BAZI (0,1) VE (-1,1) MATRİSLERİN MAKSİMUM DETERMİNANTLARI ÜZERİNE

AHMET TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOÇ. DR. ADEM ŞAHİN

Ocak - 2020

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI (0,1) VE (-1,1) MATRİSLERİN MAKSİMUM DETERMİNANTLARI ÜZERİNE

AHMET TURAN

TOKAT
Ocak - 2020

AHMET TURAN tarafından hazırlanan "**Bazı (0,1) ve (-1,1) Matrislerin Maksimum Determinantları Üzerine**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 16 Ocak 2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI' nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Adem ŞAHİN	....
Üye Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ	....
Üye Doç. Dr. Aslıhan SEZGİN	....

ONAY

....

T.C. TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİ. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Prof. Dr. Çetin ÇEKİÇ

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

09/03/2020

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

AHMET TURAN
16 Ocak 2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI (0,1) VE (-1,1) MATRİSLERİN MAKSİMUM DETERMİNANTLARI ÜZERİNE

AHMET TURAN

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ADEM ŞAHİN)

Bu tez çalışmasında ilk olarak matris tanımı ve gösterimi hakkında bilgi verildi. Hessenberg matris ve Hadamard matris başta olmak üzere bazı matris çeşitleri tanıtıldı. Determinant fonksiyonu ve Fibonacci sayıları ile ilgili temel tanım ve teoremler üzerinde duruldu. Determinant fonksiyonunun genel tanımı, ikinci ve üçüncü derece determinantların özelliklerinden faydalanılarak verildi. Determinant hesaplamada farklı bir yöntem, Alice Harikalar Diyarında'nın yazarı Charles Lutwige Dodgson tarafından 1866'da bir makaleyle tanıtılan Dodgson yoğunlaşma metodu anlatıldı. Dodgson yoğunlaşma metodunun lineer denklem sistemlerinin çözümünde nasıl kullanılacağı anlatıldı. Daha sonra özel durumlara sahip bir alt Hessenberg matrisinin determinantının matrisin derecesine karşılık gelen Fibonacci sayısına eşit olduğu gösterildi. Herhangi bir $n\times n$ alt Hessenberg matrislerin maksimum determinantının Fibonacci sayıları ile olan ilişkisi incelendi. Elemanları ± 1 olan ve özel şartlara sahip matrislerin maksimum determinantları incelendi. Son bölümde BIBD, SBIBD tasarımları ve insidant matrisleri tanıtıldı. Tüm (-1, 1) matrisler için eşdeğer SBIBD sonuçları kullanılarak maksimum determinant sınırları veya maksimum determinant için alt sınır değerleri incelendi.

2020, 68 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Hessenberg matris, Hadamard matris, Dodgson yoğunlaşma metodu, Maksimum determinant, Fibonacci sayıları, SBIBD.

ABSTRACT

MASTER THESIS

ON THE MAKSIMUM DETERMINANTS OF MATRIX THAT SOME (0,1) AND (-1,1)

AHMET TURAN

TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ADEM ŞAHİN)

In this thesis, firstly; information about the definition and representation of matrix is given. Various matrix types including mainly Hessenberg matrix and Hadamard matrix are introduced. Basic definitions and theories on Determinant function and Fibonacci numbers are emphasized. The general definition of Determinant function is given by using then features of second and third degree determinants. A different method of determinant calculating called "The Dodgson Condensation method" which was introduced in an essay in 1866 by Charles Lutwidge Dodgson, the author of Alice in Wonderland, is explained in the thesis. It is explained how to use the Dodgson condensation method in solving linear equation systems. Then, it is indicated that the determinant of a lower Hessenberg matrix which has special conditions is equal with the Fibonacci number corresponding to the degree of matrix. The relation between the maximum determinant of any $n \times n$ lower Hessenberg matrices and Fibonacci numbers is examined. The maximum determinants of matrices which have ± 1 elements and special conditions are investigated. In the last chapter, BIBD, SBIBD designs and incidence matrices are introduced. For all (-1, 1) matrices, the maximum determinant boundaries or the lower bounds values for maximum determinant are examined using equivalent SBIBD results.

2020, 68 PAGE

KEYWORDS: Hessenberg matrix, Hadamard matrix, Dodgson condensation method, Maximum determinants, Fibonacci numbers, SBIBD.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu tezimin her safhasında bana yol gösteren, maddi ve manevi desteğini sürekli hissettiğim danışmanım, çok kıymetli hocam Doç. Dr. Adem ŞAHİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte manevi desteklerini her daim hissettiğim canım annem Zekiye'ye, sevgili kardeşim Emine'ye, biricik eşim Merve'ye ve oğlum Yusuf Hamza'ya sonsuz sevgilerle.

AHMET TURAN
Ocak 2020

SİMGELER

Simgeler	Açıklamalar
$\sim$	yarı eşdeğer
$\approx$	eşdeğer
F_n	n'inci Fibonacci sayısı
A^T	A matrisinin transpozu
$\lvert A\rvert$	A matrisinin determinantı
Δ_n	A_n matrisinin determinantı
D_n	A_n matrisinin maksimum determinantı
α_{ij}	a_{ij}'nin kofaktörü
$\in$	Satır vektörü
δ'	Satır vektörünün transpozu
$M_{m,n}(F)$	F cismi üzerinde tanımlı tüm $m \times n$ matrisler kümesi
$\mathbb{R}^{m\times n}$	$\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı tüm $m \times n$ matrisler kümesi
$(0,1)$	Elemanları 0 ve 1 olan matrisler
$(-1,1)$	Elemanları -1 ve 1 olan matrisler
$\bigotimes$	Kronecker çarpımı

1. GİRİŞ ve LİTERATÜR ÖZETİ

Fibonacci 1170 yılında Bonacci ailesinin bir ferdi olarak Pisa'da doğdu. Babası Guglielmo (William), oğlunun kendisi gibi ticaret yapmasını isteyen başarılı bir tüccardı. Guglielmo, 1190'da Cezayirin Bugia'ya (şimdi Baugie) gümrük tahsildarı olarak atandı. Oğlu Leonardo'nun hesaplama tekniklerini öğrenmesi için yanında Bugia'ya götürdü. Bugia'da Fibonacci'ye Hint-Arap sayısal sistem ve hesaplama teknikleriyle ilgili ilk eğitimini veren müslüman bir okulun yöneticisiydi. Bu yönetici Fibonacci'yi, El-Harizmi'nin Kitab-ül Muhtasar fi Hesab ül Cebr vel Mukabele adlı eseri ile tanıştırmıştır.(Cebir kelimesi bu kitabın başlığından gelmektedir.)

Bir yetişkin olarak Fibonacci Mısır, Suriye, Yunanistan, Fransa ve Konstantinapolise sık sık iş gezileri yaptı. Buralarda kullanılan çeşitli aritmetik sistemleri inceledi ve yerli akademisyenlerle görüş alışverişinde bulundu. Fibonacci 1200 yılında Pisa'ya geri döndü. Roma numaralandırma sistemine göre zerafeti ve üstünlüğünden Hint-Arap sayı sistemlerini İtalya'da kullanılması için çalışmalara başladı. 1202'de öncü eseri Liber Abaci'yi yayınladı. Liber Abaci, aritmetik ve temel cebiri, Hint-Arap sayı sistemlerini Avrupa'ya tanıtmıştır.

Fibonacci'nin 1240 yılında ölümünden sonra, İtalyan tüccarlar Hint-Arap sisteminin gücünü takdir etmeye başladı ve yavaş yavaş ticari işlemler için kabul etti. Onaltıncı yüzyılın sonunda, Avrupanın çoğu Hint-Arap sayı sistemlerini kabul etmişti. Liber Abaci, iki yüzyıldan fazla bir süre Avrupada hantal Roma sayı sistemlerinin yerine Hint-Arap sayı sisteminin geçmesinde önemli bir rol oynamıştır.

Fibonacci'nin klasik kitabı Liber Abaci'de bir tavşan problemi karşımıza çıkar. Bu problemin çözümünde elde edilen bir sayı dizisi vardır. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots$ bu sayılara Fibonacci sayıları denir ve bu diziyede Fibonacci dizisi denir. Fibonacci dizisi en ilgi çekici sayı dizilerinden biridir. Profesyonel ve amatör matemetikçilere varsayım yapma ve matematik ufkunu genişletme konusunda geniş fırsatlar sunmaya devam etmektedir.

Fibonacci dizisine daha dikkatli bakıldığında etkileyici bir özelliği olduğu görülür. İlk ikisi hariç her Fibonacci sayısı hemen önceki iki Fibonacci sayısısının toplamıdır. Bu gözlem F Fibonacci sayısının aşağıdaki rekürans (yineleme) tanımını verir.

$$\begin{aligned}
& F_n; \\
F_1 &= F_2 = 1 && \text{(Başlangıç koşulları)} \\
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 3 && \text{(Tekrarlama ilişkisi)}
\end{aligned}$$

Fibonacci sayıları doğada; ağaçlarda, çiçeklerde, ayçiçeğinde, çam kozalaklarında, enginarda, ananasda, erkek arı popülasyonu gibi birçok yerde karşımıza çıkmaktadır (Koshy, 2001).

Doğada olduğu gibi biliminde birçok dalında karşımıza çıkmaktadır. Biyoloji, kimya, kriptoloji ve elektrik mühendisliği alanlarında geniş uygulama alanı bulmaktadır. Matematiğinde hemen hemen her dalında (sayılar teorisi, toplanabilme teorisi, diferansiyel denklemler, olasılık, istatistik, nümerik analiz, lineer cebir) kullanılmaktadır.

Genellikle matematikte çok değişkenli bir olguyu tek bir sayı ile ilişkilendirmek faydalıdır ve bunun güzel bir örneği determinantlardır. Bazı özel matrislerin determinantları Fibonacci sayılarını vermektedir.

Determinantlar 18.yy da Leibniz, Maclaurin, Cramer ve Laplace'ın çalışmalarındaki denklemler teorisi ile kademeli olarak ortaya çıkmıştır. 19.yy gelindiğinde önemi giderek artan bir matematik alanı haline gelmiştir. Gauss, Cauchy ve Cayley konuyla ilgili önemli sonuçlar üretmişlerdir ve Alman matematikçi Karl Jakobi (sonuncusunu 1841 yılında yayınladığı) konuyu matematiksel akım haline getiren üç ana makale yayınlamıştır. Determinantların uygulama alanları gün geçtikçe artmıştır.

Bir A matrisinin determinantı matris hakkında geometrik ve cebirsel bilgi sağlamaktadır. Geometrik olarak alan, hacim hesabında kullanılabilir. Cebirsel olarak matrisin tersinir olup olmadığının belirlenmesi ve matrisin özdeğerlerinin bulunması gibi uygulamalarda kullanılabilir. Ayrıca mühendislik, fizik, kimya gibi alanlarda determinantlara ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin kuantum mekaniğinde moleküler orbital teoresi kullanılarak moleküllerin (özeliikle π elektron sistemleri) enerji seviyelerini belirlemek için determinantlardan faydalanılabilir (Rice ve Torrence, 2007).

Bazı özel matrislerin determinantının maksimum sınırlarından bahsetmek mümkündür.

1) Williamson (1946), "Determinant Whose Elements Are 0 and 1" adlı eserinde; Hadamard (1893) her bir elemanının mutlak değeri 1'i geçmediği n'inci derece determinantların maksimum değerinin $n^{\frac{n}{2}}$ olduğu kanıtlamıştır. Ayrıca bu maksimum değerin yalnızca, determinantın her bir elemanı ± 1 değerine sahipse ve $n = 1,\ 2$ veya $n \equiv 0\ (mod 4)$ olduğunda elde edilebileceğini göstermiştir. Bu eserde $n \neq 0 (mod 4)$ olduğunda herbir elemanı ± 1 olan K_n matrislerinin determinantını araştırmıştır. Özellikle $n = 7$ olduğunda, böyle bir determinant için maksimum değerin $2^6 \cdot 9$ olduğu ve bu değere sahip sadece bir tür determinant olduğunu göstermiştir. K_n, $n = 4m$ ve $n = 9,\ 10,\ 11$ olduğunda oluşan özel matrislerin determinantının maksimum değerinin varlığını incelemiştir.

2) Ching (1993), "The Maximum Determinant of an $n \times n$ Lower Hessenberg $(0, 1)$ Matrix" adlı eserinde; bir alt Hessenberg $(0, 1)$ matrisinin determinantı için kesin bir üst sınır bulmuş ve bu üst sınırın Fibonacci sayılarına eşit olduğunu kanıtlamıştır.

3) Fallat ve Van Den Driessche (1997), "Maximum determinant of $(0, 1)$ matrices with certain constant row and column sums" adlı eserinde; sabit satır toplamları (satır toplamları ve sütun toplamları) k olan $n \times n$ tekil olmayan $(0, 1)$ matrislerin deteminantının maksimum mutlak değerini araştırmıştır. $n \neq 4$ ve $k = 2$ için bu maksimum determinant $n = 3t$ veya $3t + 2$ ise 2^t ve $n = 3t + 1$ ise 2^{t-1} olarak bulmuştur. Bu matrislerin bir altkümesinde simetrik ve sıfır ize sahip olanlar

(grafikleri k derece regular), $k = 2$ için maksimum değeri değiştirmezler. Bu sınırlı sınıf için $n \geq 7$, $k = n - 3$ olduğunda, determinantın maksimum mutlak değeri $(n-3) \cdot 3^{\left(\frac{n}{4}\right)-1}$ olduğunu bulmuştur. Bu maksimum değer, daha büyük sınıflar için determinantın maksimumum mutlak değerinin bir alt sınırını verir, ancak genel olarak bu sınır net değildir. Belirli n ve k'lar için diğer determinant değer ve sınırlarını bulmuştur.

4) Neubauer ve Radcliffe (1997), "The Maximum Determinant of ± 1 Matrices" adlı eserinde; ilk olarak Barba (1933) tarafından verilmiş olan, $n \equiv 1\,(mod\ 4)$ boyutunda ± 1 matris değerinin sınırı için yeni bir kanıt verilmiş. A. E. Brouwer'in (1983) bir yapısını uyarlayarak, sınırın sonsuz sayıda n değeri için keskin olduğunu göstermek için örnekler verilmiştir. Bu da H. Ehlich ve M. Wajhos (1964) tarafından $n \equiv 2\,(mod\ 4)$ boyutunda ± 1 matrisin determinantı için verilen sınırlara ulaşan sonsuz bir örnek ailesi vermiştir. $n \equiv 3\,(mod\ 4)$ için, Ehlich (1964) tarafından verilen sınırın $\frac{1}{3}$'ünden biraz daha fazlasını elde eden sonsuz bir örnek ailesi olusturulmuş.

5) Koukouvinos, Mitrouli ve Seberry (2000), "Bounds on the maximum determinant for $(1, -1)$ matrices" adlı eserinde; Hadamard (1893) varsayımının doğru olduğunu ve tüm $t \geq 1$ için $4t$ dereceli bir Hadamard matrisi olduğu varsayılmıştır. Tüm ± 1 matrisler için maksimum determinant veya maksimum determinant için alt sınır oluştururken eşdeğer $SBIBD\,(4t-1, 2t-1, t-1)$ sonuçları kullanılmıştır. Özellikle 100'den küçük eşit tüm mertebeler için sayısal sonuçlar verilmiştir.

6) Cahill ve ark. (2002), "Fibonacci determinants" adlı eserinde; Fibonacci sayılarının bazı özel matrislerin determinantlarına eşit olduğundan bahsetmiştir.

7) Cahill ve Narayan (2004), "Fibonacci and Lucas Numbers as Tridiagonal Matrix Determinants" adlı eserinde üçgensel matrislerin determinantlarının Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkiden bahsetmiştir.

8) Brent ve Osborn (2013), "On Minors of Maximal Determinant Matrices" adlı eserinde; Chon(1965) tarafından kanıtlanmış olan, n dereceli bir Hadamard matrisin $m > \frac{n}{2}$ dereceli uygun bir Hadamard altmatrisi olmadığı sonucundan faydalanarak bu sonucu, Hadamard matrislerin, altmatrislerinin maksimum determinantına genellemiş ve $\frac{n}{2}$ uzunluğundaki aralığın izin verilen derecenin dışında olduğunu göstermiştir. Matrislerin maksimum determinant minörlerinin kare toplamları için daha düşük bir sınır hakkında bir varsayım yapmış ve bunu destekleyecek kanıtlar vermiştir. $n \leq 21$ dereceli matrislerin maksimum determinant minörlerinin aldıkları değerlerin tabloları verilmiş ve veriler üzerinde bazı gözlemler yapılmıştır. Sonuç olarak tabloları hesaplamak için kullanılan algoritmalar tarif edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Taşcı, 2001) F bir cisim ve $(a_{ij}) \in F$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya matris denir. $i = 1, 2, ..., m$ için

$$r_i = [a_{i1}, a_{.2}, ..., a_{in}]$$

ifadesine matrisin satırı ve $j = 1, 2, ..., n$ için

$$c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

ifadesine de matrisin sütunları denir. m satırlı ve n sütunlu bir matrise $m \times n$ boyutlu (mertebeli, dereceli) ya da kısaca bir $m \times n$ matris denir. i-yinci satır ve j-yinci sütunun kesişiminde bulunan cismin elemanına matrisin (i, j)-yinci elemanı denir. Matris kısa bir şekilde $A = (a_{ij})_{m \times n}$ notasyonu ile gösterilir. Elemanları F cismine ait olan tüm $m \times n$ matrislerin kümesi $M_{m \times n}(F)$ veya $M_{m,n}(F)$ ile gösterilir. Özel olarak $F = \mathbb{R}$ ise $\mathbb{R}^{m \times n}$ gösterimi kulanılacaktır.
Eğer bir matrisin satır ve sütunları eşit ise bu matrise kare matris denir.

Tanım 2.1.2. (Horn veJohnson, 1990) $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(F)$ olmak üzere A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrise A'nın transpozu denir ve A^T ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. (Golup ve Van Loan, 1996) $A = (a) \in \mathbb{R}$ ise, A'nın determinantı a'dır ve $\det(A) = a$ veya $|A| = a$ ile gösterilir. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nin determinantı, $(n-1)$'inci derece determinantlar cinsinden

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} \det(A_{ij})$$

şeklinde tanımlanır. Burada A_{ij}, A'nın i'yinci satır ve j'yinci sütunu silinerek elde edilen bir $(n-1)\times(n-1)$ matristir.

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere determinantın bazı özellikleri şöyledir;

i) $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$

ii) $\det\left(A^T\right) = \det(A)$

iii) $\det(c.A) = c^n.\det(A)$

iv) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ tersinirdir.

Tanım 2.1.4. (Taşcı, 2001) A matrisinin alt matrislerinin determinantlarına A nın minörleri denir ve $\det A_{ij}$ şeklinde gösterilir.

$(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ işaretli minörüne a_{ij} elemanının kofaktörü denir ve α_{ij} ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. (Taşcı, 2001) $A = (a_{ij})$ $n\times n$ bir kare matris ve $\alpha_{ij}; a_{ij}$'nin kofaktörü olsun. Bu takdirde A matrisinin adjointi $adjA$ ile gösterilir ve

$$adjA = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.6. (Horn ve Johnson, 1990) Her satır ve sütununda sadece bir elemanı 1 ve diğer bütün elemanları 0 olan $P \in M_{n\times n}$ matrisine permütasyon matrisi denir. Bu tür matrisler ile çarpma, çarpılan matrisin satırlarında veya sütunlarında permütasyon etkisi yapar. Örneğin;

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}$$

permütasyon matrisi ile

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matrisini soldan çarparsak

$$P. \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olup satırlarında permütasyon etkisi yapmıştır, yani birinci satırla ikinci satırı, ikinci satırla birinci satırı değiştirmiş ve üçüncü satırı değiştirmemiştir. Genel olarak $A \in M_{m\times n}$ matrisini bir permütasyon matrisi $P \in M_{m\times m}$ ile soldan çarpılması ile A'nın satırlarında; $A \in M_{m\times n}$ matrisini bir permütasyon matrisi $P \in M_{n\times n}$ ile sağdan çarpılması A'nın sütunlarında permütasyon etkisi yapar.

***Örnek* 2.1.7.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix}$$

matrisini sırası ile sol ve sağ taraftan

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

permütasyon matrisi ile çarparsak;

$$P.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A.P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 34 & 13 & 21 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bir permütasyon matrisinin determinantı ± 1 dir, böylece permütasyon matrisleri kesinlikle tersinirdir. Permütasyon matrisleri genel olarak çarpılarak elde edilmese de iki permütasyon matrisinin çarpımı yine bir permütasyon matrisidir.

Tanım 2.1.8. (Horn ve Johnson, 1990) $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ matrisinde eğer $i < j+1$ için $a_{ij} = 0$ oluyorsa A matrisine üst Hessenberg matrisi denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{43} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ matrisinde eğer $j < i+1$ için $a_{ij} = 0$ oluyorsa A matrisine alt Hessenberg matrisi denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.9. (Golup ve Van Loan, 1996) $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrisinde $A^T A = I$ eşitliği sağlanıyor ise A matrisine ortogonal matris denir.

Tanım 2.1.10. (Street ve ark., 1972) Bileşenleri $(1, -1)$ ve satır vektörleri ortogonal olan matrise Hadamard matrisi denir. Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri birer Hadamard matristir.

Lemma 2.1.11. (Street ve ark., 1972) H, $h \times h$ tipinde bir Hadamard matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler sağlanır.

a) $HH^T = hI_h$
b) $|\det H| = h^{\frac{1}{2}h}$
c) $HH^T = H^T H$
d) Hadamard matrisleri satır ve sütun permütasyonu ile veya satır ve sütunlarını -1 ile çarparak diğer Hadamard matrislerine dönüştürülebilir. Bu yöntemle birbirinden elde edilebilecek matrisler H-eşdeğer olarak adlandırılır.
e) Her Hadamard matrisi, ilk satır ve sütunundaki her elemanı $+1$ olan bir Hadamard matrisine H-eşdeğerdir. (Bu ikinci formun matrislerine normalleştirilmiş denir.)
f) n pozitif tamsayı olmak üzere bir Hadamard matrisin derecesi $1, 2$ veya $4n$ dir.

Tanım 2.1.12. (Koshy, 2001) n'inci Fibonacci sayısı F_n olmak üzere;

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 3 \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan sayılara Fibonacci sayıları denir. Bu sayıların oluşturduğu sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Fibonacci sayılarının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.13. (Lucas, 1876)

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

İspat. Fibonacci rekürans (yenileme) bağıntısı yardımıyla;

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ F_3 &= F_5 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

elde edilir.

Teorem 2.1.14. (Lucas, 1876)

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$$

İspat. Fibonacci rekürans (yenileme) bağıntısı yardımıyla;

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_2 - F_0 \\
F_3 &= F_4 - F_2 \\
F_5 &= F_6 - F_4 \\
&\vdots \\
F_{2n-3} &= F_{2n-2} - F_{2n-4} \\
F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.15. (Lucas, 1876)

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

İspat.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{2i} &= \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} \\
&= F_{2n+2} - 1 - F_{2n} \\
&= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1 \\
&= F_{2n+1} - 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.2. Determinant Üzerine

Bu bölümde vereceğimiz determinant tanımı Ferrar (1957)'ın Algebra kitabından alınmıştır. Önce ikinci ve üçüncü dereceden determinantlar tanımlanacaktır. Daha sonra n'inci dereceden determinantların genel tanımı verilecektir.

Determinantlar lineer denklem sistemlerinin çözümü ile yakından ilişkilidir.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned}$$

sistemini ele alalım. Bu sistemdeki iki denklemden en az birindeki x ve y sayı çiftinin sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Bu denklemlerden $b_2(a_1x + b_1y) - b_1(a_2x + b_2y) = 0$ elde edilir ve bu durumda $(a_1b_2 - a_2b_1)x = 0$ dır.
Benzer şekilde, $(a_1b_2 - a_2b_1)y = 0$ elde edilir. Bu durumda $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ dır.
$a_1b_2 - a_2b_1$ bir determinant örneği olarak genellikle

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (2.1)$$

şeklinde yazılır. İki satır ve iki sütundan oluştuğundan determinantın derecesi ikidir ve a_1b_2 önde gelen köşegen terimi olarak adlandırılır.

Determinantın bariz bir özelliği vardır. Eğer (2.1) denkleminde a_1 ve b_1, a_2 ve b_2 yer değiştirirse $a_1b_2 - a_2b_1$ yerine $b_1a_2 - b_2a_1$ olur. Bu (2.1)'in iki sütununun yer değiştirilmesiyle benzer terimleri a_1b_2 ve a_2b_1'i farklı bir sırayla ve zıt işaretli olarak yeniden üretir.

Yine x, y ve z sayıları sıfırdan farklı sayılar olsun.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \qquad (2.2) \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \qquad (2.3) \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \qquad (2.4) \end{aligned}$$

(2.3) ve (2.4) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}(a_2b_3 - a_3b_2)\,x - (b_2c_3 - b_3c_2)\,z &= 0,\\ (a_2b_3 - a_3b_2)\,y - (c_2a_3 - c_3a_2)\,z &= 0,\end{aligned}$$

ve (2.2)'nci eşitlikten,

$$z\,(a_1\,(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1\,(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1\,(a_2b_3 - a_3b_2)) = 0$$

olur. z'nin katsayılarını

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

şeklinde yazabiliriz ve bu katsayıları Δ ile gösterelim. Sonuç olarak $z\Delta = 0$ dır. Benzer işlemler x ve y için yapılırsa aynı Δ katsayısına sahip oldukları görülecektir. Bu durumda $x\Delta = 0$, $y\Delta = 0$ yazabiliriz. x, y ve z sıfırdan farklı olduğundan $\Delta = 0$ olur.

Δ sayısı genellikle

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılır. Üç satır ve üç sütundan oluştuğu için determinantın derecesi üçtür ve $a_1b_2c_3$ önde gelen köşegen terimi olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + ... + k_1z &= 0\\ a_2x + b_2y + ... + k_2z &= 0\\ &\vdots\\ a_nx + b_ny + ... + k_nz &= 0\end{aligned}$$

sistemini ele alalım. Bu sistemdeki tüm denklemlerin x, $y, ..., z$ değerleri sıfırdan farklı ise bu denklemlerin ortak çözümlerinden elde edilen katsayıların sıfır olması gerekir. Katsayıların bu fonksiyonu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & k_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & k_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & k_n \end{vmatrix}$$

ile uygun şekilde belirtilebilir ve n'inci dereceden determinant olarak okunur. $a_1 b_2 ... k_n$ önde gelen köşegen terimi olarak adlandırılır.

İkinci derece determinantı kullanarak üçüncü derece determinantları belirlediğimiz gibi üçüncü derece bir determinantı kullanarak dördüncü derece bir determinantı tanımlayabiliriz. Aynı şekilde adım adım n'inci derece determinantı tanımlayabiliriz. Ancak burada tanıma, üçüncü dereceden determinantların belirli özellikleri incelenerek, her bir determinant derecesi için bu özelliklerin korunduğu bir n'inci dereceden determinant tanımlanarak ulaşılmıştır (Ferrear, 1947).

Üçüncü derece bir determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ifadesinin açılımı olan

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \quad (2.5)$$

çok terimlisine eşittir.

Aşağıdaki durumların hepsi üçüncü derece bir determinant için geçerlidir.

(I) (2.5) ifadesi

$$\sum \pm a_r b_s c_t$$

biçimindedir, buradaki r, s, t değerleri belirli bir sırada ve tekrarlama olmaksızın $1, 2, 3$ 'e altı değişik yolla eşlenir.

(II) Önde gelen köşegen terimi $a_1b_2c_3$ ve işareti $+$ dır.

(III) İkinci derece determinantta olduğu gibi, (2.5) ifadesinde iki harften birinin değişmesi aynı terim kümesini farklı bir sırada ve zıt işaretli olarak yeniden üretir. Örneğin a ve b (2.5) de değiştirildiğinde (2.5)'in terimlerinden oluşan ancak farklı bir sırada ve zıt işaretli olan

$$+b_1a_2c_3 - b_1a_3c_2 + b_2a_3c_1 - b_2a_1c_3 + b_3a_1c_2 - b_3a_2c_1$$

ifadesi elde edilmiştir.

Üçüncü derece bir determinantın üç temel özelliği incelenmiş olup şimdi bu üç temel özellikten faydalanarak n'inci dereceden determinantın tanımı yapılacaktır.

Tanım 2.2.1. Aşağıda verilen üç temel özelliği sağlayan Δ_n katsayılar fonksiyonuna n'inci dereceden determinant denir.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & j_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & j_2 & k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & j_n & k_n \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

Δ_n'in üç temel özelliği:

(I) Bu formun bir ifadesi

$$\sum \pm a_r b_s ... k_q \tag{2.7}$$

biçimindedir, burada $r, s, ..., q$ değerleri toplamda $n!$ sırayla ve tekrarlama olmaksızın $1, 2, ..., n$ değerlerine eşlenir;

(II) Önde gelen köşegen terimi $a_1b_2 \ ... \ k_n$ ve işaret $+$ dır;

(III) (2.7) ifadesinde iki harften birinin değişmesi aynı terim kümesini farklı bir düzende ve herhangi bir terimin önündeki işaretin tersi olacak şekilde yeniden üretir.

Devam etmeden önce tanımın $a,\ b, ...,\ k$'nın bu özellikleri sağlayan tek fonksiyonu olduğunu ispatlamamız gerekiyor. Bu ispat aşağıda 4 ana adıma ayrılmıştır.

1.Adım. (2.6)'nın sütunlarına karşılık gelen $a, b, ..., k$ harflerini herhangi bir sırayla aşağıdaki gibi,

$$...d, g, a, ...p, ...q, ... \qquad (2.8)$$

yazıldığı varsayılmıştır. Birbirinin yanında duran iki harften oluşan bir değişime komşu değişimi denir. Herhangi bir p ve q harfini aralarında m tane harf olacak şekilde (2.8) düzeninde alınır. Her birinde p'nin bir sağa hareket ettirildiği $m + 1$ komşu değişimiyle en son p'nin q dan sonra geldiği aşamaya ulaşırız. Her biri q'nun sola hareket ettirildiği m komşu değişimiyle p ve q'nun yer değiştirdiği (2.8) sırasının yeniden üretildiği bir aşamaya ulaşırız. Bu aşamaya $2m + 1$ komşu değişimiyle ulaşılmıştır.
(2.7) de tüm işaretleri $2m + 1$ kez değiştirirsek, ilk işaretin zıttı olan işaretleri elde ederiz. Buna göre, (III) tanımının koşulu, harflerin komşu değişimleri için sağlanmaktadır, harflerin her değişimi için kendiliğinden yerine getirilir.

2.Adım. (I), (II), (III) koşulları determinantın (ikinci derecenin)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

değerini $a_1b_2 - a_2b_1$ olarak sabitler. (I) ve (II) ye göre determinantın değeri $+a_1b_2 \pm a_2b_1$ olmalıdır ve (III) e göre, a ve b nin değişimi işaretleri değiştirmeli, böylece $a_1b_2 + a_2b_1$ olamaz.

3.Adım. Öyleyse (I), (II), (III) koşullarının $(n - 1)$ dereceli bir determinantın değerini sabitlemek için yeterli olduğunu varsayalım. (2.7)'ye göre determinant Δ_n içinde a_1'in olduğu bir dizi terim içerir; bu terim kümesi

$$a_1 \sum \pm b_s c_t ... k_q \qquad (2.9)$$

dur ve (2.7) ile Δ_n'e uygulandığı şekilde;

i) $2, 3, ..., n$ değerlerini bir düzende ve tekrarlama olmadan $s, t, ..., q$ ile eşlemenin olası yolları toplam $(n-1)!$ kadardır.

Ayrıca (II)'nin Δ_n'e uygulandığı şekilde,

ii) $b_2c_3...k_n$ teriminin önündeki işaret $+$'dır.

Son olarak (III)'ün Δ_n'e uygulandığı şekilde,

iii) $b, c, ..., k$ harflerinden herhangi ikisinden birinin değişimi (2.9) boyunca işaretleri değiştirir.

Dolayısıyla (I), (II), (III) koşullarının $n-1$ derecesinin bir determinantının değerini belirlediği hipotezimiz ile a_1'in sahip olduğu (2.7) nin terimleri

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \cdots & k_2 \\ b_3 & c_3 & \cdots & k_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & c_n & \cdots & k_n \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

tarafından verilmektedir.

Bu $n-1$ derecesinin bir determinantının (I), (II), (III) koşulları ile tanımlandığı varsayamına göre $a_1b_2,\ a_1b_3, ...,\ a_1b_n$ içeren (2.7) deki tüm terimlerin işaretlerini sabitler.

4.Adım. (2.7)' deki a ve b terimlerinin yer değiştirmesi (III)'üncü özelliğe göre tüm terimlerin işaretlerini değiştirmelidir. Dolayısıyla b_1'in sahip olduğu (2.7)'nin terimleri

$$-b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & \cdots & k_2 \\ a_3 & c_3 & \cdots & k_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & c_n & \cdots & k_n \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

tarafından verilmektedir. (2.11) için $b_1a_sc_t...k_q$ teriminin işaretini, (2.10) daki $a_1b_sc_t...k_q$ teriminin işaretininin tam tersidir.

b ile c, c ile d, ..., j ile k arasındaki komşu değişimleri (2.7)'nin

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \cdots & k_2 \\ b_3 & c_3 & \cdots & k_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & c_n & \cdots & k_n \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & \cdots & k_2 \\ a_3 & c_3 & \cdots & k_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & c_n & \cdots & k_n \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & k_2 \\ a_3 & b_3 & \cdots & k_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \cdots & k_n \end{vmatrix} -$$

$$... + (-1)^{n-1} k_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & j_2 \\ a_3 & b_3 & \cdots & j_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \cdots & j_n \end{vmatrix} .$$

biçimini alması gerektiğini göstermektedir.

Bir başka deyişle, eğer (I), (II), (III) şartları ile $n-1$ derecesinin bir determinantını tanımlanıyor ise, o zaman n derecesinin bir determinantını da tanımlanır. Ancak 2'nci derecenin bir determinantı tanımlanır ise buradan tümevarımla herhangi bir derecenin determinantı da tanımlanabilir.

3. DETERMİNANT HESAPLAMADA FARKLI BİR YÖNTEM DODGSON YOĞUNLAŞMA METODU

Bu kısımda Dodgson yoğunlaşma metodu verilecektir. Bu yöntemin mucidi Alice Harikalar Diyarında'nın yazarı olan Lewis Carrol takma adıyla bilinen Peder Charles Lutwige Dodgson'dur (Aynı zamanda Oxford Üniversitesindeki 39 kolejden en büyüğü olan Chris Church'te Matematik öğretmeniydi) (Rice ve Torrence, 2007). Dodgson 1866'da Londra Kraliyet Derneği Bildirilerinde, determinant hesaplarında kullanmak için geliştirdiği "yoğunlaşma metodu" adını verdiği yöntemi bir makaleyle tanıttı. Makalesinde yoğunlaşma metodu için "şimdiye kadar kullanılan yöntemlerden daha kısa ve basit olduğunu" söyledi. Ayrıca 3×3 ve 4×4 'lük matrisler için yöntemini kanıtladı (Donor ve ark., 2016).

Dodgson'un yöntemi Jacobinin 1833'te yayınladığı adjoint matris teoreminin özel bir durumu olup bu teorem Desnanot-Jacobi teoremi olarakta adlandırılmaktadır (Abeles, 2008). Herhangi bir matrisin determinantını hesaplamanın standart yolu kofaktör açılımı yapmaktır. Bu yöntem mükemmel bir şekilde güvenilir iken matrisin boyutundaki artış yöntemi zahmetli ve zaman alıcı kılmaktadır. Örneğin 25×25 tipinde bir matrisin determinantının kofaktör açılımıyla heseplanmasında 25! den fazla işlem gerekmektedir (Hill ve Kolman, 2010). Dodgson'un "yoğunlaşma metodu" daha büyük matrislerde determinant hesabı yaparken zaman ve hesap verimliliği için kullanılabilir (Donor ve ark., 2016). Bu yöntem özellikle birçok işlemcinin parelel olarak yürütülmesi nedeniyle bilgisayar hesaplamaları için kullanışlıdır. Yaygın olarak uygulanabilir bir bilgisayar algoritması olan DDI olarak uygulanmıştır ve 2001 yılında Amdeberhan ve Zeilberg, DDI'yı bilgisayar destekli yöntemler kullanarak tahmin edilen 15 açık determinant değerlendirmesini kanıtlamak için kullanmışlardır (Abeles, 2008).

Teorem 3.0.2. (Bressoud, 1999) Desnanot Jacobi adjoint matris teoremi:
Bir M matrisi verildiğinde, M_j^i , M'nin i satır ve j sütunu silindiğinde kalan matrisi temsil etsin. Eğer birden fazla satır veya sütun silmek isteniyorsa, silinmiş satırların numaraları üst simge olarak, silinmiş sütunların numaraları alt simge olarak yazılır.

Eğer M bir $n \times n$ matris ise;

$$|M| \,.\, \left|M_{1n}^{1n}\right| = \left|M_1^1\right| \,.\, \left|M_n^n\right| - \left|M_n^1\right| \,.\, \left|M_1^n\right|$$

dır.

Lagrenge bu teoremi 1773 yılında $n = 3$ için keşfetti. Desnanot ise 1819'da $n \leq 6$ için bu teoremin doğruluğunu gösterdi. Jacobi 1833'te genel teoremi ve kanıtını Cralle'de Journal'de bir makale ile yayınladı ve 1835 ve 1841'deki makalelerinde tekrarladı ve detaylandırdı (Rice ve Torrence, 2007).

Teorem 3.0.2 ile bir matrisin determinantının nasıl bulunduğunu bir örnekle gösterelim.

***Örnek* 3.0.3.**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım. Teorem 3.0.2.'ye göre;

$$|M| \cdot \left|M_{15}^{15}\right| = \left|M_1^1\right| \cdot \left|M_5^5\right| - \left|M_5^1\right| \cdot \left|M_1^5\right|$$

eşitliği geçerlidir. Buradan

$$M_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; M_5^5 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_5^1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \; M_1^5 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{15}^{15} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

altmatrisleri bulunur. Bu altmatrislerin determinantları $|M_{15}^{15}| = 36$, $|M_1^1| = -109$, $|M_5^5| = 14$, $|M_5^1| = 421$, $|M_1^5| = -290$ değerlerine eşittir. Teorem 3.0.2.'ye göre;

$$\begin{aligned}
|M| \cdot \left|M_{15}^{15}\right| &= \left|M_1^1\right| \cdot \left|M_5^5\right| - \left|M_5^1\right| \cdot \left|M_1^5\right| \\
|M| \cdot (36) &= (-109) \cdot (14) - (421) \cdot (-290) \\
|M| \cdot 36 &= 120564 \\
|M| &= \frac{120564}{36} \\
|M| &= 3349
\end{aligned}$$

değeri bulunmuş olur.

Dodgson, sadece 2×2 determinatları hesaplayarak gerekli determinanları hesaplamak için bir algoritma geliştirmek üzere bu teorimi kullandı.

Yöntem aşağıdaki gibi verilmiştir (Donor ve ark., 2016).

Tanım 3.0.4. $n \geq 3$ olmak üzere bir $n \times n$ A matrisi verildiğinde, A nın içi ilk ve son satır-sütunun silinmesiyle elde edilen $(n-2) \times (n-2)$ matristir ve $intA$ ile gösterilir.

Tanım 3.0.5. Bir $n \times n$ matrisi için minör, orijinal matristen m satır ve m sütun silinerek oluşturulan herhangi bir $(n-m) \times (n-m)$ matristir. Örneğin aşağıdaki matristeki koyu renkli bileşenleri matrisin sol üst köşesindeki minör oluşturur.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & -1 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tanım 3.0.6. Ardışık minör, kalan satır ve sütunların orijinal matriste komşu olduğu minördür. Yukarıdaki örnekteki minörün komşu minörü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 3 \\ 1 & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tanım 3.0.7. Bağlı minör, tüm satırların ve sütunların komşu olduğu bir sistemdir. Gösterilen tüm örnekler bağlı minörlerdir.

Yöntem dört adımdan oluşur:

1) A nın içindeki bütün sıfırları yok etmek için elementer satır (sütun) işlemleri kullanılır.

2) A matrisindeki 2×2 tüm ardışık minörlerin determinatlarını alarak yeni $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir B matrisi oluşturulur.

3) Bir $(n-2) \times (n-2)$ matrisi oluşturmak için aynı adım tekrarlanır ve oluşan bu matrisin terimlerini $intA$'nın karşılık gelen terimlerine bölerek yeni C matrisi oluşturulur. Eğer oluşan bu yeni C matrisinin $intC$ kısmındaki matrisin elemanlarından biri dahi sıfır olsa A matrisine dönülür ve matris $intC$ de sıfır olmayacak şekilde düzenlendikten sonra yeniden aynı işlemlere başlanır.

4) Tek bir sayı elde edilene kadar matris "yoğunlaştırılmaya" devam edilir. En son elde edilen tek sayı A matrisinin determinantıdır (Rice ve Torrence, 2007).

***Örnek* 3.0.8.** Dodgson'un yöntemini 5×5 tipinde bir matrise uygulayarak determinantı bulalım.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2×2 tüm ardışık minörlerin determinantını bularak aşağıdaki 4×4 matrise yoğunlaştırıyoruz.

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 5 & 1 & 19 \\ -21 & -6 & 2 & 5 \\ 7 & -18 & -6 & 8 \\ -1 & -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

B matrisi benzer şekilde 3×3 matrise yoğunlaştırılır.

$$\begin{pmatrix} 21 & 16 & -33 \\ 420 & 72 & 46 \\ -88 & 210 & 90 \end{pmatrix}$$

Şimdi bu matrisin her bir terimini A matrisinin iç kısmına karşılık gelen matrisin terimlerine böleriz.

$$\begin{aligned} intA &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} \frac{21}{1} & \frac{16}{-2} & \frac{-33}{-3} \\ \frac{420}{-4} & \frac{72}{2} & \frac{46}{2} \\ \frac{-88}{-1} & \frac{210}{5} & \frac{90}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -8 & 11 \\ -105 & 36 & 23 \\ 88 & 42 & 45 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

C matrisi tekrar yoğunlaştırılır.

$$\begin{pmatrix} -84 & -580 \\ -7578 & 654 \end{pmatrix} \text{ ve } intB = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -18 & -6 \end{pmatrix}$$

matrisinin terimlerine karşılık gelen terimlere bölünür.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{-84}{-6} & \frac{-580}{2} \\ \frac{-7578}{-18} & \frac{654}{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -290 \\ 421 & -109 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. D matrisinin determinantı 120564'tür. C matrisinin içi 36 olup 120564 sayısı 36 ya bölündüğünde A matrisinin determinantı 3349 olarak bulunur (Bressoud, 1999).

Yoğunlaşma metodunda verilen matriste iç sıfırlar varsa bunlar düzenlenerek işleme devam edilir. Ancak türetilmiş matrislerde iç sıfır varsa böyle bir durumda işleme devam edilemez. Yeniden ilk matrise dönülerek gerekli düzenlemeler yapılıp işlem yeniden başlatılır(Dodgson, 1866). Aşağıdaki matris buna örnektir.

***Örnek* 3.0.9.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi yoğunlaşınca

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -24 \\ -16 & 0 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. B matrisinin içinde sıfır oluştuğu için yeniden A matrisine dönelim ve A matrisine elementer satır (sütun) işlemleri uygulayalım. 1'inci ile 4'üncü satırı, 2'nci ile 3'üncü satırı yer değiştirelim. Daha sonra 1'inci ile 3üncü satırı yer değiştirelim. Bu yeni matrise C diyelim. Bu yeni matrisin determinantını toplamda 3 defa satır değiştirdiğimiz için $(-1)^3$ ile çarparsak A matrisinin determinantını buluruz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisini yoğunlaştıralım.

$$D = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

yoğunlaşma işlemlerine devam edilirse C matrisinin determinantı 163 bulunur. Bu durumda A matrisinin determinantı -163 tür (Donor ve ark., 2016).

Buradan da anlaşılacağı gibi yoğunlaşma metodunun ana zayıflığı matrisin iç kısmına gelen sıfırlardan kaynaklanmaktadır. Çok fazla sıfırın bulunması durumunda geleneksel kofaktör açılımıyla determinant bulunması genellikle daha kolaydır.

Dodgson'un yöntemi bu genel matematiksel belirsizliği nedeniyle iyi bilinmemektedir, ancak özellikle büyük matrislerin determinantlarını bulmak için son derece yararlı olabilir (Donor ve ark., 2016).

3.1. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümünde Yoğunlaşma Metodunun Uygulanması

(Dodgson, 1866) n satır ve $n+1$ sütundan oluşan bir matris yoğunlaştırıldığında ilki, ilk n sütünun determinantı olan ikincisi, son n sütunun determinantı olan iki terime indirgenmiş olur.

Dolayısıyla n tane denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi;

$$
\begin{gathered}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 ... + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1} = 0 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 ... + a_{2,n}x_n + a_{2,n+1} = 0 \\
\vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 ... + a_{n,n}x_n + a_{n,n+1} = 0
\end{gathered}
$$

alınır ve bu denklem sisteminin tüm katsayı ve sabitleri matris sisteminde yazılırsa;

$$
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n+1}
\end{pmatrix}
$$

şeklindeki $n \times n+1$ tipindeki matris elde edilir. Bu matris yoğunlaştırılırsa iki terime kadar indirgenir. Bunların ilki S ikincisi T olsun.

$$
S = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
\qquad \text{ve} \qquad
T = \begin{vmatrix}
a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,2} & \dots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix}
$$

Şimdi Cramer kuralına benzer şekilde $x_1 = (-1)^n \cdot \frac{T}{S}$ ifadesi bulunur.

Bu nedenle yoğunlaşma işlemi ile elde edilen iki terimden ilkini n'nin tek veya çift olması durumundan + veya − ile işaretleyip x_1 ile çarparak, x_1 için bir denkleme dönüştürülebilir. Kuralın ikinci kısmı şu şekilde basitçe ifade edilebilir: + ve − işaretleri dönüşümlü olarak en sondan başlayarak tüm sütunların üzerine yazılır ve x_1'i içeren sütunda olan işaret, x_1'in etkileneceği işarettir.

Böylece x_1 değeri bulunduğunda ilk $n-1$ denklemde yerine yazılabilir ve $n-1$ satır ve sütundan oluşan yeni matriste aynı işlem tekrarlanır. Ancak ikinci matris serisinin hesaplanmasında, işin çoğunun zaten yapıldığı görülecektir; aslında yeni matriste gerekli olan iki determinanttan biri zaten doğru bir şekilde hesaplanmıştır, diğeri ise neredeyse öyle düzeltildiki türetilmiş matrislerin herbirinde yanlızca son sütunun düzeltilmesinin yeterli olacağı belirtilmiştir.

***Örnek* 3.1.1.** Aşağıda verilen lineer denklem sisteminin çözümü, Dodgson yoğunlaşma metoduyla bulunmuştur.

$$\begin{array}{c} - \quad + \quad - \quad + \\ 5x+2y-3z+3=0 \\ 3x-y-2z+7=0 \\ 2x+3y+z-12=0 \end{array}$$

Bu lineer denklemlerin tüm katsayı ve sabitleri matris formunda yazılır ve son iki terim kalana kadar Dodgson yoğunlaşma metodunu uygulanır.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & -12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -11 & -7 & -15 \\ 11 & 5 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -22 & 22 \end{pmatrix} \quad 22x = 22 \text{ ise } x = 1$$

bulunur. $x = 1$ değeri lineer denklem sisteminde yerine yazıldığında sadece son sütun değişecektir. Buradan oluşan ilk iki denklem matris formunda düzenlenir ve aynı işleme devam edilir.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -7 & -14 \end{pmatrix} \quad -7y = -14 \quad , \quad y = 2$$

değerini yerine yazıp düzenlediğimizde

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 \end{pmatrix} \quad 3z = 12,\ z = 4$$

bulunur.

Bu örnekte görüldüğü üzere $x = 1$ değerini bulduktan sonra oluşan yeni matris formunda değişen sadece son sütundaki sayılardır. Son sütundan önceki sütundaki sayılar hep aynı kalmıştır. Bundan dolayı ilk bilinmeyen bulunduktan sonra oluşacak yeni matrislerde sadece son iki sütunu yazarak işleme devam etmek yeterlidir.

Örnek **3.1.2.** Aşağıda verilen lineer denklem sisteminin çözümü, Dodgson yoğunlaşma metoduyla bulunmuştur.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
- & & + & & - & & + & & - & & + & & \\
x & + & 2y & + & z & - & u & + & 2v & + & 2 & = & 0 \\
x & - & y & - & 2z & - & u & - & v & - & 4 & = & 0 \\
2x & + & y & - & z & - & 2u & - & v & - & 6 & = & 0 \\
x & - & 2y & - & z & - & u & + & 2v & + & 4 & = & 0 \\
2x & - & y & + & 2z & + & u & - & 3v & - & 8 & = & 0
\end{array}$$

Bu lineer denklemlerin tüm katsayı ve sabitleri matris formunda yazılır ve son iki terim kalana kadar Dodgson yoğunlaşma metodunu uygulanır.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & -1 & -5 & 8 \\ 3 & -5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & -6 & 8 & -2 \\ -17 & 8 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 12 \\ 18 & 40 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 & -72 \end{pmatrix}$$

Son iki terim kaldı. Denklemlerin üstüne yazılan işaretlerde x değerine $-$ karşılık geldiğinden $-36x = -72$ buradan $x = 2$ bulunur. $x = 2$ değeri ilk dört denklemde yerine yazılır ve son sütün yeniden düzenlenir. Sadece son sütun değiştiği için yoğunlaştırırken son sütundaki terimler değişecektir. Geri kalan sütunlardaki sayılar yoğunlaştığı adımdaki sütunun aynısı olarak kalmaya devam edecektir.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 12 & 12 \end{pmatrix}$$

$12y = 12$ buradan $y = 1$ bulunur.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$-6z = 6$ buradan $z = -1$ bulunur.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$3u = 3$ buradan $u = 1$ bulunur.

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \quad -2v = 4$

buradan $v = -2$ bulunur.

Burada

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

matrisinin önceki sütunlarıda düşünüldüğünde iç kısmının sadece sondan bir önceki sütundaki kısmı değişecektir. Bundan dolayı iç kısmın son sütununa bakmak yeterlidir. Bu durumda bu matrisin içinin yoğunlaşmaya etki edecek kısmı

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

matrisidir.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

matrisi yoğunlaştığında çıkan terimler karşılıklı olarak

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin terimlerine bölünerek bir sonraki matrisin son terimini oluşturur.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

matrisi yoğunlaştığında elde edilen matris

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

olur. Bu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

matrisi

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin karşılıklı gelen terimlerine bölündüğünde elde edilen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

matrisi yoğunlaşma işlemindeki bir sonraki matrisin son sütunudur.

4. $n \times n$ ALT HESSENBERG $(0,1)$ MATRİSİNİN MAKSİMUM DETERMİNANTI

Bu bölümde Ching (1993) tarafından tanımlanan özel durumlara sahip bir alt Hessenberg matrisin determinantının, matrisin derecesine karşılık gelen Fibonacci sayısına eşit olduğu Cahill ve ark.(2002), tarafından verilen determinant hesaplama formülünden faydalanılarak ispat edilmiştir. Daha sonra Ching(1993) tarafından, bu özel alt Hessenberg matrislerden faydalanarak bulunan herhangi $(0,1)$ alt Hessenberg matrislerin determinantı için maksimum sınırın ispatı verilmiştir.

Lemma 4.0.3. (Cahill ve ark., 2002) A_n, $n \times n$ tipinde alt Hessenberg matrisi olsun. $\det A_0 = 1$, $\det A_1 = a_{11}$ ve $n \geq 2$ olmak üzere;

$$\det A_n = a_{n,n} \cdot \det A_{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} \left((-1)^{n-r} \cdot a_{n,r} \cdot \left(\prod_{j=r}^{n-1} a_{j,j+1} \right) \cdot \det A_{r-1} \right).$$

Teorem 4.0.4. (Ching, 1993)

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1, & i-j=-1 \; veya \; i-j=2k, \; k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \; ve \; j \geq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

için $D_n = (d_{ij})_{n \times n}$ alt Hessenberg $(0,1)$ matrisi aşağıda verilen eşitliği sağlar.

$$\det D_1 = \det D_2 = 1 \;\; \text{ve} \;\; n \geq 3 \;\; \text{için} \quad \det D_n = F_n.$$

İspat. Bu eşitliğin ispatını tümevarımla yapacağız.

$\det D_1 = \det D_2 = 1$ olduğu D_n tanımından açıktır.
$\det D_n = F_n$ doğru olsun. $\det D_{n+1} = F_{n+1}$ olduğunu gösterelim.
Lemma 4.0.3'ten

$$\det D_{n+1} = d_{n+1,n+1} \cdot \det D_n + \sum_{r=1}^{n} \left((-1)^{n+1-r} \cdot d_{n+1,r} \cdot \left(\prod_{j=r}^{n} d_{j,j+1} \right) \cdot \det D_{r-1} \right)$$

bulunur. Buradan;

n çift sayı olsun;

$$\begin{aligned}
\det D_{n+1} &= 1 \cdot \det D_n + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n+1-r} \cdot d_{n+1,r} \cdot 1 \cdot D_{r-1} \\
&= 1 \cdot \det D_n + (-1)^1 d_{n+1,n} \det D_{n-1} + (-1)^2 d_{n+1,n-1} \det D_{n-2} \\
&\quad + (-1)^3 d_{n+1,n-2} \det D_{n-3} + (-1)^4 d_{n+1,n-3} \det D_{n-4} + ... \\
&\quad + (-1)^{n-1} d_{n+1,2} \det D_1 + (-1)^n d_{n+1,1} \det D_0 \\
&= 1 \cdot \det D_n + \det D_{n-2} + \det D_{n-4} + ... + \det D_2 + \det D_0 \\
&= F_n + F_{n-2} + F_{n-4} + ... + F_2 + F_0 \\
&= F_{n+1} - 1 + F_0 \\
&= F_{n+1}
\end{aligned}$$

n tek sayı olsun;

$$\begin{aligned}
\det D_{n+1} &= 1 \cdot \det D_n + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n+1-r} \cdot d_{n+1,r} \cdot 1 \cdot D_{r-1} \\
&= 1 \cdot \det D_n + (-1)^1 d_{n+1,n} \det D_{n-1} + (-1)^2 d_{n+1,n-1} \det D_{n-2} \\
&\quad + (-1)^3 d_{n+1,n-2} \det D_{n-3} + (-1)^4 d_{n+1,n-3} \det D_{n-4} + ... \\
&\quad + (-1)^{n-1} d_{n+1,2} \det D_1 + (-1)^n d_{n+1,1} \det D_0 \\
&= 1 \cdot \det D_n + \det D_{n-2} + \det D_{n-4} + ... + \det D_3 + \det D_1 \\
&= F_n + F_{n-2} + F_{n-4} + ... + F_3 + F_1 \\
&= F_{n+1} - F_0 \\
&= F_{n+1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak;

$$\det D_n = \det D_{n-1} + \det D_{n-2}$$

dir.

Teorem 4.0.5. (Ching, 1993) A_n, $n \times n$ tipinde herhangi bir $(0,1)$ alt Hessenberg matrisi olsun. $n \geq 2$ için $|\det A_n| \leq \det D_n$ dir.

Ayrıca, P_1 son iki satır, P_2 ilk iki sutunu değiştirilerek birim matristen elde edilen permutasyon matris olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \det A_n &= \det D_n \Leftrightarrow A_n = D_n \text{ veya } P_1 A_n P_2 = D_n, \\ \det A_n &= -\det D_n \Leftrightarrow P_1 A_n = D_n \text{ veya } A_n P_2 = D_n \end{aligned}$$

dir.

İspat. $|\det A_n| \leq \det D_n$ eşitsizliğini kanıtlamak için $\det A_n \leq \det D_n$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterlidir. Çünkü $P_1 A_n$ bir alt Hessenberg matrisi olduğundan $\det(P_1 A_n) \leq \det D_n$ dir. Buradan $\det A_n \geq -\det D_n$ olur. $\det A_n = \det D_n$ eşitliği içinde ($\det A_n = -\det D_n$) benzer durum geçerlidir.

İspatı n üzerinden tümevarımla yapacağız.
$n = 2$ için;

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \det A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq 1 = D_2$$

dir.
$n = 3$ için;

$$\begin{aligned} \det A_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \leq 2 = \det D_3 \end{aligned}$$

dir.
Ayrıca $\det A_3 = 2$ olduğunda

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{12} = a_{23} = a_{31} = 1, a_{21} = a_{32} = 0,$$

dır. Böylece

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D_3$$

tür.

$n = 4$ için;

$$\begin{aligned} \det A_4 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Eğer $a_{11} = 0$ veya $a_{12} = 0$ ise;

$n = 3$ için bulduğumuz sonuca göre; $\det A_4 = \det A_3 \leq \det D_3 < \det D_4$ olur.

$a_{11} = a_{12} = 1$ olsun. Eğer $a_{23} = 0$ ise

$$\begin{aligned} \det A_4 &= \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} (a_{22} - a_{21}) \leq 1 < \det D_4 \end{aligned}$$

dür.

$a_{23} = 1$ olsun.

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} a_{22} & 1 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$a_{21} = 0$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\det A_4 &= \begin{vmatrix} a_{22} & 1 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{22} & 1 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \leq \det D_3 + 1 = \det D_4
\end{aligned}$$

ve eşitlik durumu ancak ve ancak

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 1 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = D_3 \quad \text{ve} \quad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = 1$$

$A_4 = D_4$ olduğunda olur.

Şimdi $a_{21} = 1$ olsun. Buradan;

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Eğer $a_{22} = 1$ ise,

$$\begin{aligned}
\det A_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \leq \det D_3 < \det D_4
\end{aligned}$$

olur.

Son olarak $a_{22} = 0$ olduğunu varsayalım. Buradan;

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad P_1 A_4 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \det A_4 &= \det P_1 A_4 P_2 = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{42} & a_{44} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \leq \det D_3 + 1 = \det D_4 \end{aligned}$$

ve eşitlik durumu ancak ve ancak $P_1 A_4 P_2 = D_4$ olduğunda olur.

Şimdi $n-2$ ve $n-1$ için hipotezimizin doğru olduğunu kabul edelim. Yani $\det A_{n-2} \leq \det D_{n-2}$ ve eşitlik durumu $A_{n-2} = D_{n-2}$ veya $P_1 A_{n-2} P_2 = D_{n-2}$ olduğunda geçerlidir. $\det A_{n-1} \leq \det D_{n-1}$ eşitlik durumu $A_{n-1} = D_{n-1}$ veya $P_1 A_{n-1} P_2 = D_{n-1}$ olduğunda geçerlidir. Sonra

$$\begin{aligned} \det A_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Eğer ikisinden biri $a_{11} = 0$ veya $a_{12} = 0$ ise $n-1$ sonucuna göre;
$\det A_n = \det A_{n-1} \leq \det D_{n-1} < \det D_n$ dir.

Farzedelim ki $a_{11} = a_{12} = 1$ olsun. Eğer $a_{23} = 0$ ise;

$$\begin{aligned}
\det A_n &= \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (a_{22} - a_{21}) \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leq \det D_{n-2} < \det D_n
\end{aligned}$$

dir.

Farzedelim ki $a_{23} = 1$ olsun.

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

$a_{21} = 0$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\det A_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 1 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{22} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{22} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \det B_{n-1} + \det B_{n-2} \leq \det D_{n-1} + \det D_{n-2} = \det D_n
\end{aligned}
$$

ve eşitlik ancak ve ancak $B_{n-1} = D_{n-1}$ veya $P_1 D_{n-1} P_2$ ve $B_{n-2} = D_{n-2}$ veya $P_1 D_{n-2} P_2$ olduğunda geçerlidir. Burada eşitlik için dört durum söz konusudur. Bunlar aşağıdaki gibidir.

1.Durum: $B_{n-1} = P_1 D_{n-1} P_2$ ve $B_{n-2} = D_{n-2}$. İlk eşitlik $a_{n,n-1} = 1$ ve ikinci eşitlik $a_{n,n-1} = 0$ olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir. Bu durumda bu iki eşitlik aynı anda geçerli olamaz.

$$B_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{22} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n-1,2} & d_{n-1,1} & d_{n-1,3} & \cdots & 0 & 1 \\ d_{n-2,1} & d_{n-2,2} & d_{n-2,3} & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_1 D_{n-1} P_2$$

dir.

$$B_{n-2} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n-3,1} & d_{n-3,2} & d_{n-3,3} & \cdots & 1 & 1 \\ d_{n-2,1} & d_{n-2,2} & d_{n-2,3} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = D_{n-2}$$

dir.

2.Durum: $B_{n-1} = D_{n-1}$ ve $B_{n-2} = P_1 D_{n-2} P_2$. İlk eşitlik $a_{n,n-1} = 0$ ve ikinci eşitlik $a_{n,n-1} = 1$ olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir. Bu durumda bu iki eşitlik aynı anda geçerli olamaz.

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= \begin{bmatrix} a_{22} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n-2,1} & d_{n-2,2} & d_{n-2,3} & \cdots & 1 & 1 \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & d_{n-1,3} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = D_{n-1} \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} B_{n-2} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n-2,2} & d_{n-2,1} & d_{n-2,3} & \cdots & 0 & 1 \\ d_{n-3,2} & d_{n-3,1} & d_{n-3,3} & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_1 D_{n-2} P_2 \end{aligned}$$

dir.

3.Durum: $B_{n-1} = P_1 D_{n-1} P_2$ ve $B_{n-2} = P_1 D_{n-2} P_2$. Eğer n bir çift sayı ise, birinci eşitlikte $a_{n4} = 0$ ve ikinci eşitlikte $a_{n4} = 1$ olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir. n

bir tek sayı ise benzer bir çelişki elde edilir.

$$
\begin{aligned}
B_{n-1} &= \begin{bmatrix} a_{22} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n-1,2} & d_{n-1,1} & d_{n-1,3} & \cdots & 0 & 1 \\ d_{n-2,3} & d_{n-2,2} & d_{n-2,3} & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_1 D_{n-1} P_2
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
B_{n-2} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n-2,2} & d_{n-2,1} & d_{n-2,3} & \cdots & 0 & 1 \\ d_{n-3,2} & d_{n-3,1} & d_{n-3,3} & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_1 D_{n-2} P_2
\end{aligned}
$$

dir.

4.Durum: $B_{n-1} = D_{n-1}$ ve $B_{n-2} = D_{n-2}$ dir. Bu durumda $A_n = D_n$ dir.

$a_{21} = 1$ olsun;

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{22} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

Eğer $a_{22} = 1$ olursa;

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dir. Buradan;

$$\begin{aligned} \det A_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leq \det D_{n-1} < \det D_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $a_{22} = 0$ olsun;

$$P_1 A_n P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

dir.

$$\begin{aligned} \det P_1 A_n P_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} & \cdots & 0 \\ a_{42} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,4} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıda kullanılan aynı ispatla $\det A_n = \det P_1 A_n P_2 \leq \det D_{n-1} + \det D_{n-2} = \det D_n$ ve eşitlik ancak ve ancak $P_1 A_n P_2 = D_n$ olduğunda geçerlidir.

5. ELEMANLARI 0 ve 1 OLAN DETERMİNANTLAR

Bu bölümde Williamson (1946)'un, "Determinant whose elements are 0 and 1" adlı eserinde elde ettiği bulgulara yer verilmiştir. Bu eserde, $n \neq 0 \ (mod 4)$ olduğunda herbir elemanı ± 1 olan K_n matrislerin determinantını araştırılmıştır. Özellikle $n = 7$ olduğunda, determinantın maksimum değerinin $2^6 \cdot 9$ olduğu ve bu değere sahip sadece bir tür determinant olduğu gösterilmiştir. Williamson (1946) K_n, $n = 4m$ ve $n = 9, \ 10, \ 11$ olduğunda oluşan özel matrislerin determinantının, maksimum değerleri incelenmiştir.

K_n ve K'_n iki matris olmak üzere eğer K'_n, K_n'den sonlu dönüşümlerle; herhangi bir sıranın -1 ile çarpılması, iki sıranın değişmesi veya transpoz işlemi ile elde edilebiliyorsa, K_n ve K'_n nün eşdeğer olduğu söylenir ve $K_n \approx K'_n$ ile gösterilir. Eğer $K_n \approx K'_n$ ise, K_n ve K'_n nün determinantlarının mutlak değeri birbirine eşittir. Ayrıca, ilk sütunun her bir elemanının $+1$ ve birinci elemanı hariç ilk satırın her bir elemanının -1 olduğu bir $K'_n \approx K_n$ matrisi vardır. Bu nedenle K_n'nin bu özel forma sahip olduğu varsayılmıştır. K_n'nin ilk sütununu sırasıyla diğer $n-1$ sütuna ekleyerek ilk satırın birinci elemanı hariç diğer elemanları sıfır olan yeni bir matris elde edilir. Bu matrisin birinci satır ve sütunu silindiğinde oluşan $(n-1)$'inci dereceden matrisin determinantı K_n'nin determinantına eşittir. Elemanları 0 veya 2 olan bu matris P_{n-1} ile gösterilmiştir. P_{n-1}'in tüm satırları 2'nin bir katı olduğu için;

$$|K_n| = |P_{n-1}| = 2^{n-1} \, |A_{n-1}| \qquad (5.1)$$

olacak şekilde bu eşitliği sağlayan elemanları 1 veya 0 olan A_{n-1} matrisi vardır. A_{n-1}, K_n'nin birinci satır ve sütununun silinmesiyle elde edilen alt matristeki her bir -1 elemanı 0 ile değiştirerek elde edilebildiğinden, işlemi tersine çevirerek A_{n-1} verildiğinde karşılık gelen K_n matrisi bulunabilir.

Eğer A'_{n-1}, A_{n-1}'in sıralarının yeniden düzenlenmesiyle, transpozunun alınmasıyla veya bu değişikliklerin art arda gerçekleşmesiyle elde ediliyorsa A'_{n-1} ve A_{n-1}'in eşdeğer olduğu söylenir ve $A_{n-1} \approx A'_{n-1}$ ile gösterilir. $A_{n-1} \approx A'_{n-1}$ ise A'_{n-1} ve

A_{n-1}'in sırasıyla K'_n ve K_n karşılık gelen matrisleride eşdeğerdir, ancak bunun tersi doğru değildir.

K_n matrisinin birinci satırının elemanları, ilk elamanı hariç geri kalanı -1 ve birinci sütununun tüm elemanları 1 dir. Eğer K_n'de $(i+1)$'inci satır ile birinci satırın yerleri değiştirilmek isteniyorsa $(i+1)$'inci satırın ilk elemanı hariç her elemanı -1 olmalıdır. Bu $(i+1)$'inci satırın ilk sütunu hariç elemanları $+1$ olan sütunları -1 ile çarparak gerçekleştirilebilir. Şimdi $(i+1)$'inci satır, orjinal ilk satır ile ve ilk satır, orjinal $(i+1)$'inci satır ile aynı oldu. İlk ve $(i+1)$'inci satırları değiştirerek $K'_n \approx K_n$ matrisi elde edilir. K'_n matrisine karşılık gelen A'_{n-1} matrisi, i'yinci satırını ve sütünunu değiştirmeden doğrudan A_{n-1} matrisinden elde edilebilir. A_{n-1} matrisinin i'yinci satırındaki 0 olan elemanlarının ait olduğu sütunları değiştirmeden ve diğer sütunlardaki i satırının elemanları hariç diğer elemanları 1'i 0 ve 0'ı 1 ile değiştirerek A'_{n-1} matrisi elde edilir. Buradan A'_{n-1}'i bulmak için aşağıdaki basit kural elde edilmiştir. A'_{n-1} in i'yinci satırı A_{n-1} in i'yinci satırı ile aynıdır. A'_{n-1} in j'yinci satırını bulmak için $(i \neq j)$, A_{n-1} in i'yinci satırı j'yinci satırına eklenir ve her elemanın *mod* 2'deki karşılığı olan 1 veya 0 değeri yazılır.

A'_{n-1}, A_{n-1} den bu işlemlerin art arda yapılmasıyla elde edilebiliyor ise, A_{n-1} ve A'_{n-1} in yarı eşdeğer olduğu söylenir ve $A_{n-1} \sim A'_{n-1}$ ile gösterilir. A_{n-1} ve A'_{n-1} yarı eşdeğer olması durumunda karşılık gelen K_n ve K'_n matrislerinin eşdeğer olduğu açıktır ve aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 5.0.6. (Williamson, 1946) Eğer A_{n-2}, A_{n-1}'in bir alt matrisi ve $A_{n-2} \sim A'_{n-2}$ ise, A'_{n-2}'nin bir alt matrisi olduğu $A'_{n-1} \sim A_{n-1}$ olacak şekilde bir A'_{n-1} matrisi vardır.

Lemma 5.0.6' dan faydalanarak A'_{n-1} matrisini bulmak için, sadece A'_{n-2}'nin A_{n-2} den elde edildiği dönüşümleri A_{n-1} matrisine uygulamak yeterlidir.

Δ_{n-1} ile, A_{n-1} matrisinin determinantı ve herhangi bir A_{n-1} matrisinin mümkün olan maksimum değerinin determinantı D_{n-1} ile gösterilsin. Temel amaç D_6'nın 9 olduğunu ve determinantı $2^6 \cdot 9$ değerine sahip olan tüm K_7 matrislerinin eşdeğer olduğunu kanıtlamaktır.

$A_{n-1} = (a_{ij})$ ve $D_{n-1} = |A_{n-1}|$ olsun. Eğer a_{ij} elemanının kofaktörü $A_{ij} \geq 0$ ise $a_{ij} = 1$, $A_{ij} \leq 0$ ise $a_{ij} = 0$ olarak seçilmelidir. Aksi takdirde D_{n-1} maksimum değere sahip olamaz. Eğer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} q & \varepsilon \\ \delta' & A_{n-1} \end{vmatrix},$$

burada ε, $(e_1, e_2, e_3, ..., e_{n-1})$ satır vektörü ve δ', $(d_1, d_2, d_3, ..., d_{n-1})$ satır vektörünün transpozu olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= q\,|A_{n-1}| - d_1 \sum_{j=1}^{n-1} e_j A_{1j} - d_2 \sum_{j=1}^{n-1} e_j A_{2j} - \cdots - d_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} e_j A_{n-1,j} \\ &= qD_{n-1} - \sum_{i,j=1}^{n-1} d_i e_j A_{ij} \end{aligned}$$

dir.

Her d_i ve e_j, 1 veya 0 değerine sahip olduğundan,

$$\Delta_n = qD_{n-1} - \sum{}' A_{ij} \qquad (5.2)$$

yazılır. Burada $\sum{}' A_{ij}$, A'nın alt matrislerinin tüm elemanlarının A_{ij} kofaktörlerinin toplamıdır. Bu alt matris A'nın satırlarından 1 değerine karşılık gelen d_i ve sütunlarından 1 değerine karşılık gelen e_j'lerden oluşur. $q = 1$ ise $\sum{}' A_{ij}$'nin en küçük negatif değeri alınmalıdır ki Δ_n'nin mutlak değeri büyük bir değere sahip olsun. $q = 0$ ise $\sum{}' A_{ij}$'nin maksimum değeri alınmalıdır ki Δ_n'nin mutlak değeri büyük bir değere sahip olsun.

n'nin küçük değerleri için, hangi A alt matrisinin Δ_n'nin mutlak değerini maksimum yapacağını belirlemek kolaydır. Aşağıda bazı n'ler için D_n değerleri bulunmuştur.

5.1. D_5'in Determinantı

$D_2 = 1$ olduğu ve determinantları 1 olan iki eşdeğer olmayan matrisin A_2 ve A_2' olduğu açıktır.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve $A_2 \sim A_2'$'dür. A_2 matrisi yardımıyla

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. $A_2 \sim A_2'$ olduğu ve başka eşdeğer olmayan matris olmadığı için maksimum determinantı 4 olan tek tip K_3 matrisi vardır. Herhangi bir $\Delta_3 > 0$ için D_3'ü bulurken, minör olarak bir D_2 içermeli ve Lemma 5.0.6'nın bir sonucu olarak, sadece $D_2 = |A_2|$ olduğu durum göz önünde bulundurmalıdır. D_2'nin herhangi bir elemanının kofaktörü pozitif veya sıfır olduğundan toplamları negatif değere sahip olamaz. Bu durumda (5.2)'den $q = 0$ olmalıdır. Buradan

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde $D_3 = 2$ dir ve determinantının maksimum değeri 16 olan tek tip bir K_4 matrisi vardır.

Eğer D_4 minör olarak D_3 içeriyorsa A_4,

$$A_3' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alt matrisini içermelidir. A_3''nün kofaktörlerinin matrisi;

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. B_3 kofaktör matrisinin alt matrislerinin elemanları toplamı minimum -1'dir. Maksimum değeri ise tüm elemanlarının toplamı olup 3'tür. Bu nedenle (5.2) ile

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_4' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde iki matris elde edilir. Bu matrislerin determinantlarının mutlak değeri 3 tür. $A_4 \approx A_4'$ olmasada, $A_4 \sim A_4'$'dür. $\Delta_4 \geq 3$ ve herhangi bir minör olarak bir D_3 içermiyorsa bir elemanı 1 diğer elemanları 0 olan bir satır içermez. Çünkü bu durumda $\Delta_4 < 2$ olur. Δ_4 iki elemanı 1 diğer elemanları 0 olacak şekilde de bir satır içermez. Çünkü minör olarak D_3 içermediği için minörlerinin değerleri 1, 0 ya da -1 dir. Bu durumda Δ_4'ün determinantının mutlak değeri maksimum 2 olabilir. Bu nedenle Δ_4 bir satırında üç tane 1 den daha az olan bir satır içermez. Ancak bu bir çelişkidir. Üç tane 1'li satırlarla iki 1'li bir satır elde edilebilir. Bu durumda $D_4 = 3$ ve determinantının maksimum değeri $2^4 \cdot 3 = 48$ olan tek tip K_5 matrisi vardır.

D_5'i bulmak için, eğer D_5 minör olarak bir D_4 içeriyorsa, Lemma 5.0.6'ya göre sadece A_5'in A_4 veya A_4''ne eşdeğer bir A_4'' alt matris içermesi ihtimalini göz önünde bulundurmak gerekir. A_4'' matrisi olarak;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi seçilsin. A_4'' matrisinin kofaktör matrisi;

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. B_4'ün herhangi bir alt matrisinin elemanları toplamı

$$[b_{14}] \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{21} & b_{24} \end{bmatrix}$$

gibi benzer alt matrisler için minimum değerini alır ve -2'dir. Maksimum değeri ise B_4'ün tüm elemanlarının toplamı olup 4'tür. (5.2) ile determinantlarının maksimum değeri 5 olan

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_5' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. A_5, A_5' eşdeğer olmasada $A_5 \sim A_5'$'dür ve sadece tek tip K_6 matrisi vardır. (Aslında determinantları 5 değerine sahip olan üç tip eşdeğer olmayan A_5 matrisi vardır. Bu A_4 ve A_4' matrisleri dikkate alınarak gösterilebilir.)

Eğer $\Delta_5 \geq 5$ ve herhangi bir minör olarak D_4 içermiyorsa, Δ_5'in hiçbir satırı $(1\ 1\ 0\ 0\ 0)$ ve benzer şekilde olamaz. Çünkü Δ_5'in minörlerinin mutlak değerinin maksimum değeri 2'dir. İki satır

$$(\alpha) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ya da} \quad (\beta) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tipinede sahip olamaz. Çünkü her iki durumda da $(1\ 0\ 0\ 0\ -1)$ satırı elde edilir. Buna göre Δ_5 dört 1'li iki satır içermez. O zaman her bir satırında üç tane 1 bulunan en az dört satır içermelidir. Bu dört satırdan en az ikisinde iki 1 bileşeni alt alta gelecektir. Bu durumda yine iki 1'li bir satır elde edilebilir. Bu nedenle $D_5 = 5$'tir ve determinantının maksimum değeri $2^5 \cdot 5 = 160$ olan tek tip K_6 matrisi vardır.

5.2. D_6'nın Determinantı

$\Delta_6 = |A_6|$'nın herhangi bir minörü olarak D_5 içersin. Eşdeğer olmayan tüm A_6'ları elde etmek için eşdeğer olmayan tüm A_5'leri göz önünde bulundurmak gerekir. Tüm eşdeğer olmayan K_7'leri bulmak için Lemma 5.0.6'nın bir sonucu olarak sadece A_5'i dikkate almak gerekir.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi seçilmiştir ve kofaktör matrisi

$$B_5 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

bulunmuştur.

B_5'in herhangi bir alt matrisinin elemanları toplamı,

$$[b_{23}\ b_{24}] \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

için minumum değeri -4 ve

$$\begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} \end{bmatrix}$$

için maksimum değeri 8'dir. Dolayısıyla Δ_6'nın maksimum değeri 9'dur ve bu değer;

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_6' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerinden elde edilir. Bir kez daha A_6 ve A_6' eşdeğer değil fakat $A_6 \sim A_6'$ dir. Bu şekilde yalnız bir tür K_7 matrisi vardır.

Eğer Δ_6, D_5'i herhangi bir minör olarak içermiyorsa ve $\Delta_6 \geq 9$ ise, Δ_6 yalnızca iki 1 olan bir satır veya

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tipinde iki satır içermez. Ayrıca Δ_6

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tipinde iki satır veya her satırda üç adet 1, bir sütunda üç adet 1 içeren üç satır içermez. Yani

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tipinde üç satır içermez. Burdaki üç satırın herhangi ikisinden birinde iki tane 1 elemanı alt alta gelmek zorundadır. Bu satırlardan biri diğerinden çıkarıldığında iki

1'li bir satır elde edilebilir.

Eğer Δ_6, beş 1'li ve son elemanı 0 olan bir satır ise, son sütundaki diğer her eleman 1 olmalıdır. Son sütundaki diğer elemanlardan herhangi birinin daha 0 olduğunu varsayalım. Bu sütunda varsaydığımız 0'ın ait olduğu satırda iki tane 1 elemanı olamaz. Eğer üç taneyse beş 1'li satırdan çıkarıldığında iki 1'li satır elde edilebilir. Benzer şekilde bu satır dört 1'li veya beş 1'li de olamaz. Bu durumda son sütundaki diğer elemanlar 1 olmalıdır. Bu nedenle Δ_6 sadece üç 1'li iki satır ve dört 1'li iki satır içerebilir, altı satır elde etmek imkansızdır.

Eğer Δ_6 beş 1'li satır içermiyorsa, Δ_6

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tipinde dört 1'e sahip en fazla üç satır ve üç 1 tipinde dört satır

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

içerebilir.

Buna göre Δ_6 için iki olasılık vardır;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

biri -8 diğeri 8 değerine eşittir. Bu durumda $D_6 = 9$ ve determinantının maksimum değeri $2^6 \cdot 9 = 576$ olan yalnızca bir tür K_7 matrisi vardır.

$D_6 = 9$ olması iki nedenden dolayı ilginçtir. Birincisi, Hadamard(1893) Teoremi tarafından verilen olası değerden daha küçük bir değer bulunmasıdır. Çünkü bu teoreme göre, $|K_7| = m2^6 < 7^{\frac{7}{2}}$ ve m en büyük 14 olabilir. İkincisi, bir Hadamard matrisi H_8, diğer bir deyişle determinantının maksimum değeri 8^4 olan bir K_8 matrisi vardır. H_8'in ortogonal olması dışında, tüm unsurları ortaktır. $|H_8|$ in her 7×7 tipindeki minörü $\pm 8^4/8 = \pm 8^3$ değerine sahiptir. Bu nedenle $|H_8|$ in herhangi bir 7×7 tipindeki minörü, (5.1) tarafından $8^3/2^6 = 8$ değerinde bir Δ_6 belirler. Buna göre $|H_8|$'in 7×7 tipindeki hiçbir minörü mümkün olan en yüksek değere sahip değildir.

5.3. Δ_{4n} İçin Bir Değer

Eğer A, $K_{4n} \approx H_{4n}$ Hadamard matrisinden (5.1) ile elde edilen bir matris ise,

$$\Delta_{4n-1} = |A| = (4n)^{2n} / 2^{4n-1} = 2 \cdot 2^{2n}$$

eşitliği geçerlidir. Δ_{4n-1}'in her satırında $2n$ elemanı 1 ve $2n-1$ elemanı 0 dır. Her 1 elemanın kofaktörü n^{2n-1} ve her 0 elemanın kofaktörü $(-n)^{2n-1}$ dir. Bu nedenle, eğer B, A nın adjoint matrisi ise B'nin tüm elemanlarının toplamı $(4n-1) \cdot n^{2n-1}$ ve (5.2) eşitliği ile Δ_{4n}'nin değeri $(4n-1) \cdot n^{2n-1}$ bulunur. Ayrıca A'nın herhangi iki satırında her iki elemanınında 0 olduğu $n-1$ tane sütun vardır. $2n$ tane sütunda ise bir elemanı 0 diğer elemanı 1'dir. Bu durumda geriye kalan $4n-3$ satırın $3n-1$ sütununun elemanlarının kaç tanesinin 1 veya 0 olduğu bilinir. Bu nedenle B matrisinin $4n-3$ satır ve $3n-1$ sütundan oluşan öyle bir alt matrisi vardır ki elemanları toplamı $(3 \cdot (n-1) + 2n) \cdot n^{2n-1}$ dir. Buna göre;

$$\Delta_{4n} = (5n-3)\, n^{2n-1} \qquad (5.3)$$

eşitliği geçerlidir.

5.4. Δ_8, Δ_9 ve Δ_{10}'un Değerleri

$n = 2$ olduğunda

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur ve $\Delta_8 = 56$ dır. A_8'in kofaktörlerinin matrisi

$$B = \begin{bmatrix} 32 & 24 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & 8 & -12 & -12 & 16 & 16 & 16 & -12 \\ -8 & 8 & 16 & -12 & -12 & -12 & 16 & 16 \\ -8 & 8 & -12 & 16 & 16 & -12 & -12 & 16 \\ 8 & -8 & 12 & 12 & 12 & -16 & 12 & -16 \\ -8 & 8 & 16 & 16 & -12 & 16 & -12 & -12 \\ 8 & -8 & -16 & 12 & -16 & 12 & 12 & 12 \\ 8 & -8 & 12 & -16 & 12 & 12 & -16 & 12 \end{bmatrix}$$

dir. B matrisinin

$$\begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{18} \\ b_{23} & b_{24} & b_{28} \end{bmatrix}$$

alt matrisinin elemanları toplamı -60 dır. A_8 matrisi ve bu alt matris, 9'uncu dereceden A matrisini (5.2) ile bulmak için kullanılırsa $|A| = 116$ bulunur. A_9 matrisinin $a_{33} = 1$ elemanının kofaktörü -4 tür. A'nın a_{33} elemanını 0 ile değiştirirsek oluşan matrise C diyelim. $|C| = 120$ bulunur ve C'nin adjoint matrisinin tüm elemanlarının toplamı 264'tür. Buradan

$$\Delta_{10} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ x' & C \end{vmatrix}$$

yazılabilir. Buradaki x her elemanı 1 olan satır vektörü ve x' her elemanı 1 olan sütun vektörüdür ve $\Delta_{10} = 264$ tür. Böylece $56,\ 120,\ 264$ değerlerine sahip $\Delta_8,\ \Delta_9$ ve Δ_{10} determinantları elde edilir. Bu rakamlar 76, 195 ve 521 olan Hadamard (1893) Teoremi tarafından verilen maksimum rakamlardan çok daha küçüktür. Ancak $D_5 = 5 \neq 6$ ve $D_6 = 9 \neq 14$ olduğu için, Hadamard Teoremi tarafından verilen maksimum değere her zaman ulaşılmadığı bilinmektedir.

$(4n)^{-1/2} H_{4n}$ bir ortogonal matris olduğundan ve bir ortogonal matrisin herhangi bir minörü, tamamlayıcı minörüne mutlak değerce eşit olduğundan,

$$\Delta_{4n-m-1} = n^{2n-m} \Delta_{m-1} \qquad (5.4)$$

eşitliği geçerlidir. Burada Δ_i, H_{4n}'nin $j+1$'inci dereceden bir minörü (5.1) ile elde edilir. Bu nedenle $|H_{12}|$ nin minörlerinden elde edilen Δ_i'nin maksimum değerleri $\Delta_{10} = 243,\ \Delta_9 = 81,\ \Delta_8 = 27,\ \Delta_7 = 18$ ve $\Delta_6 = 9$ dur. Bu değerlerden sonuncusu hariç diğerleri daha önce elde edilen değerlerden daha düşüktür. Buna göre $|H_{12}|$, maksimum değeri $2^6 \cdot 9$ olan 7'nci dereceden minör içerir, ancak maksimum değere sahip 7'inci dereceden daha büyük bir minör içermez.

Eğer $n > 2$ ise, (5.4) ile bulunan Δ_{4n-4} için n^{2n-3} değeri, (5.3) ile bulunan $(5n-8) \cdot (n-1)^{2n-3}$ değerinden daha küçüktür. Δ_{4n-5} ise $D_{4n-5} = 2\,(n-1)^{2n-2}$ değerinden daha küçüktür. Bu son karşılaştırmalar, $4n$ ve $4n-4$ minörlerinin Hadamard matrislerinin mevcut olduğu varsayımına dayanmaktadır.

6. $(-1, 1)$ MATRİSLER İÇİN MAKSİMUM DETERMİNANT SINIRLARI

Bu bölümde önce BIBD, SBIBD tasarımları ve insidant matrislerinin tanımları verilmiştir. Sonra Koukouvinos ve ark. (2000) tarafından yazılan, "Bounds on the maximum determinant for $(1, -1)$ matrices" adlı çalışmadaki bulgulara yer verilmiştir. Bu eserde tüm ± 1 matrisler için $SBIBD\,(4t-1, 2t-1, t-1)$ sonuçları kullanılarak maksimum determinant veya maksimum determinant için alt sınır bulunmuştur.

6.1. BIBD ve SBIBD

"Balanced incomplete block designs" olarak bilinen tasarımlar (BIBD'ler) 1935 yılında Yates tarafından Royal Statistical Society de yayımlanan bir makalade tanıtılmıştır. O zaman "symmetrical incomplete randomized blocks" adını ve bir yıl sonrada "symmetrical incomplete randomized block arrangement" adını önermiştir. Mevcut terim 1939'da Bose tarafından tanıtılmıştır (Street ve Street, 1987).

Tanım 6.1.1. (Street ve ark., 1972) v, b, k, r ve λ pozitif tamsayılar ve $v > k \geq 2$ olsun. Dengeli bir tamamlanmamış blok tasarımı, eleman sayısı v olan bir kümeden, blok olarak adlandırılan b alt kümelerini seçmenin bir yoludur. Her blok tam olarak k farklı nesne içerir, her nesne tam olarak r farklı bloğun elemanıdır ve her farklı nesne çifti tam olarak λ kadar bloğun elemanıdır. Bu şekildeki tasarıma BIBD veya (v, b, r, k, λ)-konfigürasyonu denir.

Örnek **6.1.2.** (Street ve ark., 1972) $v = 9, b = 12, r = 4, k = 3, \lambda = 1$ olacak şekilde $(9, 12, 4, 3, 1)$-tasarımı aşağıda verilmiştir.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bloklar;

$$\begin{array}{ccccccc} 1\ 2\ 3 & & 1\ 4\ 7 & & 1\ 5\ 9 & & 1\ 6\ 8 \\ 4\ 5\ 6 & & 2\ 5\ 8 & & 2\ 6\ 7 & & 3\ 5\ 7 \\ 7\ 8\ 9 & & 3\ 6\ 9 & & 3\ 4\ 8 & & 2\ 4\ 9 \end{array}$$

şeklindedir. Burada X kümesinin eleman sayısı 9 dur ve ayrı ayrı her satır bir blok göstermektedir. Toplamda 12 blok vardır ve her bloğun eleman sayısı 3 tür. Her bir eleman sadece 4 bloğun elemanıdır. Her eleman çifti sadece 1 bloğun elemanıdır.

Teorem 6.1.3. (Street ve Street, 1987) Parametreleri $v,\ b,\ r,\ k,\ \lambda$ olan;

i) Herhangi bir blok tasarımında;
$vr = bk$ dır.
ii) Eğer blok tasarımı dengeli ise;
$\lambda(v-1) = r(k-1)$ dir.

Tanım 6.1.4. (Street ve ark., 1972) Simetrik (v,b,r,k,λ)-konfigürasyonunda $b = v$ ve $r = k$ dır. Buna (v,k,λ)-yapılandırması veya SBIBD denir.

Burada Teorem 6.1.3'ün ikinci öncülü SBIBD ler için; $\lambda(v-1) = k(k-1)$ olur.

Tanım 6.1.5. (Street ve ark., 1972) Bir BIBD'nin insidant matrisi, i nesnesi j bloğunsaysa $a_{ij} = 1$ diğer durumlarda $a_{ij} = 0$ olan $v \times b$ boyutunda bir $(0,1)$ matristir.

***Örnek* 6.1.6.** $(9,12,4,3,1)$-tasarımının blokları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1,2,3\}, \quad B_2 = \{1,4,7\} \\ B_5 &= \{4,5,6\}, \quad B_6 = \{2,5,8\} \\ B_9 &= \{7,8,9\}, \quad B_{10} = \{3,6,9\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 &= \{1,5,9\}, \quad B_4 = \{1,6,8\} \\ B_7 &= \{2,6,7\}, \quad B_8 = \{3,5,7\} \\ B_{11} &= \{3,4,8\}, \quad B_{12} = \{2,4,9\} \end{aligned}$$

Bu bloklar tarafından oluşturulan insidant matrisi aşağıdaki gibidir;

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9 & B_{10} & B_{11} & B_{12} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

6.2. $(-1, 1)$ Matrisler İçin Maksimum Determinant Sınırları

X_n, n'inci dereceden tüm ± 1 matrislerin kümesi olsun. $X \in X_n$ matrisinin determinantının maksimum değeri sorusu, matris teorisinin başlangıcına geri dönen eski bir sorudur. X_n de bulunan $HH^T = H^T H = nI_n$ eşitliğini karşılayan tüm Hadamard matrisleri için;

$$\det(H) \le \left(\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le n^{\frac{n}{2}} \qquad (6.1)$$

Hadamard (1893) eşitsizliğinin bir sonucudur. (6.1)'in ne zaman net olduğu sorusunu ele alan çok sayıda çalışma vardır. Bir $n \times n$ Hadamard matrisinin var olabilmesi için $n = 1,\ 2$ veya $n \equiv 0\ (mod 4)$ olması gerekir.

$n \equiv 1\,(mod 4)$ için Ehlich (1964) tarafından;

$$\det(X) \le (2n-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (n-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \qquad (6.2)$$

eşitsizliği tüm X_n'ler için kanıtlanmıştır. Eşitliğin (6.7) için geçerli olabilmesi için, $2n-1$'in bir tamsayının karesi olması ve $XX^T = (n-1)\,I_n + J_n$ değerine sahip bir $X \in X_n$ olması gerekir. Burada J_n tüm elemanları 1' e eşit olan $n \times n$ matristir ve

I_n ise $n \times n$ birim matristir.

Ehlich (1964) ve bağımsız olarak Wojtas (1964), tüm $n \equiv 2\ (mod4)$, $X \in X_n$ için;

$$\det(X) \leq (2n-2) \cdot (n-2)^{\frac{n}{2}-1} \qquad (6.3)$$

olduğunu kanıtlamıştır. Ancak (6.3) eşitiği

$$XX^T = X^TX = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $X \in X_n$ varsa geçerlidir. Burada $L = (n-2)\,I + 2J$ şeklinde bir $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ matristir. Eşitlik için gerekli olan bir başka şart $2n-2$ nin iki tamsayını kareleri toplamı olmasıdır. Cohn (1989) bu sonucun bağımsız bir kanıtını verir ve maksimal örneklerin yapısı hakkında daha fazla bilgi sunar.

Ehlich (1964), en zor durum olarak görünen $n \equiv 3\,(mod4)$ durumunu araştırmıştır. $n \equiv 3\,(mod4)$ ve $n \geq 63$ şartını sağlayan tüm $X \in X_n$ ler için;

$$\det(X) \leq \left(\frac{4 \cdot 11^6}{7^7} \cdot (n-3)^{n-7} \cdot n^7\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6.4)$$

olduğunu kanıtlamıştır. Ehlich (1964), üsteki ifadede eşitliği elde etmek için $n = 7m$ olmalı ve $X \in X_n$ olmak üzere;

$$XX^T = I_7 \otimes [(n-3)\,I_m + 4J_m] - J_n$$

olması gerektiğini ifade etmiştir.

$n \equiv 3\ (mod\ 4)\,,\ n < 63$ için karşılık gelen tüm değerlerin sınırları, standartlaştırılmış maksimum X örnekleri için XX^T yapıları olduğu gibi Ehlich (1964) tarafından verilmiştir. Eğer XX^T yapısı $(n-3)\,I + 3J$ formunun köşegen yapısına ve köşegen dışı blokları $-J$'nin blok yapısına sahipse X ± 1 matrisi, maksimum determinanta sahiptir.

Her ne kadar $n \equiv 0\,(mod\;4)$ durumunda Hadamard sınırlarının kesin olarak elde edildiği ve bu anlamda sınırların net olarak kabul edilmesi gerektiği iyi bilinsede (6.2), (6.3) ve (6.4)'te verilen sınırların net olup olmadığı bilinmiyordu.

Koukouvinos ve ark., (2001) sonuçları sonsuz sayıda ± 1 matris için daha düşük bir sınır bulmak için $SBIBD\,(4t-1,\; 2t-1,\; t-1)$'e uygulanabileceğini bildirmiştir. Ancak (6.2), (6.3) ve (6.4)'te verilen üst sınırın elde edilemeyeceği, belirli bir $n \equiv 1,\; 2$ veya $3\,(mod\;4)$ değeri için, verimli bir bilgisayar araştırması yardımıyla burada verilenlerden daha büyük determinant değerlerine sahip örnekler üretilebileceği varsayılmıştır. Ancak asıl zorluk, determinantları (6.4)'teki sınır olan sonsuz bir örnek ailesi bulmak veya (6.4)' teki sınırın iyileştirilebileceğini göstermektir.

Tüm n'inci derecelerin, maksimum determinantının daha düşük sınırlarını elde etmek için bazı $SBIBD$'lerin $(1,-1)$ insidant matrislerin maksimum determinantı kullanılmıştır.

Burada kısaca $SBIBD\,(v,k,\lambda)$, elemanları 0 ve 1 olan $v \times v$ tipinde B matrisi olarak gösterilmiştir. B matrisinin her satır ve sütununda k tane elemanı 1 ve $v-k$ tane elemanı 0'dır. Herhangi bir satır ve sütun çiftinin iç çarpımı λ'dır. B'ni $(1,-1)$ insidant matrisi $A = 2B - J$ eşitliğiyle elde edilmiştir. J tüm girişleri $+1$ olan $v \times v$ matristir. v'inci dereceden birim matrisi I ile göstermiştir.

Buradan

$$BB^T = (k-\lambda)\,I + \lambda J \qquad (6.5)$$

ve onun ± 1 eşdeğer matrisi

$$AA^T = 4\,(k-\lambda)\,I + (v - 4\,(k-\lambda))\,J \qquad (6.6)$$

elde edilmiştir.

Koukouvinos ve ark., (2001)'nın çalışmasındaki basitleştirme teoremine göre;

$$\det(B) = (k-\lambda)^{\frac{v-1}{2}} \sqrt{k+(v-1)\lambda}$$

ve $\lambda(v-1) = k^2 - k$

$$\det(A) = 2^{v-1}(k-\lambda)^{\frac{v-1}{2}} |v-2k| \qquad (6.7)$$

veya $x = v - 4k + 4\lambda$,

$$\det(A) = (v-x)^{\frac{1}{2}(v-1)} |v-2k|$$

dır.

6.3. SBIBD'nin ±1 İnsidant Matrislerinin Minörleri

Koukouvinos ve ark., (2001) bazı $SBIBD(v,k,\lambda)$ için $v \times v$, $(v-1)\times(v-1)$ ve $(v-2)\times(v-2)$ minörlerinin maksimum değerlerini vermiştir, bunlar aşağıdaki Teorem 6.3.1 ve Tablo1 de verildiği gibidir.

Teorem 6.3.1. (Koukouvinos ve ark., 2001) $x = v - 4(k-\lambda)$ olsun.

1) Bir $SBIBD(v,k,\lambda)$, A'nın $(1,-1)$ insidant matrisinin $(v-1)\times(v-1)$ minörleri

$$(v-x)^{\frac{1}{2}(v-3)} \sqrt{(v-2k\pm1)^2 x + (x-1)(-vx-v+2x)}. \qquad (6.8)$$

değerine sahiptir. Eğer $\pm$ yerine $+$ yazılırsa

$$(v-x)^{\frac{1}{2}(v-3)} \sqrt{x(v-2k+1)^2 + (x-1)(-vx-v+2x)}$$

ifadesi maksimum determinantı verir.

2) Bir $SBIBD(v,k,\lambda)$, A nın $(1,-1)$ insidant matrisinin $(v-2)\times(v-2)$ minörleri

$$2(v-x)^{\frac{1}{2}(v-5)} \sqrt{x(v-2k\pm1)^2 + (x-1)(-vx-v+2x)}.$$

değerine sahiptir. Eğer $\pm$ yerine $+$ yazılırsa

$$2\left(v-x\right)^{\frac{1}{2}(v-5)}\sqrt{x\left(v-2k+1\right)^{2}+\left(x-1\right)\left(-vx-v+2x\right)}$$

ifadesi maksimum determinantı verir.

Tablo1: (Koukouvinos ve ark., 2001)

	Minör $(2s^2+2s+1, s^2, \lambda)$ $\lambda = \frac{1}{2}(s^2-s)$	Minör $\begin{pmatrix} 4s^2, 2s^2+s, \\ s^2+s \end{pmatrix}$	Minör $\begin{pmatrix} 4t-1, 2t-1, \\ t-1 \end{pmatrix}$
$v \times v$	$(2s+1)\left(2s^2+2s\right)^{s^2+s}$	$\left(4s^2\right)^{2s^2}$	$\left(4t\right)^{2t-1}$
$v-1 \times v-1$	$2\left(s+1\right)\left(2s^2+2s\right)^{s^2+s-1}$	$\left(4s^2\right)^{2s^2-1}$	$2\left(4t\right)^{2t-2}$
$v-2 \times v-2$	$4\left(s+1\right)\left(2s^2+2s\right)^{s^2+s-2}$	$2\left(4s^2\right)^{2s^2-2}$	$4\left(4t\right)^{2t-3}$

Bazı $SBIBD$'lerin Büyük Minörlerinin Değerleri

Teorem 6.3.2. (Koukouvinos ve ark., 2000) H, $4t$ dereceden bir Hadamard matris ve $v = 4t-1$ olsun. Bu duruma uygun ± 1 matrislerin

i) $v \times v$ determinantları $\left(4t\right)^{2t-1}$ büyüklüğüne sahiptir.
ii) $(v-1) \times (v-1)$ determinantları $2\left(4t\right)^{2t-2}$ büyüklüğüne sahiptir.
iii) $(v-2) \times (v-2)$ determinantları $4\left(4t\right)^{2t-3}$ büyüklüğüne sahiptir.

İspat. $4t$ dereceden olan tüm Hadamard matrislerin bir $SBIBD$ $(4t-1, 2t-1, t-1)$ dizaynına eşdeğerdir. $SBIBD\,(4t-1, 2t-1, t-1)$ için yukarıdaki sonuçlar daha düşük sınırlar vermiştir.

$v = 4t-1$ için;
i) $t \geq 0$ için $v \times v$ determinantları $\left(4t\right)^{2t-1}$,
ii) $4t-1 = 23,\ 35,\ 59,\ 71$ ve 79 için $(v-1) \times (v-1)$ determinantları $2 \cdot \left(4t\right)^{2t-2}$,
iii) $4t-1 = 31,\ 35,\ 39,\ 47,\ 51,\ 55,\ 59,\ 67,\ 71,\ 75,\ 79,\ 83,\ 87,\ 91,\ 95$ ve 99 için $(v-2) \times (v-2)$ determinantları $4 \cdot \left(4t\right)^{2t-3}$ değerini verir.

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Ferrar (1957) tarafından ikinci ve üçüncü derece determinant özelliklerinden faydalanılarak yapılan determinant tanımı üzerinde duruldu. Determinant hesaplamada bir çok farklı yöntem vardır. Bunlardan biri olan ve Dodgson (1866) tarafından geliştirilen "yoğunlaşma metodu" anlatıldı. Bu yöntemin lineer denklem sistemlerinin çözümünde nasıl kullanıldığı Dodgson (1866)'un çalışmalarından faydalanılarak anlatıldı. Ching (1993) tarafından verilen bir teoremin ispatı Cahill ve ark. (2002) tarafından tanıtılan bir lemma kullanılarak ispatlandı. Ching (1993)'in $(0, 1)$ alt Hessenberg matrislerin maksimum determinantlarının üst sınırlarının Fibonacci sayıları olduğunu gösteren ispata yer verildi. $(-1, 1)$ matrislerin determinantlarının maksimum sınırlarının $(0, 1)$ matrisler ile nasıl yapıldığı Williamson (1946)'un çalışmasından faydalanılarak anlatıldı. $(-1, 1)$ matrislerin determinantlarının maksimum sınırlarının bulunuşunda Koukouvinos ve ark. (2001) SBIBD tasarımlarından faydalandıklarından bahsedildi.

Determinant hesabına farklı bir bakış açısı kazandırmak için lineer denklem sistemleri yardımıyla determinant tanımına ulaşmaya yardımcı olacak biçimde yöntem tanıtıldı. Daha sonra Türkçe literatürde çok yer almadığı görülen farklı determinant hesaplama yöntemi olan yoğunlaşma metodu detaylı biçimde anlatıldığından bu yöntemi kullanarak farklı alanlarda kullanımı için bir perspektif çizildiği düşünülmektedir. Devamında ise farklı (0,1) ve (-1,1) matrislerin maksimum determinantları ile ilgili kapsamlı bir literatür verilerek bu alanda çalışma yapacaklar için temel teşkil edilmeye çalışıldı.

KAYNAKLAR

Abeles, F.F., 2008. Dodgson condensation: The historical and mathematical development of an experimental method. Science Direct, 429-438.

Brent, R.P., Osborn, J.H., 2013. On Minors of Maximal Determinant Matrices. Journal of Integer Sequences, 16, 13.4.2.

Bressoud, M., 1999. Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture. Cambridge University Press, 274 p, Cambridge.

Cahill, N.D., D'Errico, J.R., Narayan, A.D. ve Narayan, J.Y., 2002. Fibonacci determinants. College Math. J., 33, 221-225.

Cahill, N.D., Narayan, D., 2004. Fibonacci and Lucas Numbers as Tridiagonal Matrix Determinants. The Fibonacci Quarterly, 42 (3), 216-221.

Ching, L., 1993. The maximum determinants of an $n\times n$ lower Hessenberg (0,1) matrix. Linear Algebra and Its Aplications, 183, 147-153.

Dodgson, C.L, 1866. Condensation of Determinants, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values. Proceedings of the Royal Society of London, 15 (1866-1867), 150-155.

Donor, M., Harwood, R.C ve Main, M., 2016. An Elementary Proof of Dodgson's Condensation Method for Calculating Determinants. ArXiv e-prints, 1607.05352v1.

Fallat, S.H., Van Den Driessche, P., 1997. Maximum determinant of (0, 1) matrices with certain constant row and column sums. Linear and Multilinear Algebra, 42 (4), 303-318.

Ferrar, W.L., 1957. Algebra. Oxford University Press, 220 p, London.

Golup, C.H., Van Loan, C.F., 1996. Matrix Computations. Toe Johns Hopkins University Press, 694 p, USA.

Hadamard, J., 1893. Resolution d'une question relative aux determinants. Bulletin des Sciences Mathematiques , 17 (2), 240-246.

Hill, D.R., Kolman, B., 2010. Uygulamalı Lineer Cebir. Palme Yayıncılık.

Horn, R.A., Johnson, C.R., 1990. Matrix Analysis. Cambridge University Press, 561 p, Cambridge.

Koukouvinos, C., Mitrouli, M. ve Seberry, J., 2000. Bounds on the maximum determinant for (1,-1) matrices. Bulletin of the Institute of Combinatorics and its applications, 29, 39-48.

Koukouvinos, C., Mitrouli, M. ve Seberry, J., 2001. Values of minors of (1,-1) incidence matrices of SBIBDs and their application to the growth problem. Design, Codes and Cryptography, 23, 267-281.

Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas Numbers With Applications. Wiley-Interscience publication, 652 p, New York, USA.

Neubauer, M.G., Radcliffe, A.J., 1997. The Maximum Determinant of ±1 Matrices. Linear Algebra and Its Aplications, 257, 289-306.

Rice, A. ve Torrence, E., 2007. "Shutting up like a telescope":Lewis Carroll's "Curious" Condensation Method for Evaluating Determinants. The College Mathematics Journal, 32 (2), 85-95.

Seberry, Y. ve Yamada, M., 1992. Hadamard matrices, Sequences, and Block Designs. Contemporary Design Theory, John Wiley and sons, 431-560.

Strang, G., 1988. Linear Algebra and Its Applications. Thomsan Learning, Inc, 505 p, USA.

Street, A.P. ve Street, D.J., 1987. Combinatorics of Experimental Design. Oxford University Press, 400 p, New York.
Street, A.P., Wallis, W.D ve Waillis, J.S., 1972. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Werlag, 498 p, New York.
Taşcı, D., 2001. Lineer Cebir. Selçuk Üniversitesi Vakfı Yayınları, 477 s, Konya.
Williamson, J., 1946. Determinants Whose Elements Are 0 and 1. The American Mathematical Monthly, 53 (8), 427-434.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	:	Ahmet TURAN
Doğum Tarihi	:	29.08.1987
Doğum Yeri	:	Merkez/SİVAS
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce
Telefon	:	05386785032
E-posta	:	ahmedturan58@hotmail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2020
Lisans	Erzurum Atatürk Üniversitesi	2009
Lise	Sivas Gazi Lisesi	2004