TC
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK PARAMETRELİ SEZGİSEL BULANIK ESNEK KÜMELER ve bpsbe-KARAR VERME YÖNTEMİ

EMRE SULUKAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
PROF. DR. NAİM ÇAĞMAN
2020

TC
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK PARAMETRELİ SEZGİSEL BULANIK ESNEK KÜMELER ve bpsbe-KARAR VERME YÖNTEMİ

EMRE SULUKAN

TOKAT
2020

Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN danışmanlıklarında, Emre SULUKAN tarafından hazırlanan bu çalışma 27/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Güzide ŞENEL İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım

T.C. TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİ. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ
Enstitü Müdürü
24/02/2020

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta yapıldığını, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını ve tezin herhangi bir kısmının herhangi bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

EMRE SULUKAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BULANIK PARAMETRELİ
SEZGİSEL BULANIK ESNEK KÜMELER
ve bpsbe-KARAR VERME YÖNTEMİ**

EMRE SULUKAN

**TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

DANIŞMAN: PROF. DR. NAİM ÇAĞMAN

Esnek kümeler, belirsizlikleri modellemek için belirsiz veri içeren bir çok bilim dalına uygulanmaktadır.Biz de burada esnek kümelerin uygulama alanlarını genişletmek için bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeleri kullanarak yeni bir küme teorisi tanımlayacağız. Adına bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümleri (bpsbe-kümeler) diyeceğimiz bu kümelerin küme işlelerini tanımlayarak temel özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca bpsbe-kümelerini üzerinde bir bpsbe-karar verme yöntemi tanımlayacağız ve bir probleme uygulayacağız. Daha sonra bpsbe-kümelerin geleceği hakkında bazı önerilerde bulunacağız.

2020, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Esnek kümeler, Bulanık kümeler, Sezgisel bulanık kümeler, bpsbe-kümeler, bpsbe-karar verme yöntemi.

ABSTRACT

M. SC. THESIS

FUZZY PARAMETERIZED INTUITIONISTIC FUZZY SOFT SETS and fpifs-DECISION MAKING METHOD

EMRE SULUKAN

TOKAT GAZIOSMANPAŞA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL of NATURAL and APPLIED SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: PROF. DR. NAIM ÇAĞMAN

Soft set theory has been successfully applied to many different fields to cope with uncertain- ties. In this study, we define a new set theory that is called fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets (fpifs-sets). We also define their operations and their basic properties. We then define an fpifs-decision making method on the fpifs-sets and apply it to a problem. Finally, we give suggestions for further research.

2020, 70 pages

Keywords: Soft sets, Fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy sets parameter, fpifs-sets, fpifs-decision making method.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı yapmamda bana destek olan, bilgisini ve tecrübesini paylaşan tez danışmanım, kıymetli hocam Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN'a ve yüksek lisans eğitimim boyunca kahrımı çeken sevgili eşime teşekkür ederim. Ayrıca bu süreçte maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen başta annem ve babam olmak üzere her zaman yanımda olan aile bireylerime sonsuz teşekkür ederim.

EMRE SULUKAN

Ocak 2020

SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
U	Evrensel kümedir.
X	Parametreler kümesidir.
$P(U)$	U'nun kuvvet kümesidir.
$S, S_1, S_2, S_3, ...$	Esnek kümeleridir.
$s, s_1, s_2, s_3, ...$	Sırasıyla $S, S_1, S_2, S_3, ...$ esnek kümelerinin yaklaşım fonksiyonlarıdır.
$\mathbb{S}$	Bütün esnek kümelerin kümesidir.
$F, F_1, F_2, F_3, ...$	Bulanık kümeleridir.
$f, f_1, f_2, f_3, ...$	Sırasıyla $F, F_1, F_2, F_3, ...$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonlarıdır.
$\mathbb{F}$	Bütün bulanık kümelerin kümesidir.
$I, I_1, I_2, I_3, ...$	Sezgisel bulanık kümeleridir.
$\mu, \mu_1, \mu_2, ...$	Sırasıyla $I, I_1, I_2, I_3, ...$ sezgisel bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonlarıdır.
$\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots$	Sırasıyla $I, I_1, I_2, I_3, ...$ sezgisel bulanık kümelerinin üye olmama fonksiyonlarıdır.
$\mathbb{I}$	Bütün sezgisel bulanık kümelerin kümesidir.
$P, P_1, P_2, P_3, ...$	bpsbe-kümeleridir.
$p, p_1, p_2, p_3, ...$	Sırasıyla $P, P_1, P_2, P_3, ...$ bpsbe-kümeler yaklaşım fonksiyonları.
$\mathbb{P}$	Bütün bpsbe-kümelerin kümesidir.

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
bpsbe-kümeler	Bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler.

1. GİRİŞ

Kümeler teorisi matematiğin temel taşlarıdır. Kümelerin girmediği hemen hemen hiç bir matematik konusu yoktur. Her bilim dalı karşısına çıkan konuları matematiksel olarak ifade etmek ister. Bir konunun matematiksel olarak ifade ediliyor olması anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır. Matematik de kendi konularını ifade etmede genellikle kümeler teorisini kullanmaktadır.

İnsanlar problemleri çözmek için önce matematiksel olarak modeller ve sonra çözmeye çalışırlar. Kesinlik gerektiren problemleri modellemek belirsizlik içeren verilere göre daha kolaydır. Başka bir deyişle, belirsizlik içeren problemleri klasik matematikle yani Aristo mantığını kullanarak modellemek oldukça zordur. Belirsizlik içeren problemleri anlamak ve çözmek için farklı bilim dallarında pek çok bilim adamı tarafından çalışmalar yapılmış ve yeni teoriler ortaya atılmıştır. Bunlardan bazıları; olasılık teorisi, bulanık kümeler (Zadeh, 1965), yaklaşımlı kümeler (Pawlak, 1982), sezgisel bulanık kümeler (Atanassov, 1986) ve esnek kümeler (Molodtsov, 1999) teorisidir.

Bu tez çalışmasında esnek kümeler, bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler teorisine dayalı yeni bir küme teorisi tanımlayacağız. Bu nedenle tanımlayacağımız konuya başlamadan önce kullanacağımız kümeler teorilerini tanıtalım.

19. asrın başlarında belirsizlikler üzerine bir çok bilim insanı kafa yormuştur. Einstein bu durum için "Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değillerdir!" demiştir. Heisenberg, 1920'li yıllarda belirsizlik kavramını ilk ortaya atarak bilimi çok değerliliğe zorlamıştır. Lukasiewicz, 1930'lu yıllarda üç-değerli mantık sistemini ilk defa ortaya koyarken ve aynı dönemlerde Black de sürekli değerlere sahip mantığı tanımlamıştır. Çok az batılı bilim insanı çok değerliliği benimsemesine rağmen, Lukasiewicz, Black ve Gödel ilk çok değerli mantık ve kümeler üzerine teorik olarak çalışmalarını sürdürmüşlerdir ancak çalışmalarına bir uygulama alanı bulamamışlardır. Belirsizliğin, matematiksel olarak modellenmesinde

önemli bir dönüm noktası, 1965 yılında Zadeh'in bulanık mantık ve bulanık küme teorisini ortaya koymasıyla başlamıştır.

Zadeh bu teorisiyle, matematiğin, insan diliyle zekasının ilişkilendirilebileceğini ve bulanık mantığın gerçek hayatı daha iyi modellediğini göstermiştir. Bulanık mantık teorisini kullanarak Mamdani'nin 1972 yılında bir buhar makinesi için bir kontrol sistemi tasarlaması bilim insanlarının ilgisini bu konuya çekmesine neden olmuştur. 1980 yılında bulanık mantığın ticari alanda ilk uygulaması Danimarka'da bir çimento fabrikasında yapılmıştır. Bu olaydan sonra Japonya başta olmak üzere dünyadaki birçok ülke araştırma ve uygulamalarıyla bu konuda büyük ilerlemeler kat etmişlerdir.

Uygulamada gösterdiği büyük ilerlemeler sayesinde son zamanlarda üzerinde en çok çalışılan bulanık kümeler, doğal dildeki belirsiz kavramları temsil etmemize ve onları matematiksel olarak modellememizi mümkün kılmaktadır. Uygulama alanlarının genişliği ve oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından bulanık kümeler bilimsel çalışmalarda önemli bir yere sahiptir. Bulanık kümeler, bulanık mantık kavramlarını uygulama algoritmalarına dönüştüren birer araçtır. Bulanık mantık, makinelere belirsiz kavramları anlama ve buna yanıt verme olanağı sağladığından dolayı mantıkçıların en önemli hedeflerinden biri bulanık mantığı kullanarak makinelerin insan gibi düşünmesini sağlatmaktır.

1965 yılında Zadeh tarafından tanımlanan bulanık küme teorisi belirsizliği modellemek için günümüzde kullanılan en yaygın teorilerden biri olsa da üyelik fonksiyonunu belirlemedeki zorluklardan dolayı araştırmacıları üyelik fonksiyonuna ihtiyaç duymadan belirsizliği modelleyebilecek küme teorilerini düşünmeye sevk etmiştir. Bu nedenle, 1999 yılında Molodtsov tarafından üyelik fonksiyonuna ihtiyaç duymadan modelleme yapmayı sağlayacak olan esnek küme teorisi ortaya atılmıştır. Esnek kümelerde reel değerli üyelik fonksiyonları yerine küme değerli seçim fonksiyonları kullanılarak belirsizliği ortadan kaldırmak amaçlan- maktadır. Molodtsov (1999, 2004) teorisi, oyun teorisi, Riemann integrali, ölçüm teorisi gibi teorik ve uygulamalı bir çok alana başarıyla uygulanabileceğini göstermiştir.

Esnek kümeler teorisi Molodtsov (1999) tarafından tanımlandıktan sonra üzerinde önemli çalışmalar yapılmıştır. Maji ve ark. (2003) tarafından esnek küme işlemleri tanımlanmış ve temel özellikleri incelenmiştir. Çağman ve Enginoğlu (2010), kendi amaçları doğrultusunda esnek küme işlemlerini yeniden tanımlamışlardır. Maji ve ark. (2001, 2002) tarafından bulanık esnek küme kavramı ortaya atılmış ve bunlarla ilgili küme işlemleri tanımlanmıştır. Chen ve ark. (2003) tarafından esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine bir çalışma yapılmıştır. Maji ve ark. (2004) bulanık esnek kümeler üzerinde yaptıkları çalışmadan sonra sezgisel bulanık esnek küme teorisini ortaya atmışlardır. Mushrif ve ark. (2006), esnek küme temelli sınıflandırmalar başlıklı bir makale yayınlamıştır. Yang ve ark. (2009) tarafından aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanımlanmıştır. Aygünoğlu ve Aygün (2009) tarafından bulanık esnek grup kavramı tanımlamıştır. Molodtsov (2010)'da tıbbi, biyoloji ve sosyal ekonomide kontrol alanlarıyla ilgili esnek portföy kontrol başlıklı bir çalışma yapmıştır. Babitha ve Sunil (2010) tarafından ilk kez esnek bağıntılar ve fonksiyonlar tanımlanmıştır. Gong ve ark. (2010) tarafından birebir örten esnek kümeler ve islemler tanımlanmıştır. Yin ve ark. (2010), sezgisel bulanık esnek kümeler cebiri üzerine bir çalışma yapmışlardır. Majumdar ve Samanta (2010), bulanık esnek kümeleri genelleştirmişlerdir. Jiang ve ark. (2010), aralık değerli sezgisel bulanık esnek kümeler tanımlayıp özelliklerini incelemişlerdir. Gündüz ve Bayramov (2011), sezgisel bulanık esnek modülleri tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemişlerdir. Feng ve ark. (2011), esnek yaklaşımlı kümeler üzerine bir çalışma yayınlamışlardır.

Esnek cebirsel yapılar ilgili ilk çalışma Aktaş ve Çağman (2007) tarafından yapılmıştır. Esnek cebirsel yapılar üzerine yapılan çalışmaların bazıları; Feng ve ark. (2008) esnek yarı halkalar, Sun ve ark. (2008) esnek kümeler ve esnek modüller, Park ve ark. (2008) esnek WS-cebri, Acar ve ark. (2010) esnek halkalar, Atagün ve Sezgin (2011) halka, cisim ve modüllerin esnek altyapıları, Sezgin ve Atagün (2011a) esnek gruplar ve normalistic esnek gruplar, Sezgin ve ark. (2011b) esnek kesişimsel yarı halkalar ve Yang (2011) bulanık esnek yarı gruplar ve bulanık esnek idealler seklinde sıralanabilir.

Günümüzde, sosyal bilimlerden fen bilimlerine bir çok alanda karşılaşılan belirsizliklerin üstesinden gelmek için kullanılan önemli küme teorilerinden biri de 1986 yılında Atanassov (1986) tarafından tanımlanan sezgisel bulanık kümelerdir. Bir sezgisel bulanık kümenin bulanık kümeden farkı, elemanlarının sezgisel bulanık kümeye ait olma derecesini ve ait olmama derecesini olmak üzere iki farklı üyelik fonksiyon ile tanımlanır. Bu nedenle sezgisel bulanık kümeler, bulanık kümelerin bir genellemesi olarak tanımlamıştır.

De ve ark. (2000), sezgisel bulanık kümelerin yoğunlaşması,genişlemesi ve normalleştirilmesi kavramlarını ilk tanımlayanlardandır. Szmidt ve Kacprzyk (2000), sezgisel bulanık kümelerin geometrik gösteriminin sezgisel bulanık kümeler arasındaki uzaklıkları çalışmıştır ve bazı karşılaştırmalar yapmıştır. Szmidt ve Kacprzyk (2001), Szmidt ve Kacprzyk (2000) tarafından önerilen uzaklıkları kullanarak sezgisel bulanık kümeler için olasılıklı olmayan tipte bir entropi ölçüsü geliştirmişlerdir. Grzegorzewski (2004), Hausdorff metriğine dayalı sezgisel bulanık kümeler ve aralık değerli bulanık kümeler arasındaki uzaklıkları ölçmüştür. Li (2005), birden fazla kriterin dikkate alındığı sezgisel bulanık kümelere dayalı çok kriterli karar verme yöntemini çalışmıştır. Kriterlere ilişkin optimal ağırlıkları elde etmek için bir doğrusal programlama modelini kullanmıştır. Szmidt ve Kacprzyk (2006), sezgisel bulanık kümelerindeki benzerlik ölçülerini kullanarak çok kriterli karar verme problemine yeni bir çözüm yolu geliştirmiştir.

Bugüne kadar esnek kümeler, bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler teorilerinin harmanlamasına dayalı birçok yeni küme teorileri çalışılmıştır.

1. Bulanık esnek kümeler (Fuzzy soft sets) Maji ve ark., (2001) tarafından tanımlanmıştır.

2. Sezgisel bulanık esnek kümeler (Intuitionistic fuzzy soft sets) Maji ve ark., (2001b) tarafından tanımlanmıştır.

3. Bulanık parametreli esnek kümeler (Fuzzy parameterized soft sets) Çağman ve ark., (2011) tarafından tanımlanmıştır.

4. Bulanık parametreli bulanık esnek kümeler (Fuzzy parameterized fuzzy soft sets) Çağman ve ark., (2010) tarafından tanımlanmıştır.

5. Bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler (Fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets) Sulukan ve ark., (2020) tarafından bu tez çalışması için yapılmıştır.

6. Sezgisel bulanık parametreli esnek kümeler (Intuitionistic fuzzy parameterized soft sets) Deli ve Çağman (2015) tarafından tanımlanmıştır.

7. Sezgisel bulanık parametreli bulanık esnek kümeler (Intuitionistic fuzzy parameterized fuzzy soft sets) El-Yagubi ve Salleh (2013) tarafından tanımlanmıştır.

8. Sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler (Intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets) Karaaslan (2016) tarafından tanımlanmıştır.

Bu çalışmada 5. sıradaki bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler (bpsbe-kümeler) kavramını tanımlayacağız. bpsbe-kümeler, esnek kümeler, bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler teorisinin bir harmanlamasıdır. Tanımlamadan sonra bpsbe-kümeler arasındaki küme işlemlerini tanımlayacağız ve temel özelliklerini inceleyeceğiz. Daha sonra bpsbe-kümeleri bir karar verme problemine uygulayacağız.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde sırasıyla esnek kümeler, bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümelerin temel tanım ve teoremleri verilecektir.

2.1 Esnek Kümeler

Esnek kümeler ilk kez Molodstov (1999) tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde, esnek kümeler tanımladıktan sonra temel özellikleri ve esnek küme işlemleri verilecek.

Bu bölüm yazılırken esnek kümeler için (Çağman ve Enginoğlu, 2010) ve (Çağman, 2014) makalelerinden yararlanılmıştır.

Tanım 2.1. (Molodstov, 1999) U boştan farklı keyfi bir küme, $P(U)$, U'nun kuvvet kümesi ve X parametreler kümesi olsun. U üzerinde bir S esnek kümesi $s : X \to P(U)$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$S = \{(x, s(x)) : x \in X\}$$

Burada, s fonksiyonuna S esnek kümenin **yaklaşım fonksiyonu** denir. Eğer $s(x) = \emptyset$ ise, o zaman S esnek kümesinde $(x, \emptyset)$ gösterilmez.

Genellikle esnek kümeler S, S_1, S_2, ... şeklinde ve bunların yaklaşım fonksiyonları sırasıyla s, s_1, s_2, ... şeklinde gösterilir. Ayrıca tüm esnek kümelerin kümesi $\mathbb{S}$ ile gösterilir.

Örnek 2.2. Tanımı daha iyi anlayabilmek için bir örnek verelim. Bir binek araç alımı için

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

kümesindekiler araçlar olsun. Bu alımda

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

kümesi de alınacak araçları niteleyen parametrelerden ibaret olsun. Kabul edelim ki

x_1 : düşük fiyat

x_2 : düşük yakıt tüketimi

x_3 : az km yapmış

x_4 : konfor

x_5 : bilinirlik

satın alanın dikkate aldığı parametrelerin nitelediği kümeler yani yaklaşım değer fonksiyonun değerleri aşağıdaki gibi

$s(x_1) = \{u_1, u_3, u_5\}$,

$s(x_2) = \{u_3, u_4\}$,

$s(x_3) = \{\,\}$,

$s(x_4) = \{u_2, u_4\}$,

$s(x_5) = U$,

olsun. Bu durumda S esnek kümesi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$S = \{(x_1, \{u_1, u_3, u_5\}), (x_2, \{u_3, u_4\}), (x_4, \{u_2, u_4\}), (x_5, U)\}$$

Tanım 2.3. U üzerinde tanımlı bir S esnek kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $s(x) = U$ oluyorsa, S esnek kümesine **evrensel esnek küme** denir ve S_U ile gösterilir.

Tanım 2.4. U üzerinde tanımlı bir S esnek kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $s(x) = \emptyset$ oluyorsa, S esnek kümesine **boş esnek küme** denir ve $S_\emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. U üzerinde tanımlı S_1 ve S_2 esnek kümeleri verilsin. Eğer her $x \in X$ için $s_1(x) = s_2(x)$ oluyorsa, S_1 ve S_2 esnek kümelerine **eşit esnek kümeler** denir ve $S_1 = S_2$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6. U üzerinde tanımlı S_1 ve S_2 esnek kümeleri verilsin. Eğer her $x \in X$ için $s_1(x) \subseteq s_2(x)$ oluyorsa, S_1 esnek kümesine S_2 esnek kümesinin **alt esnek kümesi** denir ve $S_1 \subseteq S_2$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.7. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel küme, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ise parametreler kümesi olsun.

1) Eğer,

$$s(x_1) = U, s(x_2) = U, s(x_3) = U, s(x_4) = U$$

ise $S_U = \{(x_1, U), (x_2, U), (x_3, U), (x_4, U)\}$ evrensel esnek kümesi elde edilir.

2) Eğer,

$$s(x_1) = \emptyset, s(x_2) = \emptyset, s(x_3) = \emptyset, s(x_4) = \emptyset,$$

ise $S_\emptyset = \{\ \}$ boş esnek kümesi elde edilir.

3) Eğer,

$$s_1(x_1) = \{u_1\}, s_1(x_2) = \{u_1, u_3\}, s_1(x_3) = \{u_2, u_5\}, s_1(x_4) = \{u_2, u_4, u_5\}$$

ve

$$s_2(x_1) = \{u_1, u_5\}, s_2(x_2) = \{u_1, u_3\}, s_2(x_3) = \{u_2, u_5\}, s_2(x_4) = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$$

ise burada

$$s_1(x_1) \subseteq s_2(x_1),\ s_1(x_2) \subseteq s_2(x_2),\ s_1(x_3) \subseteq s_2(x_3),\ s_1(x_4) \subseteq s_2(x_4)$$

olduğundan S_1 esnek kümesi S_2 esnek kümesinin bir esnek alt kümesidir.

4) Eğer,

$$s_1(x_1) = \{u_1\}, s_1(x_2) = \{u_1, u_3\}, s_1(x_3) = \{u_2, u_5\}, s_1(x_4) = \{u_2, u_4, u_5\}$$

ve

$$s_2(x_1) = \{u_1\}, s_2(x_2) = \{u_1, u_3\}, s_2(x_3) = \{u_2, u_5\}, s_2(x_4) = \{u_2, u_4, u_5\}$$

ise burada

$$s_1(x_1) = s_2(x_1), s_1(x_2) = s_2(x_2), s_1(x_3) = s_2(x_3), s_1(x_4) = s_2(x_4)$$

olduğundan S_1 esnek kümesi S_2 esnek kümesine eşit bir esnek kümedir.

Tanım 2.8. U üzerinde tanımlı S_1 ve S_2 esnek kümeleri verilsin. S_1 ve S_2 esnek kümelerinin birleşimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$S_1 \cup S_2 = \{(x, s_1(x) \cup s_2(x)) : x \in X\}$$

Teorem 2.9. *S, U üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun.*

i) $S \cup S = S$

ii) $S \cup S_\emptyset = S$

iii) $S \cup S_U = S_U$

İspat: U üzerinde bir $S = \{(x, s(x)) : x \in X\}$ esnek kümesi verilsin.

i)

$$\begin{aligned} S \cup S &= \{(x, (s(x) \cup s(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, s(x)) : x \in X\} \\ &= S \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} S \cup S_\emptyset &= \{(x, (s(x) \cup 0) : x \in X\} \\ &= \{(x, s(x)) : x \in X\} \\ &= S \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} S \cup S_U &= \{(x, (s(x) \cup 1) : x \in X\} \\ &= \{(x, 1) : x \in X\} \\ &= S_U \end{aligned}$$

□

Teorem 2.10. *S_1, S_2 ve S_3, U üzerinde tanımlı birer esnek küme olsun.*

i) $S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$

ii) $S_1 \cup (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cup S_2) \cup S_3$

İspat: U üzerinde $S_1 = \{(x, s_1(x)) : x \in X\}$, $S_2 = \{(x, s_2(x)) : x \in X\}$ ve $S_3 = \{(x, s_3(x)) : x \in X\}$ esnek kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_2 &= \{(x, (s_1(x) \cup s_2(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, (s_2(x) \cup s_1(x)) : x \in X\} \\ &= S_2 \cup S_1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} S_1 \cup (S_2 \cup S_3) &= \{(x, (s_1(x) \cup (s_2(x) \cup s_3(x))) : x \in X\} \\ &= \{(x, ((s_1(x) \cup s_2(x)) \cup s_3(x))) : x \in X\} \\ &= (S_1 \cup S_2) \cup S_3 \end{aligned}$$

□

Tanım 2.11. U üzerinde tanımlı S_1 ve S_2 esnek kümeleri verilsin. S_1 ve S_2 esnek kümelerinin kesişimleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$S_1 \cap S_2 = \{(x, s_1(x) \cap s_2(x)) : x \in X\}$$

Teorem 2.12. *S, U üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun.*

i) $S \cap S = S$

ii) $S \cap S_{\emptyset} = S_{\emptyset}$

iii) $S \cap S_U = S$

İspat: U üzerinde bir $S = \{(x, s(x)) : x \in X\}$ esnek kümesi verilsin.

i)

$$\begin{aligned} S \cap S &= \{(x, (s(x) \cap s(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, s(x)) : x \in X\} \\ &= S \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} S \cap S_{\emptyset} &= \{(x, (s(x) \cup 0) : x \in X\} \\ &= \{(x, 0) : x \in X\} \\ &= S_{\emptyset} \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} S \cup S_U &= \{(x, (s(x) \cap 1) : x \in X\} \\ &= \{(x, s(x)) : x \in X\} \\ &= S \end{aligned}$$

□

Teorem 2.13. *S_1, S_2 ve S_3, U üzerinde tanımlı birer esnek küme olsun.*

i) $S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$

ii) $S_1 \cap (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cap S_2) \cap S_3$

İspat: U üzerinde $S_1 = \{(x, s_1(x)) : x \in X\}$, $S_2 = \{(x, s_2(x)) : x \in X\}$ ve $S_3 = \{(x, s_3(x)) : x \in X\}$ esnek kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} S_1 \cap S_2 &= \{(x, (s_1(x) \cap s_2(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, (s_2(x) \cap s_1(x)) : x \in X\} \\ &= S_2 \cap S_1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} S_1 \cap (S_2 \cap S_3) &= \{(x, (s_1(x) \cap (s_2(x) \cap s_3(x))) : x \in X\} \\ &= \{(x, ((s_1(x) \cap s_2(x)) \cap s_3(x))) : x \in X\} \\ &= (S_1 \cap S_2) \cap S_3 \end{aligned}$$

$\square$

Teorem 2.14. *S_1, S_2 ve S_3, U üzerinde tanımlı üç esnek küme olsun.*

i) $S_1 \cup (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3)$

ii) $S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)$

İspat: U üzerinde $S_1 = \{(x, s_1(x)) : x \in X\}$, $S_2 = \{(x, s_2(x)) : x \in X\}$ ve $S_3 = \{(x, s_3(x)) : x \in X\}$ esnek kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} S_1 \cap (S_2 \cup S_3) &= \{(x, s_1(x) : x \in X\} \cap \{x, (s_2(x) \cup s_3(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, (s_1(x) \cap s_2(x)) : x \in X\} \cup \{(x, (s_1(x) \cap s_3(x)) : x \in X\} \\ &= (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} S_1 \cup (S_2 \cap S_3) &= \{(x, s_1(x) : x \in X\} \cup \{x, (s_2(x) \cap s_3(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, (s_1(x) \cup s_2(x)) : x \in X\} \cap \{(x, (s_1(x) \cup s_3(x)) : x \in X\} \\ &= (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3) \end{aligned}$$

$\square$

Tanım 2.15. U üzerinde tanımlı bir S esnek kümesi verilsin. S esnek kümesinin tümleyeni aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$S^c = \{(x, U \setminus s(x)) : x \in X\}$$

Teorem 2.16. *S, U üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun.*

i) $S \cup S^c = S_U$

ii) $S \cap S^c = S_\emptyset$

İspat: U üzerinde bir $S = \{(x, s_1(x)) : x \in X\}$ esnek kümesi verilsin.

i)

$$\begin{aligned} S \cup S^c &= \{(x, (s(x) \cup U \setminus s(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, U) : x \in X\} \\ &= S_U \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} S \cap S^c &= \{(x, (s(x) \cap U \setminus s(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, 0) : x \in X\} \\ &= S_\emptyset \end{aligned}$$

$\square$

Teorem 2.17. *S_1, S_2 ve S_3, U üzerinde tanımlı birer esnek küme olsun.*

i) $(S_1 \cup S_2)^c = S_1^c \cap S_2^c$

ii) $(S_1 \cap S_2)^c = S_1^c \cup S_2^c$

İspat: U üzerinde $S_1 = \{(x, s_1(x)) : x \in X\}$ ve $S_2 = \{(x, s_2(x)) : x \in X\}$ esnek kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned}(S_1 \cup S_2)^c &= \{(x, (s_1(x) \cup s_2(x))^c : x \in X\} \\ &= \{(x, (s_1^c(x) \cap s_2^c(x)) : x \in X\} \\ &= S_1^c \cap S_2^c\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(S_1 \cap S_2)^c &= \{(x, (s_1(x) \cap s_2(x))^c : x \in X\} \\ &= \{(x, (s_1^c(x) \cup s_2^c(x)) : x \in X\} \\ &= S_1^c \cup S_2^c\end{aligned}$$

□

Örnek 2.18. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel küme, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ise parametreler kümesi olsun.

$$s_1(x_1) = \{u_1\}, s_1(x_2) = \{u_1, u_3\}, s_1(x_3) = \{u_2, u_5\}, s_1(x_4) = \{u_2, u_4, u_5\}$$

ve

$$s_2(x_1) = \{u_1, u_5\}, s_2(x_2) = \{u_1, u_3\}, s_2(x_3) = \{u_2, u_5\}, s_2(x_4) = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$$

olsun.

1) $S_1 \cup S_2 = \{(x_1, \{u_1, u_5\}), (x_2, \{u_1, u_3\}), (x_3, \{u_2, u_5\}), (x_4, \{u_1, u_2, u_4, u_5\})\}$

2) $S_1 \cap S_2 = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_1, u_3\}), (x_3, \{u_2, u_5\}), (x_4, \{u_2, u_4, u_5\})\}$

3) $S_1^c = \{(x_1, \{u_2, u_3, u_4, u_5\}), (x_2, \{u_2, u_4, u_5\}), (x_3, \{u_1, u_3, u_4\}), (x_4, \{u_1, u_3\})\}$

4) $S_2^c = \{(x_1, \{u_2, u_3, u_4\}), (x_2, \{u_2, u_4, u_5\}), (x_3, \{u_1, u_3, u_4\}), (x_4, \{u_3\})\}$

2.2 Bulanık Kümeler

Bulanık kümeler kavramı ilk kez Zadeh (1965) tarafından ortaya atılmıştır. Bu bölümde bulanık kümeler kavramı tanımlandıktan sonra temel özellikleri ve bulanık küme işlemleri verilecektir.

Bu bölümün yazılmasında bulanık mantık ve kümeleri konusu için klasikleşmiş İngilizce kaynak olarak (Dubois and Prade, 1980), (Klir and Folger, 1988), (Zimmermann, 1991) kitaplarından, Türkçe kaynak olarak da (Elmas, 2003), (Şen, 2001), (İbrahim, 2004) kitaplarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.19. (Zadeh, 1965) X evrensel bir küme olsun. X üzerinde bir bulanık F kümesi şu şekilde tanımlanır:

$$F = \{x^{f(x)} : x \in X\} \text{ burada } f : X \to [0,1]$$

Burada f, F bulanık kümesinin üyelik fonksiyonudur. x^0 elemanı F de gösterilmez, x^1 elemanı ise x olarak gösterilir. Ayrıca, $f(x)$ değeri $x \in X$ için x'in F bulanık kümesine ait olma derecesini temsil eder.

Bundan sonra bulanık kümeler $F, F_1, F_2, \ldots$ şeklinde ve bunların üyelik fonksiyonları $f, f_1, f_2, \ldots$ şeklinde gösterilecektir. X üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesi $\mathbb{F}$ ile gösterilir.

Tanım 2.20. X üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $f(x) = \emptyset$ oluyorsa, F bulanık kümesine **boş bulanık küme** denir ve $F_\emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 2.21. X üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $f(x) = 1$ oluyorsa, F bulanık kümesine **evrensel bulanık küme** denir ve F_X ile gösterilir.

Örnek 2.22. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ kümesi için üyelik fonksiyonu

$$f(x_1) = 0.3, f(x_2) = 0.4, f(x_3) = 0.7, f(x_4) = 0, f(x_5) = 0.6, f(x_6) = 1$$

şeklinde verilsin, burada F bulanık kümesi:

$$F = \left\{x_1^{0.3}, x_2^{0.4}, x_3^{0.7}, x_5^{0.6}, x_6\right\}$$

şeklinde olur.

Tanım 2.23. F_1 ve F_2, X üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun. Eğer her $x \in X$ için $f_1(x) = f_2(x)$ oluyorsa, F_1 ve F_2 bulanık kümelerine **eşit bulanık kümeler** denir ve $F_1 = F_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.24. F_1 ve F_2, X üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun. Eğer her $x \in X$ için $f_1(x) \leq f_2(x)$ oluyorsa, F_1 bulanık kümesi F_2 bulanık kümesinin bir **alt kümesi** olur ve $F_1 \subseteq F_2$ ile gösterilir.

Örnek 2.25. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evrensel kümesi için,

1) Eğer,

$$f(x_1) = 1, f(x_2) = 1, f(x_3) = 1, f(x_4) = 1$$

ise $F_X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evrensel bulanık kümesi elde edilir.

2) Eğer,

$$f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, f(x_3) = 0, f(x_4) = 0$$

ise $F_\emptyset = \{\ \}$ boş bulanık kümesi elde edilir.

3) Eğer,

$$f_1(x_1) = 0.1, f_1(x_2) = 0.3, f_1(x_3) = 0.4, f_1(x_4) = 0.2$$

ve

$$f_2(x_1) = 0.1, f_2(x_2) = 0.3, f_2(x_3) = 0.4, f_2(x_4) = 0.2$$

ise burada

$$f_1(x_1) \leq f_2(x_1),\ \ f_1(x_2) \leq f_2(x_2),\ \ f_1(x_3) \leq f_2(x_3),\ \ f_1(x_4) \leq f_2(x_4)$$

olduğundan F_1 bulanık kümesi F_2 bulanık kümesinin bir bulanık alt kümesidir.

4) Eğer,

$$f_1(x_1) = 0.1, f_1(x_2) = 0.3, f_1(x_3) = 0.4, f_1(x_4) = 0.2$$

ve

$$f_2(x_1) = 0.4, f_2(x_2) = 0.4, f_2(x_3) = 0.7, f_2(x_4) = 0.9$$

ise burada

$$f_1(x_1) = f_2(x_1),\;\; f_1(x_2) = f_2(x_2),\;\; f_1(x_3) = f_2(x_3),\;\; f_1(x_4) = f_2(x_4)$$

olduğundan F_1 bulanık kümesi F_2 bulanık kümesine eşit bir bulanık kümedir.

Tanım 2.26. X üzerinde tanımlı F_1 ve F_2 bulanık kümeleri verilsin. F_1 ve F_2 bulanık kümelerinin birleşimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F_1 \cup F_2 = \{x^{\max\{f_1(x), f_2(x)\}} : x \in X\}$$

Teorem 2.27. *F, X üzerinde tanımlı bir bulanık küme olsun.*

i) $F \cup F = F$

ii) $F \cup F_\emptyset = F$

iii) $F \cup F_X = F_X$

İspat: X üzerinde bir $F = \{(x^{f(x)}) : x \in X\}$ bulanık kümesi verilsin.

i)

$$\begin{aligned} F \cup F &= \{x^{\max\{f(x), f(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{f(x)} : x \in X\} \\ &= F \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F \cup F_\emptyset &= \{x^{\max\{f(x), 0\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{f(x)} : x \in X\} \\ &= F \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} F \cup F_X &= \{x^{\max\{f(x),1\}} : x \in X\} \\ &= \{x^1 : x \in X\} \\ &= F_X \end{aligned}$$

□

Teorem 2.28. *F_1, F_2 ve F_3, X üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun.*

i) $F_1 \cup F_2 = F_2 \cup F_1$

ii) $F_1 \cup (F_2 \cup F_3) = (F_1 \cup F_2) \cup F_3$

İspat: X üzerinde tanımlı $F_1 = \{x^{f_1(x)} : x \in X\}$, $F_2 = \{x^{f_2(x)} : x \in X\}$ ve $F_3 = \{x^{f_3(x)} : x \in X\}$ bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} F_1 \cup F_2 &= \{x^{\max\{f_1(x),f_2(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{\max\{f_2(x),f_1(x)\}} : x \in X\} \\ &= F_2 \cup F_1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F_1 \cup (F_2 \cup F_3) &= \{x^{\max\{f_1(x),\max\{f_2(x),f_3(x)\}\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{\max\{\max\{f_1(x),f_2(x)\},f_3(x)\}\}} : x \in X\} \\ &= (F_1 \cup F_2) \cup F_3 \end{aligned}$$

□

Tanım 2.29. X üzerinde tanımlı F_1 ve F_2 bulanık kümeleri verilsin. F_1 ve F_2 bulanık kümelerinin kesişimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F_1 \cap F_2 = \{x^{\min\{f_1(x),f_2(x)\}} : x \in X\}$$

Teorem 2.30. *F, X üzerinde tanımlı bir bulanık küme olsun.*

i) $F \cap F = F$

ii) $F \cap F_\emptyset = F_\emptyset$

iii) $F \cap F_X = F$

İspat: X üzerinde bir $F = \{x^{f(x)} : x \in X\}$ bulanık kümesi verilsin.

i)

$$\begin{aligned} F \cap F &= \{x^{\min\{f(x),f(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{f(x)} : x \in X\} \\ &= F \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F \cap F_\emptyset &= \{x^{\min\{f(x),0\}} : x \in X\} \\ &= \{x^0 : x \in X\} \\ &= F_\emptyset \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} F \cap F_X &= \{x^{\min\{f(x),1\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{f(x)} : x \in X\} \\ &= F \end{aligned}$$

□

Teorem 2.31. *F_1, F_2 ve F_3, X üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun.*

i) $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_1$

ii) $F_1 \cap (F_2 \cap F_3) = (F_1 \cap F_2) \cap F_3$

İspat: X üzerinde tanımlı $F_1 = \{x^{f_1(x)} : x \in X\}$, $F_2 = \{x^{f_2(x)} : x \in X\}$ ve $F_3 = \{x^{f_3(x)} : x \in X\}$ bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} F_1 \cap F_2 &= \{x^{\min\{f_1(x), f_2(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{\min\{f_2(x), f_1(x)\}} : x \in X\} \\ &= F_2 \cap F_1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F_1 \cap (F_2 \cap F_3) &= \{x^{\min\{f_1(x), \min\{f_2(x), f_3(x)\}\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{\min\{\min\{f_1(x), f_2(x)\}, f_3(x)\}\}} : x \in X\} \\ &= (F_1 \cap F_2) \cap F_3 \end{aligned}$$

□

Teorem 2.32. *F_1, F_2 ve F_3, X üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun.*

i) $F_1 \cup (F_2 \cap F_3) = (F_1 \cup F_2) \cap (F_1 \cup F_3)$

ii) $F_1 \cap (F_2 \cup F_3) = (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_3)$

İspat: X üzerinde tanımlı $F_1 = \{x^{f_1(x)} : x \in X\}$, $F_2 = \{x^{f_2(x)} : x \in X\}$ ve $F_3 = \{x^{f_3(x)} : x \in X\}$ bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} F_1 \cup (F_2 \cap F_3) &= \{x^{\max\{f_1(x), \min\{f_2(x), f_3(x)\}\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{\min\{\max\{f_1(x), f_2(x)\}, \max\{f_1(x), f_3(x)\}\}} : x \in X\} \\ &= (F_1 \cup F_2) \cap (F_1 \cup F_3) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F_1 \cap (F_2 \cup F_3) &= \{x^{\min\{f_1(x), \max\{f_2(x), f_3(x)\}\}} : x \in X\} \\ &= \{x^{\max\{\min\{f_1(x), f_2(x)\}, \min\{f_1(x), f_3(x)\}\}} : x \in X\} \\ &= (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_3) \end{aligned}$$

□

Tanım 2.33. X üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi verilsin. F bulanık kümesinin tümleyeni aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F^c = \{x^{1-f(x)} : x \in X\}$$

Not 2.34. F, X üzerinde tanımlı bir bulanık küme olsun.

i) $F \cup F^c \neq F_U$

ii) $F \cap F^c \neq F_\emptyset$

Örnegin; $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ üzerinde tanımlı bir F bulanık kümesi

$$F = \left\{x_1^{0.3}, x_2^{0.4}, x_3^{0.7}, x_5^{0.6}, x_6\right\}$$

olsun. Buradan,

$$F^c = \left\{x_1^{0.7}, x_2^{0.6}, x_3^{0.3}, x_5^{0.4}\right\}$$

olur. Bu durumda

i)

$$\begin{aligned} F \cup F^c &= \{x^{\max\{f(x),1-f(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x_1^{0.7}, x_2^{0.6}, x_3^{0.7}, x_5^{0.6}, x_6\} \\ &\neq F_U \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F \cap F^c &= \{x^{\min\{f(x),1-f(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x_1^{0.3}, x_2^{0.4}, x_3^{0.7}, x_5^{0.4}\} \\ &\neq F_\emptyset \end{aligned}$$

Örnek 2.35. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ kümesi üzerinde tanımlı F_1 bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu

$$f_1(x_1) = 0.3, f_1(x_2) = 0.4, f_1(x_3) = 0.7, f_1(x_4) = 0, f_1(x_5) = 0.6, f_1(x_6) = 1$$

şeklinde tanımlı ve F_2 bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu

$$f_2(x_1) = 0.1, f_2(x_2) = 0.6, f_2(x_3) = 0.1, f_2(x_4) = 0.9, f_2(x_5) = 0.5, f_2(x_6) = 1$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

1. $F_1 \cap F_2$ bulanık kümesi:

$$\begin{aligned} F_1 \cap F_2 &= \{x^{\min\{f_1(x), f_2(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x_1^{0.1}, x_2^{0.4}, x_3^{0.1}, x_5^{0.5}, x_6\} \end{aligned}$$

2. $F_1 \cup F_2$ bulanık kümesi:

$$\begin{aligned} F_1 \cup F_2 &= \{x^{\max\{f_1(x), f_2(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x_1^{0.3}, x_2^{0.6}, x_3^{0.7}, x_4^{0.9}, x_5^{0.6}, x_6\} \end{aligned}$$

3. $F_1 \cap F_2^c$ bulanık kümesi:

$$\begin{aligned} F_1 \cap F_2^c &= \{x^{\min\{f_1(x), 1-f_2(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x_1^{0.3}, x_2^{0.4}, x_3^{0.7}, x_5^{0.5}, x_6\} \end{aligned}$$

4. $F_1 \cup F_2^c$ bulanık kümesi:

$$\begin{aligned} F_1 \cup F_2^c &= \{x^{\max\{f_1(x), 1-f_2(x)\}} : x \in X\} \\ &= \{x_1^{0.9}, x_2^{0.4}, x_3^{0.9}, x_4^{0.1}, x_5^{0.6}, x_6\} \end{aligned}$$

Teorem 2.36. *F_1 ve F_2, X üzerinde tanımlı birer bulanık küme olsun.*

i) $(F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c$

ii) $(F_1 \cap F_2)^c = F_1^c \cup F_2^c$

İspat: X üzerinde tanımlı $F_1 = \{x^{f_1(x)} : x \in X\}$ ve $F_2 = \{x^{f_2(x)} : x \in X\}$ bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned}
(F_1 \cup F_2)^c &= \{x^{\max\{f_1(x), f_2(x)\}} : x \in X\}^c \\
&= \{x^{1-\max\{f_1(x), f_2(x)\}} : x \in X\} \\
&= \{x^{\min\{1-f_1(x), 1-f_2(x)\}} : x \in X\} \\
&= F_1^c \cap F_2^c
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
(F_1 \cap F_2)^c &= \{x^{\min\{f_1(x), f_2(x)\}} : x \in X\}^c \\
&= \{x^{1-\min\{f_1(x), f_2(x)\}} : x \in X\} \\
&= \{x^{\max\{1-f_1(x), 1-f_2(x)\}} : x \in X\} \\
&= F_1^c \cup F_2^c
\end{aligned}$$

□

2.3 Sezgisel Bulanık Kümeler

Sezgisel bulanık kavramı ilk kez Atanassov (1984) tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde, sezgisel bulanık kümeleri tanımladıktan sonra temel özellikleri ve sezgisel bulanık küme işlemleri verilecek.

Bu bölüm yazılırken esnek kümeler için (Lei and Xu, 2017) ve (Atanassov, 1999) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.37. U evrensel bir küme olsun. U üzerinde bir sezgisel bulanık küme şu şekilde tanımlanır:

$$I = \left\{u^{\mu(u);\nu(u)} : u \in U\right\}$$

burada her $u \in U$ için $\mu : U \to [0,1]$ ve $\nu : U \to [0,1]$ olmak üzere ,

$$0 \leq \mu(u) + \nu(u) \leq 1$$

aralığında değerler alır. Burada, μ ve ν üye ve üye olmama fonksiyonu olarak adlandırılır. $u^{0;1}$ elemanları I 'da gösterilmez. Ayrıca $\mu(u)$ ve $\nu(u)$ değerleri üyelik ve üye olmama derecesini gösterir. $\pi(u) = 1 - \mu(u) - \nu(u)$ değerine u elemanının sezgisel bulanık kümesine aitliğinin belirsizlik derecesi denir. Açıkça görülmektedir ki $\pi(u)$, 0 ile 1 aralığında değişmektedir. Yani $0 \leq \pi(u) \leq 1$'dir.

Bundan sonra sezgisel bulanık kümeleri $I, I_1, I_2, \ldots$ ile bunların üyelik fonksiyonları $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ ve üyelik dışı fonksiyonları $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots$ ile gösterilecektir. U üzerindeki tüm sezgisel bulanık kümelerin kümesi $\mathbb{I}$ ile gösterilir.

Tanım 2.38. I, U üzerinde tanımlı bir sezgisel bulanık küme olsun. Eğer her $u \in U$ için $\mu(u) = 0$ ve $\nu(u) = 1$ oluyorsa, I sezgisel bulanık kümesine **boş sezgisel bulanık küme** denir ve $I_\emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 2.39. U üzerinde tanımlı bir I sezgisel bulanık kümesi verilsin. Eğer her $u \in U$ için $\mu(u) = 1$ ve $\nu(u) = 0$ oluyorsa, I sezgisel bulanık kümesine **evrensel sezgisel bulanık küme** denir ve I_U ile gösterilir.

Örnek 2.40. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel kümesi verilsin, burada üyelik ve üyelik dışı fonksiyonları

$$\mu(u_1) = 0.3, \nu(u_1) = 0.7, \mu(u_2) = 0.3, \nu(u_2) = 0.6,$$

$$\mu(u_3) = 0, \nu(u_3) = 1, \mu(u_4) = 0.2, \nu(u_4) = 0.7$$

şeklinde ise I sezgisel bulanık kümesi

$$I = \left\{u_1^{0.3;0.7}, u_2^{0.3;0.6}, u_4^{0.2;0.7}\right\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.41. I_1 ve I_2, U üzerinde tanımlı birer sezgisel bulanık kümeleri olmak üzere; eğer her $u \in U$ için $\mu_1(u) = \mu_2(u)$ ve $\nu_1(u) = \nu_2(u)$ oluyorsa, I_1 ve I_2 sezgisel bulanık kümelerine **eşit sezgisel bulanık kümeleri** denir ve $I_1 = I_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.42. I_1 ve I_2, U üzerinde tanımlı birer sezgisel bulanık küme olmak üzere; eğer her $u \in U$ için $\mu_1(u) \leq \mu_2(u)$ ve $\nu_2(u) \leq \nu_1(u)$ oluyorsa, I_1 sezgisel bulanık kümesi I_2 sezgisel bulanık kümesinin bir **alt kümesi** olur ve $I_1 \subseteq I_2$ ile gösterilir.

Örnek 2.43. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel kümesi için,

1) Eğer $I(u_1) = I(u_2) = I(u_3) = I(u_4) = 1$ ise $I_U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel sezgisel bulanık kümesi elde edilir.

2) Eğer $I(u_1) = I(u_2) = I(u_3) = I(u_4) = \emptyset$ ise $I_U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ boş sezgisel bulanık kümesi elde edilir.

3) I_1 ve I_2, U üzerinde tanımlı birer sezgisel bulanık küme olmak üzere eğer

$$I_1 = \left\{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.3;0.6}, u_4^{0.2;0.7}\right\} \text{ ve } I_2 = \left\{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.3;0.6}, u_4^{0.2;0.7}\right\} \text{ ise}$$

$$\mu_1(u_1) = \mu_2(u_1), \mu_1(u_2) = \mu_2(u_2), \mu_1(u_4) = \mu_2(u_4)$$

ve

$$\nu_1(u_1) = \nu_2(u_1), \nu_1(u_2) = \nu_2(u_2), \nu_1(u_4) = \nu_2(u_4)$$

olduğundan $I_1 = I_2$ olur.

4) I_1 ve I_2, U üzerinde tanımlı birer sezgisel bulanık küme olmak üzere; eğer

$$I_1 = \left\{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.3;0.6}, u_4^{0.2;0.7}\right\} \text{ ve } I_2 = \left\{u_1^{0.4;0.4}, u_2^{0.6;0.2}, u_4^{0.5;0.4}\right\}$$

ise

$$\mu_1(u_1) \leq \mu_2(u_1), \mu_1(u_2) \leq \mu_2(u_2), \mu_1(u_4) \leq \mu_2(u_4)$$

ve

$$\nu_2(u_1) \leq \nu_1(u_1), \nu_2(u_2) \leq \nu_1(u_2), \nu_2(u_4) \leq \nu_1(u_4)$$

olduğundan $I_1 \subseteq I_2$ olur.

Tanım 2.44. U üzerinde tanımlı bir I sezgisel bulanık kümesi verilsin. I sezgisel bulanık kümesinin tümleyeni aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$I^c = \{u^{\nu(u);\mu(u)} : u \in U\}$$

Tanım 2.45. U üzerinde tanımlı I_1 ve I_2 sezgisel bulanık kümeleri verilsin. I_1 ve I_2 sezgisel bulanık kümelerinin birleşimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$I_1 \cup I_2 = \{u^{max\{\mu_1(u),\mu_2(u)\};min\{\nu_1(u),\nu_2(u)\}} : u \in U\}$$

Teorem 2.46. *U üzerinde tanımlı bir I sezgisel bulanık kümesi verilsin.*

i) $I \cup I = I$

ii) $I \cup I_\emptyset = I$

iii) $I \cup I_U = I_U$

İspat: U üzerinde bir $I = \left\{u^{\mu(u);\nu(u)} : u \in U\right\}$ sezgisel bulanık kümesi verilsin.

i)

$$\begin{aligned} I \cup I &= \{u^{max\{\mu(u),\mu(u)\};min\{\nu(u),\nu(u)\}} : u \in U\} \\ &= \left\{u^{\mu(u);\nu(u)} : u \in U\right\} \\ &= I \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} I \cup I_{\emptyset} &= \{u^{max\{\mu(u),0\};min\{\nu(u),1\}} : u \in U\} \\ &= \left\{u^{\mu(u);\nu(u)} : u \in U\right\} \\ &= I \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} I \cup I_{U} &= \{u^{max\{\mu(u),1\};min\{\nu(u),0\}} : u \in U\} \\ &= \{u^{1;0} : u \in U\} \\ &= I_U \end{aligned}$$

□

Teorem 2.47. *I_1, I_2, I_3, U üzerinde tanımlı birer sezgisel bulanık küme olsun.*

i) $I_1 \cup I_2 = I_2 \cup I_1$

ii) $I_1 \cup (I_2 \cup I_3) = (I_1 \cup I_2) \cup I_3$

İspat: U üzerinde tanımlı $I_1 = \left\{u^{\mu_1(u);\nu_1(u)} : u \in U\right\}$, $I_2 = \left\{u^{\mu_2(u);\nu_2(u)} : u \in U\right\}$ ve $I_3 = \left\{u^{\mu_3(u);\nu_3(u)} : u \in U\right\}$ sezgisel bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} I_1 \cup I_2 &= \{u^{max\{\mu_1(u),\mu_2(u)\};min\{\nu_1(u),\nu_2(u)\}} : u \in U\} \\ &= \{u^{max\{\mu_2(u),\mu_1(u)\};min\{\nu_2(u),\nu_1(u)\}} : u \in U\} \\ &= I_2 \cup I_1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} I_1 \cup (I_2 \cup I_3) &= \{u^{max\{\mu_1(u),max(\mu_2(u),\mu_3(u))\};min\{\nu_1(u),min(\nu_2(u),\nu_3(u))\}} : u \in U\} \\ &= \{u^{max\{max(\mu_1(u),\mu_2(u)),\mu_3(u)\};min\{min(\nu_1(u),\nu_2(u)),\nu_3(u)\}} : u \in U\} \\ &= (I_1 \cup I_2) \cup I_3 \end{aligned}$$

□

Tanım 2.48. U üzerinde tanımlı I_1 ve I_2 sezgisel bulanık kümeleri verilsin. I_1 ve I_2 sezgisel bulanık kümelerinin kesişimi aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$I_1 \cap I_2 = \{u^{min\{\mu_1(u),\mu_2(u)\};max\{\nu_1(u),\nu_2(u)\}} : u \in U\}$$

Teorem 2.49. *I, U üzerinde tanımlı bir sezgisel bulanık küme olsun.*

i) $I \cap I = I$

ii) $I \cap I_\emptyset = I_\emptyset$

iii) $I \cap I_U = I$

İspat: U üzerinde bir $I = \left\{u^{\mu(u);\nu(u)} : u \in U\right\}$ sezgisel bulanık kümesi verilsin.

i)

$$\begin{aligned} I \cap I &= \{u^{min\{\mu(u),\mu(u)\};max\{\nu(u),\nu(u)\}} : u \in U\} \\ &= \left\{u^{\mu(u);\nu(u)} : u \in U\right\} \\ &= I \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} I \cap I_\emptyset &= \{u^{min\{\mu(u),0\};max\{\nu(u),1\}} : u \in U\} \\ &= \{u^{0;1} : u \in U\} \\ &= I_\emptyset \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} I \cap I_U &= \{u^{min\{\mu(u),1\};max\{\nu(u),0\}} : u \in U\} \\ &= \left\{u^{\mu(u);\nu(u)} : u \in U\right\} \\ &= I \end{aligned}$$

□

Teorem 2.50. *I_1, I_2, I_3, U üzerinde tanımlı birer sezgisel bulanık küme olsun.*

i) $I_1 \cap I_2 = I_2 \cap I_1$

ii) $I_1 \cap (I_2 \cap I_3) = (I_1 \cap I_2) \cap I_3$

İspat: U üzerinde tanımlı $I_1 = \left\{u^{\mu_1(u);\nu_1(u)} : u \in U\right\}$, $I_2 = \left\{u^{\mu_2(u);\nu_2(u)} : u \in U\right\}$ ve $I_3 = \left\{u^{\mu_3(u);\nu_3(u)} : u \in U\right\}$ sezgisel bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} I_1 \cap I_2 &= \{u^{min\{\mu_1(u),\mu_2(u)\};max\{\nu_1(u),\nu_2(u)\}} : u \in U\} \\ &= \{u^{min\{\mu_2(u),\mu_1(u)\};max\{\nu_2(u),\nu_1(u)\}} : u \in U\} \\ &= I_2 \cap I_1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} I_1 \cap (I_2 \cap I_3) &= \{u^{min\{\mu_1(u),min(\mu_2(u),\mu_3(u))\};max\{\nu_1(u),max(\nu_2(u),\nu_3(u))\}} : u \in U\} \\ &= \{u^{min\{min(\mu_1(u),\mu_2(u)),\mu_3(u)\};max\{max(\nu_1(u),\nu_2(u)),\nu_3(u)\}} : u \in U\} \\ &= (I_1 \cap I_2) \cap I_3 \end{aligned}$$

□

Teorem 2.51. *I_1, I_2, I_3, U üzerinde tanımlı birer sezgisel bulanık küme olsun.*

i) $I_1 \cup (I_2 \cap I_3) = (I_1 \cup I_2) \cap (I_1 \cup I_3)$

ii) $I_1 \cap (I_2 \cup I_3) = (I_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_3)$

İspat: U üzerinde tanımlı $I_1 = \left\{u^{\mu_1(u);\nu_1(u)} : u \in U\right\}$, $I_2 = \left\{u^{\mu_2(u);\nu_2(u)} : u \in U\right\}$ ve $I_3 = \left\{u^{\mu_3(u);\nu_3(u)} : u \in U\right\}$ sezgisel bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} & I_1 \cup (I_2 \cap I_3) \\ = \; & \{u^{max\{\mu_1(u),min\{\mu_2(u),\mu_3(u)\}\};min\{\nu_1(u),max\{\nu_2(u),\nu_3(u)\}\}} : u \in U\} \\ = \; & \{u^{min\{max\{\mu_1(u),\mu_2(u)\};\{max\{\mu_1(u),\mu_3(u)\}\};max\{min\{\nu_1(u),\nu_2(u)\};\{min\{\nu_1(u),\nu_3(u)\}\}} : u \in U\} \\ = \; & (I_1 \cup I_2) \cap (I_1 \cup I_3) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} & I_1 \cap (I_2 \cup I_3) \\ = \; & \{u^{min\{\mu_1(u),max\{\mu_2(u),\mu_3(u)\}\};max\{\nu_1(u),min\{\nu_2(u),\nu_3(u)\}\}} : u \in U\} \\ = \; & \{u^{max\{min\{\mu_1(u),\mu_2(u)\};\{min\{\mu_1(u),\mu_3(u)\}\};min\{max\{\nu_1(u),\nu_2(u)\};\{max\{\nu_1(u),\nu_3(u)\}\}} : u \in U\} \\ = \; & (I_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_3) \end{aligned}$$

□

Not 2.52. I, U üzerinde tanımlı bir sezgisel bulanık küme olsun.

i) $I \cup I^c \neq I_U$

ii) $I \cap I^c \neq I_\emptyset$

Örnegin; $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ üzerinde tanımlı bir sezgisel bulanık küme

$$I = \left\{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.3;0.6}, u_4^{0.2;0.7}\right\}$$

verilsin. Bu durumda

$$I^c = \left\{u_1^{0.5;0.3}, u_2^{0.6;0.3}, u_4^{0.7;0.2}\right\}$$

olur. Buradan aşağıdaki sonuçlar açıkça elde edilir.

i)

$$\begin{aligned} I \cup I^c &= \{u^{max\{\mu(u),\nu(u)\};min\{\nu(u),\mu(u)\}} : u \in U\} \\ &= \left\{u_1^{0.5;0.5}, u_2^{0.6;0.6}, u_4^{0.7;0.7}\right\} \\ &\neq I_U \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} I \cap I^c &= \{u^{min\{\mu(u),\nu(u)\};max\{\nu(u),\mu(u)\}} : u \in U\} \\ &= \left\{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.3;0.6}, u_4^{0.2;0.7}\right\} \\ &\neq I_\emptyset \end{aligned}$$

Teorem 2.53. *I_1, I_2, U üzerinde tanımlı birer sezgisel bulanık küme olsun.*

i) $(I_1 \cup I_2)^c = I_1^c \cap I_2^c$

ii) $(I_1 \cap I_2)^c = I_1^c \cup I_2^c$

İspat: U üzerinde tanımlı $I_1 = \left\{u^{\mu_1(u);\nu_1(u)} : u \in U\right\}$ ve $I_2 = \left\{u^{\mu_2(u);\nu_2(u)} : u \in U\right\}$ sezgisel bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} (I_1 \cup I_2)^c &= \{u^{max\{\mu_1(u),\mu_2(u)\};min\{\nu_1(u),\nu_2(u)\}} : u \in U\}^c \\ &= \{u^{min\{\nu_1(u),\nu_2(u)\};max\{\mu_1(u),\mu_2(u)\}} : u \in U\} \\ &= I_1^c \cap I_2^c \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} (I_1 \cap I_2)^c &= \{u^{min\{\mu_1(u),\mu_2(u)\};max\{\nu_1(u),\nu_2(u)\}} : u \in U\}^c \\ &= \{u^{max\{\nu_1(u),\nu_2(u)\};min\{\mu_1(u),\mu_2(u)\}} : u \in U\} \\ &= I_1^c \cup I_2^c \end{aligned}$$

□

Bu önermenin daha anlaşılır olması için bir örnek verelim.

Örnek 2.54. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ üzerinde tanımlı I_1, I_2, I_3 sezgisel bulanık kümeleri

$$\begin{aligned} I_1 &= \{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.3;0.6}, u_4^{0.2;0.7}\} \\ I_2 &= \{u_1^{0.2;0.7}, u_2^{0.1;0.8}, u_4^{0.4;0.5}\} \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Buradan,

$$\begin{aligned} I_1^c &= \{u_1^{0.5;0.3}, u_2^{0.6;0.3}, u_4^{0.7;0.2}\} \\ I_2^c &= \{u_1^{0.7;0.2}, u_2^{0.8;0.1}, u_4^{0.5;0.4}\} \end{aligned}$$

olur.

i)

$$I_1 \cup I_2 = \{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.3;0.6}, u_4^{0.4;0.5}\}$$

ii)

$$\begin{aligned} (I_1 \cup I_2)^c &= \{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.3;0.6}, u_4^{0.4;0.5}\}^c \\ &= \{u_1^{0.5;0.3}, u_2^{0.6;0.3}, u_4^{0.5;0.4}\} \end{aligned}$$

iii)

$$I_1 \cap I_2 = \{u_1^{0.2;0.7}, u_2^{0.1;0.8}, u_4^{0.2;0.7}\}$$

iv)

$$\begin{aligned} (I_1 \cap I_2)^c &= \{u_1^{0.2;0.7}, u_2^{0.1;0.8}, u_4^{0.2;0.7}\}^c \\ &= \{u_1^{0.7;0.2}, u_2^{0.8;0.1}, u_4^{0.7;0.2}\} \end{aligned}$$

3. *bpsbe*-KÜMELER

Bu bölümde, bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler **(*bpsbe*-kümeler)** yeni bir kavram olarak tanımlanacaktır. Bu bölümden bu tez çalışmasının bir faaliyeti olarak bir makale (Sulukan ve ark., 2019) yazılmış ve yayımlanmıştır.

3.1 *bpsbe*-Kümelere Giriş

Bu alt bölümde bpsbe-kümelerinin tanımı, boş, eşit, evrensel bpsbe-kümelerinin tanımı örneklerle beraber verilecektir.

Tanım 3.55. U evrensel bir küme ve X bir parametre kümesi olsun. X üzerinde bir $F = \left\{x^{f(x)} : x \in X\right\}$ bulanık kümesi verilsin.

$$p : X \to \mathbb{I}, p(x) = \left\{u^{\mu_x(u);\nu_x(u)} : u \in U\right\}$$

olmak üzere

$$P = \left\{\left(x^{f(x)}, p(x)\right) : x \in X\right\}.$$

kümesine U üzerinde tanımlı bir **bpsbe-kümesi** denir. Burada p fonksiyonuna P bpsbe-kümesinin **yaklaşım fonksiyonu** denir. $(x^0, I_\emptyset)$ elemanları P bpsbe-kümesinde gösterilmez.

Bundan sonra bpsbe-kümelerini $P, P_1, P_2, ...$ ile bunların yaklaşım fonksiyonları sırasıyla $p, p_1, p_2, ...$ ile gösterilecektir. U üzerinde tanımlı tüm bpsbe-kümelerin kümesi $\mathbb{P}$ ile gösterilecektir.

Örnek 3.56. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi ve $F = \{x_1^{0.7}, x_2^{0.4}, x_4^{0.5}\}$ olsun. Eğer P bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned}
p(x_1) &= \{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\},\\
p(x_2) &= \{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\},\\
p(x_3) &= I_\emptyset,\\
p(x_4) &= \{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\}
\end{aligned}$$

şeklinde verilirse U üzerinde tanımlı P bpsbe-kümesi,

$$\begin{aligned}
P = &\ \{(x_1^{0.7}, p(x_1)), (x_2^{0.4}, p(x_2)), (x_4^{0.5}, p(x_4))\}\\
= &\ \left\{\left(x_1^{0.7}, \{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\}\right), \left(x_2^{0.4}, \{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\}\right), \left(x_4^{0.5}, \{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\}\right)\right\}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 3.57. U üzerinde tanımlı P_1 ve P_2 bpsbe-kümeleri verilsin. Eğer her $x \in X$ için $f_1(x) = f_2(x)$ ve $p_1(x) = p_2(x)$ oluyorsa, P_1 ve P_2 bpsbe-kümelerine **eşit bpsbe-kümeler** denir ve $P_1 = P_2$ ile gösterilir.

Örnek 3.58. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi ve $F_1 = \{x_1^{0.7}, x_2^{0.4}, x_4^{0.5}\}$ ve $F_2 = \{x_1^{0.7}, x_2^{0.4}, x_4^{0.5}\}$ olsun. Burada P_1 bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned}
p_1(x_1) &= \{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\},\\
p_1(x_2) &= \{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\},\\
p_1(x_3) &= I_\emptyset,\\
p_1(x_4) &= \{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\}
\end{aligned}$$

ve P_2 bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned}
p_2(x_1) &= \{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\},\\
p_2(x_2) &= \{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\},\\
p_2(x_3) &= I_\emptyset,\\
p_2(x_4) &= \{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\}
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$f_1(x_1) = f_2(x_1), f_1(x_2) = f_2(x_2), f_1(x_3) = f_2(x_3), f_1(x_4) = f_2(x_4)$$

ve

$$p_1(x_1) = p_2(x_1), p_1(x_2) = p_2(x_2), p_1(x_3) = p_2(x_3), p_1(x_4) = p_2(x_4)$$

olduğundan $P_1 = P_2$ elde edilir.

Tanım 3.59. U üzerinde tanımlı bir P bpsbe-kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $f(x) = 0$ ve $p(x) = I_\emptyset$ oluyorsa, P bpsbe-kümesine **boş bpsbe-küme** denir ve $P_\emptyset$ ile gösterilir.

Örnek 3.60. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi için

$$f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, f(x_3) = 0, f(x_4) = 0$$

şeklinde verilsin, burada $F_\emptyset = \{\}$ olur ve

$$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = I_\emptyset$$

olduğundan $P_\emptyset$ kümesi elde edilir.

Tanım 3.61. U üzerinde tanımlı bir P bpsbe-kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $f(x) = 1$ ve $p(x) = I_U$ oluyorsa, P bpsbe-kümesine **evrensel bpsbe-küme** denir ve P_U ile gösterilir.

Örnek 3.62. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi için

$$f(x_1) = 1, f(x_2) = 1, f(x_3) = 1, f(x_4) = 1$$

şeklinde verilsin, burada $F_X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olur ve

$$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = I$$

olduğundan P_U kümesi elde edilir.

3.2 *bpsbe*-Küme İşlemleri

Bu alt bölümde bpsbe-küme işlemlerinden kesişim, birleşim ve tümleyen tanımlanacaktır. Daha sonra her bir küme işleminin temel özellikleri ve birbiriyle ilişkileri teoremler halinde verilecektir.

Tanım 3.63. U üzerinde tanımlı P_1 ve P_2 bpsbe-kümeleri verilsin. P_1 ve P_2 bpsbe-kümelerinin birleşimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$P_1 \cup P_2 = \left\{ (x^{\max\{f_1(x), f_2(x)\}}, p_1(x) \cup p_2(x)) : x \in X \right\}$$

Örnek 3.64. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi ve $F_1 = \{x_1^{0.7}, x_2^{0.4}, x_4^{0.5}\}$ ve $F_2 = \{x_1^{0.5}, x_2^{0.5}, x_3^{0.6}, x_4^{0.3}\}$ olsun. Burada P_1 bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned}
p_1(x_1) &= \left\{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\right\}, \\
p_1(x_2) &= \left\{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}, \\
p_1(x_3) &= I_\emptyset, \\
p_1(x_4) &= \left\{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}
\end{aligned}$$

ve P_2 bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned}
p_2(x_1) &= \left\{u_1^{0.4;0.5}, u_3^{0.3;0.3}\right\}, \\
p_2(x_2) &= \left\{u_2^{0.6;0.3}, u_3^{0.2;0.8}\right\}, \\
p_2(x_3) &= \left\{u_1^{0.4;0.5}, u_2^{0.5;0.3}\right\}, \\
p_2(x_4) &= \left\{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.5;0.4}, u_3^{0.3;0.2}\right\}
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
P_1 \cup P_2 = & \left\{ \left({x_1}^{0.7}, \{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\}\right), \left({x_2}^{0.5}, \{u_2^{0.6;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\}\right), \right. \\
& \left. \left({x_3}^{0.6}, \{u_1^{0.7}, u_2^{0.5}\}\right), \left({x_4}^{0.5}, \{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\}\right), : x \in X \right\}
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.65. *U üzerinde tanımlı P bir bpsbe-kümesi verilsin.*

i) $P \cup P = P$

ii) $P \cup P_{\emptyset} = P$

iii) $P \cup P_U = P_U$

İspat: U üzerinde bir $P = \{(x^{f(x)}, p(x)) : x \in X\}$ *bpsbe*-kümesi verilsin.

i)

$$\begin{aligned} P \cup P &= \{(x^{\max\{f(x),f(x)\}}, p(x) \cup p(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x^{f(x)}, p(x)) : x \in X\} \\ &= P \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P \cup P_{\emptyset} &= \{(x^{\max\{f(x),0\}}, p(x) \cup I_{\emptyset}) : x \in X\} \\ &= \{(x^{f(x)}, p(x)) : x \in X\} \\ &= P \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} P \cup P_U &= \{(x^{\max\{f(x),1\}}, p(x) \cup I_U) : x \in X\} \\ &= \{(x^{1}, I_U) : x \in X\} \\ &= P_U \end{aligned}$$

□

Teorem 3.66. *U üzerinde tanımlı P_1, P_2, P_3 bpsbe-kümeleri verilsin.*

i) $P_1 \cup P_2 = P_2 \cup P_1$

ii) $P_1 \cup (P_2 \cup P_3) = (P_1 \cup P_2) \cup P_3$

İspat: U üzerinde $P_1 = \{(x^{f(x)}, p_1(x)) : x \in X\}$, $P_2 = \{(x^{f(x)}, p_2(x)) : x \in X\}$ ve $P_3 = \{(x^{f(x)}, p_3(x)) : x \in X\}$ *bpsbe*-kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} P_1 \cup P_2 &= \{(x^{\max\{f(x_1),f(x_2)\}}, p(x_1) \cup p(x_2)) : x \in X\} \\ &= \{(x^{\max\{f(x_2),f(x_1)\}}, p(x_2) \cup p(x_1)) : x \in X\} \\ &= P_2 \cup P_1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P_1 \cup (P_2 \cup P_3) &= \{(x^{\max\{\{f(x_1),\max\{f(x_2),f(x_3)\}\}}, p(x_1) \cup (p(x_2) \cup p(x_3))) : x \in X\} \\ &= \{(x^{\max\{\{\max\{f(x_1),f(x_2)\}, f(x_3)\}}, (p(x_1) \cup p(x_2)) \cup p(x_3)) : x \in X\} \\ &= (P_1 \cup P_2) \cup P_3 \end{aligned}$$

$\square$

Tanım 3.67. U üzerinde tanımlı P_1 ve P_2 bpsbe-kümeleri verilsin. P_1 ve P_2 bpsbe-kümelerinin kesişimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$P_1 \cap P_2 = \left\{(x^{\min\{f_1(x),f_2(x)\}}, p_1(x) \cap p_2(x)) : x \in X\right\}$$

Örnek 3.68. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi ve $F_1 = \{x_1^{0.7}, x_2^{0.4}, x_4^{0.5}\}$ ve $F_2 = \{x_1^{0.5}, x_2^{0.5}, x_3^{0.6}, x_4^{0.3}\}$ olsun. Burada P_1 bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned} p_1(x_1) &= \left\{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\right\}, \\ p_1(x_2) &= \left\{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}, \\ p_1(x_3) &= I_\emptyset, \\ p_1(x_4) &= \left\{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\} \end{aligned}$$

ve P_2 bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned} p_2(x_1) &= \{u_1^{0.4;0.5}, u_3^{0.3;0.3}\}, \\ p_2(x_2) &= \{u_2^{0.6;0.3}, u_3^{0.2;0.8}\}, \\ p_2(x_3) &= \{u_1^{0.4;0.5}, u_2^{0.5;0.3}\}, \\ p_2(x_4) &= \{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.5;0.4}, u_3^{0.3;0.2}\} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_1 \cap P_2 &= \{\left({x_1}^{0.5}, \{u_1^{0.4;0.5}, u_3^{0.3;0.3}\}\right), \left({x_2}^{0.4}, \{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.2;0.8}\}\right), \\ &\quad \left({x_4}^{0.3}, \{u_1^{0.3;0.5}, u_2^{0.5;0.4}, u_3^{0.3;0.2}\}\right), : x \in X\} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.69. *U üzerinde tanımlı bir P bpsbe-kümesi verilsin.*

i) $P \cap P = P$

ii) $P \cap P_\emptyset = P_\emptyset$

iii) $P \cap P_U = P$

İspat: U üzerinde bir $P = \{(x^{f(x)}, p(x)) : x \in X\}$ *bpsbe*-kümesi verilsin.

i)

$$\begin{aligned} P \cap P &= \{(x^{\min\{f(x), f(x)\}}, p(x) \cap p(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x^{f(x)}, p(x)) : x \in X\} \\ &= P \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P \cap P_\emptyset &= \{(x^{\min\{f(x), 0\}}, p(x) \cap I_\emptyset) : x \in X\} \\ &= \{(x^0, I_\emptyset) : x \in X\} \\ &= P_\emptyset \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} P \cap P_U &= \{(x^{\min\{f(x),1\}}, p(x) \cap I_U) : x \in X\} \\ &= \{(x^{f(x)}, p(x)) : x \in X\} \\ &= P \end{aligned}$$

□

Teorem 3.70. *U üzerinde tanımlı P_1, P_2, P_3 bpsbe-kümeleri verilsin.*

i) $P_1 \cap P_2 = P_2 \cap P_1$

ii) $P_1 \cap (P_2 \cap P_3) = (P_1 \cap P_2) \cap P_3$

İspat: U üzerinde $P_1 = \{(x^{f(x)}, p_1(x)) : x \in X\}$, $P_2 = \{(x^{f(x)}, p_2(x)) : x \in X\}$ ve $P_3 = \{(x^{f(x)}, p_3(x)) : x \in X\}$ *bpsbe*-kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} P_1 \cap P_2 &= \{(x^{\min\{f(x_1),f(x_2)\}}, p(x_1) \cap p(x_2)) : x \in X\} \\ &= \{(x^{\min\{f(x_2),f(x_1)\}}, p(x_2) \cap p(x_1)) : x \in X\} \\ &= P_2 \cap P_1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P_1 \cap (P_2 \cap P_3) &= \{(x^{\min\{\{f(x_1),\min\{f(x_2),f(x_3)\}\}}, p(x_1) \cap (p(x_2) \cap p(x_3))) : x \in X\} \\ &= \{(x^{\min\{\{\min\{f(x_1),f(x_2)\},f(x_3)\}}, (p(x_1) \cap p(x_2)) \cap p(x_3))) : x \in X\} \\ &= (P_1 \cap P_2) \cap P_3 \end{aligned}$$

□

Teorem 3.71. *U üzerinde tanımlı P_1, P_2, P_3 bpsbe-kümeleri verilmiş ise*

i) $P_1 \cup (P_2 \cap P_3) = (P_1 \cup P_2) \cap (P_1 \cup P_3)$

ii) $P_1 \cap (P_2 \cup P_3) = (P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap P_3)$

İspat: U üzerinde $P_1 = \{(x^{f(x)}, p_1(x)) : x \in X\}$, $P_2 = \{(x^{f(x)}, p_2(x)) : x \in X\}$ ve $P_3 = \{(x^{f(x)}, p_3(x)) : x \in X\}$ *bpsbe*-kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} P_1 \cup (P_2 \cap P_3) &= \{(x^{f(x_1)}, p(x_1) : x \in X\} \cup \{(x^{\min\{f(x_2), f(x_3)\}}, p(x_2) \cap p(x_3)) : x \in X\} \\ &= \{(x^{\max\{f(x_1), f(x_2)\}}, p(x_1) \cup p(x_2)) : x \in X\} \cap \{(x^{\max\{f(x_1), f(x_3)\}}, \\ &\quad\ p(x_1) \cup p(x_3)) : x \in X\} \\ &= (P_1 \cup P_2) \cap (P_1 \cup P_3) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P_1 \cap (P_2 \cup P_3) &= \{(x^{f(x_1)}, p(x_1) : x \in X\} \cap \{(x^{\max\{f(x_2), f(x_3)\}}, p(x_2) \cup p(x_3)) : x \in X\} \\ &= \{(x^{\min\{f(x_1), f(x_2)\}}, p(x_1) \cap p(x_2)) : x \in X\} \cup \{(x^{\min\{f(x_1), f(x_3)\}}, \\ &\quad\ p(x_1) \cap p(x_3)) : x \in X\} \\ &= (P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap P_3) \end{aligned}$$

Tanım 3.72. U üzerinde tanımlı bir P bpsbe-kümesi verilsin. P bpsbe-kümesinin tümleyeni aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$P^c := \left\{(x^{1-f(x)}, p^c(x)) : x \in X\right\}$$

Örnek 3.73. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi ve $F = \{x_1^{0.7}, x_2^{0.4}, x_4^{0.5}\}$ olsun. Eğer P bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned} p(x_1) &= \left\{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\right\}, \\ p(x_2) &= \left\{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}, \\ p(x_3) &= I_\emptyset, \\ p(x_4) &= \left\{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\} \end{aligned}$$

şeklinde verilirse U üzerinde tanımlı P bpsbe-kümesi,

$$
\begin{aligned}
P = \ & \{(x_1^{0.7}, p(x_1)), (x_2^{0.4}, p(x_2)), (x_4^{0.5}, p(x_4))\} \\
= \ & \left\{ \left(x_1^{0.7}, \left\{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\right\}\right), \left(x_2^{0.4}, \left\{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}\right), \left(x_4^{0.5}, \left\{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

ve U üzerinde tanımlı P^c bpsbe-kümesi,

$$
\begin{aligned}
P^c = \ & \{(x_1^{0.3}, p(x_1)), (x_2^{0.6}, p(x_2)), (x_4^{0.5}, p(x_4))\} \\
= \ & \left\{ \left(x_1^{0.3}, \left\{u_1^{0.2;0.7}, u_3^{0.2;0.5}\right\}\right), \left(x_2^{0.6}, \left\{u_2^{0.3;0.5}, u_3^{0.1;0.8}\right\}\right), \left(x_4^{0.5}, \left\{u_1^{0.2;0.6}, u_2^{0.3;0.5}, u_3^{0.1;0.8}\right\}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır.

Not 3.74. P, U üzerinde tanımlı bir bpsbe-kümesi olmak üzere

i) $P \cup P^c \neq P_U$

ii) $P \cap P^c \neq P_\emptyset$

Örneğin, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi ve $F = \{x_1^{0.7}, x_2^{0.4}, x_4^{0.5}\}$ olsun. Eğer P bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$
\begin{aligned}
p(x_1) &= \left\{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\right\}, \\
p(x_2) &= \left\{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}, \\
p(x_3) &= I_\emptyset, \\
p(x_4) &= \left\{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}
\end{aligned}
$$

şeklinde verilirse U üzerinde tanımlı P bpsbe-kümesi,

$$
\begin{aligned}
P = \ & \{(x_1^{0.7}, p(x_1)), (x_2^{0.4}, p(x_2)), (x_4^{0.5}, p(x_4))\} \\
= \ & \left\{ \left(x_1^{0.7}, \left\{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\right\}\right), \left(x_2^{0.4}, \left\{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}\right), \left(x_4^{0.5}, \left\{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
P^c = \ & \{(x_1^{0.3}, p(x_1)), (x_2^{0.6}, p(x_2)), (x_4^{0.5}, p(x_4))\} \\
= \ & \left\{ \left(x_1^{0.3}, \left\{u_1^{0.2;0.7}, u_3^{0.2;0.5}\right\}\right), \left(x_2^{0.6}, \left\{u_2^{0.3;0.5}, u_3^{0.1;0.8}\right\}\right), \left(x_4^{0.5}, \left\{u_1^{0.2;0.6}, u_2^{0.3;0.5}, u_3^{0.1;0.8}\right\}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır. Buradan

i)

$$\begin{aligned} P \cup P^c &= \{(x^{\max\{f(x),1-f(x)\}}, p(x) \cup p^c(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x_1^{0.7}, \{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.5;0.2}\})(x_2^{0.4}, \{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\}), \\ &\quad (x_4^{0.5}, \{u_1^{0.6;0.2}, u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\})\} \\ &\neq P_U \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} P \cap P^c &= \{(x^{\min\{f(x),1-f(x)\}}, p(x) \cap p^c(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x_1^{0.3}, \{u_1^{0.2;0.7}, u_3^{0.2;0.5}\}), (x_2^{0.4}, \{u_2^{0.3;0.5}, u_3^{0.1;0.8}\}), \\ &\quad (x_4^{0.5}, \{u_1^{0.2;0.6}, u_2^{0.3;0.5}, u_3^{0.8;0.1}\} \\ &\neq P_\emptyset \end{aligned}$$

Teorem 3.75. *U üzerinde tanımlı P_1 ve P_2 bpsbe-kümeleri verilsin.*

i) $(P_1 \cup P_2)^c = P_1^c \cap P_2^c$

ii) $(P_1 \cap P_2)^c = P_1^c \cup P_2^c$

İspat: U üzerinde $P_1 = \{(x^{f(x)}, p_1(x)) : x \in X\}$ ve $P_2 = \{(x^{f(x)}, p_2(x)) : x \in X\}$ *bpsbe*-kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} (P_1 \cup P_2)^c &= (\{(x^{\max\{f(x_1),f(x_2)\}}, p_1(x_1) \cup p_2(x_2)) : x \in X\})^c \\ &= \{(x^{1-\max\{f(x_1),f(x_2)\}}, (p_1(x_1) \cup p_2(x_2))^c) : x \in X\} \\ &= \{(x^{\min\{1-f(x_1),1-f(x_2)\}}, p_1^c(x_1) \cap p_2^c(x_2)) : x \in X\} \\ &= P_1^c \cap P_2^c \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
(P_1 \cap P_2)^c &= (\{(x^{\min\{f(x_1),f(x_2)\}}, p_1(x_1) \cap p_2(x_2)) : x \in X\})^c \\
&= \{(x^{1-\min\{f(x_1),f(x_2)\}}, (p_1(x_1) \cap p_2(x_2))^c) : x \in X\} \\
&= \{(x^{\max\{1-f(x_1),1-f(x_2)\}}, p_1^c(x_1) \cup p_2^c(x_2)) : x \in X\} \\
&= P_1^c \cup P_2^c
\end{aligned}$$

3.3 Alt *bpsbe*-Kümeler

Bu alt bölümde *bpsbe*-kümelerin alt kümelerini tanımlayacağız ve temel özelliklerini vereceğiz.

Tanım 3.76. U üzerinde tanımlı P_1 ve P_2 bpsbe-kümeleri verilsin. Eğer her $x \in X$ için $f_1(x) \leq f_2(x)$ ve $p_1(x) \subseteq p_2(x)$ oluyorsa, P_1 bpsbe-kümesi P_2 bpsbe-kümesinin bir **alt bpsbe-kümesidir** denir ve $P_1 \subseteq P_2$ ile gösterilir.

Örnek 3.77. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ parametreler kümesi ve $F_1 = \{x_1^{0.7}, x_2^{0.4}, x_3^{0.5}\}$ ve $F_2 = \{x_1^{0.9}, x_2^{0.5}, x_3^{0.6}\}$ olsun. Burada P_1 bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned}
p_1(x_1) &= \left\{u_1^{0.4;0.5}, u_3^{0.6;0.1}\right\}, \\
p_1(x_2) &= \left\{u_2^{0.6;0.2}, u_3^{0.6;0.3}\right\}, \\
p_1(x_3) &= \left\{u_1^{0.7;0.2}, u_2^{0.6;0.3}, u_3^{0.8;0.1}\right\}
\end{aligned}$$

ve P_2 bpsbe-kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned}
p_2(x_1) &= \left\{u_1^{0.3;0.6}, u_3^{0.5;0.2}\right\}, \\
p_2(x_2) &= \left\{u_2^{0.5;0.3}, u_3^{0.4;0.4}\right\}, \\
p_2(x_3) &= \left\{u_1^{0.6;0.3}, u_2^{0.5;0.4}, u_3^{0.3;0.6}\right\},
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda;

$$f_1(x_1) \leq f_2(x_1), f_1(x_2) \leq f_2(x_2), f_1(x_3) \leq f_2(x_3)$$

ve

$$p_1(x_1) \subseteq p_2(x_1), p_1(x_2) \subseteq p_2(x_2), p_1(x_3) \subseteq p_2(x_3)$$

olduğundan $P_1 \subseteq P_2$ olur.

Teorem 3.78. *P, U üzerinde tanımlı bir bpsbe-kümesi verilsin.*

i) $P \subseteq P$

ii) $P_{\emptyset} \subseteq P$

iii) $P \subseteq P_U$

İspat: U üzerinde bir $P = \{(x^{f(x)}, p(x)) : x \in X\}$ *bpsbe*-kümesi verilsin.

i) Her $x \in X$ için; $f(x) \leq f(x)$ ve $p(x) \subseteq p(x)$ olduğundan $P \subseteq P$ olur.

ii) Her $x \in X$ için; $f(x_{\emptyset}) \leq f(x)$ ve $p(x_{\emptyset}) \subseteq p(x)$ olduğundan $P_{\emptyset} \subseteq P$ olur.

iii) Her $x \in X$ için; $f(x) \leq f(x_U)$ ve $p(x) \subseteq p(x_U)$ olduğundan $P \subseteq P_U$ olur.

□

4. *bpsbe*-KARAR VERME YÖNTEMİ

Bu bölümde uygulama olarak *bpsbe*-kümelerinin üzerinde tek karar vericinin kullanılacağı bir karar verme yöntemi tanımlayacağız.

4.1 *bpsbe*-Karar Verme Yönteminin İnşası

Bu alt bölümde, *bpsbe*-karar verme yöntemini *bpsbe*-kümeleri, sezgisel bulanık kümeleri ve bulanık kümeleri kullanarak inşa edeceğiz.

Tanım 4.79. $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ bir parametreler kümesi ve "a" bir karar verici olsun. Bu durumda X üzerinde tanımlanan

$$F_a = \{x_1^{f_a(x_1)}, x_2^{f_a(x_2)}, ..., x_m^{f_a(x_m)}\}$$

kümesine a karar vericisinin **bulanık karar kümesi** denir. Bulanık karar verme kümesi karar verici değiştikçe değişecektir.

Tanım 4.80. $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ objelerin evrensel kümesi, X parametreler kümesi üzerinde tanımlı F_a bulanık karar kümesi verilsin. Bu durumda F_a ve U üzerinde tanımlanan

$$P_a = \{(x_1^{f_a(x_1)}, p_a(x_1)), (x_2^{f_a(x_2)}, p_a(x_2)), ..., (x_m^{f_a(x_m)}, p_a(x_m))\}$$

kümesine a karar vericinin **bpsbe-karar kümesi** denir. Burada $i = 1, 2, ..., m$ olmak üzere P_a bpsbe-karar kümesinin yaklaşım fonksiyonları

$$p_a(x_i) = \{u_1^{\mu_{x_i}(u_1);\nu_{x_i}(u_1)}, u_2^{\mu_{x_i}(u_2);\nu_{x_i}(u_2)}, ..., u_n^{\mu_{x_i}(u_n);\nu_{x_i}(u_n)}\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada her $i = 1, 2, ..., m$ için $p(x_i) \neq \emptyset$ olmak zorundadır. Eğer $1 \leq k \leq r$ için $p(x_k) = \emptyset$ oluyorsa x_k değeri parametre kümesine yazılmaz.

Tanım 4.81. $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ objelerin evrensel kümesi, $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ parametreler kümesi ve $i = 1, 2, ..., m$ olmak üzere P_a bpsbe-karar kümesinin $p_a(x_i)$ yaklaşım fonksiyonları verilsin. Bu durumda $j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere

$$w_a(u_j) = \frac{1}{|X|} \sum_{i=1}^{m} \chi_{p_a(x_i)}(u_j)$$

değerlerine $u_j \in U$ elemanlarının **parametre ağırlığı** denir. Burada

$$\chi_{p_a(x_i)}(u_j) = \begin{cases} 1, & u_j \in p_a(x_i), \\ 0, & u_j \notin p_a(x_i). \end{cases}$$

$p_a(x_i)$ kümesinin karakteristik fonksiyonudur. Bir eleman ne kadar parametre sağlarsa ağırlığı da o kadar büyük olacaktır.

Tanım 4.82. a karar vericisi için F_a ve $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ evreni üzerinde tanımlanan P_a bpsbe-karar kümesi verilsin. Burada $j = 1, 2, ..., n$ için

$$\alpha_a(u_j) = max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_j), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_j), ..., f_a(x_m)\mu_{x_m}(u_j)\}$$

ve

$$\beta_a(u_j) = max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_j), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_j), ..., f_a(x_m)\nu_{x_m}(u_j)\}$$

olmak üzere U üzerinde tanımlı

$$I_a = \{u_1^{\alpha_a(u_1);\beta_a(u_1)}, u_2^{\alpha_a(u_2);\beta_a(u_2)}, ..., u_n^{\alpha_a(u_n);\beta_a(u_n)}\}$$

kümesine a karar vericinin **sezgisel bulanık karar kümesi** denir.

Tanım 4.83. $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ evreni üzerinde tanımlı I_a sezgisel bulanık karar kümesi verilsin. Bu durumda $j = 1, 2, ..., n$ için

$$g_a(u_j) = \begin{cases} w_a(u_j)[\alpha_a(u_j) - \beta_a(u_j)], & \alpha_a(u_j) > \beta_a(u_j), \\ 0, & \alpha_a(u_j) \leq \beta_a(u_j). \end{cases}$$

olmak üzere U üzerinde tanımlı

$$G_a = \{u_1^{g_a(u_1)}, u_2^{g_a(u_2)}, ..., u_n^{g_a(u_n)}\}$$

kümesine a karar vericinin **bulanık sonuç kümesi** denir. Bulanık karar kümesinde istenen elemanlar öne çıkıp istenmeyen elemanlar elenecektir.

Dikkat edilirse F_a bulanık karar kümesi X üzerinde tanımlıyken G_a bulanık sonuç kümesi U üzerinde tanımlı bir bulanık kümedir.

Tanım 4.84. $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ evreni üzerinde tanımlı G_a bulanık sonuç kümesi verilsin. Burada $j = 1, 2, ..., n$ için

$$son(u_j) = \begin{cases} 1, & g_a(u_j) = max\{g_a(u_1), g_a(u_2), ..., g_a(u_n)\}, \\ 0, & g_a(u_j) \neq max\{g_a(u_1), g_a(u_2), ..., g_a(u_n)\}. \end{cases}$$

olmak üzere

$$SON_a = \{u^{son(u)} : u \in G_a\}$$

kümesine a karar vericinin **klasik sonuç kümesi** denir. Burada SON_a klasik sonuç kümesinin elemanına **sonuç** denir. Bu sunuç, a karar vericisinin istediği elemandır.

Klasik sonuç kümesi genelde tek elemanlı çıkmasına rağmen birden fazla elemanlı çıkarsa her eleman eşit kıymette demektir. Hepsi de karar vericinin kriterlerini sağladığı için karar verici içinden birini seçer. Seçmekte zorlanma olursa F_a bulanık karar kümesinin tekrar değerlendirilmesi tavsiye edilir veya yeni bir parametre eklenir.

Tanım 4.85. Bir karar vericinin sırasıyla Tanım 4.79, 4.80, 4.81, 4.82, 4.83 ve 4.84 kullanarak oluşturduğu bir *bpsbe*-kümesinden bir sonuç elde etme yöntemine ***bpsbe*-karar verme yöntemi** denir.

4.2 *bpsbe*-Karar Verme Yönteminin Algoritması

Bu alt bölümde, uygulamada kolaylık sağlaması için *bpsbe*-karar verme yönteminin algoritmasını yazacağız.

Algoritma:

Adım 1. U objeler kümesini belirle,

Adım 2. X objeleri niteleyen parametreler kümesini belirle,

Adım 3. F_a bulanık karar kümesini inşa et,

Adım 4. P_a bpsbe-karar kümesini bul,

Adım 5. Her bir $u \in U$ için $w(u)$ parametre ağırlığını bul,

Adım 6. I_a sezgisel bulanık karar kümesini bul,

Adım 7. G_a bulanık sonuç kümesini bul,

Adım 8. SON_a klasik sonuç kümesini bul.

4.3 *bpsbe*-Karar Verme Yönteminin Bir Uygulaması

Bu alt bölümde, bpsbe-karar verme yöntemine bir sayısal örnek vereceğiz.

bpsbe-karar verme yöntemini bir kişinin bir galeriden istediği kriterlere göre bir araç seçmesine uygulayalım.

İçinde 9 tane araç bulunan bir galeriden bir araç satın almak isteyen bir "a" kişinin alacağı araçta görmek istediği kriterler $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sırasıyla "ucuz", "otomatik vites", "az kullanılmış", "geniş bağaj", "düşük model yılı", "az yakıt tüketimi" parametreleri olsun.

Şimdi bpsbe-karar verme yöntemini algoritmasındaki gibi adım adım uygulayalım.

Adım 1: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ olur,

Adım 2: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ olur,

Adım 3: $F_a = \{x_1^{0.5}, x_2^{0.2}, x_3^{0.7}, x_4^{0.8}, x_5^{0.2}, x_6^{0.9}\}$ olsun,

Adım 4: Burada P_a bpsbe-karar kümesinin yaklaşım fonksiyon değerleri,

$$\begin{aligned}
p_a(x_1) &= \left\{u_1^{0.7;0.2}, u_3^{0.6;0.2}, u_4^{0.5;0.5}, u_7^{0.8;0.2}, u_8^{0.3;0.6}, u_9^{0.2;0.7}\right\}, \\
p_a(x_2) &= \left\{u_2^{0.2;0.8}, u_3^{0.8;0.1}, u_4^{0.8;0.3}\right\}, \\
p_a(x_3) &= \left\{u_1^{0.5;0.4}, u_2^{0.3;0.7}, u_4^{0.5;0.5}, u_7^{0.6;0.4}, u_8^{0.5;0.5}\right\}, \\
p_a(x_4) &= \left\{u_2^{0.4;0.6}, u_3^{0.6;0.2}, u_5^{0.5;0.5}, u_6^{0.6;0.3}, u_7^{0.2;0.8}, u_9^{0.5;0.3}\right\}, \\
p_a(x_5) &= \left\{u_1^{0.2;0.8}, u_2^{0.6;0.3}, u_5^{0.5;0.5}, u_6^{0.3;0.6}\right\}, \\
p_a(x_6) &= \left\{u_1^{0.4;0.6}, u_2^{0.6;0.3}, u_3^{0.6;0.4}, u_4^{0.2;0.8}, u_7^{0.4;0.5}, u_8^{0.3;0.6}, u_9^{0.6;0.4}, \right\},
\end{aligned}$$

olsun. Burada eğer bir parametreye karşılık hiçbir araç yoksa o parametre, parametre listesinden çıkarılır. Aksi takdirde 3. adımdaki üye olmama değerlerinin hepsi 0 çıkar.

Adım 5: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ kümesinin elemanlarının $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ kümesindeki parametrelerin ağırlıklarını bulalım.

$$\begin{aligned}
w_a(u_1) &= \frac{1}{6}\textstyle\sum_{i=1}^{6} \chi_{p_a(x_i)}(u_1) &= \frac{4}{6} = 0.66 \\
w_a(u_2) &= \frac{1}{6}\textstyle\sum_{i=1}^{6} \chi_{p_a(x_i)}(u_2) &= \frac{5}{6} = 0.83 \\
w_a(u_3) &= \frac{1}{6}\textstyle\sum_{i=1}^{6} \chi_{p_a(x_i)}(u_3) &= \frac{4}{6} = 0.66 \\
w_a(u_4) &= \frac{1}{6}\textstyle\sum_{i=1}^{6} \chi_{p_a(x_i)}(u_4) &= \frac{4}{6} = 0.66 \\
w_a(u_5) &= \frac{1}{6}\textstyle\sum_{i=1}^{6} \chi_{p_a(x_i)}(u_5) &= \frac{2}{6} = 0.33 \\
w_a(u_6) &= \frac{1}{6}\textstyle\sum_{i=1}^{6} \chi_{p_a(x_i)}(u_6) &= \frac{2}{6} = 0.33 \\
w_a(u_7) &= \frac{1}{6}\textstyle\sum_{i=1}^{6} \chi_{p_a(x_i)}(u_7) &= \frac{4}{6} = 0.66 \\
w_a(u_8) &= \frac{1}{6}\textstyle\sum_{i=1}^{6} \chi_{p_a(x_i)}(u_8) &= \frac{3}{6} = 0.5 \\
w_a(u_9) &= \frac{1}{6}\textstyle\sum_{i=1}^{6} \chi_{p_a(x_i)}(u_9) &= \frac{3}{6} = 0.5
\end{aligned}$$

Adım 6: Burada I_a sezgisel bulanık karar kümesinin üye olma ve üye olmama fonksiyon değerleri hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\alpha_a(u_1) &= max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_1), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_1), ..., f_a(x_6)\mu_{x_6}(u_1)\} \\
&= max\{(0.5)(0.7), (0.2)(0), (0.7)(0.5), (0.8)(0), (0.2)(0.2), (0.9)(0.4)\} \\
&= max\{0.35, 0, 0, 0.35, 0.04, 0.36\} \\
&= 0.36
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_a(u_2) &= max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_2), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_2), ..., f_a(x_6)\mu_{x_6}(u_2)\} \\
&= max\{(0.5)(0), (0.2)(0.2), (0.7)(0.3), (0.8)(0.4), (0.2)(0.6), (0.9)(0.6)\} \\
&= max\{0, 0.04, 0.21, 0.32, 0.12, 0.54\} \\
&= 0.54
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_a(u_3) &= max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_3), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_3), ..., f_a(x_6)\mu_{x_6}(u_3)\} \\
&= max\{(0.5)(0.6), (0.2)(0.8), (0.7)(0), (0.8)(0.6), (0.2)(0.5), (0.9)(0.6)\} \\
&= max\{0.30, 0.16, 0, 0.48, 0.10, 0.54\} \\
&= 0.54
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_a(u_4) &= max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_4), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_4), ..., f_a(x_6)\mu_{x_6}(u_4)\} \\
&= max\{(0.5)(0.5), (0.2)(0.8), (0.7)(0.5), (0.8)(0), (0.2)(0), (0.9)(0.2)\} \\
&= max\{0.25, 0.16, 0.35, 0, 0, 0.18\} \\
&= 0.35
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_a(u_5) &= max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_5), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_5), ..., f_a(x_6)\mu_{x_6}(u_5)\} \\
&= max\{(0.5)(0), (0.2)(0), (0.7)(0), (0.8)(0.5), (0.2)(0.5), (0.9)(0)\} \\
&= max\{0, 0, 0, 0.40, 0.10, 0\} \\
&= 0.40
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_a(u_6) &= max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_6), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_6), ..., f_a(x_6)\mu_{x_6}(u_6)\} \\
&= max\{(0.5)(0), (0.2)(0), (0.7)(0), (0.8)(0.6), (0.2)(0.3), (0.9)(0)\} \\
&= max\{0, 0, 0, 0.48, 0.06, 0\} \\
&= 0.48
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_a(u_7) &= max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_7), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_7), ..., f_a(x_6)\mu_{x_6}(u_7)\} \\
&= max\{(0.5)(0.8), (0.2)(0), (0.7)(0.6), (0.8)(0.2), (0.2)(0), (0.9)(0.4)\} \\
&= max\{0.40, 0, 0.42, 0.16, 0, 0.36\} \\
&= 0.42
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_a(u_8) &= max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_8), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_8), ..., f_a(x_6)\mu_{x_6}(u_8)\} \\
&= max\{(0.5)(0.3), (0.2)(0), (0.7)(0.5), (0.8)(0), (0.2)(0), (0.9)(0.3)\} \\
&= max\{0.15, 0, 0.35, 0, 0, 0.27\} \\
&= 0.35
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\alpha_a(u_9) &= max\{f_a(x_1)\mu_{x_1}(u_9), f_a(x_2)\mu_{x_2}(u_9), ..., f_a(x_6)\mu_{x_6}(u_9)\} \\
&= max\{(0.5)(0.2), (0.2)(0), (0.7)(0), (0.8)(0.5), (0.2)(0), (0.9)(0.6)\} \\
&= max\{0.10, 0, 0, 0.40, 0, 0.54\} \\
&= 0.54
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde üye olmama değerlerini bulalım

$$\begin{aligned}
\beta_a(u_1) &= max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_1), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_1), ..., f_a(x_6)\nu_{x_6}(u_1)\} \\
&= max\{(0.5)(0.2), (0.2)(0), (0.7)(0.4), (0.8)(0), (0.2)(0.8), (0.9)(0.6)\} \\
&= max\{0.1, 0, 0.28, 0, 0.16, 0.54\} \\
&= 0.54
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_a(u_2) &= max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_2), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_2), ..., f_a(x_6)\nu_{x_6}(u_2)\} \\
&= max\{(0.5)(0), (0.2)(0.8), (0.7)(0.7), (0.8)(0.6), (0.2)(0.3), (0.9)(0.3)\} \\
&= max\{0, 0.16, 0.49, 0.48, 0.06, 0.27\} \\
&= 0.49
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_a(u_3) &= max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_3), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_3), ..., f_a(x_6)\nu_{x_6}(u_3)\} \\
&= max\{(0.5)(0.2), (0.2)(0.1), (0.7)(0), (0.8)(0.2), (0.2)(0), (0.9)(0.4)\} \\
&= max\{0.1, 0.02, 0, 0.16, 0, 0.36\} \\
&= 0.36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_a(u_4) &= max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_4), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_4), ..., f_a(x_6)\nu_{x_6}(u_4)\} \\
&= max\{(0.5)(0.5), (0.2)(0.3), (0.7)(0.5), (0.8)(0), (0.2)(0), (0.9)(0.8)\} \\
&= max\{0.25, 0.06, 0.35, 0, 0, 0.72\} \\
&= 0.72
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_a(u_5) &= max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_5), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_5), ..., f_a(x_6)\nu_{x_6}(u_5)\} \\
&= max\{(0.5)(0), (0.2)(0), (0.7)(0), (0.8)(0.5), (0.2)(0.5), (0.9)(0)\} \\
&= max\{0, 0, 0, 0.40, 0.10, 0\} \\
&= 0.40
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_a(u_6) &= max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_6), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_6), ..., f_a(x_6)\nu_{x_6}(u_6)\} \\
&= max\{(0.5)(0), (0.2)(0), (0.7)(0), (0.8)(0.3), (0.2)(0.6), (0.9)(0)\} \\
&= max\{0, 0, 0, 0.24, 0.12, 0\} \\
&= 0.24
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_a(u_7) &= max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_7), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_7), ..., f_a(x_6)\nu_{x_6}(u_7)\} \\
&= max\{(0.5)(0.2), (0.2)(0), (0.7)(0.4), (0.8)(0.8), (0.2)(0), (0.9)(0.5)\} \\
&= max\{0.10, 0, 0.28, 0.64, 0, 0.45\} \\
&= 0.64
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_a(u_8) &= max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_8), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_8), ..., f_a(x_6)\nu_{x_6}(u_8)\} \\
&= max\{(0.5)(0.6), (0.2)(0), (0.7)(0.5), (0.8)(0), (0.2)(0), (0.9)(0.6)\} \\
&= max\{0.30, 0, 0.35, 0, 0, 0.54\} \\
&= 0.54
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_a(u_9) &= max\{f_a(x_1)\nu_{x_1}(u_9), f_a(x_2)\nu_{x_2}(u_9), ..., f_a(x_6)\nu_{x_6}(u_9)\} \\
&= max\{(0.5)(0.7), (0.2)(0), (0.7)(0), (0.8)(0.3), (0.2)(0), (0.9)(0.4)\} \\
&= max\{0.35, 0, 0, 0.24, 0, 0.36\} \\
&= 0.36
\end{aligned}
$$

Adım 7: U üzerinde tanımlı bulanık sonuç kümesi G_a'yı bulmak için her bir eleman için üyelik fonksiyonunun değerlerini bulalım

$$
\begin{aligned}
g_a(u_1) &= w_a(u_1)[\alpha_a(u_1) - \beta_a(u_1)] = 0.66(0.36 - 0.54) = 0 \\
g_a(u_2) &= w_a(u_2)[\alpha_a(u_2) - \beta_a(u_2)] = 0.83(0.54 - 0.49) = 0.041 \\
g_a(u_3) &= w_a(u_3)[\alpha_a(u_3) - \beta_a(u_3)] = 0.66(0.54 - 0.36) = 0.118 \\
g_a(u_4) &= w_a(u_4)[\alpha_a(u_4) - \beta_a(u_4)] = 0.66(0.35 - 0.72) = 0 \\
g_a(u_5) &= w_a(u_5)[\alpha_a(u_5) - \beta_a(u_5)] = 0.33(0.40 - 0.40) = 0 \\
g_a(u_6) &= w_a(u_6)[\alpha_a(u_6) - \beta_a(u_6)] = 0.33(0.48 - 0.24) = 0.079 \\
g_a(u_7) &= w_a(u_7)[\alpha_a(u_7) - \beta_a(u_7)] = 0.66(0.42 - 0.64) = 0 \\
g_a(u_8) &= w_a(u_8)[\alpha_a(u_8) - \beta_a(u_8)] = 0.50(0.35 - 0.54) = 0 \\
g_a(u_9) &= w_a(u_9)[\alpha_a(u_9) - \beta_a(u_9)] = 0.50(0.54 - 0.36) = 0.09
\end{aligned}
$$

olduğundan bulanık sonuç kümesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$G_a = \{u_2^{0.041}, u_3^{0.118}, u_6^{0.079}, u_9^{0.09}\}$$

Adım 8: Bu son adımda G_a bulanık sonuç kümesinden SON_a klasik sonuç kümesini elde edelim. Burada,

$$max\{0.041, 0.118, 0.079, 0.09\} = 0.118$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
son(u_2) &= 0, \quad \text{çünkü} \quad 0.041 \neq 0.118 \\
son(u_3) &= 1, \quad \text{çünkü} \quad 0.118 = 0.118 \\
son(u_6) &= 0, \quad \text{çünkü} \quad 0.079 \neq 0.118 \\
son(u_9) &= 0, \quad \text{çünkü} \quad 0.09 \neq 0.118
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$SON_a = \{u_3\}$$

klasik sonuç kümesi elde edilir. Yani a karar vericinin istediği eleman u_3 elemanıdır.

5. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler (bpsbe-kümeler) kavramını tanımladık. bpsbe-kümeler, esnek kümeler, bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler teorisinin bir harmanlamasıdır. Burada bpsbe-kümeler arasındaki küme işlemlerini tanımladık ve temel özelliklerini inceledik. Daha sonra bir bpsbe-karar verme yöntemi tanımladık ve bu yöntemin bir problem üzerinde bir uygulamasını yaptık.

Bilindiği üzere esnek kümeler, belirsizlikleri modellemek için belirsiz veri içeren birçok bilim dalına uygulanmaktadır. bpsbe-kümeler de esnek kümelerin uygulama alanlarını genişletmek için bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümelerin gücünü kullanarak daha güçlü yeni bir teori elde etmek amacıyla tanımlanmıştır.

İleride bpsbe-kümeleri üzerinde cebirsel yapılar, topolojik yapılar ve geometrik yapılar gibi matematiksel yapılar tanımlanabilir. bpsbe-kümeler grup karar verme problemlerine uygulanabilir.

KAYNAKLAR

Acar U. , Koyuncu F. and Tanay B., (2010), Soft sets and soft rings, Comput. Math. Appl. 59, 3458-3463.

Acar U. , Koyuncu F. and Tanay B., (2010), Soft sets and soft rings, Comput. Math. Appl. 59, 3458-3463.

Aktaş and Cağman N., (2007), Soft sets and soft groups, Inform. Sciences 177, 2726-2735.

Atanassov K. T., (1986), *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Fuzzy Sets and Systems 20, 87-96.

Atanassov K. T., (1999), *Intuitionistic Fuzzy Sets Theory and Applications*, Physica-Verlag Heidelberg.

Aygünoğlu A., Aygün H., (2009), Introduction to fuzzy soft groups, Computers and Mathematics with Applications, 58, 1279-1286.

Babitha K. V., Sunil J. J., (2009), Soft set relations and functions, Computers and Mathematics with Applications, 60, 1840-1849.

Chen D., Tsang E. C. C. and Yeung D. S., (2003), Some notes on the parameterization reduction of soft sets, International Conference on Machine Learning and Cybernetics

Çağman N. and Enginoğlu S., (2010), Soft set theory and uni-int decision making. European Journal of Operational Research, 207, 848-855.

Çağman N., Çıtak F. and Enginoğlu S., (2010), Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications, *Turkish Journal of Fuzzy Systems* 1, 21-35.

Çağman N., Erdoğan F. and Enginoğlu S., (2011), FP-soft set theory and its applications, Annals of Fuzzy Mathematics and informatics, 2, 219-226.

Çağman N., (2014), Contributions to the Theory of Soft Sets, Journal of New Results in Science 4, 33-41.

De, S. K., Biswas, R. ve Roy A. R., (2000), Some operations on intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 114, 477-484.

Deli İ. , Çağman N., (2015) *Intuitionistic Fuzzy Parameterized Soft Set Theory and Its Decision Making*, Applied Soft Computing 28, 109-113.

Dubois D., Prade H., (1980), *Fuzzy Set and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.

Elmas, Ç., (2003), Bulanık Mantık Denetleyiciler, Seçkin, Ankara.

El-Yagubi E. , Salleh A. R., (2013), *Intuitionistic Fuzzy Parameterised Fuzzy Soft Set*, Journal of Quality Measurement and Analysis 9, 73-81.

Feng F. , Jun Y. B. and Zhao X., (2008), Soft semirings, Comput. Math. Appl. 56, 2621-2628.

Feng F. , Liu X.Y. , Leoreanu-Fotea V. and Jun Y.B., (2011), Soft sets and soft rough sets, Inform. Sci. 181, 1125-1137.

Klir G. J., Folger T. A. (1988) *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*, Prentice-Hall.

Gong, K., Xiao, Z. and Zhang, X., (2010). The Bijective Soft Set with Its Operations. Computers and Mathematics with Applications, 60, 2270-2278.

Grzegorzewski P., (2004), Distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric, Fuzzy Sets and Systems, 148, 319-328.

Gündüz, Ç ., Bayramov, S., (2013) Some results on fuzzy soft topological spaces, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume, Article ID 835308.

İbrahim A., (2004), Gömülü Sistemlerle Bulanık Mantık (Çeviri: N. Çervatoğlu), Bileşim Yayınevi, İstanbul.

Jiang Y., Tang Y., Chen Q., Liu H., Tang J. (2010), Interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties. Computers and Mathematics with Applications, 60, 906-918.

Karaaslan F., (2016), *Intuitionistic Fuzzy Parameterized Intuitionistic Fuzzy Soft Sets with Applications in Decision Making*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 11, 607-619.

Lei Q., Xu Z., (2017), *Intuitionistic Fuzzy Calculus*, Springer.

Li D.F., (2005), Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets, Journal of computer and System Sciences, 70, 73-85.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., (2001), *Fuzzy Soft Sets*, Journal of Fuzzy Mathematics 9, 589-602.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., (2001), *Intuitionistic Fuzzy Soft Sets*, The Journal of Fuzzy Mathematics 9, 677-692.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., (2003) *Soft Set Theory*, Computers and Mathematics with Applications 45, 555-562.

Majumdar P. and Samanta S.K., (2010), Generalised fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications 59, 1425-1432.

Molodtsov D.A., (1999), Soft set theory-first results, Computers and Mathematics with Applications, 37, 19-31.

Mushrif M.M., (2006), Sengupta, S. and Ray, A.K., Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algoritm. Lecture Notes In Computer Science, 3851, 246-254.

Park C. H., Jun Y. B. and Öztürk M. A., (2008), Soft WS-Algebras. Communications of the Korean Mathematical Society, 23, 313-324.

Pawlak Z., (1982), Rough sets, Int. J. Comput. Inform. Sci. 11, 341-356.

Sezgin A. and A.O. Atagün, (2011) On operations of soft sets, Comput. Math. Appl. 61, 1457-1467.

Sulukan E., (2019), Cagman N. , Aydın Tuğçe , *Fuzzy Parameterized Intuitionistic Fuzzy Soft Sets and Their Application to a Performance-Based Value Assignment Problem*, Journal of New Theory 29, 79-88.

Sun Q-M., Zhang Z-L. and Liu J., (2008), Soft Sets and Soft Modules, Rough Sets and Knowledge Technology, Springer, China, 403-409.

Szmidt E. ve Kacprzyk J., (2000), Distances between intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 114, 505-518.

Szmidt E. and J. Kacprzyk, (2001), Entropy for intuitionistic fuzzy set, Fuzzy Sets System, vol. 118, 467-477.

Szmidt E. ve Kacprzyk J., (2006), An application of intuitionistic fuzzy set similarity measures to a multi-criteria decision making problem, International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing, 314-323.

Şen Z., (2001), Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri, Bilge Kültür Sanat, İstanbul.

Yang X., Lin T. Y., Yang J., Li Y., Yu D., (2009), Combination of interval-valued fuzzy set and soft set, Computers and Mathematics with Applications, 58, 521-527.

Yang C.F., (2011), Fuzzy soft semigroups and fuzzy soft ideals, Computers and Mathematics with Applications, 61, 255-261.

Yin Y., Li H., Jun Y. B., (2012), On algebraic structure of intuitionistic fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications, 64, 2896-2911.

Zadeh, L.A., (1965), Fuzzy Sets. Inform. and Control, 8, 338-353.

Zimmermann H. J., (1991) *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Emre SULUKAN
Doğum Tarihi : 05.01.1986
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
Telefon : 0 554 446 03 22
E-posta : esulukan60@gmail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2020
Lisans	İstanbul Üniversitesi	2012
Lise	Tokat Anadolu Lisesi	2004

Eserler:

1. Emre Sulukan, Naim Cagman, Tuğçe Aydın, *Fuzzy Parameterized Intuitionistic Fuzzy Soft Sets and Their Application to a Performance-Based Value Assignment Problem*, **Journal of New Theory** 29, (2019) 79–88.

2. Emre Sulukan, *Kriptoloji*, **Danişment Eğitim,Bilim, Kültür ve Sanat Dergisi** 1, (2017) 17-19.