

m/d ve n/d oranlarının her ikisi de 3 ile bölünmeyebilir. Eğer bölünselerdi; $3d$, m ve t’nin d’den daha büyük ortak çarpanı olacaktı. Bu nedenle $L_{m/d}$ ve $L_{n/d}$’nin en az biri tek olmalıdır. Terorem 4.2.11.’e göre L_m/L_d veya L_n/L_d (veya her ikisi) tek olmalıdır. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.13. (Yosma, 2008) $L_{t+k} \equiv (-1)^{k+1} L_{t-k} (mod\ L_t)$'dir.

İspat. $k = 1$ için $L_{t+1} = L_t + L_{t-1}$ olduğundan $L_{t+1} \equiv L_{t-1} (mod\ L_t)$ olup iddia doğru olur.

$1 < i \leq k$ için $L_{t+k} \equiv (-1)^{k+1} L_{t-k} (mod\ L_t)$ olduğunu kabul edelim.

$L_{t+k+1} \equiv L_{t+k} + L_{t+k-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} L_{t+k+1} &\equiv (-1)^{k+1} L_{t-k} + (-1)^k L_{t-k+1} (mod\ L_t) \\ &\equiv (-1)^{k+2} (L_{t-k+1} - L_{t-k}) (mod\ L_t) \\ &\equiv (-1)^{k+2} L_{t-k-1} (mod\ L_t) \end{aligned}$$

olur ve iddia $k + 1$ için de doğru olduğundan tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanır. Yani

$$L_{t+k} \equiv (-1)^{k+1} L_{t-k} (mod\ L_t) \text{ ‘dir.}$$

Teorem 4.2.14. (Vajda, 1989)

$M_{a,b} = L_{2a-1} L_{2a+1} \ldots L_{2a-1+2(2b-2)}$ ve $N_b = L_1 L_3 \ldots L_{2b-1}$, $a, b \geq 1$ olmak üzere N_b ifadesi $M_{a,b}$ ifadesini böler.

İspat. $a = 1$ olursa bütün b'ler için;

$M_{1,b} = L_1 L_3 \ldots L_{4b-3}$ ve $N_b = L_1 L_3 \ldots L_{2b-1}$ olur, $M_{1,b}/N_b$ olduğu açıktır.

$b = 1$ olursa bütün a'lar için;

$$M_{a,1} = L_{2a-1} \text{ ve } N_1 = L_1 \text{ olur, } M_{a,1}/N_1 = L_{2a-1}/L_1 \text{ olur.}$$

Varsayalım $b = B - 1$ ve bütün a'lar ve $b = B$ ve $a = A$ için teorem doğru olsun. Teoremin $B + 1$ ve A için doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$M_{A+1,B} = M_{A,B} + M_{A+1,B-1} L_{2A+4B-5} (L_{2A+4B-3} - L_{2A-1})$$

Teoram 4.2.1.'e göre $b = 2A + 2B - 2$ ve $a = 2B - 1$ alırsak

$$L_{2A+4B-3} - L_{2A-1} = L_{2A+2B-2} L_{2B-1}$$

$$M_{A+1,B} = M_{A,B} + M_{A+1,B-1} L_{2B-1} L_{2A+4B-5} L_{2A+2B-2}$$

olur. Varsayalım $M_{A+1,B-1}$, N_{B-1} ile bölünebilsin. Bu nedenle $M_{A+1,B-1}L_{2B-1}$, N_{B-1} ile bölünebilir. Böylece eşitliğin sağı N_B ile bölünebilir. $M_{A+1,B}$ için teorem sağlanmış olur.

Teorem 4.2.15. (Vajda, 1989) p asal ise $L_p \equiv 1(mod\ p)$'dir.

İspat. Teorem 4.1.5.'e göre

$$L_p = \frac{1}{2^{p-1}}\left[1 + \binom{p}{2}5 + \binom{p}{4}5^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}5^{\frac{p-1}{2}}\right]$$

dir. Eşitliğin her iki tarafını da 2^{p-1} ile çarparsak

$$2^{p-1}L_p = 1 + \binom{p}{2}5 + \binom{p}{4}5^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}5^{\frac{p-1}{2}}$$

olur. Fermat teoremine göre $2^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$ ve Teorem 3.1.21.'e göre

$$\binom{n}{r} \equiv 0(mod\ n)\ ,\ \ 1 \le r \le n-1$$

olduğundan

$$\binom{p}{2} \equiv \binom{p}{4} \equiv \cdots \equiv \binom{p}{p-1} \equiv 0(mod\ p)$$

olur. Dolayısıyla $L_p \equiv 1(mod\ p)$ elde edilir.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir.

Örneğin, $L_{705} \equiv 1(mod\ 705)$ olduğu halde 705 asal sayı değildir.

Teorem 4.2.16. (Vajda, 1989)
Eğer p asal ve t tamsayısı için $p = 5t \pm 1$ biçiminde ise $L_{p-1} \equiv 2(mod\ p)$'dir.

İspat. Teorem 4.1.5.'e göre

$$L_{p-1} = \frac{1}{2^{p-2}}\left[1 + \binom{p-1}{2}5 + \binom{p-1}{4}5^2 + \cdots + \binom{p-1}{p-2}5^{\frac{p-1}{2}}\right]$$

ve Teorem 3.1.22.'ye göre

$$\binom{p-1}{r} \equiv (-1)^r(mod\ p)\ ,\ \ 1 \le r \le p-1$$

olduğundan

$$\binom{p-1}{2} \equiv \binom{p-1}{4} \equiv \cdots \equiv \binom{p-1}{p-2} \equiv 1(mod\, p)$$

olduğundan

$$L_{p-1} = \frac{1}{2^{p-2}}\left[1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{\frac{p-1}{2}}\right]$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını da 2^{p-2} ile çarparsak

$$2^{p-2}L_{p-1} \equiv 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \frac{1}{4}\left(5^{\frac{p+1}{2}} - 1\right)(mod\, p)$$

olur. Eğer $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(mod\, p)$ ise $5^{\frac{p+1}{2}} \equiv 5(mod\, p)$ olur.

$$2^{p-2}L_{p-1} \equiv \frac{1}{4}(5-1) \equiv 1(mod\, p)$$

$$2^{p-1}L_{p-1} \equiv 2(mod\, p)$$

elde edilir. Fermat teoremine göre $2^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$ olduğundan $L_{p-1} \equiv 2(mod\, p)$ elde edilir.

Teorem 4.2.17. (Vajda, 1989)
Eğer p asal ve t tamsayısı için $p = 5t \pm 2$ biçiminde ise $L_{p+1} \equiv -2(mod\, p)$‘dir.

İspat. Teorem 4.1.5.’e göre

$$L_{p+1} = \frac{1}{2^p}\left[1 + \binom{p+1}{2}5 + \binom{p+1}{4}5^2 + \cdots + \binom{p+1}{p+1}5^{\frac{p+1}{2}}\right]$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını da 2^p ile çarparsak

$$2^pL_{p+1} = 1 + \binom{p+1}{2}5 + \binom{p+1}{4}5^2 + \cdots + \binom{p+1}{p+1}5^{\frac{p+1}{2}}$$

olur. Teorem 3.1.23.’e göre

$$\binom{p+1}{r} \equiv 0(mod\, p)\,,\ \ 2 \le r \le p-1 \text{ olduğundan}$$

$$\binom{p+1}{2} \equiv \binom{p+1}{4} \equiv \cdots \equiv \binom{p+1}{p-1} \equiv 0(mod\, p)$$

olur. Buradan

$$2^pL_{p+1} \equiv \left(1 + 5^{\frac{p+1}{2}}\right)(mod\, p)$$

elde edilir. Fermat teoremine göre $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(mod\ p)$ olur.

$$2^p L_{p+1} \equiv \left(1 + 5.5^{\frac{p-1}{2}}\right)(mod\ p)$$

$$2^p L_{p+1} \equiv -4(mod\ p)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı 2'ye bölünürse

$$2^{p-1} L_{p+1} \equiv -2(mod\ p)$$

olur. Fermat teoremine göre $2^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$ olduğundan

$$L_{p+1} \equiv -2(mod\ p)$$

elde edilir.

5. BULGULAR

Tezin bu kısmında yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen teoremler, ispatları ve örnekler yer almaktadır.

Teorem 5.1.1. r tek doğal sayı ise $(L_{3r}/L_r)^2 - (L_{3r}/L_r) - 1 = (L_{5r}/L_r)$ dir.

İspat. Binet formülünde $L_r = \alpha^r + \beta^r$ olduğundan

$$(L_{3r}/L_r)^2 - (L_{3r}/L_r) - 1 = \left(\frac{\alpha^{3r} + \beta^{3r}}{\alpha^r + \beta^r}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{3r} + \beta^{3r}}{\alpha^r + \beta^r}\right) - 1$$

$$= \left(\frac{(\alpha^r + \beta^r).(\alpha^{2r} - \alpha^r.\beta^r + \beta^{2r})}{(\alpha^r + \beta^r)}\right)^2 - \left(\frac{(\alpha^r + \beta^r).(\alpha^{2r} - \alpha^r.\beta^r + \beta^{2r})}{(\alpha^r + \beta^r)}\right) - 1$$

$\alpha.\beta = -1$ ve r tek olduğundan $\alpha^r.\beta^r = (\alpha.\beta)^r = -1$

$$= \left((\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + 1\right)^2 - (\alpha^{2r} + \beta^{2r} + 1) - 1$$

$$= \alpha^{4r} + 2 + \beta^{4r} + \alpha^{2r} + \beta^{2r} - 1$$

$$= \alpha^{4r} - (\alpha.\beta)^r.\alpha^{2r} - (\alpha.\beta)^r.\beta^{2r} + \alpha^{2r}.\beta^{2r} + \beta^{4r}$$

$$= \alpha^{4r} - \alpha^{3r}.\beta^r + \alpha^{2r}.\beta^{2r} - \alpha^r.\beta^{3r} + \beta^{4r}$$

$$= \frac{(\alpha^r + \beta^r).(\alpha^{4r} - \alpha^{3r}.\beta^r + \alpha^{2r}.\beta^{2r} - \alpha^r.\beta^{3r} + \beta^{4r})}{(\alpha^r + \beta^r)}$$

$$= \frac{\alpha^{5r} + \beta^{5r}}{\alpha^r + \beta^r} = L_{5r}/L_r$$

elde edilir.

Örnek 5.1.2. Bu örnekte Teorem 5.1.2.'nin doğruluğu bazı r değerleri için gösterilecektir.

$r = 3$ için $L_{15} = 1364$, $L_9 = 76$, $L_3 = 4$ olduğundan

$$(L_9/L_3)^2 - (L_9/L_3) - 1 = (76/4)^2 - (76/4) - 1$$

$$= 361 - 19 - 1 = 341 = (1364/4) = (L_{15}/L_3) \text{ olur.}$$

Teorem 5.1.3. m çift doğal sayı ise $(L_{3m}/L_m)^2+(L_{3m}/L_m)-1=(L_{5m}/L_m)$ dir.

İspat. Binet formülünde $L_n=\alpha^n+\beta^n$ olduğundan

$$(L_{3m}/L_m)^2+(L_{3m}/L_m)-1=\left(\frac{\alpha^{3m}+\beta^{3m}}{\alpha^m+\beta^m}\right)^2+\left(\frac{\alpha^{3m}+\beta^{3m}}{\alpha^m+\beta^m}\right)-1$$

$$=\left(\frac{(\alpha^m+\beta^m).(\alpha^{2m}-\alpha^m.\beta^m+\beta^{2m})}{(\alpha^m+\beta^m)}\right)^2+\left(\frac{(\alpha^m+\beta^m).(\alpha^{2m}-\alpha^m.\beta^m+\beta^{2m})}{(\alpha^m+\beta^m)}\right)-1$$

$\alpha.\beta=-1$ ve m çift olduğundan $(\alpha.\beta)^m=\alpha^m.\beta^m=1$

$$=(\alpha^{2m}-1+\beta^{2m})^2+(\alpha^{2m}-1+\beta^{2m})-1$$

$$=(\alpha^{2m}+\beta^{2m})^2-2.(\alpha^{2m}+\beta^{2m})+1+\alpha^{2m}+\beta^{2m}-2$$

$$=\alpha^{4m}-\alpha^{2m}-\beta^{2m}+1+\beta^{4m}$$

$$=\alpha^{4m}-(\alpha.\beta)^m.\alpha^{2m}-(\alpha.\beta)^m.\beta^{2m}+\alpha^{2m}.\beta^{2m}+\beta^{4m}$$

$$=\alpha^{4m}-\alpha^{3m}.\beta^m+\alpha^{2m}.\beta^{2m}-\alpha^m.\beta^{3m}+\beta^{4m}$$

$$=\frac{(\alpha^m+\beta^m).(\alpha^{4m}-\alpha^{3m}.\beta^m+\alpha^{2m}.\beta^{2m}-\alpha^m.\beta^{3m}+\beta^{4m})}{(\alpha^m+\beta^m)}$$

$$=\frac{\alpha^{5m}+\beta^{5m}}{\alpha^m+\beta^m}=L_{5m}/L_m$$

olur.

Örnek 5.1.4. Bu örnekte Teorem 5.1.3.'ün doğruluğu bazı m değerleri için gösterilecektir.

$m=2$ için $L_{10}=123$, $L_6=18$, $L_2=3$ olduğundan

$$(L_6/L_2)^2+(L_6/L_2)-1=(18/3)^2+(18/3)-1$$
$$=36+6-1=41=(123/3)=(L_{10}/L_2)$$ olur.

Teorem 5.1.5. $r, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r \geq 3$ ve t tek ise

$$\left(L_{(2r-1)t}/L_t\right)^2 = \left(L_{(2r-3)t}/L_t\right).\left(L_{(2r+1)t}/L_t\right) + (L_{3t}/L_t) + 1 \text{ dir.}$$

İspat. Binet formülünde $L_r = \alpha^r + \beta^r$ olduğundan

$\left(L_{(2r-3)t}/L_t\right).\left(L_{(2r+1)t}/L_t\right) + (L_{3t}/L_t) + 1$

$$= \frac{\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t}\right).\left(\alpha^{(2r+1)t} + \beta^{(2r+1)t}\right)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)} + \frac{\alpha^{3t} + \beta^{3t}}{\alpha^t + \beta^t} + 1$$

$$= \frac{\alpha^{(2r-1)2t} + \alpha^{(2r-3)t}.\beta^{(2r+1)t} + \beta^{(2r-3)t}.\alpha^{(2r+1)t} + \beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^{3t} + \beta^{3t}) + (\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{(2r-1)2t} + (\alpha.\beta)^{2rt}.(\alpha^{-3t}.\beta^t + \alpha^t.\beta^{-3t}) + \beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{\alpha^{4t} + \alpha^t.\beta^{3t} + \beta^t.\alpha^{3t} + \beta^{4t} + \alpha^{2t} + 2.(\alpha.\beta)^t + \beta^{2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

t tek ve $(\alpha.\beta) = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{2rt} = 1$, $(\alpha.\beta)^{-3t} = -1$ ve $(\alpha.\beta)^t = -1$ olur.

$$= \frac{\alpha^{(2r-1)2t} + (\alpha.\beta)^{-3t}.(\beta^{4t} + \alpha^{4t}) + \beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{\alpha^{4t} + (\alpha.\beta)^t.(\beta^{2t} + \alpha^{2t}) + \beta^{4t} + \alpha^{2t} - 2 + \beta^{2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{(2r-1)2t} - \beta^{4t} - \alpha^{4t} + \beta^{(2r-1)2t} + \alpha^{4t} - \beta^{2t} - \alpha^{2t} + \beta^{4t} + \alpha^{2t} - 2 + \beta^{2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{(2r-1)2t} - 2 + \beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$2r-1$ ve t tek, $\alpha.\beta = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{(2r-1)t} = -1$ olur.

$$= \frac{\alpha^{(2r-1)2t} + 2(-1) + \beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)} = \frac{\alpha^{(2r-1)2t} + 2.(\alpha.\beta)^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\left(\alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t}\right).\left(\alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t}\right)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t}}{\alpha^t + \beta^t}\right)^2$$

$$= \left(\frac{L_{(2r-1)t}}{L_t}\right)^2$$

$= \left(L_{(2r-1)t}/L_t\right)^2$ elde edilir.

Örnek 5.1.6. Bu örnekte Teorem 5.1.5.'in doğruluğu bazı r ve t değerleri için gösterilecektir.

$r = 3$ ve $t = 3$ için $L_{21} = 24476$, $L_{15} = 1364$, $L_9 = 76$, $L_3 = 4$

$$\begin{aligned}(L_9/L_3).(L_{21}/L_3) + (L_9/L_3) + 1 &= (19).(6119) + 19 + 1 \\ &= 116281 \\ &= (341)^2 \\ &= (L_{15}/L_3)^2 \quad \text{olur.}\end{aligned}$$

Teorem 5.1.7. $r, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r \geq 3$ ve t çift ise

$$\left(L_{(2r-1)t}/L_t\right)^2 = \left(L_{(2r-3)t}/L_t\right).\left(L_{(2r+1)t}/L_t\right) - (L_{3t}/L_t) + 1 \text{ dir.}$$

İspat. Binet formülünde $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğundan

$\left(L_{(2r-3)t}/L_t\right).\left(L_{(2r+1)t}/L_t\right) - (L_{3t}/L_t) + 1$

$$= \frac{\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t}\right).\left(\alpha^{(2r+1)t} + \beta^{(2r+1)t}\right)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)} - \frac{\alpha^{3t} + \beta^{3t}}{\alpha^t + \beta^t} + 1$$

$$= \frac{\alpha^{(2r-1)2t} + \alpha^{(2r-3)t}.\beta^{(2r+1)t} + \beta^{(2r-3)t}.\alpha^{(2r+1)t} + \beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$- \frac{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^{3t} + \beta^{3t}) - (\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{(2r-1)2t} + (\alpha.\beta)^{2rt}.(\alpha^{-3t}.\beta^t + \alpha^t.\beta^{-3t}) + \beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$-\frac{\alpha^{4t}+\alpha^{t}.\beta^{3t}+\beta^{t}.\alpha^{3t}+\beta^{4t}-\alpha^{2t}-2.(\alpha.\beta)^{t}-\beta^{2t}}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

t çift ve $(\alpha.\beta)=-1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{2rt}=1,(\alpha.\beta)^{-3t}=1$ ve $(\alpha.\beta)^{t}=1$ olur.

$$=\frac{\alpha^{(2r-1)2t}+(\alpha.\beta)^{-3t}.(\beta^{4t}+\alpha^{4t})+\beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$-\frac{\alpha^{4t}+(\alpha.\beta)^{t}.(\beta^{2t}+\alpha^{2t})+\beta^{4t}-\alpha^{2t}-2-\beta^{2t}}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{\alpha^{(2r-1)2t}+\beta^{4t}+\alpha^{4t}+\beta^{(2r-1)2t}-\alpha^{4t}-\beta^{2t}-\alpha^{2t}-\beta^{4t}+\alpha^{2t}+2+\beta^{2t}}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{\alpha^{(2r-1)2t}+2+\beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$2r-1$ tek ve t çift, $\alpha.\beta=-1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{(2r-1)t}=1$ olur.

$$=\frac{\alpha^{(2r-1)2t}+2(1)+\beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}=\frac{\alpha^{(2r-1)2t}+2.(\alpha.\beta)^{(2r-1)t}+\beta^{(2r-1)2t}}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{\left(\alpha^{(2r-1)t}+\beta^{(2r-1)t}\right).\left(\alpha^{(2r-1)t}+\beta^{(2r-1)t}\right)}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}=\left(\frac{\alpha^{(2r-1)t}+\beta^{(2r-1)t}}{\alpha^{t}+\beta^{t}}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{L_{(2r-1)t}}{L_t}\right)^{2}$$

$$=\left(L_{(2r-1)t}/L_t\right)^{2}$$

elde edilir.

Örnek 5.1.8. Bu örnekte Teorem 5.1.7.'nin doğruluğu bazı n ve m değerleri için gösterilecektir.

$n=3$ ve $m=4$ için $L_{28}=710647$, $L_{20}=15127$, $L_{12}=322$, $L_4=7$

$$\begin{aligned}(L_{12}/L_4).(L_{28}/L_4)-(L_{12}/L_4)+1 &= (46).(101521)-46+1\\ &= 4669921\\ &= (2161)^2\\ &= (L_{20}/L_4)^2\end{aligned}$$

olur.

Teorem 5.1.9. $r, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r \geq 4$, $t > 3$ ve t tek ise
$L_{(2r-1)t}/L_t = (L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-3)t}/L_t\right) - (L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-5)t}/L_t\right) + \left(L_{(2r-7)t}/L_t\right)$ dir.

İspat.

$$(L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-3)t}/L_t\right) - (L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-5)t}/L_t\right) + \left(L_{(2r-7)t}/L_t\right)$$

$$= (L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-3)t}/L_t - L_{(2r-5)t}/L_t\right) + \left(L_{(2r-7)t}/L_t\right)$$

Binet formülünde $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğundan

$$= \left(\frac{\alpha^{3t} + \beta^{3t}}{\alpha^t + \beta^t}\right).\left(\frac{\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t} - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}}{\alpha^t + \beta^t}\right) + \frac{\alpha^{(2r-7)t} + \beta^{(2r-7)t}}{\alpha^t + \beta^t}$$

$$= \frac{(\alpha^{3t} + \beta^{3t}).\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t} - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}\right)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{(\alpha^t + \beta^t).\left(\alpha^{(2r-7)t} + \beta^{(2r-7)t}\right)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \alpha^{3t}.\beta^{(2r-3)t} - \alpha^{(2r-2)t} - \alpha^{3t}.\beta^{(2r-5)t} + \beta^{3t}.\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{2rt}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{-\beta^{3t}.\alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-2)t} + \alpha^{(2r-6)t} + \alpha^t.\beta^{(2r-7)t} + \beta^t.\alpha^{(2r-7)t} + \beta^{(2r-6)t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \beta^{2rt} + \alpha^{2rt}(\beta^{3t}.\alpha^{-3t} - \beta^{3t}.\alpha^{-5t} - \alpha^{-2t} + \beta^t.\alpha^{-7t} + \alpha^{-6t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{\beta^{2rt}.(\alpha^{3t}.\beta^{-3t} - \alpha^{3t}.\beta^{-5t} - \beta^{-2t} + \alpha^t.\beta^{-7t} + \beta^{-6t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \beta^{2rt} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-7t}.(\beta^{3t}.\alpha^{4t} - \beta^{3t}.\alpha^{2t} - \alpha^{5t} + \beta^t + \alpha^t)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{\beta^{2rt}.\beta^{-7t}.(\alpha^{3t}.\beta^{4t} - \alpha^{3t}.\beta^{2t} - \beta^{5t} + \alpha^t + \beta^t)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \beta^{2rt} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-7t}.((\alpha.\beta)^{3t}.\alpha^t - (\alpha.\beta)^{2t}.\beta^t - \alpha^{5t} + \beta^t + \alpha^t)}{(\alpha^m + \beta^m).(\alpha^m + \beta^m)}$$

$$+\frac{\beta^{2rt}.\beta^{-7t}.((\alpha.\beta)^{3t}.\beta^{t}-(\alpha.\beta)^{2t}.\alpha^{t}-\beta^{5t}+\alpha^{t}+\beta^{t})}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

t tek ve $(\alpha.\beta)=-1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{3t}=-1$ ve $(\alpha.\beta)^{2t}=1$ olur.

$$=\frac{\alpha^{2rt}+\beta^{2rt}+\alpha^{2rt}.\alpha^{-7t}.(-\alpha^{t}-\beta^{t}-\alpha^{5t}+\beta^{t}+\alpha^{t})}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$+\frac{\beta^{2rt}.\beta^{-7t}.(-\beta^{t}-\alpha^{t}-\beta^{5t}+\alpha^{t}+\beta^{t})}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{\alpha^{2rt}+\beta^{2rt}+\alpha^{2rt}.\alpha^{-7t}.(-\alpha^{5t})+\beta^{2rt}.\beta^{-7t}.(-\beta^{5t})}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{\alpha^{2rt}+\beta^{2rt}+(-1).\alpha^{2rt}.\alpha^{-2t}+(-1).\beta^{2rt}.\beta^{-2t}}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{\alpha^{2rt}+(\alpha.\beta)^{t}.\alpha^{2rt}.\alpha^{-2t}+\beta^{2rt}+(\alpha.\beta)^{t}.\beta^{2rt}.\beta^{-2t}}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{\alpha^{2rt}.(1+\alpha^{-t}.\beta^{t})+\beta^{2rt}.(1+\alpha^{t}.\beta^{-t})}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{\alpha^{2rt}.\alpha^{-t}.(\alpha^{t}+\beta^{t})+\beta^{2rt}.\beta^{-t}.(\alpha^{t}+\beta^{t})}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{(\alpha^{t}+\beta^{t}).\left(\alpha^{(2r-1)t}+\beta^{(2r-1)t}\right)}{(\alpha^{t}+\beta^{t}).(\alpha^{t}+\beta^{t})}$$

$$=\frac{\alpha^{(2r-1)t}+\beta^{(2r-1)t}}{\alpha^{t}+\beta^{t}}$$

$$=\frac{L_{(2r-1)t}}{L_{t}}$$

$$=L_{(2r-1)t}/L_{t}$$

elde edilir.

Örnek 5.1.10. Bu örnekte Teorem 5.1.9.'un doğruluğu bazı r ve t değerleri için gösterilecektir.

$r = 4$ ve $t = 3$ için $L_{21} = 24476$, $L_{15} = 1364$, $L_9 = 76$, $L_3 = 4$

$$\begin{aligned}(L_9/L_3).(L_{15}/L_3) - (L_9/L_3).(L_9/L_3) + (L_3/L_3) &= (19).(341) - (19).(19) + (1)\\ &= 6119\\ &= L_{21}/L_3 \quad \text{olur.}\end{aligned}$$

Teorem 5.1.11. $r, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r \geq 4$, $t > 3$ ve t çift ise

$L_{(2r-1)t}/L_t = (L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-3)t}/L_t\right) + (L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-5)t}/L_t\right) - \left(L_{(2r-7)t}/L_t\right)$ dir.

İspat.

$(L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-3)t}/L_t\right) + (L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-5)t}/L_t\right) - \left(L_{(2r-7)t}/L_t\right)$

$= (L_{3t}/L_t).\left(L_{(2r-3)t}/L_t + L_{(2r-5)t}/L_t\right) - \left(L_{(2r-7)t}/L_t\right)$

Binet formülünde $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğundan

$$= \left(\frac{\alpha^{3t} + \beta^{3t}}{\alpha^t + \beta^t}\right).\left(\frac{\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t} + \alpha^{(2r-5)t} + \beta^{(2r-5)t}}{\alpha^t + \beta^t}\right) - \frac{\alpha^{(2r-7)t} + \beta^{(2r-7)t}}{\alpha^t + \beta^t}$$

$$= \frac{(\alpha^{3t} + \beta^{3t}).\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t} + \alpha^{(2r-5)t} + \beta^{(2r-5)t}\right)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$- \frac{(\alpha^t + \beta^t).\left(\alpha^{(2r-7)t} + \beta^{(2r-7)t}\right)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \alpha^{3t}.\beta^{(2r-3)t} + \alpha^{(2r-2)t} + \alpha^{3t}.\beta^{(2r-5)t} + \beta^{3t}.\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{2rt}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{\beta^{3t}.\alpha^{(2r-5)t} + \beta^{(2r-2)t} - \alpha^{(2r-6)t} - \alpha^t.\beta^{(2r-7)t} - \beta^t.\alpha^{(2r-7)t} - \beta^{(2r-6)t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \beta^{2rt} + \alpha^{2rt}(\beta^{3t}.\alpha^{-3t} + \beta^{3t}.\alpha^{-5t} + \alpha^{-2t} - \beta^t.\alpha^{-7t} - \alpha^{-6t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{\beta^{2rt}.(\alpha^{3t}.\beta^{-3t} + \alpha^{3t}.\beta^{-5t} + \beta^{-2t} - \alpha^t.\beta^{-7t} - \beta^{-6t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \beta^{2rt} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-7t}.(\beta^{3t}.\alpha^{4t} + \beta^{3t}.\alpha^{2t} + \alpha^{5t} - \beta^{t} - \alpha^{t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{\beta^{2rt}.\beta^{-7t}.(\alpha^{3t}.\beta^{4t} + \alpha^{3t}.\beta^{2t} + \beta^{5t} - \alpha^{t} - \beta^{t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \beta^{2rt} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-7t}.((\alpha.\beta)^{3t}.\alpha^{t} + (\alpha.\beta)^{2t}.\beta^{t} + \alpha^{5t} - \beta^{t} - \alpha^{t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{\beta^{2rt}.\beta^{-7t}.((\alpha.\beta)^{3t}.\beta^{t} + (\alpha.\beta)^{2t}.\alpha^{t} + \beta^{5t} - \alpha^{t} - \beta^{t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

t çift ve $(\alpha.\beta) = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{3t} = 1$ ve $(\alpha.\beta)^{2t} = 1$ olur.

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \beta^{2rt} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-7t}.(\alpha^{t} + \beta^{t} + \alpha^{5t} - \beta^{t} - \alpha^{t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$+ \frac{\beta^{2rt}.\beta^{-7t}.(\beta^{t} + \alpha^{t} + \beta^{5t} - \alpha^{t} - \beta^{t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \beta^{2rt} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-7t}.(\alpha^{5t}) + \beta^{2rt}.\beta^{-7t}.(\beta^{5t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + \beta^{2rt} + (1).\alpha^{2rt}.\alpha^{-2t} + (1).\beta^{2rt}.\beta^{-2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt} + (\alpha.\beta)^{t}.\alpha^{2rt}.\alpha^{-2t} + \beta^{2rt} + (\alpha.\beta)^{t}.\beta^{2rt}.\beta^{-2t}}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt}.(1 + \alpha^{-t}.\beta^{t}) + \beta^{2rt}.(1 + \alpha^{t}.\beta^{-t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{2rt}.\alpha^{-t}.(\alpha^{t} + \beta^{t}) + \beta^{2rt}.\beta^{-t}.(\alpha^{t} + \beta^{t})}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{(\alpha^{t} + \beta^{t}).\left(\alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t}\right)}{(\alpha^t + \beta^t).(\alpha^t + \beta^t)}$$

$$= \frac{\alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t}}{\alpha^t + \beta^t}$$

$= \frac{L_{(2r-1)t}}{L_t}$

$= L_{(2r-1)t}/L_t$

elde edilir.

Örnek 5.1.12. Bu örnekte Teorem 5.1.11.'in doğruluğu bazı r ve t değerleri için gösterilecektir.

$r = 4$ ve $t = 4$ için $L_{28} = 710647$, $L_{20} = 15127$, $L_{12} = 322$, $L_4 = 7$

$(L_{12}/L_4).(L_{20}/L_4) + (L_{12}/L_4).(L_{12}/L_4) - (L_4/L_4)$

$= (46).(2161) + (46).(46) - (1)$

$= 101521$

$= L_{28}/L_4$ olur.

Teorem 5.1.13. m tek doğal sayı ise $(L_{m-1}).(L_{m+1}) - 2 = (L_{3m}/L_m)$ dir.

İspat. $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri α ve β olmak üzere

$\alpha.\beta = -1$ ve $\alpha + \beta = 1$ olur.

$(L_{m-1}).(L_{m+1}) - 2 = (\alpha^{m-1} + \beta^{m-1}).(\alpha^{m+1} + \beta^{m+1}) - 2$

$= \alpha^{2m} + \alpha^{m-1}.\beta^{m+1} + \beta^{m-1}.\alpha^{m+1} + \beta^{2m} - 2$

$= \alpha^{2m} + (\alpha.\beta)^{m-1}.(\beta^2 + \alpha^2) + \beta^{2m} - 2$

m tek olduğundan $m - 1$ çifttir. $\alpha.\beta = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{m-1} = 1$ olur.

$= \alpha^{2m} + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^{2m} - 2$

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ olduğundan $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ olduğundan $\beta^2 = \beta + 1$ olur.

$= \alpha^{2m} + \alpha + 1 + \beta + 1 + \beta^{2m} - 2 = \alpha^{2m} + \alpha + \beta + \beta^{2m} = \alpha^{2m} + 1 + \beta^{2m}$

m tek ve $\alpha.\beta = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^m = -1$

$= \alpha^{2m} - (\alpha.\beta)^m + \beta^{2m} = \alpha^{2m} - \alpha^m.\beta^m + \beta^{2m}$

$$= \frac{(\alpha^m + \beta^m).(\alpha^{2m} - \alpha^m.\beta^m + \beta^{2m})}{\alpha^m + \beta^m} = \frac{\alpha^{3m} + \beta^{3m}}{\alpha^m + \beta^m}$$

$$= \frac{L_{3m}}{L_m} = L_{3m}/L_m$$

elde edilir.

Örnek 5.1.14. Bu örnekte Teorem 5.1.13.'ün doğruluğu bazı m değerleri için gösterilecektir.

$m = 5$ için $L_{15} = 1364$, $L_6 = 18$, $L_5 = 11$, $L_4 = 7$

$(L_4).(L_6) - 2 = (7).(18) - 2 = 124 = L_{15}/L_5$ olur.

Teorem 5.1.15. $m \geq 2$ ve m çift doğal sayı ise $(L_{m-1}).(L_{m+1}) + 2 = (L_{3m}/L_m)$ dir.

İspat. $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri α ve β olmak üzere

$\alpha.\beta = -1$ ve $\alpha + \beta = 1$ olur.

$(L_{m-1}).(L_{m+1}) + 2 = (\alpha^{m-1} + \beta^{m-1}).(\alpha^{m+1} + \beta^{m+1}) + 2$

$= \alpha^{2m} + \alpha^{m-1}.\beta^{m+1} + \beta^{m-1}.\alpha^{m+1} + \beta^{2m} + 2$

$= \alpha^{2m} + (\alpha.\beta)^{m-1}.(\beta^2 + \alpha^2) + \beta^{2m} + 2$

m çift olduğundan $m - 1$ tektir. $\alpha.\beta = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{m-1} = -1$ olur.

$= \alpha^{2m} - \beta^2 - \alpha^2 + \beta^{2m} + 2$

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ olduğundan $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ olduğundan $\beta^2 = \beta + 1$ olur.

$= \alpha^{2m} - \alpha - 1 - \beta - 1 + \beta^{2m} + 2 = \alpha^{2m} - \alpha - \beta + \beta^{2m} = \alpha^{2m} - 1 + \beta^{2m}$

m çift ve $\alpha.\beta = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^m = 1$

$= \alpha^{2m} - (\alpha.\beta)^m + \beta^{2m} = \alpha^{2m} - \alpha^m.\beta^m + \beta^{2m}$

$$= \frac{(\alpha^m + \beta^m).(\alpha^{2m} - \alpha^m.\beta^m + \beta^{2m})}{\alpha^m + \beta^m} = \frac{\alpha^{3m} + \beta^{3m}}{\alpha^m + \beta^m}$$

$$= \frac{L_{3m}}{L_m} = L_{3m}/L_m$$

elde edilir.

Örnek 5.1.16. Bu örnekte Teorem 5.1.15.'in doğruluğu bazı m değerleri için gösterilecektir.

$m = 4$ için $L_{12} = 322$, $L_5 = 11$, $L_4 = 7$, $L_3 = 4$

$(L_3).(L_5) + 2 = (4).(11) + 2 = 46 = L_{12}/L_4$ olur.

Teorem 5.1.17. m tek doğal sayı ise $L_m^2 + 3 = (L_{3m}/L_m)$ dir.

İspat. $L_m^2 + 3 = (\alpha^m + \beta^m)^2 + 3 = \alpha^{2m} + 2.\alpha^m.\beta^m + \beta^{2m} + 3$

$= \alpha^{2m} + 2.(\alpha.\beta)^m + \beta^{2m} + 3$

m tek $\alpha.\beta = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^m = -1$ olur.

$= \alpha^{2m} - 2 + \beta^{2m} + 3 = \alpha^{2m} + 1 + \beta^{2m}$

$= \alpha^{2m} - (\alpha.\beta)^m + \beta^{2m} = \alpha^{2m} - \alpha^m.\beta^m + \beta^{2m}$

$$= \frac{(\alpha^m + \beta^m).(\alpha^{2m} - \alpha^m.\beta^m + \beta^{2m})}{\alpha^m + \beta^m}$$

$$= \frac{L_{3m}}{L_m} = L_{3m}/L_m$$

elde edilir.

Örnek 5.1.18. Bu örnekte Teorem 5.1.17.'nin doğruluğu bazı m değerleri için gösterilecektir.

$m = 5$ için $L_{15} = 1364$, $L_5 = 11$

$(L_5)^2 + 3 = 11^2 + 3 = 124 = L_{15}/L_5$ olur.

Teorem 5.1.19. m çift doğal sayı ise $L_m^2 - 3 = (L_{3m}/L_m)$ dir.

Bu teorem (Hoggatt ve Bergum, 1974) tarafından

$$\text{Eğer } n \text{ çift ise } \; L_{3n} = L_n(L_n^2 - 3)$$

şeklinde ispatsız olarak verilmiştir.

İspat.

$L_m^2 - 3 = (\alpha^m + \beta^m)^2 - 3 = \alpha^{2m} + 2.\alpha^m.\beta^m + \beta^{2m} - 3$

$$= \alpha^{2m} + 2.(\alpha.\beta)^m + \beta^{2m} - 3$$

m çift $\alpha.\beta = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^m = 1$ olur.

$$= \alpha^{2m} + 2 + \beta^{2m} - 3 = \alpha^{2m} - 1 + \beta^{2m}$$

$$= \alpha^{2m} - (\alpha.\beta)^m + \beta^{2m} = \alpha^{2m} - \alpha^m.\beta^m + \beta^{2m}$$

$$= \frac{(\alpha^m + \beta^m).(\alpha^{2m} - \alpha^m.\beta^m + \beta^{2m})}{\alpha^m + \beta^m}$$

$$= \frac{L_{3m}}{L_m} = L_{3m}/L_m$$

elde edilir.

Örnek 5.1.20. Bu örnekte Teorem 5.1.19.'un doğruluğu bazı m değerleri için gösterilecektir.

$m = 6$ için $L_{18} = 5778$, $L_6 = 18$

$(L_6)^2 - 3 = 18^2 - 3 = 321 = L_{18}/L_6$ olur.

Teorem 5.1.21. $r, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r \geq 3$, t tek ise

$$L_{(2r-1)t} = (L_t^2 + 2).L_{(2r-3)t} - L_{(2r-5)t} \text{ dir.}$$

İspat. Binet formülünde $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğundan

$(L_t^2 + 2).L_{(2r-3)t} - L_{(2r-5)t}$

$$= ((\alpha^t + \beta^t)^2 + 2).\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t}\right) - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}$$

$$= (\alpha^{2t} + 2.(\alpha.\beta)^t + \beta^{2t} + 2).\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t}\right) - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}$$

t tek ve $(\alpha.\beta) = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^t = -1$

$= (\alpha^{2t} + \beta^{2t}).\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t}\right) - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \alpha^{2t}.\beta^{(2r-3)t} + \beta^{2t}.\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-1)t} - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t} + \alpha^{2rt}.(\alpha^{-3t}.\beta^{2t} - \alpha^{-5t}) + \beta^{2rt}.(\alpha^{2t}.\beta^{-3t} - \beta^{-5t})$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-5t}.((\alpha.\beta)^{2t} - 1) + \beta^{2rt}.\beta^{-5t}.((\alpha.\beta)^{2t} - 1)$

t tek ve $(\alpha.\beta) = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{2t} = 1$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-5t}.(0) + \beta^{2rt}.\beta^{-5t}.(0)$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t} = L_{(2r-1)t}$
elde edilir.

Örnek 5.1.22. Bu örnekte Teorem 5.1.21.'in doğruluğu bazı r ve t değerleri için gösterilecektir.
$r = 4$ ve $t = 3$ için $L_{21} = 24476$, $L_{15} = 1364$, $L_9 = 76$, $L_3 = 4$

$$\begin{aligned}(L_3^2 + 2).L_{15} - L_9 &= (4^2 + 2).1364 - 76\\ &= 24476\\ &= L_{21} \quad \text{olur.}\end{aligned}$$

Teorem 5.1.23. $r, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r \geq 3$, t çift ise

$$L_{(2r-1)t} = (L_t^2 - 2).L_{(2r-3)t} - L_{(2r-5)t} \text{ dir.}$$

İspat. Binet formülünde $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğundan
$(L_t^2 - 2).L_{(2r-3)t} - L_{(2r-5)t}$

$= ((\alpha^t + \beta^t)^2 - 2).\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t}\right) - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}$

$= (\alpha^{2t} + 2.(\alpha.\beta)^t + \beta^{2t} - 2).\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t}\right) - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}$

t çift ve $(\alpha.\beta) = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^t = 1$

$= (\alpha^{2t} + \beta^{2t}).\left(\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-3)t}\right) - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \alpha^{2t}.\beta^{(2r-3)t} + \beta^{2t}.\alpha^{(2r-3)t} + \beta^{(2r-1)t} - \alpha^{(2r-5)t} - \beta^{(2r-5)t}$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t} + \alpha^{2rt}.(\alpha^{-3t}.\beta^{2t} - \alpha^{-5t}) + \beta^{2rt}.(\alpha^{2t}.\beta^{-3t} - \beta^{-5t})$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-5t}.((\alpha.\beta)^{2t} - 1) + \beta^{2rt}.\beta^{-5t}.((\alpha.\beta)^{2t} - 1)$

t çift ve $(\alpha.\beta) = -1$ olduğundan $(\alpha.\beta)^{2t} = 1$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t} + \alpha^{2rt}.\alpha^{-5t}.(0) + \beta^{2rt}.\beta^{-5t}.(0)$

$= \alpha^{(2r-1)t} + \beta^{(2r-1)t} = L_{(2r-1)t}$

elde edilir.

Örnek 5.1.24. Bu örnekte Teorem 5.1.23.'ün doğruluğu bazı r ve t değerleri için gösterilecektir.

$r = 4$ ve $t = 4$ için $L_{28} = 710647$, $L_{20} = 15127$, $L_{12} = 322$, $L_4 = 7$

$$\begin{aligned}(L_4^2 - 2).L_{20} - L_{12} &= (7^2 - 2).15127 - 322 \\ &= 710647 \\ &= L_{28} \quad \text{olur.}\end{aligned}$$

Aşağıda elde edilen eşitlikler (Teorem 5.1.25. ve Teorem 5.1.27.) Hoggatt (1970)'ın Teorem 4.1.3.'te verdiği eşitlikten m tek, n ise hem tek hem çift alınarak elde edilebilir. Biz bu eşitlikleri farklı bir şekilde ifade edip, eşitliklerin ispatlarını vereceğiz.

Teorem 5.1.25. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere m tek ise

$$L_{(2n+1)m} = \sum_{r=1}^{n+1} \frac{2n+1}{2n-2r+3}.\binom{2n-r+1}{r-1}.L_m^{2n-2r+3}$$

tür.

İspat.

$n = 1$ için ve $n = 2$ için doğru olduğu açıktır.

$n = k$ için

$$L_{(2k+1)m} = \sum_{r=1}^{k+1} \frac{2k+1}{2k-2r+3}.\binom{2k-r+1}{r-1}.L_m^{2k-2r+3}$$

olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ için

$$L_{(2k+3)m} = \sum_{r=1}^{k+2} \frac{2k+3}{2k-2r+5} . \binom{2k-r+3}{r-1} . L_m^{2k-2r+5}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Teorem 5.1.21'e göre m tek iken $L_{(2n-1)m} = (L_m^2 + 2). L_{(2n-3)m} - L_{(2n-5)m}$

O halde $L_{(2k+3)m} = (L_m^2 + 2). L_{(2k+1)m} - L_{(2k-1)m}$

$L_m = z$ dersek

$L_{(2k+3)m} = (z^2 + 2). L_{(2k+1)m} - L_{(2k-1)m}$

$$= (z^2+2)\left(\sum_{r=1}^{k+1} \frac{2k+1}{2k-2r+3} . \binom{2k-r+1}{r-1} . z^{2k-2r+3}\right)$$

$$-\sum_{r=1}^{k} \frac{2k-1}{2k-2r+1} . \binom{2k-r-1}{r-1} . z^{2k-2r+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{k+1} \frac{2k+1}{2k-2r+3} . \binom{2k-r+1}{r-1} . z^{2k-2r+5}$$

$$+\sum_{r=1}^{k+1} \frac{4k+2}{2k-2r+3} . \binom{2k-r+1}{r-1} . z^{2k-2r+3}$$

$$-\sum_{r=1}^{k} \frac{2k-1}{2k-2r+1} . \binom{2k-r-1}{r-1} . z^{2k-2r+1}$$

İlk ifadenin ilk iki terimini, ikinci ifadenin ilk ve son terimlerini ve üçüncü ifadenin son terimini ayrı yazarsak

$$= z^{2k+3} + (2k+1). z^{2k+1} + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{2k+1}{2k-2r-1} . \binom{2k-r-1}{r+1} . z^{2k-2r+1}$$

$$+2. z^{2k+1} + (4k+2). z + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{4k+2}{2k-2r+1} . \binom{2k-r}{r} . z^{2k-2r+1}$$

$$-(2k-1).z-\sum_{r=1}^{k-1}\frac{2k-1}{2k-2r+1}.\binom{2k-r-1}{r-1}.z^{2k-2r+1}$$

$$=z^{2k+3}+(2k+3).z^{2k+1}+(2k+3).z$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1}\frac{2.(2k+1).(k-r)}{(2k-r).(2k-r+1)}.\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1}\frac{2.(2k+1).(r+1)}{(2k-2r+1).(2k-r+1)}.\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}$$

$$-\sum_{r=1}^{k-1}\frac{r.(2k-1).(r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}.\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}$$

$$=z^{2k+3}+(2k+3).z^{2k+1}+(2k+3).z$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1}\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}.\Bigg(\frac{2.(2k+1).(k-r)}{(2k-r).(2k-r+1)}+\frac{2.(2k+1).(r+1)}{(2k-2r+1).(2k-r+1)}-\frac{r.(2k-1).(r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}\Bigg)$$

Şimdi son parantezin içindeki ifadeyi ayrı inceleyelim.

Paydaları eşitlersek

$$=\frac{(2k-2r+1).2.(2k+1).(k-r)+2.(2k+1).(r+1).(2k-r)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}$$

$$-\frac{r.(2k-1).(r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}$$

Payı ayrı incelersek

$$=8k^3-8k^2r+4k^2-8k^2r+8kr^2-4kr+4r^2+4k^2-4kr-4kr+2k-2r$$

$$+8k^2r-4kr^2+8k^2-4kr+4kr-2r^2+4k-2r-2kr^2-2kr+r^2+r$$

$$=8k^3-8k^2r+2kr^2-14kr+16k^2+3r^2+6k-3r$$

$= 8k^3 + 16k^2 + 6k + 2kr^2 + 3r^2 - 8k^2r - 14kr - 3r$

$= 8k^3 + 12k^2 + 4k^2 + 6k + r^2.(2k + 3) - (8k^2r + 12kr + 2kr + 3r)$

$= 4k^2.(2k + 3) + 2k.(2k + 3) + r^2.(2k + 3) - \big(4kr.(2k + 3) + r(2k + 3)\big)$

$= (2k + 3).(4k^2 + 2k + r^2 - 4kr - r)$

$= (2k + 3).(4k^2 - 2kr - 2kr + r^2 + 2k - r)$

$= (2k + 3).(2k.(2k - r) - r.(2k - r) + 2k - r)$

$= (2k + 3).(2k - r).(2k - r + 1)$

Bu ifade paya yazılırsa

$$= \frac{(2k + 3).(2k - r).(2k - r + 1)}{(2k - r).(2k - 2r + 1).(2k - r + 1)} = \frac{2k + 3}{2k - 2r + 1}$$

olur. Bulunan eşitlik yerine yazılırsa

$$= z^{2k+3} + (2k + 3).z^{2k+1} + (2k + 3).z + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{2k + 3}{2k - 2r + 1}.\binom{2k - r + 1}{r + 1}.z^{2k-2r+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{k+2} \frac{2k + 3}{2k - 2r + 5}.\binom{2k - r + 3}{r - 1}.z^{2k-2r+5}$$

elde edilir.

Örnek 5.1.26. Bu örnekte Teorem 5.1.25.'in doğruluğu bazı n ve m değerleri için gösterilecektir.

$n = 3$ ve $m = 5$ için $L_5 = 11$, $L_{35} = 20633239$

$$\sum_{r=1}^{4} \frac{7}{9 - 2r}.\binom{7 - r}{r - 1}.L_5^{9-2r}$$

$$= 11^7 + 7.11^5 + 14.11^3 + 7.11$$

$$= 19487171 + 1127357 + 18634 + 77$$

$$= 20633239 = L_{35} \quad \text{olur.}$$

Teorem 5.1.27. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere m çift ise

$$L_{(2n+1)m} = \sum_{r=1}^{n+1} \frac{2n+1}{2n-2r+3} . \binom{2n-r+1}{r-1} . L_m^{2n-2r+3} . (-1)^{r+1}$$

dir.

İspat.

$n = 1$ için ve $n = 2$ için doğru olduğu açıktır.

$n = k$ için

$$L_{(2k+1)m} = \sum_{r=1}^{k+1} \frac{2k+1}{2k-2r+3} . \binom{2k-r+1}{r-1} . L_m^{2k-2r+3} . (-1)^{r+1}$$

olduğunu kabul edelim.

$n = k+1$ için

$$L_{(2k+3)m} = \sum_{r=1}^{k+2} \frac{2k+3}{2k-2r+5} . \binom{2k-r+3}{r-1} . L_m^{2k-2r+5} . (-1)^{r+1}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Teorem 5.1.23.'e göre m çift iken $L_{(2n-1)m} = (L_m^2 - 2) . L_{(2n-3)m} - L_{(2n-5)m}$

O halde $L_{(2k+3)m} = (L_m^2 - 2) . L_{(2k+1)m} - L_{(2k-1)m}$

$L_m = z$ dersek

$L_{(2k+3)m} = (z^2 - 2) . L_{(2k+1)m} - L_{(2k-1)m}$

$$= (z^2 - 2) \left(\sum_{r=1}^{k+1} \frac{2k+1}{2k-2r+3} . \binom{2k-r+1}{r-1} . z^{2k-2r+3} . (-1)^{r+1} \right)$$

$$- \sum_{r=1}^{k} \frac{2k-1}{2k-2r+1} . \binom{2k-r-1}{r-1} . z^{2k-2r+1} . (-1)^{r+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{k+1} \frac{2k+1}{2k-2r+3} . \binom{2k-r+1}{r-1} . z^{2k-2r+5} . (-1)^{r+1}$$

$$- \sum_{r=1}^{k+1} \frac{4k+2}{2k-2r+3} . \binom{2k-r+1}{r-1} . z^{2k-2r+3} . (-1)^{r+1}$$

$$- \sum_{r=1}^{k} \frac{2k-1}{2k-2r+1} . \binom{2k-r-1}{r-1} . z^{2k-2r+1} . (-1)^{r+1}$$

Önce k'yı tek alalım. Bu durumda ilk terimler pozitif, ikinci terimler negatif olacak şekilde terimlerin işaretleri bir pozitif, bir negatif devam eder ve son terimler negatif olur.

İlk ifadenin ilk iki terimini, ikinci ifadenin ilk ve son terimlerini ve üçüncü ifadenin son terimini ayrı yazarsak

$$= z^{2k+3} - (2k+1) . z^{2k+1} + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{2k+1}{2k-2r-1} . \binom{2k-r-1}{r+1} . z^{2k-2r+1} . (-1)^{r+1}$$

$$-2 . z^{2k+1} + (4k+2) . z + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{4k+2}{2k-2r+1} . \binom{2k-r}{r} . z^{2k-2r+1} . (-1)^{r+1}$$

$$-(2k-1) . z - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{2k-1}{2k-2r+1} . \binom{2k-r-1}{r-1} . z^{2k-2r+1} . (-1)^{r+1}$$

$$= z^{2k+3} - (2k+3) . z^{2k+1} + (2k+3) . z$$

$$+ \sum_{r=1}^{k-1} \frac{2 . (2k+1) . (k-t)}{(2k-r) . (2k-r+1)} . \binom{2k-r+1}{r+1} . z^{2k-2r+1} . (-1)^{r+1}$$

$$+ \sum_{r=1}^{k-1} \frac{2 . (2k+1) . (r+1)}{(2k-2r+1) . (2k-r+1)} . \binom{2k-r+1}{r+1} . z^{2k-2r+1} . (-1)^{r+1}$$

$$- \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r . (2k-1) . (r+1)}{(2k-r) . (2k-2r+1) . (2k-r+1)} . \binom{2k-r+1}{r+1} . z^{2k-2r+1} . (-1)^{r+1}$$

$$= z^{2k+3} - (2k+3).z^{2k+1} + (2k+3).z$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1} \binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}.\left(\frac{2.(2k+1).(k-r)}{(2k-r).(2k-r+1)}\right.$$

$$+\frac{2.(2k+1).(r+1)}{(2k-2r+1).(2k-r+1)}$$

$$\left.-\frac{r.(2k-1).(r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}\right)$$

Şimdi son parantezin içindeki ifadeyi ayrı inceleyelim.

Paydaları eşitlersek

$$= \frac{(2k-2r+1).2.(2k+1).(k-r) + 2.(2k+1).(r+1).(2k-r) - r.(2k-1).(r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}$$

$$-\frac{r.(2k-1).(r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}$$

Payı ayrı incelersek

$$= 8k^3 - 8k^2r + 4k^2 - 8k^2r + 8kr^2 - 4kr + 4r^2 + 4k^2 - 4kr - 4kr + 2k - 2r$$

$$+8k^2r - 4kr^2 + 8k^2 - 4kr + 4kr - 2r^2 + 4k - 2r - 2kr^2 - 2kr + r^2 + r$$

$$= 8k^3 - 8k^2r + 2kr^2 - 14kr + 16k^2 + 3r^2 + 6k - 3r$$

$$= 8k^3 + 16k^2 + 6k + 2kr^2 + 3r^2 - 8k^2r - 14kr - 3r$$

$$= 8k^3 + 12k^2 + 4k^2 + 6k + r^2.(2k+3) - (8k^2r + 12kr + 2kr + 3r)$$

$$= 4k^2.(2k+3) + 2k.(2k+3) + r^2.(2k+3) - \big(4kr.(2k+3) + r(2k+3)\big)$$

$$= (2k+3).(4k^2 + 2k + r^2 - 4kr - r)$$

$$= (2k+3).(4k^2 - 2kr - 2kr + r^2 + 2k - r)$$

$$= (2k+3).(2k.(2k-r) - r.(2k-r) + 2k - r)$$

$$= (2k+3).(2k-r).(2k-r+1)$$

Bu ifade paya yazılırsa

$$= \frac{(2k+3).(2k-r).(2k-r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)} = \frac{2k+3}{2k-2r+1}$$

olur. Bulunan eşitlik yerine yazılırsa

$$= z^{2k+3} - (2k+3).z^{2k+1} + (2k+3).z$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1} \frac{2k+3}{2k-2r+1}.\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{k+2} \frac{2k+3}{2k-r+5}.\binom{2k-r+3}{r-1}.z^{2k-2r+5}.(-1)^{r+1}$$

elde edilir.

Şimdi k yı çift alalım. Bu durumda ilk terimler pozitif, ikinci terimler negatif olacak şekilde terimlerin işaretleri bir pozitif, bir negatif devam eder ve son terimler pozitif olur.

İlk ifadenin ilk iki terimini, ikinci ifadenin ilk ve son terimlerini ve üçüncü ifadenin son terimini ayrı yazarsak

$$= z^{2k+3} - (2k+1).z^{2k+1} + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{2k+1}{2k-2r-1}.\binom{2k-r-1}{r+1}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}$$

$$-2.z^{2k+1} - (4k+2).z + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{4k+2}{2k-2r+1}.\binom{2k-r}{r}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}$$

$$+(2k-1).z - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{2k-1}{2k-2r+1}.\binom{2k-r-1}{r-1}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}$$

$$= z^{2k+3} - (2k+3).z^{2k+1} - (2k+3).z$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1} \frac{2.(2k+1).(k-r)}{(2k-r).(2k-r+1)}.\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1}\frac{2.(2k+1).(r+1)}{(2k-2r+1).(2k-r+1)}.\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}$$

$$-\sum_{r=1}^{k-1}\frac{r.(2k-1).(r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}.\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}$$

$$=z^{2k+3}-(2k+3).z^{2k+1}-(2k+3).z$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1}\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}.\left(\frac{2.(2k+1).(k-r)}{(2k-r).(2k-r+1)}\right.$$

$$+\frac{2.(2k+1).(r+1)}{(2k-2r+1).(2k-r+1)}$$

$$\left.-\frac{r.(2k-1).(r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}\right)$$

Şimdi son parantezin içindeki ifadeyi ayrı inceleyelim.

Paydaları eşitlersek

$$=\frac{(2k-2r+1).2.(2k+1).(k-r)+2.(2k+1).(r+1).(2k-r)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}$$

$$-\frac{r.(2k-1).(r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)}$$

Payı ayrı incelersek

$$=8k^3-8k^2r+4k^2-8k^2r+8kr^2-4kr+4r^2+4k^2-4kr-4kr+2k-2r$$

$$+8k^2r-4kr^2+8k^2-4kr+4kr-2r^2+4k-2r-2kr^2-2kr+r^2+r$$

$$=8k^3-8k^2r+2kr^2-14kr+16k^2+3r^2+6k-3r$$

$$=8k^3+16k^2+6k+2kr^2+3r^2-8k^2r-14kr-3r$$

$$=8k^3+12k^2+4k^2+6k+r^2.(2k+3)-(8k^2r+12kr+2kr+3r)$$

$$=4k^2.(2k+3)+2k.(2k+3)+r^2.(2k+3)-\big(4kr.(2k+3)+r(2k+3)\big)$$

$$=(2k+3).(4k^2+2k+r^2-4kr-r)$$

$= (2k+3).(4k^2 - 2kr - 2kr + r^2 + 2k - r)$

$= (2k+3).(2k.(2k-r) - r.(2k-r) + 2k - r)$

$= (2k+3).(2k-r).(2k-r+1)$

Bu ifade paya yazılırsa

$$= \frac{(2k+3).(2k-r).(2k-r+1)}{(2k-r).(2k-2r+1).(2k-r+1)} = \frac{2k+3}{2k-2r+1}$$

olur. Bulunan eşitlik yerine yazılırsa

$$= z^{2k+3} - (2k+3).z^{2k+1} - (2k+3).z$$

$$+ \sum_{r=1}^{k-1} \frac{2k+3}{2k-2r+1}.\binom{2k-r+1}{r+1}.z^{2k-2r+1}.(-1)^{r+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{k+2} \frac{2k+3}{2k-2r+5}.\binom{2k-r+3}{r-1}.z^{2k-2r+5}.(-1)^{r+1}$$

elde edilir.

Örnek 5.1.28. Bu örnekte Teorem 5.1.27.'nin doğruluğu bazı n ve m değerleri için gösterilecektir.

$n = 3$ ve $m = 4$ için $L_4 = 7, L_{28} = 710647$

$$\sum_{r=1}^{4} \frac{7}{9-2r}.\binom{7-r}{r-1}.L_4^{9-2r}.(-1)^{r+1}$$

$$= 7^7 - 7.7^5 + 14.7^3 - 7.7$$

$$= 823543 - 117649 + 4802 - 49$$

$$= 710647$$

$= L_{28}$ olur.

Teorem 5.1.29. L_m tek olmak üzere $L_m^p \backslash (n/m) \Rightarrow L_m^{p+1} \backslash L_n$ dir.

İspat. m tek olsun.

Teorem 5.1.25.'teki

$$L_{(2k+1)m} = \sum_{t=1}^{k+1} \frac{2k+1}{2k-2t+3} . \binom{2k-t+1}{t-1} . L_m^{2k-2t+3}$$

eşitliğinde tek sabit sayı k'dır. Kabul edelim ki $2k+1 = n/m = L_m^p . b$ olsun.
$2k - 2t + 3 = L_m^r . c$ olsun. L_m 1'den farklı bir Lucas sayısı iken r daima ($2k - 2t + 3 = 1$ hariç) $2k - 2t + 2$ 'den küçüktür. Her bölümde $L_m^{2k-2t+3}$ çarpanı olduğuna göre, her bölümde en az $p + 1$ adet L_m çarpanı vardır. O halde polinom L_m^{p+1} parantezine alınabilir. O halde m tek iken $L_{(2k+1)m}$, L_m nin $k = L_m^p . b$ olmak üzere en fazla $p + 1$ kuvvetine bölünebilir.
Benzer şekilde m çift iken de aynı sonucu vermektedir. İspat tamamlanır.

Örnek 5.1.30. Bu örnekte Teorem 5.1.29.'un doğruluğu bazı n ve m değerleri için gösterilecektir.

$m = 5$ için $L_5 = 11$ 'tür ve tektir.

$n = 55$ için $L_{55} = 11^2 . (2579495909)$

$L_5 \backslash \left(55/5 \right)$ olur. Burada $p = 1$ ve $L_5^2 \backslash L_{55}$ olur.

$m = 2$ için $L_2 = 3$ 'tür ve tektir.

$n = 54$ için $L_{54} = 3^4 . (2381483378)$

$L_2^3 \backslash \left(54/2 \right)$ olur. Burada $p = 3$ ve $L_2^4 \backslash L_{54}$ olur.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Lucas sayılarıyla ilgili bölünebilme özellikleri araştırılmıştır. Bu tez çalışmasında Fibonacci ve Lucas sayı dizileri arasındaki ilişkilerden yola çıkılarak Lucas sayılarında yeni bölünebilme özellikleri bulunmuştur. Yapılan araştırmalar neticesinde $m.$Lucas sayısının $n.$ Lucas sayısının kaçıncı kuvvetine bölünebileceğine ($L_n{}^p | L_m$ şartına) ulaşılmıştır.

Benzer özelliklerin Pell sayıları, Pell- Lucas sayıları, Jacobsthal sayıları ve Jacobsthal-Lucas sayıları için varlığı araştırılabilir.

7. KAYNAKLAR

Andre–Jeannin R., 1991. Divisibility of Generalized Fibonacci and Lucas Numbers by Their Subscripts. Fibonacci Quarterly, Volume.29, No.4, 364-366.

Apostol, T.M., 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics, Department of Mathematics California Institute of Technology Pasadena, California, USA.

Berzsenyi G., 1977. Problem H-263. Fibonacci Quarterly, Volume.15, No.4, 373.

Brown J. L. Jr. 1965. Problem H-71. Fibonacci Quarterly, Volume.3, No.4, 299.

Brökling L. G., 1963. Problem B-20. Fibonacci Quarterly, Volume.1, No.3, 75.

Carlitz L., 1964. A Note On Fibonacci Numbers. Fibonacci Quarterly, Volume.2, No.1, 15-28.

Carlitz L. ve Hunter J. A. H., 1969. Powers of Fibonacci and Lucas Numbers. Fibonacci Quarterly, Volume.7, No.5, 467-473.

Carlitz L., 1971. Problem B-185. Fibonacci Quarterly, Volume.9, No.1, 109.

Carlitz L., 1972. A Conjecture Concerning Lucas Numbers. Fibonacci Quarterly, Volume.10, No.5, 526.

Carlitz L., 1977. Problem H-262. Fibonacci Quarterly, Volume.15, No.4, 372-373.

Hoggatt V. E. Jr., 1970. An Application of The Lucas Triangle. Fibonacci Quarterly, Volume.8, No.4, 360.

Hoggatt V. E. Jr., 1971a. Some Special Fibonacci and Lucas Generating Functions. Fibonacci Quarterly, Volume.9, No.2, 121-133.

Hoggatt V. E. Jr., 1971b. Problem B-193. Fibonacci Quarterly, Volume.9, No.2, 221-223.

Hoggatt V. E. Jr., 1972a. Problem B-208. The Fibonacci Quarterly, Volume.10, No.2, 220.

Hoggatt V. E. Jr, 1972b. Problem B-249. The Fibonacci Quarterly, Volume.10, No.6, 664.

Hoggatt V. E. Jr., ve Bergum G. E., 1974. Divisibility and Congruence Relations. Fibonacci Quarterly, Volume.12, No.2, 189-195.

Hoggatt V. E. Jr., ve Bicknell M., 1964. Some new Fibonacci Identities. The Fibonacci Quarterly, Volume.2, No.1, 29-32.

Hoggatt V. E. Jr., Phillips J. W. ve Leonard H. T. Jr., 1971. Twenty-Four Master İdentities. Fibonacci Quarterly, Volume.9, No.1, 1.

Jones A. J., 1976. Game Theory : Mathematical Models of Conflict. Elsevier Science & Technology. 300 p, England.

Koshy T., 1998. New Fibonacci and Lucas Identities. The Mathematical Gazette, 82.55 (November), 481-484. Doi:10.2307/3619903

Koshy T., 1999. The Convergence of a Lucas Series. The Mathematical Gazette, 83.29 (July), 272-274. Doi:10.2307/3619058

Koshy T., 2001. Fibonacci and Lucas Numbers With Aplications. John Wiley & Sons Inc. 648 p, New York, USA.

Koşar E., 2013. F_n'in p. kuvvetinin F_n'yi Bölme Şartının Araştırılması. 44. Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projeleri Yarışması, Proje numarası: Matematik 21.

Porto A. D. ve Filipponi P., 1988. A Probabilistic Primality Test On The Properties Of Certain Generalized Lucas Numbers. Eorkshop on the Theory and Application of Cryptographic Techniques Davos, Switzerland, Mayıs 25-27, 211-223

Singh S., 1980. Thoro's Conjecture and Allied Divisibility Property of Lucas Numbers. Fibonacci Quarterly, Volume.18, No.2, 135-137.
Şahin A., 2010. Genelleştirilmiş k-basamak Perrin Sayılarının İncelenmesi ve Diğer Sayı Dizileri İle İlişkileri.(Yüksek Lisans Tezi), Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi. Matematik Bölümü, Tokat.
Şenay H., 2007. Sayılar Teorisi Dersleri. Gazi Kitapevi, 269 s, Ankara
Toy M., 2009. Fibonacci ve Lucas Sayılarının Bölünebilme Özellikleri. (Yüksek Lisans Tezi), Selçuk Üniversitesi. Matematik Bölümü, Konya.
Umansky H. L., 1970. Letters to the Editor. Fibonacci Quarterly, Volume.8, No.1, 89.
Umansky H. L. ve Tallman M., 1968. Problem H-101. Fibonacci Quarterly, Volume.6, No.4, 259-260.
Usiskin Z., 1974. Problem B-266. Fibonacci Quarterly, Volume.12, No.3, 315-316.
Vajda S., 1989. Fibonacci ve Lucas Numbers and The Golden Section. Ellis Horwood Limited,189 p, Chichester, England.
Yosma Z., 2008. Fibonacci ve Lucas Sayıları. (Yüksek Lisans Tezi), Sakarya Üniversitesi. Matematik Bölümü, Sakarya.
Zeitlin D., 1972. Problem H-191. Fibonacci Quarterly, Volume.10, No.6, 631-633.

8. EKLER

Tablo 8.1. İlk yüz Lucas sayısı

L_0	2	L_{25}	167761	L_{50}	28143753123	L_{75}	4721424167835364
L_1	1	L_{26}	271443	L_{51}	45537549124	L_{76}	7639424778862807
L_2	3	L_{27}	439204	L_{52}	73681302247	L_{77}	12360848946698171
L_3	4	L_{28}	710647	L_{53}	119218851371	L_{78}	20000273725560978
L_4	7	L_{29}	1149851	L_{54}	192900153618	L_{79}	32361122672259149
L_5	11	L_{30}	1860498	L_{55}	312119004989	L_{80}	52361396397820127
L_6	18	L_{31}	3010349	L_{56}	505019158607	L_{81}	84722519070079276
L_7	29	L_{32}	4870847	L_{57}	817138163596	L_{82}	137083915467899403
L_8	47	L_{33}	7881196	L_{58}	1322157322203	L_{83}	221806434537978679
L_9	76	L_{34}	12752043	L_{59}	2139295485799	L_{84}	358890350005878082
L_{10}	123	L_{35}	20633239	L_{60}	3461452808002	L_{85}	580696784543856761
L_{11}	199	L_{36}	33385282	L_{61}	5600748293801	L_{86}	939587134549734843
L_{12}	322	L_{37}	54018521	L_{62}	9062201101803	L_{87}	1520283919093591604
L_{13}	521	L_{38}	87403803	L_{63}	14662949395604	L_{88}	2459871053643326447
L_{14}	843	L_{39}	141422324	L_{64}	23725150497407	L_{89}	3980154972736918051
L_{15}	1364	L_{40}	228826127	L_{65}	38388099893011	L_{90}	6440026026380244498
L_{16}	2207	L_{41}	370248451	L_{66}	62113250390418	L_{91}	10420180999117162549
L_{17}	3571	L_{42}	599074578	L_{67}	100501350283429	L_{92}	16860207025497407047
L_{18}	5778	L_{43}	969323029	L_{68}	162614600673847	L_{93}	27280388024614569596
L_{19}	9349	L_{44}	1568397607	L_{69}	263115950957276	L_{94}	44140595050111976643
L_{20}	15127	L_{45}	2537720636	L_{70}	425730551631123	L_{95}	71420983074726546239
L_{21}	24476	L_{46}	4106118243	L_{71}	688846502588399	L_{96}	115561578124838522882
L_{22}	39603	L_{47}	6643838879	L_{72}	1114577054219522	L_{97}	186982561199565069121
L_{23}	64079	L_{48}	10749957122	L_{73}	1803423556807921	L_{98}	302544139324403592003
L_{24}	103682	L_{49}	17393796001	L_{74}	2918000611027443	L_{99}	489526700523968661124

9. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Sadettin KARAGÖL
Doğum Tarihi : 15.09.1986
Doğum Yeri : Erbaa/TOKAT
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
Telefon : 5452956060
E-posta : karagol.sadettin@gmail.com

Eğitim :

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2020
Lisans	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2009
Ortaöğretim	Tokat Anadolu Öğretmen Lisesi	2004