FARKLI YAPIDA GRUPLARI İÇEREN PİYASALARDAKİ HİSSE SENEDİ FİYATI DİNAMİĞİ

İPEK ALTINTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2010

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

____

Prof. Dr. Ünver KAYNAK

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

____

Prof. Dr. Ömer AKIN

Anabilim Dalı Başkanı

İpek ALTINTAŞ tarafından hazırlan FARKLI YAPIDA GRUPLARI İÇEREN PİYASALARDAKİ HİSSE SENEDİ FİYATI DİNAMİĞİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

____

Doç. Dr. Hüseyin MERDAN

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan	Doç. Dr. Mine Çağlar	____________________
Üye	Doç. Dr. Hüseyin MERDAN	____________________
Üye	Dr. Ceren VARDAR	____________________

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

…………………….

İpek ALTINTAŞ

Üniversitesi : **TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü : **Fen Bilimleri Enstitüsü**
Anabilim Dalı : **Matematik Bölümü**
Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Hüseyin MERDAN**
Tez Türü ve Tarihi : **Yüksek Lisans – Temmuz 2010**

İpek ALTINTAŞ

FARKLI YAPIDA GRUPLARI İÇEREN PİYASALARDAKİ HİSSE SENEDİ FİYATI DİNAMİĞİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında, dinamik sistemler yaklaşımı ile hisse senedi fiyat dinamiğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Tez çalışmasında baz alınan literatürdeki çalışmalarda, finans piyasalarında teoride kabul edilen unsurların aksine, yatırımcıların pratikte rutin olarak karşılaştığı faktörler dikkate alınmıştır. Bu faktörler, piyasalarda sınırlı miktarda para ve hisse senedi olduğu, hisse senedi alım satımı esnasında yatırımcıları hisse senedinin değeri kadar hisse senedinin yönünün de etkilediği, farklı yatırımcıların hisse senedi için farklı değerler biçebilecekleri şeklinde sıralanır. Bu tez çalışmasında Caginalp ve Merdan tarafından 2007 yılında yayınlanan çalışma temel alınmıştır [12]. Söz konusu çalışmada kurulan matematiksel modelde, farklı motivasyon ve stratejilere sahip olan iki grup ve bu gruplar arasında alım satımı yapılan tek tür hisse senedinin olduğu düşünülmüştür. Bu tez çalışmasında, hisse senedi fiyatına literatürdeki çalışmalara nazaran daha iyi tahmin verebilmek için, [12] çalışmasındaki matematiksel model geliştirilerek yeniden düzenlenmiştir. Literatürdeki çalışmalarda klasik mikroekonominin temel prensibine göre fiyat değişimini aşırı talep fonksiyonuna bağlı olarak belirleyen denklemin, arz ve talep fonksiyonlarına dair daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalarda yetersiz kaldığı görüşü bu tez çalışmasının hareket noktası olmuştur. Çünkü mevcut aşırı talep fonksiyonu, arz ve talep fonksiyonlarının yalnızca bir fiyattaki değerlerini kullanarak fiyat tahmini vermektedir. Bu durum, arz ve talep fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi sunan piyasalarda, hisse senedi fiyatı için iyi bir yaklaşım yapılamamasına yol açmaktadır. Bu nedenle, fiyat değişimi için Caginalp' in [1] çalışmasında önerdiği iyileştirilmiş yaklaşım kullanılarak, arz ve talep fonksiyonlarına dair daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalarda kullanılabilecek yeni bir model inşa edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Klasik mikro ekonomi, Arz, Talep, Dinamik sistemler

University	**:**	**TOBB Economics and Technology University**
Institute	**:**	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	**:**	**Mathematics**
Supervisor	**:**	**Associate Professor Dr. Hüseyin MERDAN**
Degree Awarded and Date	**:**	**M.Sc. – July 2010**

İpek ALTINTAŞ

THE DYNAMICS OF ASSET PRICE IN THE MARKETS THAT INVOLVE GROUPS WITH DIFFERENT STRUCTURE

ABSTRACT

In this thesis study, examining asset price dynamics with dynamical systems approach is aimed. In the literature studies which this thesis is based on, unlike the facts that are accepted theoratically in the financial markets, the factors that are rountinely encountered by investors in practical level, are taken into consideration. This factors can be listed as that there is a limited amount of cash and share in the markets, price trend affects investors through buying and selling together with the asset value, different investors may asses different values for the same share. In this thesis study, the study that is issued by Caginalp and Merdan in 2007 is grounded on [12]. In the mathematical model of mentioned study, two groups which have different motivations and strategies and one type of share which is traded between these two groups are considered. In this thesis study, the mathematical model in the study [12] is improved and rearranged to be able to make a better estimation for the asset price rather than the existing literature studies. The idea that the equation which determines the price change depending on the excess demand function in the literature studies according to the fundamental principles of classical microeconomy is falling behind in the markets which include more information about supply and demand functions has been the starting point of this thesis study. Because the existing excess demand function makes price estimation using only the values of the supply and demand functions at a price. This situtation causes not to be able to make a good estimation for the asset price in the markets which present more information about supply and demand functions. Because of this reason, a new model is constructed that can be used in markets which contains more information about supply and demand functions, by using the improved approach for the price change that Caginalp proposed in study [1].

Key words: Classical microeconomy, supply, demand, dynamical systems

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca destek ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Hüseyin Merdan'a, yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma ve beni her zaman destekleyip bugünlere getiren sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

1.1.TEZ ÇALIŞMASININ AMACI

Finansal sistemin geçmişine bakıldığında kökeninin çok eskiye dayandığı görülür. Başlangıcı çok eski olsa da, bu sistem özellikle son yıllarda gelişim göstermiş ve başka birçok unsurla iç içe geçerek çok geniş bir alana yayılmıştır. Bu nedenle, sağlıklı bir şekilde işleyen bir sistemin varlığı için finansal sistem içerisinde vazgeçilmez role sahip olan unsurların incelenmesi, katılımcılar için can alıcı bir öneme sahiptir. Özellikle son yıllarda, bu alanda çeşitli yaklaşımlar kullanılarak yapılmış birçok çalışma mevcuttur.

Yukarıda sözü geçen çalışmalardan, dinamik sistemler yaklaşımı kullanılarak finansal sistemin temel öğelerinden biri olan hisse senedi aracının zaman içerisindeki fiyat gelişimini inceleyen çalışmalar bu tez çalışmasının temelini teşkil etmektedir. Lineer olmayan adi diferensiyel denklemlerin kullanımıyla, matematiksel model oluşturarak hisse senedi fiyatına tahmin veren bu çalışmalar, finans piyasalarında kilit role sahip olan birçok faktörü göz önünde bulundurmaktadır. Bu faktörler, finans piyasalarında sınırlı miktarda sermaye olduğu, hisse senedi alım satımı esnasında yatırımcıları hisse senedi fiyatının yanında fiyatın yönünün de etkilediği, farklı yatırımcıların aynı hisse senedi için farklı değerler biçebilecekleri şeklinde sıralanabilir. Bu tez çalışmasında matematiksel model oluşturulurken, yukarıda sözü edilen unsurlar göz önüne alınmıştır. Bu çalışmadaki farklılık, literatürdeki mevcut çalışmalarda rölatif (bağıl) fiyat değişimini belirlemek için kullanılan denklemin kullanılmayarak yerine bu denklemin iyileştirilmiş formunun sisteme dâhil edilmesinden kaynaklanmaktadır. Literatürdeki çalışmalarda yer alan rölatif fiyat değişimi denklemi, klasik mikroekonomi temel alınarak oluşturulmuş olup, fiyat değişimini aşırı talep fonksiyonuna orantılı olarak tanımlamaktadır. Aşırı talep fonksiyonu ise, arz ve talep fonksiyonlarının yalnızca bir fiyattaki değerlerini ihtiva etmektedir. Hâlbuki finansal piyasalardan, sayısal veriler ile arz ve talep fonksiyonlarına dair daha fazla bilgiler elde edilebilir. Örneğin, piyasa verilerinden arz ve talep fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevleri tahmin edilebilir. Bu durumda, arz ve talep fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi sunan piyasalar için, mevcut fiyat değişimi denklemi, fiyat tahmini vermekte yetersiz kalacaktır. Literatürde, bu nokta esas alınarak yapılmış olan bir başka çalışma mevcuttur. Söz konusu çalışmada, arz ve talep fonksiyonlarına dair daha fazla bilgi içeren finansal piyasalar için, uygun bir yaklaşım kullanılarak yeni bir fiyat değişimi denklemi oluşturulmuştur [1]. Bu tez çalışmasında da, oluşturulan bu fiyat değişimi denklemi başlangıç noktası kabul edilerek, hisse senedi fiyatı için daha iyi yaklaşımların elde edilmesi ve literatürde mevcut olan çalışmaların geliştirilmesi amaçlanmıştır.

1.2. FİNANSAL SİSTEME GENEL BİR BAKIŞ

Çağımızda, finansal sistem, mevcut piyasa ekonomilerinin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Bir ekonominin sağlıklı işlemesinin koşullarından bir tanesi, fonların, arz edenlerden (tasarruf sahipleri) talep edenlere (yatırımcılara) doğru, düzgün bir şekilde akışını sağlayacak etkin bir finansal sistemin varlığıdır [2]. Fon ise belirli bir alanda gerçekleştirilecek faaliyet için ayrılmış para veya yerine geçebilecek değerlerin tümü olarak tanımlanır. Finansal sistemin en önemli fonksiyonlarından bir tanesi, fon arz edenler ile fon talep edenleri karşı karşıya getirmektir ve dolayısı ile finansal sistem mevcut piyasa ekonomilerinde, tasarrufların yatırıma dönüştürülmesi işlevinde etkin rol oynamaktadır. Bu açıdan bakıldığında finansal sistemin yapısının ve günümüz ekonomilerindeki işleyiş mekanizmasının bilinmesi son derece önemlidir.

Sistem, belirli bir amaca yönelik olarak aralarında doğrudan ya da dolaylı ilişkiler bulunan ve aynı zamanda karşılıklı olarak birbirlerini etkileyen parçaların oluşturduğu bir bütün olarak tanımlanır [3]. Finansal sistem ise bir ekonomide belirli kişi ve kurumların, piyasa araçlarının ve organizasyonların beraberce çeşitli fonksiyonları yerine getirmek üzere bir araya gelmeleri sonucu oluşan bir bütündür [4].

Yukarıdaki sistem ve ardından finansal sistem tanımlarına genel olarak bakıldığında, göze çarpan esas özelliğin, bu mekanizmaların çatısı altında birbirleri ile etkileşim halinde bulunan unsurların varlığı olduğu görülür. Finansal sistemde, sözü edilen bu unsurlar sistemin temel unsurları olarak kabul edilmektedir. Bu anlamda finansal sistemin temel unsurları; fon arz edenler, fon talep edenler, finansal aracılar (kurumlar), finansal araçlar ve yasal ve kurumsal düzenlemelerdir.

Bu temel unsurlar aşağıda ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

Fon Arz Edenler

Finansal sistemin özünde, kabul edilebilecek bir getiri karşılığında, mevcut gelirin gelecekteki gelirle değişimi ve tasarrufları yatırıma dönüştürme güdüsü bulunmaktadır [5]. Bir ekonominin düzenli bir şekilde işlemesinin vazgeçilmez unsurlarından biri olan fon aktarımı, beraberinde mevcut piyasada fon sunan, başka bir deyişle, fon arz eden birimlerin varlığını gerektirmektedir. Fon arz eden ve bu anlamda finansal sistemin kaynağını oluşturan bu birimler mevcut ekonomik koşullar çerçevesinde ellerindeki fonlarını değerlendirmek ve yatırıma dönüştürmek güdüsü ile hareket eden bireysel ve kurumsal yatırımcılardan oluşmaktadır. Bu fon arz eden yatırımcılar spesifik olarak bireyler, işletmeler ve devletler olarak sıralanmaktadır.

Fon Talep Edenler

Fon talep edenler, fon arz edenlerin karşıt bir unsuru olarak finansal sistem içerisindeki yerini alırlar. Bu birimler mevcut gelirlerinden daha fazla harcamada bulunur ve sonuç olarak fon açığına sahip olurlar. Söz konusu ekonomik birimler genellikle durumlarına uygun finansal araçları kullanmak suretiyle fon fazlası olan ekonomik birimlerin fonlarını kullanırlar ve finansal aracın türüne bağlı olarak fonlarını kullandıkları ekonomik birimlere çeşitli ekonomik menfaatler sağlarlar [6]. Özel olarak bu fon talep eden birimler, benzer şekilde, bireyler, işletmeler ve devlet olarak sıralanmaktadır.

Finansal aracılar

Finansal aracılar fon arz edenler ile fon talep edenler arasında bir köprü görevi görmekte olup fon akışını çabuklaştırmak, olası gecikmelerin oluşumunu önlemek gibi işlevlere sahiptirler. Üstlendikleri bu aracılık fonksiyonunun dışında miktar ve vade ayarlama, finansal danışmanlık yapma gibi görevleri de vardır.

Yasal ve Kurumsal Düzenlemeler

Finansal sistemin sağlıklı bir şekilde işlemesini bu sistemin güvenli bir ekonomik ortamda çalışması mümkün kılar. Dolayısıyla finansal sistemin başlangıcından itibaren, finansal işlemleri yürüten ve bu işlemlere katılan birimler arasındaki tüm aktivitelerde ortaya çıkabilecek anlaşmazlıkların çözülmesinde rehberlik sağlayacak bir takım düzenlemelere gereksinim duyulmuştur. Hazırlanan bu kanun ve yönetmeliklerle ekonomi piyasasının işleyişinin denetim altında tutulması sağlanır.

Finansal Araçlar

Arz edenden talep edene doğru olan fon akışı esnasında mülkiyet ve el değiştirmeyi yazılı olarak belgeleyen unsurlar finansal araçlar olarak adlandırılırlar. Finansal sistemin işleyişinin doğasında, fon fazlalığı olan tasarruf sahiplerinin ellerindeki fazla fonlarını yatırıma dönüştürme güdüsü ile fon gereksinimi olan birimlere bu finansal araçlar adı verilen belgeler ile belirli bir bedel karşılığı kullandırmaları vardır. Finansal araçlar işlem gördükleri finans piyasalarına ve vadelerine göre çeşitlere ayrılmaktadırlar. Bazı finansal araçlar hazine bonosu, mevduat sertifikası, tahvil ve hisse senedi olarak sayılabilir. Bu tez çalışmasının esas öğelerinden birini oluşturduğu ve alım satımda baz olarak alındığı için hisse senedi kavramı detaylı olarak incelenecektir.

Hisse Senetleri

Hisse senetleri anonim şirketler tarafından çıkarılan ve belirli ortaklık sermayesine katılma payını temsil eden, kanun ve şartlara uygun şekilde düzenlenmiş kıymetli evraklardır.

Hisse senedinin daha geniş bir diğer tanımı ise şu şekilde verilebilir. Hisse senetleri anonim şirketler, sermayesi paylara bölünmüş komandit ortaklıklar, sigorta şirketleri, aracı kuruluşlar gibi özel kanunlarla kurulmuş olan kuruluşlar tarafından hissedarlığı belgelendirmek amacıyla çıkarılan şirket sermayesinin birbirine eşit paylarından bir parçasını temsil eden ve kanuni şekil şartlarına uygun olarak düzenlenen kıymetli evrak hükmünde belgelerdir [4].

Hisse senedi çıkarma hakkına sahip olan bir şirketin sermayesi belirli paylara bölünür ve her bir pay belirli bir bedel karşılığında bu sermaye ortaklığına katılan birimlere hisse senedi adı verilen finansal araç adı altında satılır. Bu şekilde hisse senedi sahibi olan gerçek ya da tüzel kişiler artık o anonim ortaklığın bir ortağı haline gelir. Bu bağlamda hisse senetleri, kullanıcısına, o sermaye şirketi için birtakım haklardan faydalanma olanağı verir. Hisse senetleri, sahiplerine, sağladıkları hakların haricinde birtakım getiri imkânları da sunmaktadırlar. Bunlar kâr payı (temettü), sermaye kazancı ve satıştan elde edilecek gelir olarak sıralanabilir.

Hisse Senedi Değer (Fiyat) Tanımları

Literatürde hisse senedine ilişkin çeşitli değer tanımları mevcuttur. Bu tanımların finansal sistem içerisinde genel kabul görmüş olanlarından, bu tez çalışması ile bağlantılı olan üçü aşağıdaki başlıklar altında açıklanmıştır.

Nominal (İtibari) Değer

‘Nominal değer’, şirketin esas sermaye (başlangıç veya çıkarılmış sermaye) miktarını belirleyebilmek ve bununla ilgili muhasebe kayıtlarını yapabilmek için, hisse senedinin ilk çıkarılışı sırasında ortaklık yönetimi tarafından verilen değerdir [4].

Örneğin, bir anonim şirketin, mevcut piyasa içerisinde dolanımda 3.000.000 milyon adet hisse senedi varsa ve bir hisse senedinin nominal değeri 3 TL ise şirketin esas sermayesi 9 milyon TL (3.000.000 adet * 3 TL) olarak hesaplanır.

Gerçek Değer

'Gerçek değer' yatırımcının hisse senedine atfettiği değer olarak tanımlanır. Hisse senedini ihraç eden anonim şirketin varlıkları, kârlılık durumu, dağıttığı kâr payları, mevcut piyasa içerisindeki istikrarı gibi faktörler yatırımcının gözünde o hisse senedine ait bir değer biçimlendirir.

Başka bir ifadeyle, yatırımcıların bu hisse senedinden bekledikleri kazanç oranını göz önüne alarak, hisse senedine biçtikleri, mevcut piyasa koşullarında söz konusu hisse senedi için normal buldukları değere 'gerçek değer' denir.

Piyasa Değeri

'Piyasa değeri', şirket tarafından piyasaya sürülen hisse senedinin, o piyasa içerisinde yatırımcılar arasında alınıp satıldığı fiyattır. 'Piyasa değeri', o piyasa içerisinde değişen arz ve talep koşullarına göre belirlenir. Başka bir deyişle anonim ortaklığın etkinliğinde herhangi bir değişme olmasa dahi, piyasa içerisinde başka nedenlere bağlı olarak değişen arz ve talep koşulları hisse senedinin piyasa fiyatında zaman içerisinde değişikliklere yol açabilir, böylece hisse senedinin gerçek değerinin altında veya üzerinde bir fiyat oluşabilir.

Hisse Senedi Analizleri

Finansal sistem içerisinde elindeki tasarrufunu hisse senedi finansal aracına yatırım yaparak değerlendirmek isteyen yatırımcı, yatırımından maksimum kâr edebilmek adına hangi hisse senedini ne zaman alıp ne zaman satması gerektiğine dair sorularla karşı karşıya kalmaktadır. Bu soruların cevaplanmasında bir takım analiz yöntemleri kullanılır. Bunların bir kısmı şu şekilde sıralanmıştır:

1. Temel analiz

2. Teknik analiz

3. Rassal yürüyüş

4. Portföy analizi.

Bu tez çalışmasında temel olarak alınmış olan Caginalp' e ait çalışmalar, teknik analiz yönteminde önem arz eden trend kavramını içerisinde barındırdığı için, şimdi 'trend' kavramı açıklanacaktır.

Trend

Fiyatların iniş ve çıkışlarla belli sürelerle izledikleri yöne trend denir [4]. Trend kavramı özellikle teknik analiz yönteminde çok önemli yer tutmaktadır.

Trend genel olarak piyasanın gittiği yön anlamına gelmektedir. Piyasa hangi yöne giderse gitsin genellikle doğrusal bir çizgi izlemez. Piyasa hareketleri daha çok ard arda gelen iniş çıkışın meydana getirdiği bir seri zigzag ile karakterize olur. Bu zigzaglar görünür taban ve tepelere sahip olan ve birbiri arkasına gelen dalganın temsilcisi konumundadır. Bu görünür taban ve tepelerin yönü piyasanın trendini meydana getirmektedir.

Bu tepe ve tabanlar aşağıya doğru, yukarıya doğru ve yahut yatay olarak konumlanmış olabilir. Bu özellik trend kavramını üçe ayırmaktadır.

Yukarı Trend (Yükselen Trend)

Yükselen trend tanımı birbiri ardına gelen bir seri yükselen taban ve tepe şeklindedir. Bu taban ve tepelerin ardı ardına gelerek oluşturduğu fiyat hareketinin yönü yukarıya doğrudur. Yükselen trendin içerisinde iniş ve çıkışlar bulunmaktadır (yalnız çıkış dalgalarından oluşmamaktadır); fakat her inişin sonundaki taban noktası bir önceki taban noktasından daha yukarıda ve her çıkışın sonundaki tepe noktası bir önceki tepe noktasından daha yukarıdadır.

Aşağı Trend (Alçalan Trend)

Alçalan trend tanımı birbiri ardına gelen bir seri alçalan taban ve tepe şeklindedir, yani yükselen trend tanımının tam tersidir. Bu taban ve tepelerin ardı ardına gelerek oluşturduğu fiyat hareketinin yönü aşağıya doğrudur. Alçalan trendin içerisinde de bir takım iniş ve çıkışlar mevcuttur (sadece iniş dalgalarından oluşmamaktadır); fakat her iniş dalgasının sonunda oluşan taban noktası bir önceki taban noktasından daha aşağıda ve her çıkış dalgasının sonunda oluşan tepe noktası bir önceki tepe noktasından daha aşağıdadır.

Bu iki tanım Şekil 1.1’ de gösterilmiştir.

Şekil 1.1. Yükselen ve alçalan trend grafiği

Yatay Trend

Yatay trend tanımı, birbiri ardına bir seri yatay olarak konumlanmış taban ve tepe şeklindedir. Bu tür piyasaya trendsiz piyasa adı da verilir.

Formasyonlar

Piyasada, hisse senedine olan arz ve talep dengesindeki değişmelerin hisse senedinin mevcut trendinin yön değiştirmesine neden olduğu bilinmektedir. Bu demektir ki, yükselmekte olan bir trend düşmeye başlayabilir ya da düşme konumunda olan bir trend yükselmeye başlayabilir. Bu dönüş noktalarında ortaya bir takım formasyonlar çıkmaktadır. Formasyonların, gelecekteki fiyat değişimleri ile ilgili ipuçları verdiği kabul edilmektedir. Bu şekillerden, bu tez çalışmasında da karşılaşılacak olan bir tanesi örnek olarak açıklanmıştır.

Omuz-Baş-Omuz Formasyonu

Yükselen bir trendin sonunda görülür. Bu formasyon hisse senedi fiyatının, artık yeterince yükselmiş olduğuna, bundan sonra düşüşe geçeceğine işaret etmektedir. Formasyon adından anlaşılacağı üzere iki bölümden oluşur. Bunlar fiyatların zirveye ulaşması ile oluşan baş kısmı ve bunun iki yanında yer alan omuzlardır. Bu şekil aşağıda verilmiştir:

Şekil 1.2. ‘Omuz-Baş-Omuz Formasyonu’ şekli

1.3. LİTERATÜRDE FİNANSAL MATEMATİK

Finansal matematik, 18. yüzyılın sonlarından itibaren ayrı bir akademik disiplin olarak görülmeye başlanmıştır. Finansal marketler ile alakalı olan uygulamalı bir matematik dalıdır. Bu dal, finans alanında uygulamaları bulunan matematiksel, olasılık ve istatistiksel tekniklerin bir toplamıdır. Bu uygulamalar hisse senedi ve finansal türevleri fiyatlama, finansal riskten korunma, risk analizi ve portföy optimizasyonu olarak sıralanabilir. Bu alanda yapılan çalışmalarda iki temel yaklaşım mevcuttur. Bu yaklaşımların biri diferensiyel denklemler, diğeri ise olasılık ve stokastik süreçlerdir.

Finansal matematiğin başlangıcı, 1900 senesinde, Louis Bachelier adlı Fransız Matematikçinin doktora tezinde hisse senedi opsiyonlarını değerlendirmek için Brownian Hareketi kullanmasına dayanmaktadır. Bachelier' in tezi, finans alanında modern matematiği kullanan ilk çalışmadır. Fakat akademik çevrelerde pek ilgi çekmemiştir. Finansal matematik alanındaki ilk etkili çalışma 1952 yılında Harry Markowitz tarafından yayınlanan 'Modern Portfolio Theory' isimli çalışmadır. Bu teoride, Markowitz, lineer regresyon stratejisini kullanarak hisse senedi ihtiva eden bir portföyün riskini ve getirisini anlamaya ve nicel değerlere dökmeye çalışmıştır. Aynı yıllarda, William Sharpe, piyasadaki her bir hisse senedi ile piyasa arasındaki bağıntıyı belirlemek için bir matematiksel yaklaşım geliştirmiştir. Bu öncü çalışmaları için Markowitz ve Sharpe, 1990 yılında Merton Miller ile birlikte ekonomi alanındaki Nobel ödülünü paylaşmışlardır. Bu ödül finans alanında verilen ilk ödüldür. Finansal matematik alanında diğer bir yenilik, 1973 yılında, Fisher Black ve Myron Scholes'un kısmi diferensiyel denklemlere dayalı olarak opsiyon fiyatlama tekniği geliştirme çalışmaları olmuştur. Robert Merton' un önemli katkılarıyla bu çalışma da 1997 yılında Nobel ekonomi ödülünü getirmiştir. 1980 yılında ise Harrison ve Kreptz finansal matematiğe martingale yaklaşımını tanıştırmışlardır.

Daha ayrıntılı matematiksel modeller ve finansal türevleri fiyatlama teknikleri sonraları geliştirilmiştir fakat 2007-2010 yılları arasındaki ekonomik kriz nedeniyle güvenilirlikleri zarar görmüştür. 'Institute of New Economic Thinking' gibi kurumlar şu aralar daha etkili teoriler ve metotlar geliştirme girişiminde bulunmaktadırlar.

Bu tez çalışmasında ise yukarıda açıklanan finansal matematik yaklaşımlarından farklı olarak diferensiyel denklemler ile finans piyasasını matematiksel olarak modelleme tekniğini kullanan çalışmalar baz alınmıştır. Bu çalışmaların başlangıcı 1990 yılında Gunduz Caginalp ve G. Bard Ermentrout tarafından çıkarılan 'A Kinetic Thermodynamics Approach to the Psychology of Fluctuations in Financial Markets' yayınına dayanmaktadır [6]. Sonrasında Caginalp' in farklı çalışma arkadaşlarıyla yayınladığı çalışmalar bu tez çalışmasının temelini teşkil etmektedir. Sözü edilen bu çalışmalar bir sonraki kısımda ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

BÖLÜM 2

2. LİTERATÜR TARAMASI

2.1. GEÇMİŞTE YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Geçmişte yapılmış olan çalışmaların anlatımı iki kısma bölünmüştür. Bu bölümlerden ilki, içerisinde tek bir grup ve tek tür hisse senedini ihtiva eden sistemlerin baz alındığı çalışmalara, ikincisi ise içerisinde iki grup ve tek tür hisse senedini ihtiva eden sistemlerin esas alındığı çalışmalara ayrılmıştır.

2.1.1. Tek Grup İçeren Piyasa Modelleri

G. Caginalp ve G.B. Ermentrout tarafından 1990 yılında yayınlanan 'A Kinetic Thermodynamics Approach to the Psychology of Fluctuations in Financial Markets' başlıklı makale diferensiyel denklemler ile finans piyasasını modelleme metodunu ihtiva eden ilk yayın olma özelliğini taşır [6]. Bu çalışmadaki modelde, bir hisse senedi ve bu hisse senedinin alım satımını yapan yatırımcıların olduğu kapalı bir sistem düşünülmüştür. Çalışmada söz konusu hisse senedinin fiyatı yatırımcıların hareketlerine göre belirlenir. Bu hareketler, hisse senedinin alınması ya da satılması ve hisse senedinin ya da nakit paranın elde tutulmasından ibarettir. Herhangi bir anda her bir yatırımcı ya da daha özel olarak her bir hisse senedi ya da nakit para şu dört durumdan birinde bulunur:

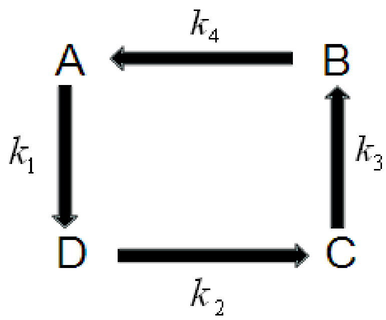
A = Satılması için ibraz edilmiş olan hisse senedi

B = Elde tutulan hisse senedi

C = Hisse senedi alınması için emir verilmiş nakit para

D = Elde tutulan nakit para

A, B, C, D ise her bir pozisyondaki toplam nakit paranın ya da hisse senedinin, sistemdeki toplam sermaye içerisindeki oranı olarak gösterilmiştir. Çalışmada, bu dört durum arasındaki muhtemel tüm geçişler gözlemlendiğinde her bir durumdaki değişikliklerin nasıl meydana geleceğinin anlaşılacağına işaret edilmiştir. Örneğin B' de meydana gelebilecek bir değişiklik B' den A' ya ve C' den B' ye olan geçişlerle mümkündür. Diğer bir deyişle, toplam sermayenin hisse senedinde olan kısmının oranı, hisse senedi satma ya da para satma (yani hisse senedi satın alma) sonucu değişikliğe uğrar. Bu oranlar arasındaki geçişlerin şemasal ifadesi aşağıdaki şekilde verilebilir.



Şekil 2.1. Pozisyonlar arasındaki geçişlerin şemasal ifadesi

Çalışmada bu mantıkla, her bir durumdaki zamana bağlı değişim k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ geçiş katsayıları cinsinden aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A + k_4 B \,, \tag{2.1}$$

$$\frac{dB}{dt} = -k_4\, B + k_3\, C \,, \tag{2.2}$$

$$\frac{dC}{dt} = -k_3\, C + k_2\, D\,, \tag{2.3}$$

$$\frac{dD}{dt} = k_1\, A - k_2\, D\,. \tag{2.4}$$

Yukarıdaki denklemlerde, fiyat değişiklikleri yüzünden meydana gelebilecek değişiklikler geçici olarak ihmal edilmiştir. Buradaki k_i fonksiyonları hisse senedi alım satımında yatırımcı psikolojisini etkileyen etmenleri ihtiva etmektedir. Bu fonksiyonların yapısı daha sonra ayrıntılı olarak anlatılacaktır. k_i katsayıları, bir pozisyondan diğerine geçiş oranı fonksiyonları olup finansal marketlerdeki psikolojinin ana kabullerini cisimleştirir ve bu açıdan bu söz konusu çalışmalarda önemli bir role sahiptirler.

Çalışmada bu dört denklem toplandığında $A + B + C + D$ toplamının sabit olduğu gösterilmiştir ve böylece genelliği kaybetmeksizin bunun 1 olarak alınabileceğine işaret edilmiştir.

Bu çalışmada, alım satım esnasında yatırımcıların motivasyonlarını etkileyen iki baskın unsur olduğu kabul edilmiştir. Bunlardan birisi trend bazlı bakış açısı diğeri ise değer bazlı bakış açısıdır.

Çalışmada, en yeni olanı en önemli olarak baz alacak şekilde, geçmiş fiyat değişikliklerine odaklanarak oluşturulan yatırımcı fonksiyonunun trend bazlı bakış açısı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Caginalp ve Ermentrout geçmişteki rölatif fiyat değişikliklerini toplamış ve her bir etaba artarak geçen süre ile giderek azalan bir ağırlıklandırma atamışlardır. Bu kısım trende dayalı yatırımcı motivasyonunu içerir. Finansal sistem ve işleyişi kısmında, trend kavramı ayrıntılı olarak açıklanmıştı. Fiyatların iniş ve çıkışlarla belli sürelerle izledikleri yöne trend denmekteydi. Bu açıdan bakıldığında, Caginalp ve Ermentrout' un trend bazlı olarak adlandırdıkları, geçmiş fiyat hareketlerinin yönünün etkisini alım satımda göz önüne alan yatırımcı motivasyonunu içeren duyarlılık fonksiyonu finansal sistemdeki trend kavramı ile uyumludur.

Çalışmada detaylar şu şekilde verilmiştir. Herhangi bir t anında, rölatif fiyat değişimi $P(t)^{-1}\, dP(t)/dt$ ile verilmiş ve geçmiş fiyat hareketlerinin normal şartlar altında yatırımcının zihninde giderek azalan bir etkiye sahip olduğu görüşünden yola çıkılarak bu değişikliğin sonraki bir t zamanındaki etkisi bu ifadenin $e^{-c_1(t-\tau)}$ ile çarpılması ile ifade edilmiştir. Yatırımcıların, genellikle hisse senedinin fiyat geçmişinin farkında oldukları ve hisse senedinin fiyatının arttığı ya da azaldığı yönündeki bakış açılarının bir tür giderek azalan hafıza ile ölçüldüğü görüşü benimsenmiştir. Örneğin, bir hisse senedinin fiyatını yirmi gün öncesinden izlemeye başlayan bir yatırımcı, alım satım yaparken normal şartlar altında, yirmi gün evvelki fiyat değişimine nazaran birkaç gün önceki fiyat değişimini daha çok göz önünde bulundurur. Çünkü yirmi gün önceki fiyat değişimi, hafızada giderek daha az yankı uyandıracak ve etkisi yakın zamanlardaki fiyat değişimine nazaran daha az olacaktır. Bu şekilde yatırımcı duyarlılığının trend bazlı bileşeni için, daha önceki tüm fiyat değişikliklerinin etkisinin toplamı matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$\zeta_1(t) = q_1 c_1 \int_{-\infty}^{t} e^{-c_1(t-\tau)} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau \,. \tag{2.5}$$

Burada q_1 genlik katsayısı olarak tanımlanmıştır. Bireyin yatırım yaparken trend bazlı motivasyonu ne kadar dikkate aldığının katsayısıdır başka bir deyişle yatırım yaparken bu trend bazlı bakış açısının göreceli olarak sahip olduğu önemdir. c_1 katsayısının tersi 'hafıza uzunluğunu' temsil eder. c_1 değeri büyük olduğunda, c_1^{-1} küçük olacaktır, dolayısıyla yatırımcının hisse senedinin önceki fiyat hareketleri hakkındaki görüşleri t anından başlayıp geçmişe kadar uzanan dar bir zaman aralığı ile kısıtlı olacaktır. Bu nedenle yakın zamanlarda meydana gelen ani bir yükseliş yatırımcının motivasyonunu daha çok etkileyecek ve alım satımda daha fazla rol oynayacaktır. Bir başka deyişle hızlı bir şekilde azalan hafızada kalma süresi, yavaş bir şekilde azalan hafızada kalma süresine göre son zamanlardaki fiyat değişikliklerini daha kuvvetli bir şekilde dikkate alacağından dolayı alım satımda her yeni bilgiyi daha çok göz önüne aldığı için daha değişken olacaktır.

Çalışmada, yukarıda ifade edildiği üzere, yatırımcının yatırım yaparken, geçmiş fiyat hareketlerine önem vermenin yanında, klasik ekonomide genel kabul gören bir başka unsura, hisse senedinin değerine önem verdiği kabulü dikkate alınmıştır.

Değer bazlı bakış açısı, piyasa fiyatı, hisse senedi fiyatının gerçek değerinin altında iken satın almayı, gerçek değerinin üzerindeyken ise satmayı içerir. Burada piyasa fiyatından kasıt, bir önceki bölümde hisse senedi fiyat tanımları kısmında yer alan piyasa değeridir, bir başka ifade ile hisse senedinin piyasada alınıp satıldığı fiyattır ve çalışmada $P(t)$ ile gösterilmiştir. Gerçek değerden kasıt ise, yine aynı bölümde gerçek değer başlığı altında verilen, yatırımcının hisse senedine atfettiği değer olup, çalışmada $P_a(t)$ ile temsil edilmiştir. Çalışmada satın almaya yönelik değer bazlı yatırımcı motivasyonunun, $(P_a(t) - P(t))/P_a(t)$ kesirsel indirimine orantılı olduğu kabul edilmiştir. Yatırımcının gerçek değer ile piyasa değeri arasındaki farktan istifade etmek için harekete geçmeden evvel bir eylemsizlik süresinin olma ihtimalinin olduğu görüşü savunulmuştur. Bu şu şekilde örneklendirilebilir: Bir ürün indirime girdiğinde ilk gün bu indirimi duyan tüm kişiler indirimden yararlanmak için çeşitli nedenlerden dolayı hemen satın alamayabilir, dolayısıyla indirimden yararlanan kişi sayısı duyan kişi sayısı ile aynı değildir. Fakat bu indirim on güne yayıldığında indirimden yararlanan kişi sayısı artacaktır. Burada indirimi duyma ile harekete geçme arasında geçen süre gecikme süresi olarak tanımlanmıştır. Yani indirim daha uzun olduğu sürece, ondan yararlanan kişi sayısı artacaktır. Henüz indirimden yararlanmayan yatırımcıların bölümü giderek azalan olduğu için üstel fonksiyon yine uygun bir seçimdir. Dolayısıyla yatırımcı duyarlılığını belirten fonksiyonun değer bazlı bileşeni olan bu kısım şu şekilde ifade edilmiştir:

$$\zeta_2(t) = q_2 c_2 \int_{-\infty}^{t} e^{-c_2(t-\tau)} \left(\frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} \right) d\tau \,. \tag{2.6}$$

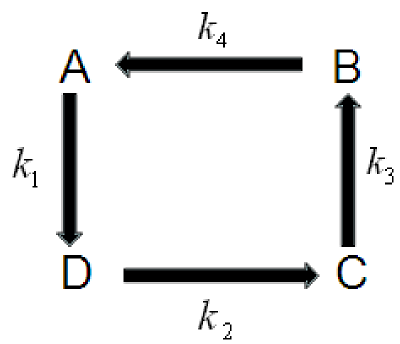
Burada q_2 yine genlik katsayısıdır. Bir önceki ifade de olduğu gibi, yatırımcının hareket ederken değer bazlı bakış açısını ne derece göz önünde bulundurduğunu nicel değere döker. c_2' in tersi burada zaman skalasıdır ve zihinsel eylemsizlik olarak tanımlanmıştır. c_2 katsayısının büyük bir değer alması demek c_2^{-1}' in küçük olması yani zihinsel eylemsizlik süresinin kısa olması anlamına gelir. Bu durumda olası bir aşırı değerlenme ya da indirime girme halinde yatırımcıların zihinsel eylemsizlik süreleri kısa olduğu için çok hızlı hareket edecekleri vurgulanmıştır.

Bu iki ζ_1 ve ζ_2 terimlerinin toplamı yatırımcı duyarlılığı fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$\zeta(t) = q_1 c_1 \int_{-\infty}^{t} e^{-c_1(t-\tau)} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau + q_2 c_2 \int_{-\infty}^{t} e^{-c_2(t-\tau)} \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} d\tau. \tag{2.7}$$

Çalışmada bu şekilde, yatırımcıların hareket ederken trend bazlı ve değer bazlı bakış açılarını göz önünde bulundurduğu düşünülmüştür. Bu fonksiyon yatırımcılara dair anahtar kabulleri şekillendirir ve satın alma ve satma oranlarında çok büyük öneme sahiptir. Söz konusu yatırımcı duyarlılığı fonksiyonu, pozitif olduğunda satın almaya, negatif olduğunda ise satmaya olan eğilimi ifade etmektedir.

Yukarıda bahsedilen, A, B, C, D oranları arasındaki geçişlerin şemasal ifadesi aşağıdaki gibi verilmişti:



Şekil 2.2. Pozisyonlar arasındaki geçişlerin şemasal ifadesi

Buradaki k_1, k_2, k_3, k_4 fonksiyonları bir pozisyondan diğerine geçişin olasılığını temsil eden fonksiyonlardır. Örneğin k_2 fonksiyonu, yatırımcıların hisse senedi satın almaya karar vermelerinin olasılığıdır. k_4 fonksiyonu ise, yatırımcıların ellerindeki hisse senedini satmaya karar vermelerinin olasılığıdır. k_1 satılması için ibraz edilmiş olan hisse senetlerinin satış işleminin gerçekleşme olasılığı, benzer şekilde k_3 ise hisse senedi alınması için sunulmuş olan para karşılığında hisse senedi alım işleminin gerçekleşme olasılığıdır.

Yukarıda oluşturulan $\zeta(t)$ yatırımcı duyarlılığı fonksiyonunu, k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ oran katsayılarının içine uygun bir şekilde yerleştirebilmek için $tanh$ fonksiyonu düşünülmüştür. $tanh$ fonksiyonunun seçilme nedeninin ayrıntıları şu şekilde verilmiştir.

Özel olarak, k_2 fonksiyonu yatırımcıların hisse senedi satın almaya karar verme oranıdır ve bu fonksiyonun $\zeta(t)$ yatırımcı duyarlılığı fonksiyonunun monoton artan pozitif bir fonksiyonu olması beklenir. $\zeta(t)$' nin değer kümesi $(-\infty, +\infty)$ iken k_2 fonksiyonunun değer kümesi [0,1] olmalıdır. Bunun nedeni k_i' nin bir pozisyondan diğerine geçiş olasılığının fonksiyonu olarak tanımlanmasından ileri gelmektedir. Bu koşulları sağlayan en basit uygun fonksiyon $tanh$ fonksiyonu olarak düşünülmüştür ve k_2 aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$k_2(t) = \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(\zeta(t))\right). \qquad (2.8)$$

Buradaki α sabit genlik katsayısıdır.

(2.8) denklemi temel olarak yatırımcı duyarlılığı yüksek olduğunda yatırımcıların yüksek bir oranda hisse senedi satın aldığına (elde para tutma pozisyonundan elden para çıkarma pozisyonuna geçişin yüksek olduğuna) işaret eder. Fakat bunun yanında dikkat edilirse, birim zamanda satın alınan hisse senedinin miktarı ayrıca o anda bulunan nakit para miktarına bağlıdır. Sonuç olarak şu aşamada açıkça görülebilen (2.8) ifadesinin önemli bir uygulaması ise, çok az nakit para kaldığında satın alma oranı k_2' nin etkisiz olduğudur. Bu şekilde, söz konusu çalışmalardaki diğer bir kilit nokta ise, toplam sermayenin sonlu kabul edilmesidir. Bu nedenle nakit para miktarı ya da hisse senedi sayısı azaldığında, yatırımcı motivasyonunun etkisinden bağımsız olarak alım satımda durağanlık yaşanacağına işaret edilmiştir.

Hisse senedi satma oranı olan k_4 için de benzer bir uygulama yapılmıştır. k_4 , k_2 katsayısının toplamsal tersi olduğu için başka bir β sabit genlik katsayısının kabulü ile $k_2/\alpha + k_4/\beta$=1 eşitliğinin gerçeklenmesi beklenir. Sonuç olarak k_4 katsayısı aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$k_4(t) = \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\big(\zeta(t)\big)\right). \qquad (2.9)$$

Sonrasında, hisse senedi fiyatı için bir denklem tartışılmıştır. Yukarıda da ifade edildiği üzere, klasik ekonominin temel prensibi olan bir ifade baz alınarak çalışma yürütülmüştür. Bu ifadeye göre, hisse senedinin fiyatı, nakitten hisse senedine geçenlerin (talep), hisse senedinden nakde geçenlere (arz) olan oranıyla belirlenir. Dolayısıyla rölatif fiyat değişimi, talebin ve arzın kurulan modeldeki karşılıkları cinsinden şu şekilde verilmiştir:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = f(C/A). \tag{2.10}$$

Burada f fonksiyonu $f(1) = 0$ koşulunu sağlayan artan bir fonksiyondur. Çünkü klasik ekonomideki kabule göre, talep arza eşit olduğunda fiyat dengeye oturur yani fiyatın türevinde bir değişiklik meydana gelmez. Bu iki kabul göz önünde bulundurularak, $f(x)$ yerine bu özellikleri sağlayan en basit fonksiyon olan $\log x$ fonksiyonunun alınabileceği ifade edilmiştir.

Çalışmada k_1 ve k_3 katsayıları için denklemler türetmeye gerek görülmemiştir çünkü bu dörtlü denklem sistemi uygun bir yaklaşım kullanılarak indirgenmiştir. Bu indirgemenin nedeni ve ayrıntıları şu şekilde verilmiştir.

Birçok finansal markette (örneğin Newyork Stock Exchange ve Chicago Commodities piyasalarında) hisse senedi satın alma ve hisse senedi satma emirleri neredeyse hemen işleme konulabilmektedir. Hisse senedi ya da nakit para, satışa sunulmadan ya da elden çıkarılmadan evvel günler ya da senelerce elde tutulabilir. Burada ifade edilen durum, sırasıyla modeldeki B' den, A' ya ve C' den, B' ye geçişe karşılık gelmektedir. Fakat hisse senedinin satış emri verildikten sonra satışının gerçekleştirilmesi ya da hisse senedi satın alınması için emir verildikten sonra alımının gerçekleştirilmesi bir ya da iki dakikadan daha fazla zaman almamaktadır. Bu durum kurulan model üzerinde düşünüldüğünde A' dan, D' ye ve benzer şekilde C' den, B' ye geçişin çok hızlı gerçekleştiği görülmüştür. Bu demektir ki, k_2 ve k_4 oran katsayıları, k_1 ve k_3' ü bin kat ya da milyon kat aşar. O nedenle çalışmada bu gözlemden sonra, ϵ şeklinde küçük bir parametre $(0 < \epsilon \ll 1)$ ve $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_3$ katsayıları tanımlamanın matematiksel olarak makul olduğu sonucuna varılmıştır:

$$k_1 = \frac{\tilde{k}_1}{\epsilon}, \quad k_3 = \frac{\tilde{k}_3}{\epsilon}. \tag{2.11}$$

Bu aşamadan sonra ϵ parametresinin limitinin sıfıra gittiği düşünülmüş ve bu durumda elde edilecek sonuçlar gözlemlenmiştir:

$$A \to 0, \qquad C \to 0, \qquad k_1 A \to k_4 B, \qquad k_3\, C \to k_2\, D. \tag{2.12}$$

Bu sonuçlar (2.2) ve (2.4) denklemlerinde yerine konulduğunda aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$\frac{dD}{dt} = k_4 B - k_2 D = -\frac{dB}{dt}. \tag{2.13}$$

$A + B + C + D = 1$ kabulü göz önünde bulundurulduğunda ise, $D = 1 - B$ sonucuna ulaşılmıştır. Elde edilen bu sonuç (2.13) denkleminde yerine konulduğunda aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir:

$$\frac{dB}{dt} = k_2(1 - B) - k_4 B. \tag{2.14}$$

Çalışmada, (2,1), (2.2), (2.3), (2.4) denklemlerinden oluşan sistemi kurarken fiyat değişiklikleri yüzünden oranlarda meydana gelebilecek değişikliklerin geçici olarak ihmal edildiği belirtilmişti. Bu aşamada, fiyat değişikliklerinin alım satımda oynayacağı rol dikkate alınmış ve (2.14) denklemi tekrar düzenlenmiştir. Bu düzenlemenin ayrıntıları çalışmada şu şekilde verilmiştir.

Bu sistem için gerekli olan korunum kuralı hisse senedi oranındaki değişim $\frac{dB}{dt}$ düşünülerek türetilmiştir. Hisse senedi oranındaki değişimin, satılan hisse senedi, satın alınan hisse senedi ve fiyat hareketlerinin değişimine bağlı olduğu kabulünden yola çıkılmıştır ve bu durum şu şekilde ifade edilmiştir:

$$\frac{dB}{dt} = k_2(1-B) - k_4B + fiyat\ hareketine\ bağlı\ değişim. \tag{2.15}$$

Bu ifadedeki son terimi türetebilmek için, ilk andaki hisse senedi oranı ve hisse senedi fiyatına sırasıyla B ve P denilmiştir. ΔP miktarında bir fiyat değişikliğinden sonra, toplam sermayenin hisse senedinde olan oranındaki değişiklik şu şekilde türetilmiştir:

$$\Delta B = (yeni\ oran) - B = \frac{B(1+\frac{\Delta P}{P})}{B\left(1+\frac{\Delta P}{P}\right)+(1-B)} - B. \tag{2.16}$$

Yukarıdaki ifade düzenlenip, payda eşitlenmiş ve şu hale getirilmiştir:

$$\Delta B = \frac{B(1-B)\frac{\Delta P}{P}}{B\frac{\Delta P}{P}+1} = B(1-B)\frac{\Delta P}{P}\frac{P}{B\Delta P+P} = B(1-B)\frac{\Delta P}{B\Delta P+P}. \tag{2.17}$$

Son ifadedeki kesrin pay ve paydası ΔP ile bölünerek ifade aşağıdaki hale indirgenmiştir:

$$\Delta B = B(1-B)\frac{1}{\frac{P}{\Delta P}+B}\,. \tag{2.18}$$

Bu aşamada (2.18) ifadesinin her iki tarafı Δt' e bölünerek, $\Delta t \to 0$ iken limiti alınmış ve aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$\frac{dB}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} B(1-B)\frac{1}{P\frac{\Delta t}{\Delta P}+\Delta t B} = B(1-B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}\,. \tag{2.19}$$

Elde edilen bu son ifade, (2.15)' de yerine yazılmış ve aşağıdaki ifadeye ulaşılmıştır:

$$\frac{dB}{dt} = k_2(1-B) - k_4 B + B(1-B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}. \tag{2.20}$$

Bu aşamadan sonra, elde edilen bu yeni sonuçlar kullanılarak, (2.10) denkleminde, C/A oranı için aşağıdaki şekilde eşdeğer bir ifade bulunmuş ve rölatif fiyat değişimi denklemi şu şekilde ifade edilmiştir:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = F\left(\frac{k_2\tilde{k}_1}{k_4\tilde{k}_3}\frac{1-B}{B}\right). \tag{2.21}$$

Satın alma ve satma emirleri arasında bir simetri olduğu kabul edilerek $\alpha = \beta$ olarak alınmıştır. Böylece $k \coloneqq k_2 = 1 - k_4$ ifadesi gerçeklenmiştir. Bu şekilde, geçiş oranı fonksiyonlarını temsil eden k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ifadeleri tek değişkene indirgenmiş ve bundan sonraki çalışmalarda, hisse senedinden nakde geçişin olasılığı olarak, yalnız k fonksiyonu kullanılmıştır. $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_3$ şeklinde alınarak, (2.21) denklemi

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = F\left(\frac{k}{1-k}\frac{1-B}{B}\right). \tag{2.22}$$

haline indirgenmiştir.

$k \coloneqq k_2 = 1 - k_4$ ifadesi (2.20) denkleminde kullanıldığında ise,toplam sermayenin hisse senedinde olan kısmının zaman içerisindeki değişimi aşağıdaki ifade ile verilmiştir:

$$\frac{dB}{dt} = k(1-B) - (1-k)B + B(1-B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}. \tag{2.23}$$

Dolayısıyla alış ve satış emirlerinin çok hızlı bir şekilde yerine getirildiği kabulü, kurulan modeli dört bilinmeyenden $(A,\ B,\ C,\ D)$ tek bilinmeyene (B) indirgemiştir. (2.5), (2.6), (2.22) ve (2.23) denklemleri birlikte düşünüldüğünde, integral ve diferensiyel denklemlerden oluşan bir sistem elde edildiği görülmüştür. Fakat çalışmada birçok matematiksel nedenden ötürü integral ve diferensiyel denklemlerin kombinasyonundan oluşan bu sistem yerine, birinci dereceden adi diferensiyel denklemlerden oluşan bir sistemi çalışmanın daha rahat olacağı ifade edilmiştir. (2.5) ve (2.6) ifadelerinin Leibnitz kuralı uygulanarak türevi alındığında aşağıdaki iki denklem elde edilmiştir:

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = c_1\left(\frac{q_1}{P}\frac{dP}{dt} - \zeta_1\right), \tag{2.24}$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = c_2\left(q_2\frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)} - \zeta_2\right). \tag{2.25}$$

Bu şekilde (2.22), (2.23), (2.24) ve (2.25) denklemlerinden oluşan bu denklem sisteminin, (2.8) cebirsel denkleminin kullanımıyla, lineer olmayan adi bir diferensiyel denklem sistemi oluşturduğu ifade edilmiştir.

Oluşturulan bu adi diferensiyel denklem sisteminin nümerik çalışmaları 1991 yılında Caginalp ve Ermentrout tarafından yayınlanan 'Numerical Studies of Differential Equations Related to Theoretical Financial Markets' adlı makalede sunulmuştur [7]. Söz konusu makalede, adi diferensiyel denklem çözen 'Phaseplane' programı kullanılarak hisse senedi fiyat dinamiğindeki salınımların, ani dönüşlerin, aşırı tepkilerin ve genel denge özelliklerinin nicel olarak anlaşılması amaçlanmıştır. Yapılan bir çok nümerik çalışma sonucunda görülmüştür ki, aşırı tepkiler genel olarak yüksek bir trend-bazlı bileşen $(q_1 \gg 1)$ ve düşük bir trend-bazlı hafızadan $(c_1 \gg 1)$ kaynaklanmaktadır. Trend-bazlı katsayı indirildiğinde ve trend-bazlı hafıza süresi uzatıldığında salınımların genişliği azalmış ve fiyat için asimtotik değer düzgün bir şekilde elde edilmiştir.

Sonrasında 1994 yılında Caginalp ve Balenovich tarafından 'Market Oscillations Induced by the Value Based and Trend Based Investment Strategies' adlı makale yayınlanmıştır [8]. Bu makalede, daha önce Ermentrout ve Caginalp tarafından temel mikroekonomik prensiplere dayandırılarak kurulan model ve nümerik çalışmaların yer aldığı makalelerin bir modifikasyonu yapılmıştır. Türetilen modelin nümerik çalışmaları nicel olarak deneysel ekonomi çalışmaları ve dünya piyasalarından örnekler ile karşılaştırılmıştır. Daha önceki çalışmalardan farkı, o zamana kadar sadece söz ile ifade edilen talep ve arz ifadelerinin kurulan modelde denklem olarak ifade edilmesidir.

Bu makaleye, Watson ve Getz tarafından 1981 yılında yayınlanan ‘Price Theory and Its Uses’ adlı kitapta klasik mikroekonominin temel prensibi olan bir ifade baz alınarak çalışmaya başlanmıştır [9]. Çalışmada, arz S ve talep D ile gösterilmiştir. Söz konusu ifade ‘ S ve D arasındaki denge değiştiğinde, rölatif fiyat değişimi bu dengeyi yeniden sağlamak adına gerçekleşir’ şeklindedir. Yukarıdaki tanım esas alınarak kitapta fiyat değişimi için verilen denklem aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{d}{dt}\log P = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \tilde{F}\left(\frac{D(P) - S(P)}{S(P)}\right) = F\left(\frac{D(P)}{S(P)}\right). \tag{2.26}$$

Bu ifadedeki $D(P)/S(P) - 1$ ifadesi (arz tarafından normalize edilmiş) aşırı talep fonksiyonu olarak adlandırılır. (2.26) denklemindeki F fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$F(1) = 0, \tag{2.27}$$

$$F' > 0. \tag{2.28}$$

Çalışmada buradaki (2.27) özelliğinin, daha evvel bahsedildiği üzere, arz talebe eşit olduğunda fiyatın denge noktasına ulaşmasını garanti ettiğine işaret edilmiştir. Arz ve talep fonksiyonlarının monoton oldukları klasik kabulü dikkate alındığında ise (2.28) koşulunun bu denge noktasının tek olmasını garanti altına aldığına dikkat çekilmiştir.

Bu çalışmaya, daha önceki çalışmalarda kurulan ilk model yerine, parametrelerin indirgenmesi sonucu elde edilen sonuçlar kullanılarak başlanmıştır. B ile adlandırılan yine toplam sermaye içindeki hisse senedinin oranıdır. Tam tersi olarak $1 - B$ ise toplam sermaye içindeki nakit paranın oranıdır.

Yukarıda da ifade edildiği gibi, klasik fiyat ayarlama tekniğine göre fiyattaki değişim, hisse senedine olan talep ve arz ile belirlenir. Bu nedenle kurulan model içerisinde, talep ve arz terimlerinin tanımlanmasına ihtiyaç duyulmuştur. ‘Bir hisse senedine olan toplam talep, toplam sermayedeki nakit paranın oranının k olasılık fonksiyonu ile çarpılması ile elde edilir’ şeklinde tanımlanmıştır. Buradaki k fonksiyonu bir birim nakdin verilerek, karşılığında hisse senedi satın alma olasılığıdır. Ya da talep eşdeğer olarak, nakit paranın k oranında hisse senedine akması olarak tanımlanır. Bu tanımlardan yola çıkılarak çalışmada D için şu eşitlik elde edilmiştir:

$$D = k(1 - B). \tag{2.29}$$

Arz için de, benzer şekilde düşünülerek toplam sermayenin içindeki hisse senetlerinin oranının $(1 - k)$ olasılığı ile çarpılması sonucu elde edileceği ifade edilmiştir. Buradaki $(1 - k)$ bir birim hisse senedinin satılarak karşılığında nakit para elde edilme olasılığıdır. Bir başka deyişle arz yine eşdeğer olarak, hisse senedinin $1 - k$ oranında nakit paraya akması şeklinde ifade edilmiştir:

$$S = (1 - k)B. \tag{2.30}$$

Burada, k olasılık fonksiyonu olarak düşünüldüğü için 0 ile 1 arasında değerler alacağı vurgulanmıştır.

Yukarıda oluşturulan bu temel denklemlerin, arz talep oranını, satın alma ve satma oranına çevirmede işlev gördüğü belirtilmiştir.

(2.29) ve (2.30) ifadelerindeki denklemler, logaritma fonksiyonu ile temsil edilen, fiyat değişimi denkleminin içine yerleştirerek şu ifadeye ulaşılmıştır:

$$\frac{d}{dt}(\log P) = \log\left(\frac{k(1-B)}{(1-k)B}\right) . \tag{2.31}$$

(2.31) denkleminin rölatif fiyat değişimi için [6] çalışmasında türetilen (2.22) denklemi ile tutarlı olduğu görülmektedir.

Daha sonra 1999 yılında yine Caginalp ve Balenovich tarafından 'Asset Flow and Momentum: deterministic and stochastic equations' isimli bir çalışma yayınlanmıştır [10]. Bu çalışmanın, daha önceki çalışmalara olan katkısı, çalışmada likitide teriminin tanımlanması ve finans piyasalarına olan etkisinin sözle ifade edilmesi ve modelin genişletilerek stokastik öğeler ile birlikte incelenmesi olmuştur.

Bu çalışmada başlangıçta, kapalı bir sistem düşünülmüştür. Kapalı sistemden kasıt, hisse senedi ya da nakit para giriş çıkışına izin verilmemesidir. Sistemde başlangıçta katılımcılara rasgele dağıtılan M birim nakit para ve N birim hisse senedinin olduğu kabul edilmiştir. B ifadesi, yine toplam sermayenin hisse senedinde olan oranını temsil etmektedir. Likitide terimi toplam nakit paranın, toplam hisse senedi sayısına oranı olarak tanımlanmış ve kapalı bir sistemde bu iki değer sabit olacağından dolayı, $L \coloneqq \frac{M}{N}$ şeklinde sabit bir değer olarak ifade edilmiştir. Birimi ise M ile aynıdır.

Çalışmada, yine arz ve talep ifadelerin, modellemedeki formülasyonlarından yararlanılmıştır ve bu iki terim önceki tanımlarıyla ele alınmıştır:

$$D \coloneqq k(1-B) , \qquad S \coloneqq (1-k)B . \tag{2.32}$$

k, geçiş oranı fonksiyonu yine trend bazlı ve değer bazlı yatırımcı motivasyonları cinsinden tanımlanmıştır. Bu çalışmanın öncekilerden farkı, k fonksiyonunun içerisinde $tanh$ fonksiyonunu barındırmıyor olmasıdır. Küçük x değerleri için, $\tanh(x) \approx x$ lineer yaklaşımından yararlanarak, çok büyük farklılığa yol açmayacağı düşünülüp, k fonksiyonu lineer hale getirilmiştir. Bu şekilde k, trend bazlı ve değer bazlı yatırımcı motivasyonlarının ağırlıklı toplamı şeklinde şöyle ifade edilmiştir:

$$k \coloneqq \frac{1}{2}(1+\zeta)\,, \qquad \zeta \coloneqq \zeta_1 + \zeta_2\,. \tag{2.33}$$

Yani buradaki $k \coloneqq \frac{1}{2}(1+\zeta)$ ifadesi $k \coloneqq \frac{1}{2}(1+\tanh\zeta)$ ifadesine bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımın lineer olmayan tanıma çok yakın olacağı ve k' nin yine [0,1] aralığında değerler alacağı vurgulanmıştır.

B ve $1-B$ ifadeleri tanımları göz önünde tutularak , M ve N cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$B = \frac{NP}{NP+M}\,, \tag{2.34}$$

$$1 - B = \frac{M}{NP+M}\,. \tag{2.35}$$

B ifadesinin zamana bağlı değişimi [6] çalışmasında türetildiği haliyle kullanılmıştır:

$$\frac{dB}{dt} = k(1-B) - (1-k)B + B(1-B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}\,. \tag{2.36}$$

Fiyattaki rölatif değişim aşırı talep ile lineer olarak değişen bir ilişki içerisindedir kabulü baz alınmış ve τ_0 zaman skalası kullanılarak şu şekilde ifade edilmiştir:

$$\frac{\tau_0}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1\,. \tag{2.37}$$

Bu, klasik mikro ekonomik kabulün (fark yerine türev alınarak) sınırlandırılmış bir formudur [11].

Rölatif fiyat değişimi fonksiyonunda (2.32) denklemleri yerlerine yazıldığında,

$$\frac{\tau_0}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{k}{1-k}\frac{1-B}{B} - 1 \tag{2.38}$$

elde edilmiştir. Buradaki $\frac{k}{1-k}$ ifadesi, aşağıdaki şekilde uygun bir yaklaşım yapılarak indirgenmiştir:

$$\begin{aligned}\frac{k}{1-k} &= \frac{\frac{1+\zeta}{2}}{1-(\frac{1+\zeta}{2})} = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = (1+\zeta)\frac{1}{1-\zeta} \approx (1+\zeta)(1+\zeta) \\ &= 1 + 2\zeta + \zeta^2\,. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Yukarıdaki yaklaşım yapılırken $\frac{1}{1-\zeta}$ ifadesi geometrik seriye açılmış ve ζ değerleri küçük olduğundan baskın olan ilk iki terim alınmıştır. En son ifadede ise ζ, yatırımcı duyarlılığı fonksiyonunun küçük bir terim olmasından yararlanılarak, ζ^2 terimi ihmal edilmiş ve sonuç olarak şu ifade elde edilmiştir:

$$\frac{k}{1-k} \approx 1 + 2\zeta \approx 1 + 2(\zeta_1 + \zeta_2)$$
$$= 1 + 2\frac{q_1\tau_0}{P}\frac{dP}{dt} + 2q_2\left(1 - \frac{P(t)}{P_a(t)}\right). \quad (2.40)$$

(2.40) denkleminde görüldüğü üzere, bu çalışmada yapılan analizlerde ζ_1 ve ζ_2 duyarlılık fonksiyonları önce anlık olarak ele alınmıştır. Bir başka deyişle trendin ve değerdeki düşmenin önceki etkileri dikkate alınmamıştır.

Rölatif fiyat değişimi denklemindeki $B/1-B$ ifadesi tanımlardan yararlanılarak, aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir:

$$\frac{1-B}{B} = \frac{M}{NP} = \frac{L}{P}. \quad (2.41)$$

(2.40) ve (2.41) ifadeleri, (2.38) denkleminde yerine yazılarak, likitide teriminin de içinde bulunduğu aşağıdaki denklem elde edilmiştir:

$$\frac{\tau_0}{P}\frac{dP}{dt} = \left[1 + 2\frac{q_1\tau_0}{P}\frac{dP}{d\tau} + 2q_2(1 - \frac{P(t)}{P_a(t)})\right]\frac{L}{P} - 1. \quad (2.42)$$

Burada, kapalı sistem kabulünden dolayı, likitide sabit bir terim olduğundan, denklemdeki türev ${P(t)}/_{L}$ fonksiyonunun türevi olarak alınmış, ve $Q_1 \coloneqq 2q_1$, $Q_2 \coloneqq 2q_2$ tanımlamalarının da kullanımıyla, denklem aşağıdaki hale getirilmiştir:

$$\tau_0\left(1 - Q_1\frac{L}{P}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{L}\right) + \left(1 + Q_2\frac{L}{P_a}\right)\frac{P}{L} = 1 + Q_2. \quad (2.43)$$

$\bar{P} \coloneqq \frac{P}{L}, \bar{P}_a \coloneqq \frac{P_a}{L}, \tau \coloneqq \frac{t}{\tau_0}$ dönüşümlerinin kullanımıyla denklem şu şekilde ifade edilmiştir:

$$\left(1 - \frac{Q_1}{\bar{P}}\right)\frac{d\bar{P}}{dt} + \left(1 + \frac{Q_2}{\bar{P}_a}\right) = 1 + Q_2 \,. \tag{2.44}$$

Bu denklemde, fiyatın denge noktasının özellikleri incelenirken, bazı sonuçların gözlemlendiği vurgulanmıştır. Örneğin $t \to \infty$ iken, fiyatın denge noktasına oturduğu kabulünden yola çıkılarak, $\bar{P}$ yerine $\bar{P}_{denge}$, $\bar{P}_a(\infty)$ yerine de $\bar{P}_a$ yazılmıştır. Fiyat dengeye oturduğunda, fiyat değişiminin olmayacağı böylece türevin sıfır olacağı sonucu kullanıldıktan sonra denklemde her iki taraf Q_2' ye bölündüğünde, aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

$$\left(\frac{1}{Q_2} + \frac{1}{\bar{P}_a}\right)\bar{P}_{denge} = 1 + \frac{1}{Q_2} \,. \tag{2.45}$$

Bu denklemde bir takım analizler yapılmış ve sonuçların piyasalarla uyumlu olduğu gözlenmiştir. İlk olarak, yeterince büyük Q_2 değerleri göz önüne alınmıştır (yani $Q_2 \gg maks(1, \bar{P}_a)$). Bir başka deyişle, yatırımcı hisse senedinin değerine çok önem verecektir, ama trend ile ilgilenmeyecektir. Bu durumda Q_2 çok büyük olduğundan, $1/Q_2$ değeri çok küçük değer alacak ve denklemde ihmal edilebilecektir. Böylece sonuçta aşağıdaki ifade sağlanacaktır:

$$\frac{\bar{P}_{denge}}{\bar{P}_a} \sim 1 \,. \tag{2.46}$$

Yani yatırımcı değer bazlı motivasyona çok önem verdiğinde, hisse senedinin denge fiyatı gerçek değere yaklaşacaktır.

Sonrasında, aksine Q_2 değeri çok küçük olarak düşünülmüştür (yani $Q_2 \ll \min(1, \bar{P}_a)$). Bir başka deyişle, yatırımcı trende çok önem verecek ama gerçek değerden olan sapmayla ilgilenmeyecektir. Bu durumda Q_2 değeri çok küçük olduğundan, $1/Q_2$ değeri çok büyük olacak bu nedenle denklemdeki diğer ifadeler ihmal edilebilecektir. Sonuçta aşağıdaki ifade gerçeklenecektir:

$$\frac{\bar{P}_{denge}}{Q_2} \sim \frac{1}{Q_2} \rightarrow \bar{P}_{denge} \sim 1 \,. \tag{2.47}$$

$\bar{P}_{denge}$'in tanımına geri dönüldüğünde $P \sim L$ ifadesinin sağlandığı görülmüştür. Bu demektir ki, yatırımcı trende çok önem verdiğinde, denge fiyatı likitide fiyatına yaklaşacaktır. Bu gerçek piyasalardaki ve deneysel ekonomi çalışmalarındaki bir takım sonuçlarla uyumludur. Örneğin deneysel çalışmalarda uygulanan bir gerçek, alım satımda gerçek değere önem vermeyen yatırımcıların likitide değerini baz alarak motivasyon oluşturduğudur. Gerçek piyasalarda bazı analiz uzmanlarına göre ise, likitide, hisse senedi fiyatlarının yükselmesinde temel bir faktördür.

Çalışmanın ilerleyen kısımlarında, yatırımcı motivasyon ve stratejisini temsil eden $\zeta_i(t)$ fonksiyonları genişletilerek [6] çalışmasındaki gibi ele alınmışlardır:

$$\zeta_1(t) = q_1 c_1 \int_{-\infty}^{t} e^{-c_1(t-\tau)} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau \,, \tag{2.48}$$

$$\zeta_2(t) = q_2 c_2 \int_{-\infty}^{t} e^{-c_1(t-\tau)} \left(\frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} \right) d\tau \,. \tag{2.49}$$

Adi diferensiyel denklemlerden oluşan bir diferensiyel denklem sistemi oluşturmak adına bu iki denklemin Leibnitz kuralı yardımıyla türevleri alınmış ve şu iki denkleme dönüştürülmüşlerdir:

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = c_1\left(\frac{q_1}{P}\frac{dP}{dt} - \zeta_1\right), \tag{2.50}$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = c_2\left(q_2\frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)} - \zeta_2\right). \tag{2.51}$$

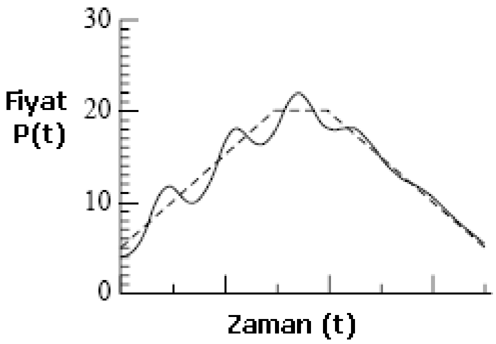
Makalenin nümerik çalışmaları kısmında ise geçiş oranı fonksiyonu yine önceki çalışmalardaki haliyle kullanılmıştır:

$$k(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left(\zeta(t)\right)\right) \tag{2.52}$$

Çalışmada (2.36), (2.38), (2.50), (2.51) denklemlerinin, ve (2.52) cebirsel denkleminin kullanımıyla, dört bilinmeyen ve dört denklemli, adi diferensiyel denklemlerden oluşan tam bir sistem elde edildiği vurgulanmıştır. Oluşturulan denklem sistemi [8] çalışmasındaki deneylerle en uyumlu olacak şekilde seçilen parametreler ile nümerik olarak çalışılmıştır.

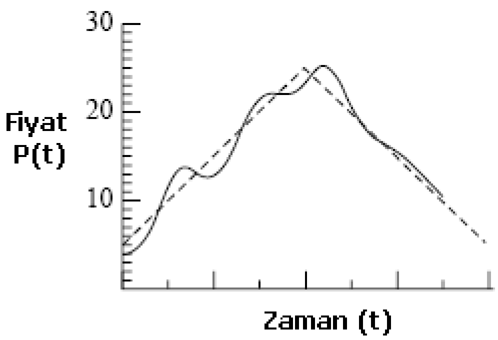
Yapılan ilk nümerik çalışmada, $P_a(t)$' nin doğrusal olarak önce arttığı, sonra bir müddet sabit kaldığı ve son olarak yine doğrusal olarak azaldığı bir örnek düşünülmüştür. $B = 0.5,\ \zeta_1 = 0,\ \zeta_2 = 0,\ c_1 = 0.001,\ c_2 = 0.01,\ q_1 = 900,\ q_2 = 45$ olarak alınmıştır. $\zeta_1 = 0$ başlangıç değerinin atanmasının nedeni ilk anda hisse senedi fiyatında değişiklik olmadığının düşünülmesinden, $\zeta_2 = 0$ olarak alınmasının nedeni ise ilk anda $P_a(t) = P(t)$ olarak kabul edilmesinden kaynaklanmaktadır.

Nümerik çalışmalar sonucu elde edilen grafik Şekil 2.3' de gösterilmektedir. Grafikten görüldüğü üzere, $P(t)$' nin $P_a(t)$ değeri etrafında daha evvel açıklanan, ekonomideki kafa ve omuzlar (head and shoulders) yapısında salınımlar yapmıştır.



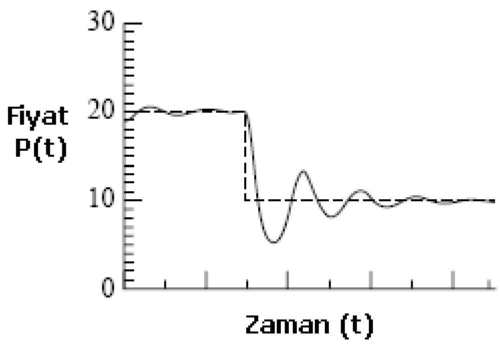
Şekil 2.3. Caginalp & Balenovich [CB] Modeli fiyat-zaman grafiği

İkinci nümerik çalışmada, Şekil 2.4' deki grafikte görüldüğü gibi $P_a(t)$' nin ters V biçiminde bir yol izlediği düşünülmüştür. Bu çalışmada $B = 0{,}5$, $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$, $c_1 = 0.01$, $c_2 = 0.001$, $q_1 = 875$, $q_2 = 250$, $P(0) = 4$ şeklinde başlangıç değerleri alınmıştır. Bu durumda ise $P(t)$, gerçek değer $P_a(t)$ etrafında daha düzgün salınım yapan değerler almıştır.



Şekil 2.4. Caginalp & Balenovich [CB] Modeli fiyat-zaman grafiği

Sonra birçok piyasada, beklenmedik bir olaydan ötürü hisse senedi fiyatlarında ani değişiklikler olduğu gerçeği göz önüne alınarak, buna uygun bir örnek çalışılmıştır. Herhangi bir anda, ani bir düşüş gösteren bir $P_a(t)$ dikkate alındığında, $P(t)$' nin zamana göre değişimi ilk önce $P_a(t)$ değerini geçecek nitelikte ani değişiklikler gösteren salınımlar içermiş fakat sonrasında Şekil 2.5' de verilen grafikte görüldüğü gibi fiyat yavaş yavaş $P_a(t)$ değerine yakınsamıştır.



Şekil 2.5. Caginalp & Balenovich [CB] Modeli fiyat-zaman grafiği

2.1.2. Karışık Gruplar İçeren Piyasa Modelleri

Bu tez çalışmasının modelleme kısmına ve nümerik çalışmalarına ışık tutan çalışma ise Caginalp ve Merdan tarafından 2007 yılında yayınlanan 'Asset Price Dynamics with Heterogeneous groups' isimli makaledir [12]. O nedenle geçmişte yapılmış çalışmaların anlatımı esnasında bu çalışma özel bir öneme sahiptir.

Caginalp ve Merdan tarafından yayınlanan makalede, çeşitli koşullar altında hisse senedi fiyat dinamiğini incelemek için yine bir adi diferensiyel denklem sistemi kullanılmıştır. Bu koşullardan bir tanesi, markete yatırımcılar tarafından farklı yorumlanan bilgilerin girmesidir. Bir başkası ise hisse senedi sayısındaki değişiklik yüzünden hisse senedi fiyatında meydana gelebilecek değişikliklerin incelenmesidir. Bu olgulara göre hisse senedi fiyatında meydana gelen değişiklikleri belirleyebilmek adına, nümerik çalışmalar yardımıyla hisse senedinin denge fiyatı incelenmiştir. Bu çalışmada da, daha önceki çalışmalarda olduğu gibi, lineer olmayan adi bir diferensiyel denklem sistemi ile trend bazlı ve değer bazlı yatırım stratejilerine ek olarak, sistemdeki toplam sermaye miktarının sonlu olmasının, hisse senedi fiyat dinamiğine olan etkileri göz önüne alınmıştır.

Bu çalışmada modelleme kısmına geçilmeden evvel klasik ekonomi ile ilgili bazı bilgilere yer verilmiştir.

Klasik ekonomi, denge fiyatına, arz ve talep birbirine eşit olduğunda ulaşılacağını şart koşar. Hisse senedi fiyat dinamiği için neo-klasik yaklaşım ise fiyatın denge noktasından ne kadar uzakta olduğu ile orantılı olduğu oranda dengeye döneceğini kabul eder. Hisse senedi fiyatlarının klasik ve neo-klasik tanımlarında üç adet kabul mevcuttur:

i) Arz ve talep hisse senedinin değerine bağlıdır.
ii) Piyasadaki bilgi herkes tarafından bilindiği için market katılımcıları arasında hisse senedinin değeri hakkında genel bir mutabakat vardır.
iii) Piyasada sonsuz miktarda sermaye mevcuttur.

Caginalp ve Merdan' a göre, bu klasik akademik teoriler bazen hisse senedi fiyat dinamiği için yararlı bir idealleştirme olurken, bazen de piyasada yatırımcılar tarafından rutin olarak incelenen birçok kilit noktayı ihmal etmektedirler.

Çalışmalarında bu üç kabulün ihmal ettiği noktalara yer vermişlerdir. Örneğin ilk kabul göz önüne alınacak olduğunda, bir hisse senedine olan arz ve talebin, sadece hisse senedinin değerine bağlı olmadığının aşikar olduğunu vurgulamışlardır. Hisse senedi piyasalarında, uzun bir süredir hisse senedi alım satımlarının altında farklı motivasyonların yattığı bilinmektedir. Bu motivasyonlardan önemli bir tanesi çalışmada, hisse senedi fiyatının trendi olarak verilmişir. Zira bu motivasyon, Caginalp' in daha önceki çalışmalarında da yer almıştır. İkinci kabul ise markette tüm katılımcılara, bilgiler açık olduğu ve aynı bilgiler tüm katılımcılar tarafından bilindiği için fiyatın tek türlü belirleneceği yönündedir. Caginalp ve Merdan, [13] ve [14]' de yer alan çalışmalarda bu durumun deneysel olarak ele alındığında başarısız olduğuna işaret etmiştir. Çünkü çalışmada da belirtildiği üzere, yatırımcının motivasyon farkı, hisse senedi fiyat geçmişinin farklı algılanması gibi faktörler, her bir yatırımcı tarafından hisse senedine biçilen değeri farklı kılabilir. Üçüncü kabul ise, klasik etkin piyasa teorisine göre piyasada sonsuz miktarda sermaye olduğudur. Gerçek fiyattan herhangi bir düşme olduğunda, piyasadaki paranın oraya aktarılarak hisse senedi fiyatının eski haline getirileceği ileri sürülür. Caginalp ve Merdan ise, piyasada sonsuz miktarda sermaye olamayacağını savunarak kurdukları modelde, (daha önceki çalışmalarda da olduğu gibi) toplam sermayenin sonlu olmasının etkilerini dikkate almışlardır.

Çalışmanın matematiksel olarak modelleme kısmında ise herhangi bir sayıda grup tarafından alım satımı yapılan tek tipte bir hisse senedinin mevcut olduğu bir sistem düşünülmüştür. Basit olması açısından iki farklı grup göz önüne alınmıştır daha fazla sayıda gruba genellemenin özdeş olacağına dikkat çekilmiştir. Her bir grup kendi parametreleri ve hisse senedine biçtikleri değer ile karakterize edilmiştir. Herhangi bir t anında birinci grup ve ikinci grup tarafından sahip olunan hisse senedi sayısına sırasıyla N_1 (t) ve $N_2(t)$ denilmiştir. Benzer şekilde, $M_1(t)$ ve $M_2(t)$ ile nakit para pozisyonları gösterilmiştir. İlk etapta hisse senedi sayısının ve nakit paranın korunumlu olduğu en basit durum göz önüne alınmış ve bunun sonucu olarak aşağıdaki iki ifade yazılmıştır:

$$M_1(t) + M_2(t) = M_0\,, \tag{2.53}$$

$$N_1(t) + N_2(t) = N_0\ . \tag{2.54}$$

Sistem korunumlu olduğu, yani hisse senedi ya da nakit para giriş çıkışı olmadığı için buradaki M_0 ve N_0 sabittir. Sisteme nakit para ya da hisse senedi akışının olduğu diğer durumlarda sistemdeki toplam hisse senedi sayısında ya da para miktarında net bir değişiklik olacaktır. Modelleme yapılırken bu korunumlu yaklaşımın, hisse senedi ya da nakit para miktarının korunmadığı yaklaşımdan farklılık göstereceğine işaret edilmiştir. Çalışmada, bu iki yaklaşım arasındaki fark bir şişedeki akışkanın termodinamiğine olan benzerlikle izah edilmiştir. Örneğin eğer şişe, hiçbir ısı giriş çıkışına izin vermeyen ideal bir termos ise, şişede enerji korunumu olacaktır. Bu durum, çalışmadaki mevcut korunumlu sistem yaklaşımına karşılık gelir. Öte yandan bir havuza, ısı yalıtımı olmayan ve içinde sıcak su bulunan cam bir şişe konacak olduğunda artık şişede enerji korunumu söz konusu olmayacaktır. Şişenin yüzeyindeki sıcaklık havuzunkiyle eşitlenecektir. Bu durumda, şişenin içindeki ve dışındaki akışkanlar arasında bir ısı akışı olacaktır. Bu hal ise çalışmanın ilerleyen kısımlarında incelenen hisse senedi ya da nakit akışının olduğu sisteme benzetilmektedir.

Daha önce bahsedilen, Caginalp ve Balenovich' in çalışmasında olduğu gibi rölatif fiyat değişimi aşırı talep fonksiyonuna ya da aşırı talebin artan bir fonksiyonuna orantılıdır ifadesi temel alınarak aşağıdaki formülasyonlar kullanılmıştır:

$$\tau_0 \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1 \,, \tag{2.55}$$

$$\tau_0 \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = f(D/S) \,. \tag{2.56}$$

Talep ve arz ifadeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$D\big(P(t)\big) = k_1(t)M_1(t) + k_2(t)M_2\,(t), \tag{2.57}$$

$$S\big(P(t)\big) = \big(1 - k_1(t)\big)N_1(t)P(t) + (1 - k_2(t))N_2\,(t)P(t)\,. \tag{2.58}$$

Ekonomide talep, piyasalardaki, belirli bir mal ve hizmete yönelen, belirli bir satın alma gücüyle desteklenmiş, satın alma isteği olarak tanımlanır. Çalışmada bu tanımdan yola çıkılarak ifade edilen talep fonksiyonuna bakıldığında, sırasıyla birinci grup ve ikinci grup için satın alma isteğini temsil eden ifadeler ihtiva ettiği görülür. Daha önceki çalışmalarda olduğu gibi, bu çalışmada k_1 ve k_2 fonksiyonları sırasıyla birinci grup ve ikinci grup için geçiş oranı ya da olasılık fonksiyonları olarak tanımlanmıştır. Diğer bir deyişle, k_1, birinci gruba ait bir birim nakit paranın piyasaya sunularak karşılığında hisse senedi alınması olasılığını gösterir. k_2 için de benzer bir tanım yapılabilir. Ekonomide arz ise, piyasalarda belirli bir mal ve hizmet için satma isteği olarak tanımlanır. Arzın matematiksel olarak ifadesine bakıldığında göze çarpan $1 - k_1$ ve $1 - k_2$ fonksiyonları sırasıyla birinci ve ikinci grup tarafından bir birim hisse senedinin satılma olasılığıdır. Benzer şekilde arz için çalışmada yapılan bu tanıma bakıldığında, ekonomideki tanımla tutarlı bir şekilde sırasıyla birinci ve ikinci grup için ellerindeki hisse senetlerini satma isteğini temsil eden ifadeler içerdiği görülür.

Makalede bu noktada (2.53), (2.54), (2.57) ve (2.58) ifadeleri, (2.55) denklemininde kullanılarak rölatif fiyat değişimi için şu eşitlik elde edilmiştir:

$$\tau_0 \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{k_1 M_1 + k_2(M_0 - M_1)}{(1 - k_1)N_1 P + (1 - k_2)(N_0 - N_1)P} - 1 \,. \tag{2.59}$$

Çalışmada, sisteme dışarıdan ya da dışarıya nakit para ya da hisse senedi giriş çıkışının olmadığı durumda, nakit para miktarı ya da hisse senedi sayısındaki değişimin, yalnızca bu iki grubun ($i = 1, 2$ olmak üzere) k_i ve $(1 - k_i)$ oranlarındaki kendi aralarındaki alım satımlarına bağlı olduğuna işaret edilmiş ve sonuç olarak aşağıdaki iki denklem elde edilmiştir:

$$P\frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1 - k_i)N_i P \,, \tag{2.60}$$

$$\frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1 - k_i)N_i P \,. \tag{2.61}$$

Çalışmada, bu aşamada geriye dönülerek (2.53) ve (2.54) denklemlerinin türevleri alındığında, $\frac{d}{dt}(M_1 + M_2) = 0$ ve $\frac{d}{dt}(N_1 + N_2) = 0$ şeklinde iki sonucun elde edileceğine dikkat çekilmiştir. Buradan yola çıkılarak (2.60) ve (2.61) denklemleri $i = 1,2$ için toplandığında, hisse senedi fiyatı için aşağıdaki ifadenin elde edileceği sonucuna varılmıştır:

$$P = \frac{k_1 M_1 + k_2 M_2}{(1 - k_1)N_1 + (1 - k_2)N_2}\,. \tag{2.62}$$

(2.60) ve (2.61) denklemlerinin sağ taraflarına bakıldığında, işaretleri dışında özdeş oldukları görülmüş ve şu sonuç ifade edilmiştir:

$$\frac{dM_i(t)}{dt} = -P(t)\frac{dN_i(t)}{dt}\,. \tag{2.63}$$

Bu demektir ki, korunumlu sistemde, N_1 ve M_1 ancak diğer grubun harcaması ile değişebilir. Aynı durum N_2 ve M_2 için de geçerlidir. Diğer bir deyişle her bir grubun nakit para miktarındaki değişim, yalnızca gruplar arasındaki hisse senedi satın alımı ve satımı ile mümkündür.

Caginalp' in daha önceki çalışmalarında olduğu gibi, yatırımcıların motivasyon ve stratejileri, bu çalışmada da k_i $(i = 1,2)$ geçiş oranları ile temsil edilmiştir. Bu çalışmada öncekilerden farklı olarak, prensipte bu k_i niceliklerinin çok geniş bir spektrumda yatırımcı motivasyon ve stratejisini tanımlayabileceğine vurgu yapılmıştır. Çalışmada bunlara aşağıdaki gibi birkaç örnek verilmiştir:

(a) Hisse senedi fiyatının hesaplanan gerçek değerden olan sapması,

(b) Fiyat geçmişi, başka bir deyişle özel olarak yatırımcı grubunun zaman ölçeğine göre toplam fiyat trendi,

(c) Fiyat ve alım satım geçmişi örnek olarak hisse senedinin satıldığı fiyat ya da bir yıl süresince hisse senedinin alım satımının yapıldığı en yüksek ve en düşük fiyat,

(d) Yatırımcı tabiatında mevcut olan davranışsal hareketler, örneğin küçük olasılıklara sahip negatif sonuçlara korku kaynaklı ya da pozitif sonuçlara umut kaynaklı aşırı önem verilmesi,

(e) Risksiz, risk arayan ya da riskten kaçan yatırımcı doğasını ifade edecek bir yardımcı fonksiyonun varlığı.

Çalışmada, tüm bu motivasyonların içinde, (a) geleneksel ekonomide bilinen standart bir kabul iken, yatırımcıların uzun süreden beri (b)' nin öneminin doğruluğunu kabul ettikleri belirtilmiştir. Bu çalışmada da, önceki çalışmalarda olduğu gibi bu (a) ve (b) motivasyonları yatırımcı duyarlılığını etkileyen faktörler olarak esas alınmıştır. Fakat modelin, (c) (d) ve (e) şıklarındaki gibi diğer motivasyonları ve davranışsal etkileri de dâhil edecek kadar genel bir yeterlilikte olduğu vurgulanmıştır.

k_i geçiş oranı fonksiyonları daha önceki makalelerdeki gibi ifade edilmiştir. Önceki çalışmalardan tek fark, burada $i = 1,2$ olmak üzere, her bir grup için ayrı bir geçiş oranı fonksiyonunun tanımlanmasıdır. Böylece her bir grup için k_i sırasıyla fiyat trendine ve gerçek değerden sapmaya olan yatırımcı duyarlılığını nicel değere döken $\zeta_1^{(i)}$ ve $\zeta_2^{(i)}$ duyarlılık fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir. Trende ve gerçek değerden sapmaya bağlı yatırımcı duyarlılığı fonksiyonları daha önceki çalışmalardaki gibi kullanılmış, sadece $i = 1,2$ olmak üzere her bir grup için genelleştirilmiştir. Bu şekilde aşağıdaki denklemler ifade edilmiştir:

$$\zeta_1^{(i)}(t) := q_1^{(i)} c_1^{(i)} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{-c_1^{(i)}(t-\tau)} d\tau \, , \tag{2.64}$$

$$\zeta_2^{(i)}(t) := q_2^{(i)} c_2^{(i)} \int_{-\infty}^{t} \frac{P_a^{(i)}(\tau) - P(\tau)}{P_a^{(i)}(\tau)} e^{-c_2^{(i)}(t-\tau)} d\tau \, . \tag{2.65}$$

Buradaki $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$, $q_1^{(i)}$, $q_2^{(i)}$ katsayılarının tanımları daha önceki çalışmalardaki gibidir. Yine tek fark, bu katsayıların her bir grup için tanımlanmış olmasıdır. Yani, $c_1^{(1)}$ birinci grup için hafıza uzunluğunun tersini, $c_1^{(2)}$ ikinci grup için hafıza uzunluğunun tersini temsil eder. $c_2^{(1)}$ ve $c_2^{(2)}$ katsayılarının tersleri sırasıyla birinci ve ikinci grup için zihinsel eylemsizlik süresini temsil eder. $q_1^{(i)}$ ile $q_2^{(i)}$ katsayıları ise herbir grubun bu motivasyonlara verdikleri önemi nicel değere döker. Buradaki $P_a^{(i)}$ $(i = 1{,}2)$ her bir grubun hisse senedine biçtiği değeri yani her bir grubun gözündeki hisse senedi için gerçek değeri ifade eder. Diğer bir deyişle farklı gruplar hisse senedi değeri için farklı değerler biçebilirler. Bu iki ifadenin, daha önceki çalışmalarda gibi, Leibnitz kuralı yardımıyla türevleri alınarak aşağıdaki denklemler elde edilmiştir:

$$\frac{d\zeta_1^{(i)}}{dt} = c_1^{(i)} \left\{ \frac{q_1^{(i)}}{P} \frac{dP}{dt} - \zeta_1^{(i)} \right\}, \tag{2.66}$$

$$\frac{d\zeta_2^{(i)}}{dt} = c_2^{(i)} \left\{ q_2^{(i)} \frac{P_a^{(i)}(t) - P(t)}{P_a^{(i)}(t)} - \zeta_2^{(i)} \right\}. \tag{2.67}$$

k_i geçiş oranı fonksiyonları daha önceki çalışmalardaki gibi tanımlanmıştır:

$$k_i := \frac{1}{2}\left\{1 + \tanh\left(\zeta_1^{(i)} + \zeta_2^{(i)}\right)\right\}. \tag{2.68}$$

Çalışmada daha evvel ifade edildiği üzere (2.68) denklemine yatırımcılara dair başka motivasyonlar dahil edilebilir. Çalışmaya göre davranışsal finans ilerledikçe, ζ için ilave terimler bulunabilir ve genişletilmiş yatırımcı duyarlılığı fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\zeta^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{m} \zeta_j^{(i)}(t) . \tag{2.69}$$

Bu şekilde verilen genel yapı ile nümerik olarak çözülebilen, diferensiyel ve cebirsel denklemlerden oluşan tam bir sistem elde edilebileceği belirtilmiştir. (2.53) ve (2.54) denklemleri sayesinde M_2 ve N_2, M_1 ve N_1 cinsinden ifade edilebileceği için denklem sayısı düşürülerek sadece birinci grup için olan denklemlerin çözülmesinin yeterli olacağı vurgulanmıştır. Böylelikle birinci grup için olan (2.59), (2.60), (2.61), (2.66), (2.67) diferensiyel denklemlerinin ve (2.68) cebirsel denkleminin kullanımıyla, tam bir denklem sistemi oluşturulmuştur.

Çalışmada bu noktadan sonra mevcut modelleme, dış kaynaklı nakit para ya da hisse senedi giriş çıkışının olduğu bir sisteme genellenmiştir. Böyle bir sistemde alım satımdan bağımsız olarak dış kaynaklı nedenler yüzünden bir grubun elindeki nakit para ya da hisse senedi miktarında artma ve yahut azalma olabileceğine işaret edilmiştir.

Sistemdeki dış kaynaklı değişiklikleri her bir grubun ellerinde tuttukları hisse senedi ve nakit para miktarlarına yansıtabilmek adına (2.53) ve (2.54) denklemleri düzenlenerek aşağıdaki şekilde yazılmıştır:

$$M_0(t) = M_0^{baş} + M_1^{ek}(t) + M_2^{ek}(t) , \tag{2.70}$$

$$N_0(t) = N_0^{baş} + N_1^{ek}(t) + N_2^{ek}(t) . \tag{2.71}$$

Buradaki $M_0^{baş}$ ve $N_0^{baş}$ başlangıçta mevcut olan toplam nakit para ve hisse senedi sayısının değerleridir. Kalan terimler örneğin $i = 1,2$ için M_i^{ek}, i- inci grubun nakit parasındaki dış kaynaklı değişimleri tanımlayan t' ye bağlı fonksiyonlardır. Benzer şekilde N_i^{ek}, $i = 1,2$ için i-inci grubun dış kaynaklı nedenlerden ötürü hisse senedi sayısındaki değişimi ifade eden t'ye bağlı fonksiyonlardır. Örneğin bir gruba, herhangi bir t_1 anında ilave bir miktar para verilirse, $M_i^{ek}(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki şekilde yazılacağı ifade edilmiştir:

$$M_i^{ek}(t) := \begin{cases} 0 & eğer\ t < t_1 \\ M_i^{ek}(t_1) & eğer\ t \geq t_1 \end{cases} . \tag{2.72}$$

Dış kaynaklı değişimler yüzünden, nakit para ve hisse senedi miktarlarında meydana gelen değişimleri göz önüne alabilmek adına, (2.60) ve (2.61) denklemlerinde değişiklik yapılarak aşağıdaki gibi yeniden yazılmışlardır:

$$\frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P + \frac{dM_i^{ek}}{dt} , \tag{2.73}$$

$$P \frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1 - k_i) N_i P + P \frac{dN_i^{ek}}{dt} . \tag{2.74}$$

(2.73) ve (2.74) denklemleri taraf tarafa toplandığında aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir:

$$\frac{dM_i}{dt} + P \frac{dN_i}{dt} = \frac{dM_i^{ek}}{dt} + P \frac{dN_i^{ek}}{dt} . \tag{2.75}$$

Yine bu denklemden yararlanarak her bir i için, M_i ya da N_i terimlerinden birinin hesaplanmasının ortadan kaldırılabileceğine vurgu yapılmıştır.

Böylelikle bir önceki denklem sisteminde (2.60) ve (2.61) denklemleri yerine yeniden tanımlanan (2.73) ve (2.74) denklemleri konularak, kapalı olmayan sistem için de lineer olmayan adi diferensiyel denklemlerden oluşan tam bir denklem sistemi elde edilmiştir.

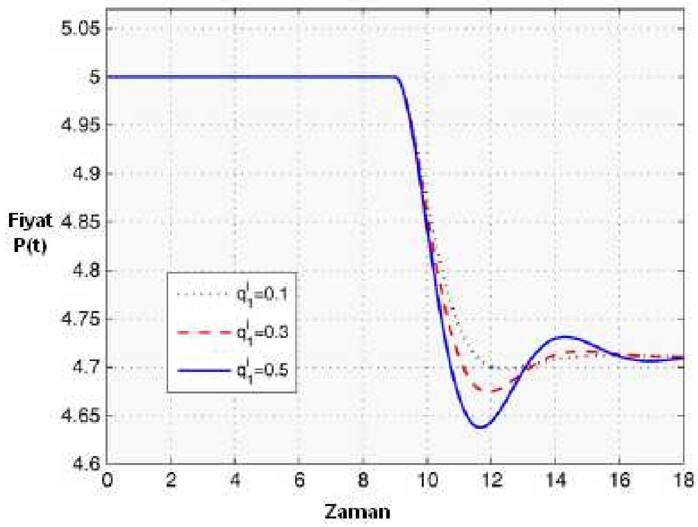
Çalışmada bu noktadan sonra Amerika ve Avrupa'da yaygın bir yatırım aracı olan 'closed end fund' ile ilgili aşağıdaki örnek verilmiştir. Bu örnekte, piyasalarda çok sıklıkla karşılaşılan bir unsur olan 'ikincil halka arz' işlemi mevcuttur.

Örnekte iki grup tarafından alım satımı yapılan tek bir hisse senedi türü düşünülmüştür. Sistemdeki hisse senedi sayısı ve nakit para miktarı iki gruba rastgele olarak dağıtılmıştır. Birinci grup elinde hisse senedi tutan grup olarak düşünülmüş ve sistemdeki hisse senedinin yüzde sekseni ve nakit paranın yüzde yirmisi bu gruba atanmıştır. Bu şekilde ikinci gruba, sistemdeki hisse senedinin yüzde yirmisi ve nakit paranın yüzde sekseni düşmüş ve bu grup da elinde nakit para tutan grup olarak tayin edilmiştir. Her iki grup da başlangıçta hisse senedine $P_a^{(i)}$ (t) $= P_0 = sabit$ şeklinde değer biçmiştir. Bir t_1 anında şirket tarafından bir anons yapılmıştır. Anons bir t_2 anında hisse senedi sahiplerine ellerinde bulunan hisse senedi miktarının üçte biri oranında hisse senedi verileceğidir. Bu anons, iki grup tarafından da farklı yorumlanmıştır. Birinci grubun elinde hisse senedi çoğunlukta olduğu için, bu grup hisse senedinin değerinin düşmeyeceğini savunmuş ve hisse senedine biçtiği değeri değiştirmemiştir. İkinci grup ise kullanılabilir kaynaklarını nakitte tutan ve likitide fiyatına dayalı olarak hisse senedi fiyat değerlendirmesi yapan taraftır. Likitidenin tanımı hatırlanacak olduğunda, ek hisse senedi girişinde likitide düşecek dolayısıyla ikinci grubun hisse senedine biçtiği değer azalacaktır. Dolayısıyla sisteme hisse senedi girişinin olacağı haberiyle, ikinci grup hisse senedi fiyatı kendi biçtiği değere yakın olana kadar alım yapmaya yatkın olmayacaktır.

Çalışmada bu noktada akla gelen soru her iki grubun da bütçeleri bilindiğinde hisse senedinin yeni denge fiyatının belirlenip belirlenemeyeceğidir. Bir başka soru ise hisse senedinin bu yeni denge fiyatına nasıl bir hızla ulaştığı olmuştur.

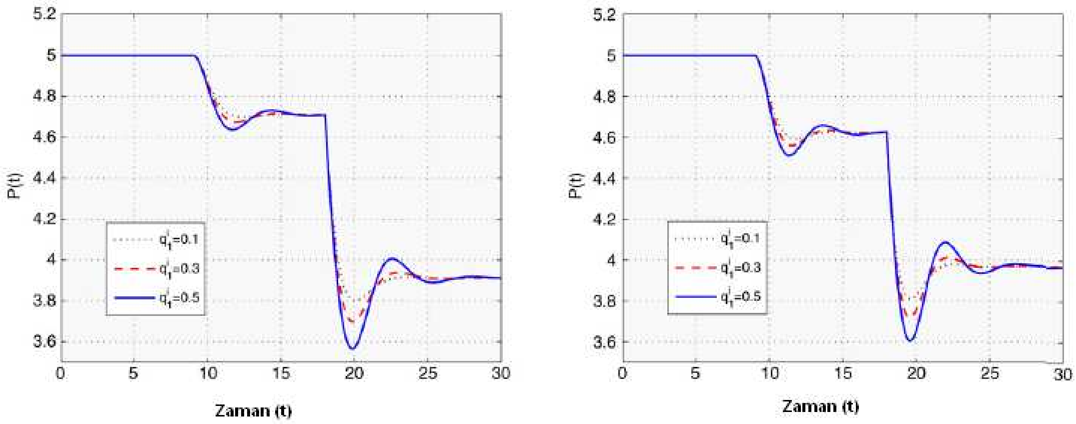
Caginalp ve Merdan bu örneği 'Matlab' aracılığı ile nümerik olarak çalışmış ve gerçek piyasadan aldıkları bir ikincil halka arz işlemindeki verilerden yararlanarak, elde ettikleri nümerik sonuçlar ile karşılaştırmışlardır. Bu diferensiyel denklem sistemini çözerken bilinmeyenlere başlangıç değerlerinin atanması gerekmektedir. Anonstan önce fiyat sabit olarak düşünüldüğü, dolayısıyla fiyatın türevinde bir değişiklik olmayacağı kabul edildiği için $\zeta_1^{(1)} = 0$ olarak alınmıştır. Ayrıca fiyat başlangıçta gerçek değerinde olarak kabul edildiği için $\zeta_2^{(2)} = 0$ olarak atanmıştır. Her iki grubun $(0,1)$ aralığında değişen $q_1^{(i)}$ ve $q_2^{(i)}$ değerlerine sahip oldukları düşünülmüştür. Anonsun yapıldığı an $t_1 := 9$ olarak, sisteme hisse senedi girişinin olduğu an ise $t_2 := 18$ olarak alınmıştır.

Şekil 2.6' da yeni hisse senetleri sisteme girene kadar olan ana kadar gerçekleşen fiyat değişimi incelenmiştir. Bir başka deyişle nümerik olarak, $t < t_2$ aralığında $P(t)$ fonksiyonu t' nin fonksiyonu olarak hesaplanmıştır. Çalışmada ilk önce parametreler, $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1,\ q_2^{(i)} = 0.5$ alınmıştır. $q_1^{(i)}$ değerine ise sırasıyla $0.1,\ 0.3,\ 0.5$ değerleri atanmıştır. Aşağıdaki grafikte de görüleceği üzere denge fiyatı yaklaşık olarak $P_1 = 4.7091$ olarak bulunmuştur. Ayrıca değer bazlı motivasyona verilen önem azaldığında, fiyat çok fazla salınım yapmadan denge noktasına ulaşmış, değer bazlı motivasyona verilen önem arttığında ise fiyat, daha ani iniş göstererek, salınımlarla denge noktasına ulaşmıştır.



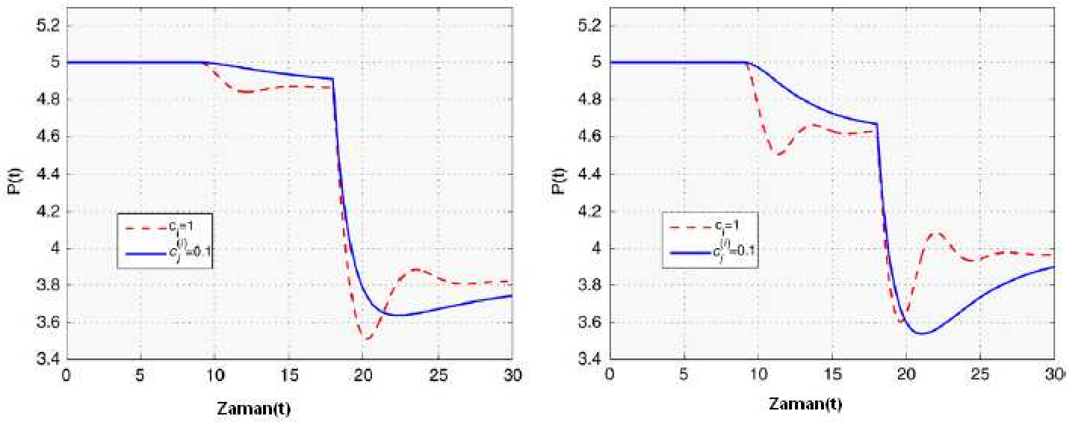
Şekil 2.6. Caginalp & Merdan [CM] Modeli fiyat-zaman grafiği

Daha sonra ise sisteme gerçek hisse senedi girişini olduğu zaman da dâhil olmak üzere nümerik çalışmalar yapılmıştır. Bir başka deyişle $P(t)$' nin zaman içerisindeki değişimi, hem t_1 anında yapılan anonsun etkisi, hem de t_2 anında ellerindeki toplam hisse senedinin $1/3$' ü oranında yatırımcılara dağıtılan ek hisse senedi girişinin etkisi dikkate alınarak hesaplanmıştır. $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1$ olarak atanmıştır. $q_1^{(i)}$ katsayısına sırasıyla $0.1,\ 0.3,\ 0.5$ değerleri verilmiştir. Şekil 2.7' de soldaki grafikte $q_2^{(i)} = 0.3$, sağdaki grafikte ise $q_2^{(i)} = 0.5$ olarak alınmıştır. Grafiklerden görüldüğü üzere soldaki grafik için $P_1 = 4.7091$ ve $P_2 = 3.9452$ olarak bulunmuştur. Sağdaki grafik için ise, $P_1 = 4.6231$ ve $P_2 = 3.9344$ olarak bulunmuştur. Ayrıca, grafiklerden de görüldüğü üzere durgun denge fiyatının, $q_1^{(i)}$ trend katsayısından bağımsız olduğuna işaret edilmiştir.



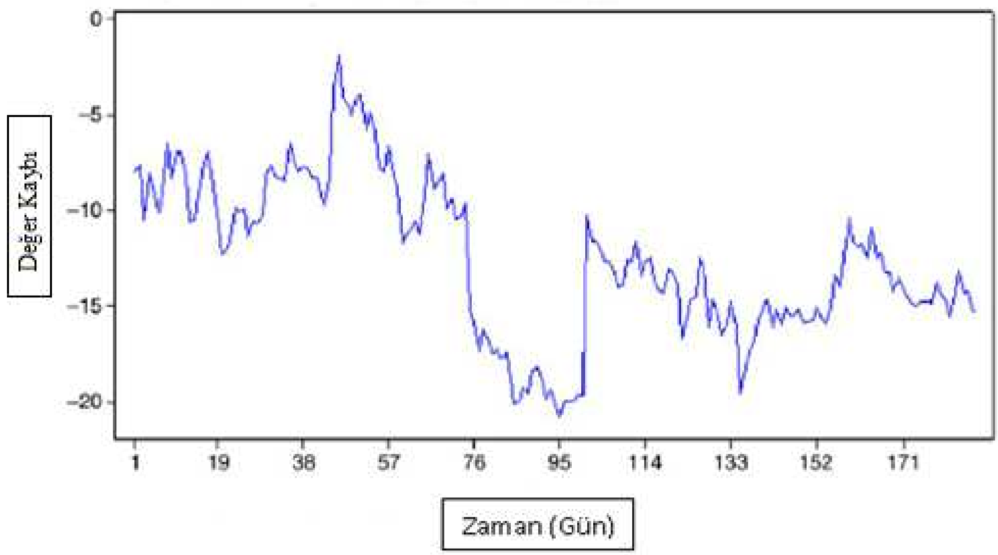
Şekil 2.7. Caginalp & Merdan [CM] Modeli fiyat-zaman grafikleri

Başka bir nümerik çalışmada ise, $c_j^{(i)}$ parametrelerindeki çeşitliliğin hisse senedi fiyat dinamiğini nasıl etkilediği incelenmek istenmiştir. Bu çalışmanın sonucu elde edilen grafikler Şekil 2.8' de gösterilmektedir. Her iki şekilde de $c_j^{(i)}$ katsayılarına sırasıyla 0.1 ve 1 değerleri, $q_1^{(i)}$ katsayılarına 0.5 değeri atanmıştır. Soldaki şekil için $q_2^{(i)} = 0.1$, sağdaki şekil için ise $q_2^{(i)} = 0.5$ olarak alınmıştır. Grafiklerden, hisse senedi sahipleri sisteme giren her yeni bilgiye hızlı cevap vermediğinde ve harekete geçmeden evvelki bekleme sürelerinin uzun olduğunda (bu durum grafiklerdeki $c_j^{(i)} = 0.1$ katsayısına karşılık gelmektedir) hisse senedi fiyatının daha geç dengeye ulaştığı görülmüştür.



Şekil 2.8. Caginalp & Merdan [CM] Modeli fiyat-zaman grafikleri

Yapılan bu analizlerden sonra, CEE (Central Europe and Russia Fund)' den 2004 yılında alınan datalara göre sonuçlar tartışılmıştır. Alınan data, yukarıdaki örnekteki gibi bir 'ikincil halka arz' durumunu ile ilişkilidir. 2004 Ocak ayının başlarında hisse senedinin gerçek değeri ve piyasa değeri birbirine yakındır. 9 Ocak' ta piyasaya 1/3 oranında ek hisse senedi sürüleceği duyurusu yapılmıştır. Bu duyurudan sonra hisse senedinin piyasa fiyatı aniden düşmeye başlamıştır. 19 Şubat' ta alım satım yapılmaya başlanmıştır. Hisse senedine ait olan değer kaybı zaman grafiği Şekil 2.9' da verilmiştir. Bu grafikte, 9 Ocak 47. güne, 19 Şubat ise 74. güne karşılık gelmektedir. Grafikten görüldüğü üzere, anonsun yapılmasından sonra hisse senedi fiyatında % 10 oranında bir düşme yaşanmış, 74. Günden sonra ise yaşanan düşüş % 20' den fazla olmuştur. Sonuç olarak, gerçek verilerin, nümerik çalışmalar ile elde edilen sonuçlar ile benzerlik gösterdiği ve bu şekilde kurulan matematiksel modelin iyi bir yaklaşım olduğu belirtilmiştir.



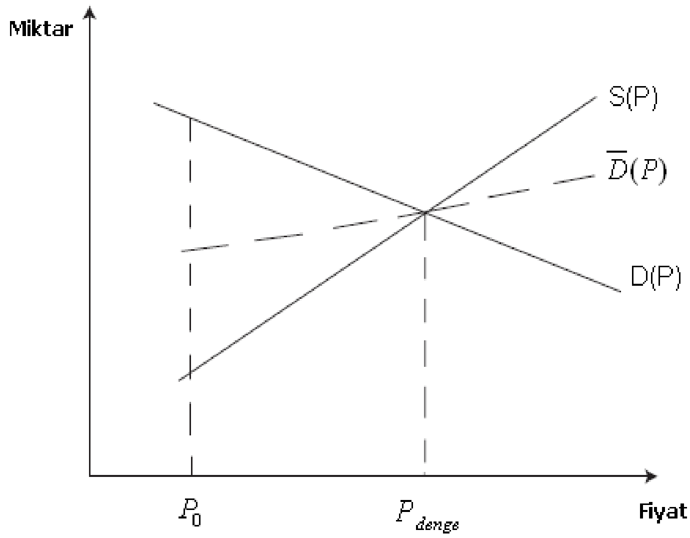
Şekil 2.9. 2004 CEE değer kaybı-zaman grafiği

BÖLÜM 3

3. ARZ VE TALEP FONKSİYONLARINA DAİR DAHA FAZLA BİLGİ İHTİVA EDEN PİYASALARDA FİYAT DEĞİŞİMİ DENKLEMİ

Bu tez çalışmasına ışık tutan bir diğer çalışma, Caginalp tarafından 2005 yılında yayınlanan 'Nonlineer Price Evolution' başlıklı makaledir [1]. Arz ve talep fonksiyonlarındaki lineer olmayan çeşitliliğin, fiyatın dengeye oturmasına kadar olan fiyat gelişimine daha iyi tahmin vereceği görüşü söz konusu çalışmanın hareket noktası olmuştur. Caginalp bu makalede, arz ve talep fonksiyonlarına dair daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalarda, (2.37) denkleminin fiyat değişimi için iyi bir yaklaşım vermekte yetersiz kaldığını savunmuş ve söz konusu ifadeyi iyileştirerek fiyat değişimi denklemi için yeni bir ifade elde etmiştir.

Daha önce ifade edildiği üzere, klasik fiyat ayarlama tekniği, fiyatın aşırı talep fonksiyonuna orantılı olduğu oranda denge noktasına gitmesini şart koşar. Aşırı talep fonksiyonu ise, talep ve arz fonksiyonları arasındaki farkın arz tarafından bölünmesiyle elde edilir. Caginalp, çalışmasında klasik fiyat ayarlama tekniği esas alınarak aşırı talep fonksiyonuna göre bağıl fiyat değişimini ifade etmenin, arz ve talep fonksiyonları lineer fonksiyonlar olsalar dahi kilit bir sorun ortaya çıkardığını vurgulamıştır. Bu durumu örneklendirmek için çalışmada, aşağıda verilen Şekil 3.1 incelenmiştir.



Şekil 3.1. Arz-talep dengesi grafiği

Grafikte görüldüğü gibi, lineer arz ve talep fonksiyonları sırasıyla $S(P)$ ve $D(P)$ ile gösterilmiş ve bir P_{denge} noktasında kesişmişlerdir. Bu aşamada, verilen talep doğrusunun, eğimi daha az dik olan $\overline{D}(P)$ adında başka bir doğru ile değiştirildiği düşünülmüştür. Grafikten görüldüğü gibi bu yeni $\overline{D}(P)$ fonksiyonu, $S(P)$ fonksiyonu ile hala aynı denge fiyatında kesişmektedir. Bu durumda klasik fiyat ayarlama tekniği esas alınarak oluşturulmuş olan bağıl fiyat değişimi ifadesinin sağ tarafına göre başlangıçtaki $D(P)$ fonksiyonu için fiyat değişimi daha fazla, $\overline{D}(P)$ için ise daha azdır. Makalede bu nedenle aşırı talep fonksiyonu ile oluşturulmuş olan bu rölatif fiyat denkleminin, hisse senedi fiyatı gelişimi için iyi bir tahmin veremeyeceği vurgulanmıştır. Fiyat değişimine daha sağlıklı bir yaklaşım yapabilmek için arz ve talep fonksiyonlarına dair daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalarda, elde edilebilen tüm verilerden yararlanılması gerektiği belirtilmiştir.

Çalışmaya, yatırımcıların bir $P = P_0$ değerinde arz ve talebin değerini bildikleri ve ayrıca arz ve talebin o fiyattaki türevleri hakkında bir tahmine sahip oldukları kabulünden yola çıkılarak başlanmıştır. İlk aşamada, yatırımcıların arz ve talebin ikinci türevleri hakkında bir bilgiye sahip olmadıkları kabul edilmiştir. Bu bilgilerden yararlanılarak $D(P)$ ve $S(P)$ fonksiyonlarına lineer olarak yaklaşılmış ve aşağıdaki ifadeler yazılmıştır:

$$D(P) = D(P_0) + D'(P_0)(P - P_0)\,, \tag{3.1}$$

$$S(P) = S(P_0) + S'(P_0)(P - P_0)\,. \tag{3.2}$$

İlk etapta basitlik sağlaması açısından ayrık zaman aralıkları düşünülmüş (ve $\tau = 1$ olarak alınmıştır) böylece türev, fark operatörü ile yer değiştirilmiştir. P_0 fiyatındaki bu bilgi ile birlikte katılımcıların $S(P_1) = D(P_1)$ eşitliğinin sağlandığı bir P_1 noktasına doğru yöneleceği ifade edilmiştir. Bu nedenle çalışmada, yukarıdaki denklemlerdeki P fiyatı yerine P_1 yazılmış ve aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} D(P_1) = D(P_0) + D'(P_0)(P_1 - P_0) = S(P_0) + S'(P_0)\,(P_1 - P_0) \\ = S(P_1)\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Elde edilen bu eşitlik P_1- P_0 için çözüldüğünde aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$P_1 - P_0 = -\frac{D(P_0) - S(P_0)}{D'(P_0) - S'(P_0)}\,. \tag{3.4}$$

Sonra P_0 yerine $P(t)$ ve P_1 yerine $P(t+1)$ yazılarak aşağıdaki denkleme ulaşılmıştır:

$$P(t+1) - P(t) = -\frac{D\big(P(t)\big) - S(P(t))}{D'\big(P(t)\big) - S'(P(t))} \; . \tag{3.5}$$

Limit alınarak fark operatörü türev ile yer değiştirmiş ve aşağıdaki ifade elde dilmiştir:

$$\tau \frac{dP(t)}{dt} = -\frac{D\big(P(t)\big) - S(P(t))}{D'\big(P(t)\big) - S'(P(t))} \, . \tag{3.6}$$

Burada $' \coloneqq \frac{d}{dP}$ anlamındadır. Ayrıca bu ifadenin $P(t)$ ile bölündüğünde fiyatın rölatif değişimi şeklinde ifade edilebileceğine işaret edilmiştir. Çalışmada elde edilen bu (3.6) denkleminin (2.37) denkleminden oldukça farklı olduğu ve fiyat değişimi için daha iyi bir yaklaşım verdiği ifade edilmiştir. Çünkü çalışmada da vurgulandığı üzere, arz ve talep fonksiyonları sabit fonksiyonlar değillerdir. Arz ve talep eğrilerinin eğimleri yalnızca farklı hisse senetleri için değişmekle kalmaz, farklı zaman dilimlerinde de değişikliğe uğrar. Bu nedenle arz ve talep fonksiyonlarının türevleri mevcut olduğunda, (3.6) denkleminin ani fiyat değişimleri için daha iyi tahminler verebildiği ve yatırımcılara arz ve talebin o andaki fiyatlarındaki değerlerinden yararlanmaktan ziyade, bu iki ifadeye dair mevcut tüm bilgilerden istifade etme olanağı sunduğu belirtilmiştir.

Çalışmada ayrıca piyasa verilerinden arz ve talep fonksiyonlarının ikinci türevlerinin de tahmin edilebilmesi durumunda, rölatif fiyat değişimine daha iyi tahmin veren bir formül türetilebileceği vurgulanmıştır. Bu şekilde, arz ve talep fonksiyonlarının ikinci türevlerinin değerlerini içeren bir piyasa için $E(P) \coloneqq D(P) - S(P)$ olmak üzere rölatif fiyat değişimi için iyileştirilmiş bir yaklaşım aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\tau \frac{dP}{dt} = -\frac{E'}{E''}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2EE''}{E'^2}}\right). \tag{3.7}$$

Burada $' \coloneqq \frac{d}{dP}$, $'' \coloneqq \frac{d^2}{dP^2}$ anlamındadır.

BÖLÜM 4

4. MATEMATİKSEL MODEL

4.1. NOTASYON

$P(t)$ $\coloneqq$ Hisse senedinin herhangi bir t anındaki fiyatı,

$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ $\coloneqq$ Fiyattaki bağıl değişim,

${P_a}^{(i)}(t)$ $\coloneqq$ i- inci grubun hisse senedine atfettiği değer ($i = 1, 2$),

$M_i(t)$ $\coloneqq$ i- inci gruba ait nakit miktarı ($i = 1, 2$),

$N_i(t)$ $\coloneqq$ i- inci gruba ait toplam hisse senedi sayısı ($i = 1, 2$),

${\zeta_1}^{(i)}(t)$ $\coloneqq$ i- inci grubun yatırımcı stratejisini ve motivasyonunu belirleyen "fiyatın yönüne bağlı" bileşen ($i = 1, 2$),

${\zeta_2}^{(i)}(t)$ $\coloneqq$ i- inci grubun yatırımcı stratejisini ve motivasyonunu belirleyen "hisse senedinin değerine bağlı" bileşen ($i = 1, 2$) .

4.2. MOTİVASYON

Bu tez çalışmasının amacı, Caginalp ve Merdan tarafından yayınlanan [12] numaralı çalışmanın, geliştirilmesidir. [12] çalışmasında kurulan lineer olmayan adi diferensiyel denklem sisteminde, bağıl fiyat değişimini gösteren (2.37) denkleminin yerine Caginalp tarafından uygun bir yaklaşım kullanılarak iyileştirilen (3.6) denklemi kullanılarak, sistem yeniden inşa edilmiştir. [12] çalışmasında yer alan örnekler, bu tez çalışmasında kurulan sistem üzerinde yeniden çalışılmış ve sonuçlar tartışılmıştır.

[12] çalışmasında kullanılan rölatif fiyat değişikliğini gösteren denklem, arz ve talep fonksiyonlarının belirli bir fiyat için değerlerini içermektedir. Ayrıca yapılan literatür taraması sonucu dinamik sistemler yaklaşımı ile hisse senedi fiyat gelişimini inceleme amaçlı kurulan matematiksel modellerde, benzer şekilde (2.37) denkleminin kullanıldığı görülmüştür. Fakat Bölüm 3' te ifade edildiği üzere, söz konusu denklemin, arz ve talep fonksiyonlarının yalnız bir fiyattaki değerlerini göz önünde bulundurarak fiyat tahmini yapması, piyasa verilerinin arz ve talep hakkında daha fazla bilgi sunduğu durumlarda yetersiz kalmaktadır. Daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalardan bahsedilme nedeni, birçok hisse senedi piyasasında, yatırımcıların arz ve talep fonksiyonları için sadece belirli bir fiyattaki değerlerini bilmesinin ötesinde bu iki fonksiyona dair daha fazla bilgiye sahip oldukları düşüncesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin piyasa verilerinden sayısal yöntemler ile arz ve talep fonksiyonlarının türevleri de tahmin edilebilir. Fiyat dengesini belirlemede esas unsur olan bu arz talep fonksiyonları ile ilgili elde edinilebilen tüm bilgilerin göz önünde bulundurulması, fiyat tahmini için daha sağlıklı bir yaklaşım yapılmasına olanak sağlayacaktır. Bu nedenle, yatırımcılara daha fazla bilgi sunan piyasalarda, talep ve arz fonksiyonlarının salt bir noktadaki değerlerini ihtiva eden bu denklemin iyi bir fiyat tahmini yapmakta yetersiz kalabileceği düşüncesi bu tez çalışmasının başlangıç noktası olmuştur. Çünkü piyasa verilerinden çıkarılabilecek bilgilerin (örneğin arz ve talep fonksiyonlarının birinci türevlerinin tahmin edilebilmesi durumunda) matematiksel model oluşturulurken dikkate alınması durumunda, hisse

senedi fiyat gelişimi için daha iyi yaklaşım verebilecek modeller türetilebilir. Bu bilgiler ışığında, bu tez çalışmasında, arz ve talep fonksiyonlarına dair daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalar için, söz konusu denklemin yetersiz kaldığı düşüncesinden yola çıkılarak, rölatif fiyat değişimi için Caginalp tarafından iyileştirilmiş (3.6) yaklaşımı ile [12] çalışmasında kurulan sistemin geliştirilmesi ve fiyat tahmini için daha iyi yaklaşımlar yapılması amaçlanmıştır.

4.3. DİFERENSİYEL DENKLEM MODELİ

Bu tez çalışmasında Caginalp ve Merdan' ın çalışmasındakine benzer olarak, tek tür hisse senedi ve iki gruptan oluşan önce kapalı, sonrasında hisse senedi ya da nakit giriş çıkışına izin veren bir sistem düşünülmüştür. M_i(t) ve $N_i(t)$, $i = 1,2$ olmak üzere sırasıyla, i-inci grubun nakit para miktarını ve hisse senedi sayısını göstermektedir. İlk etapta sistem kapalı olduğu için M_0 ve N_0 sırasıyla sistemdeki toplam nakit miktarını ve hisse senedi sayısını göstermek üzere aşağıdaki denklemler sağlanmaktadır:

$$M_1(t) + M_2(t) = M_0 , \tag{4.1}$$

$$N_1(t) + N_2(t) = N_0 . \tag{4.2}$$

Arz ve talep fonksiyonları şu şekilde yine aynı tanımlarıyla ele alınmıştır:

$$D\big(P(t)\big) = k_1(t)M_1(t) + k_2(t)M_2(t) , \tag{4.3}$$

$$S\big(P(t)\big) = \big(1 - k_1(t)\big)N_1(t)P(t) + (1 - k_2(t))N_2(t)\, P(t). \tag{4.4}$$

Bu tez çalışmasında $i = 1, 2$ olmak üzere, buradaki k_i fonksiyonu daha önceki çalışmada da yer aldığı haliyle her bir grup için geçiş oranı fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Fakat yatırımcı strateji ve motivasyonunu içeren bu k_i fonksiyonu, [12] çalışmasındaki formülasyonundan farklı olarak aşağıdaki şekilde ele alınmıştır:

$$k_i(t) \coloneqq \frac{1}{2}\left(1 + \zeta_1^{(i)}(t) + \zeta_2^{(i)}(t)\right). \tag{4.5}$$

Yatırımcı motivasyon ve stratejisini nicel değere döken bu $\zeta_1^{(i)}(t)$, $\zeta_2^{(i)}(t)$ fonksiyonlarını $k_i(t)$ fonksiyonunun içerisine yerleştirirken, tez çalışmasında baz alınan [12] çalışmasında olduğu gibi $tanh$ fonksiyonu kullanılmama nedeni, fiyat değişimi denklemini yeniden düzenlenme aşamasında $tanh$ fonksiyonunun işlem zorluğu yaratmasıdır. Bu nedenle [10] çalışmasında olduğu gibi, küçük x değerleri için $\tanh(x) \approx x$ özelliğinden yararlanarak $tanh$ fonksiyonuna bir yaklaşım yapılmıştır.

Alım satımda yatırımcı duyarlılığını temsil eden $\zeta_1^{(i)}(t)$ ve $\zeta_2^{(i)}(t)$ fonksiyonları, daha önceki tanımlarıyla ele alınmıştır:

$$\zeta_1^{(i)}(t) \coloneqq q_1^{(i)} c_1^{(i)} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{-c_1^{(i)(t-\tau)}} d\tau \ , \tag{4.6}$$

$$\zeta_2^{(i)}(t) \coloneqq q_2^{(i)} c_2^{(i)} \int_{-\infty}^{t} \frac{P_a^{(i)}(\tau) - P(\tau)}{P_a^{(i)}(\tau)} e^{-c_2^{(i)(t-\tau)}} d\tau \ . \tag{4.7}$$

İntegral ve diferensiyel denklemlerden oluşan bir sistemi çalışmak yerine sadece diferensiyel denklemlerden oluşan tam bir sistemi çalışmak matematiksel olarak kolaylık sağlayacağı için, (4.6) ve (4.7) denklemlerinin Leibnitz kuralı uygulanarak türevleri alınmış formları kullanılmıştır:

$$\frac{d\zeta_1^{(i)}}{dt} = c_1^{(i)} \left\{ \frac{q_1^{(i)}}{P} \frac{dP}{dt} - \zeta_1^{(i)} \right\} , \tag{4.8}$$

$$\frac{d\zeta_2^{(i)}}{dt} = c_2^{(i)} \left\{ q_2^{(i)} \frac{P_a^{(i)}(t) - P(t)}{P_a^{(i)}(t)} - \zeta_2^{(i)} \right\} . \tag{4.9}$$

Bu denklemlerdeki $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$, $q_1^{(i)}$, $q_2^{(i)}$ katsayıları yine aynı tanımlarıyla ele alınmıştır. Kapalı bir sistemde her bir grubun elindeki hisse senedi sayısı ya da nakit para miktarlarındaki değişiklik sadece kendi aralarındaki alım satıma bağlı olduğundan, $i = 1,2$ olmak üzere M_i ve N_i niceliklerindeki değişiklikler önceki ifadelerinde olduğu gibi aşağıdaki şekilde kullanılmıştır:

$$P(t)\frac{dN_i(t)}{dt} = k_i(t)M_i(t) - \big(1 - k_i(t)\big)N_i(t)P(t) , \tag{4.10}$$

$$\frac{dM_i(t)}{dt} = -k_i(t)M_i(t) + \big(1 - k_i(t)\big)N_i(t)P(t) . \tag{4.11}$$

Daha önce de ifade edildiği gibi bu tez çalışmasındaki farklılık, [12] çalışmasında kullanılan rölatif fiyat değişimini gösteren denklemin bu sistemi oluştururken kullanılmamasıdır. Bu tez çalışmasındaki denklem sistemi oluşturulurken, Caginalp' in arz ve talep hakkında daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalarda, daha iyi fiyat tahmini için türettiği (3.6) denklemi kullanılmıştır [1] :

$$\tau \frac{dP(t)}{dt} = -\frac{D\big(P(t)\big) - S(P(t))}{D'\big(P(t)\big) - S'(P(t))}\ .$$

(3.6) formülünün çıkarılışı esnasındaki işlemler hatırlanacak olduğunda, $D\big(P(t)\big)$ ve $S\big(P(t)\big)$ fonksiyonlarının bir $P = P_0$ etrafında Taylor serisine açıldığı ve dolayısıyla denklemindeki türevlerin $P(t)$' ye göre olduğu fark edilir. Yani (3.6) ifadesi daha açık yazılırsa,

$$\tau \frac{dP}{dt} = -\frac{D(P(t)) - S(P(t))}{\frac{d}{dP}\left[D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big)\right]} \tag{4.12}$$

şeklindedir. Caginalp' in [1] çalışmasında türettiği bu formülü istediğimiz formata getirebilmek için bir takım işlemler yapılmıştır. Aşağıda bu işlemler verilmiştir. Öncelikle $D\big(P(t)\big)$ ve $S\big(P(t)\big)$ fonksiyonlarının içerisindeki değişkenlerinin $P(t)$' ye göre türevleri bilinmediğinden, ifade aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenmiştir:

$$\tau \frac{dP}{dt} = -\frac{D(P(t)) - S(P(t))}{\frac{d}{dt}\left[D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big)\right]\frac{dt}{dP}}\ . \tag{4.13}$$

Elde edilen bu ifade aşağıdaki şekle getirilmiştir:

$$\tau \frac{d}{dt}\left[D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big)\right] = -\left[D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big)\right]. \tag{4.14}$$

(4.14) denklemi birinci mertebeden ayrılabilir adi bir diferensiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü,

$$D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big) = Ce^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \tag{4.15}$$

olarak elde edilir.

Burada C sabit bir sayıdır. (4.15) ifadesine dikkatlice bakıldığında zaman ilerledikçe $D\big(P(t)\big)$ ve $S\big(P(t)\big)$ fonksiyonlarının arasındaki farkın azaldığı görülür. $t = \infty$ olması durumunda ise, $D\big(P(t)\big) = S(P(t))$ ifadesi gerçeklenir. Dikkat edilirse, bu fiyat değişimi denklemi de, sonsuzda fiyatın dengeye oturacağı yani arz ve talep fonksiyonlarının birbirine eşitleneceği temel mikroekonomik prensibi ile uyumludur.

Bu aşamada denklemdeki τ zaman skalası genelliği kaybetmeksizin 1 olarak alınmıştır ve ifade aşağıdaki hale getirilmiştir:

$$\frac{d}{dt}\big[D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big)\big] = -\big[D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big)\big]\,. \tag{4.16}$$

$D\big(P(t)\big)$ ve $S\big(P(t)\big)$ fonksiyonlarının modeldeki tanımları yerlerine yazılarak t' ye göre türevleri alınmıştır:

$$\begin{aligned}\frac{dk_1}{dt}M_1 + \frac{dM_1}{dt}k_1 + \frac{dk_2}{dt}M_2 + \frac{dM_2}{dt}k_2 + \frac{dk_1}{dt}N_1P - \frac{dN_1}{dt}P + \frac{dN_1}{dt}k_1P \\ - \frac{dP}{dt}N_1 + \frac{dP}{dt}k_1N_1 + \frac{dk_2}{dt}N_2P - \frac{dN_2}{dt}P - \frac{dN_2}{dt}k_2P - \frac{dP}{dt}N_2 \\ + \frac{dP}{dt}k_2N_2 = (1-k_1)N_1P + (1-k_2)N_2P - k_1M_1 - k_2M_2\end{aligned}$$

Bu aşamadan sonra, terimlerin tanımları yerlerine yazılmış ve gerekli işlemler yapılmıştır. Kolaylık sağlaması açısından bazı harflendirmelerin kullanımıyla, rölatif fiyat değişimi denklemi aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = \frac{A+B-C-D+E+F+G+H-I-J+K+L}{M+N-O+P-R} \quad . \qquad (4.17)$$

Elde edilen bu yeni rölatif fiyat değişimi denklemindeki harflendirmeler şu şekildedir:

$$A = \frac{1}{2}c_1^{(1)}(t)\zeta_1^{(1)}(t)M_1(t)\,,$$

$$B = \frac{1}{2}c_1^{(1)}(t)\zeta_1^{(1)}(t)P(t)N_1(t)\,,$$

$$C = \frac{1}{2}c_2^{(1)}(t)q_2^{(1)}(t)\frac{P_a^{(1)}(t)-P(t)}{P_a^{(1)}(t)}M_1(t)\,,$$

$$D = \frac{1}{2}c_2^{(1)}(t)q_2^{(1)}(t)\frac{P_a^{(1)}(t)-P(t)}{P_a^{(1)}(t)}P(t)N_1\,(t),$$

$$E = \frac{1}{2}c_2^{(1)}(t)\zeta_2^{(1)}(t)M_1(t)\,,$$

$$F = \frac{1}{2}c_2^{(1)}(t)\zeta_2^{(1)}(t)P(t)N_1(t)\,,$$

$$G = \frac{1}{2}c_1^{(2)}(t)\zeta_1^{(2)}(t)M_2\,(t),$$

$$H = \frac{1}{2}c_1^{(2)}(t)\zeta_1^{(2)}(t)P(t)N_2\,(t),$$

$$I = \frac{1}{2} c_2^{(2)}(t) q_2^{(2)}(t) \frac{P_a^{(2)}(t) - P(t)}{P_a^{(2)}(t)} M_2(t) \,,$$

$$J = \frac{1}{2} c_2^{(2)}(t) q_2^{(2)}(t) \frac{P_a^{(2)}(t) - P(t)}{P_a^{(2)}(t)} N_2(t) P(t) \,,$$

$$K = \frac{1}{2} c_2^{(2)}(t) \zeta_2^{(2)}(t) P(t) N_2\,(t),$$

$$L = \frac{1}{2} c_2^{(2)}(t) \zeta_2^{(2)}(t) M_2(t) \,,$$

$$M = \frac{1}{2} c_1^{(1)}(t) q_1^{(1)}(t) M_1(t) \,,$$

$$N = \frac{1}{2} c_1^{(1)}(t) q_1^{(1)}(t) N_1(t) P(t) \,,$$

$$O = \frac{1}{2} c_1^{(2)}(t) q_1^{(2)}(t) M_2(t) \,,$$

$$P = \frac{1}{2} c_1^{(2)}(t) q_1^{(2)}(t) N_2(t) P(t) \,,$$

$$R = \big(1 - k_1(t)\big) N_1(t) P(t) + \big(1 - k_2(t)\big) N_2(t) P(t)$$

Böylelikle yukarıdaki (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.17) diferensiyel denklemleri, (4.5) cebirsel denklemi ile birlikte dokuz bilinmeyen ve dokuz denklemden oluşan lineer olmayan bir adi diferensiyel denklem sistemi oluşturur. Bu nedenle bu sistem Matlab kullanılarak sayısal olarak çözümlenebilir.

4.4. NÜMERİK ÇALIŞMALAR

Bu kısımda, bu tez çalışmasında kurulan modelin, daha önceki çalışmalarda yer alan örnekler esas alınarak nümerik çalışmaları yapılmıştır. İşlemler için Matlab ODE 45 paket programı kullanılmıştır. Bu paket program, $M(t,y) * y' = F(t,y)$ biçimindeki problemleri çözebilmektedir. Nümerik çalışmalarda, [CM], Caginalp ve Merdan' ın [12] çalışmasındaki model sonucu elde edilen grafikleri gösterirken, [MA] bu tez çalışmasında yeniden kurulan model sonucu elde edilen grafikleri göstermektedir.

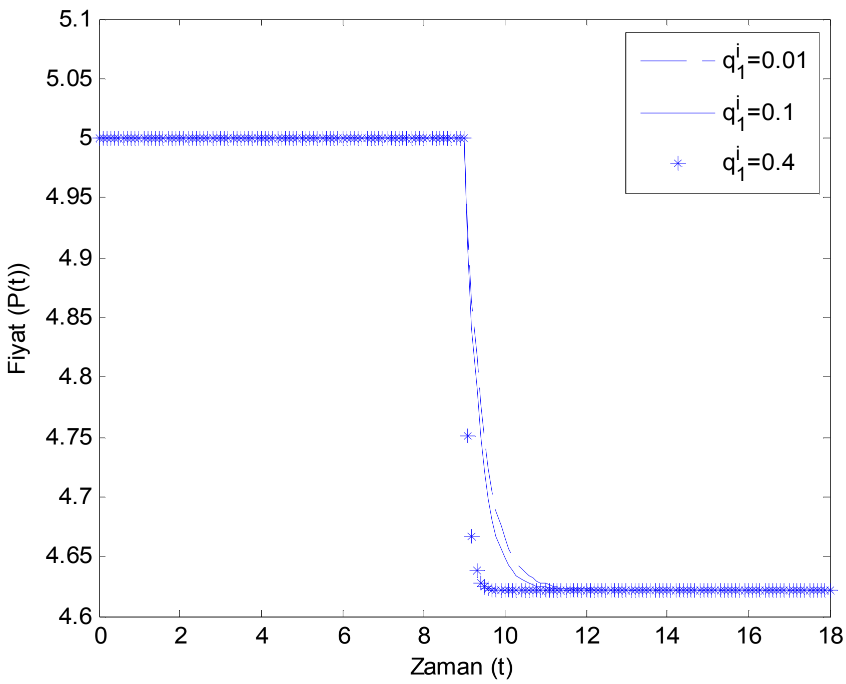
Çalışılan örnek, [12] makalesinde geçen örnektir. Söz konusu makalesinin anlatımı esnasında bahsedilen bu örnek aşağıda tekrar ifade edilmiştir:

Örnek:

İki grup tarafından alım satımı yapılan tek bir hisse senedi türü düşünülmüştür. Sistemdeki hisse senedi sayısı ve nakit para miktarı iki gruba rastgele olarak dağıtılmıştır. Birinci grup elinde hisse senedi tutan grup olarak düşünülmüş ve sistemdeki hisse senedinin yüzde sekseni ve nakit paranın yüzde yirmisi bu gruba atanmıştır. Bu şekilde ikinci gruba sistemdeki hisse senedinin yüzde yirmisi ve nakit paranın yüzde sekseni düşmüş ve bu grup da elinde nakit para tutan grup olarak tayin edilmiştir. Her iki grup da başlangıçta hisse senedine $P_a^{(i)}(t) = P_0 = sabit$ şeklinde değer biçmiştir. Bir t_1 anında şirket tarafından bir anons yapılmıştır. Anons, bir t_2 anında hisse senedi sahiplerine ellerinde bulunan hisse senedi miktarının üçte biri oranında hisse senedi verileceğidir. Bu anonsun, iki grup tarafından farklı yorumlanacağı kabul edilmiştir. Birinci grubun elinde hisse senedi çoğunlukta olduğu için, bu grup hisse senedinin değerinin düşmeyeceğini savunmuş ve hisse senedine biçtiği değeri değiştirmemiştir. İkinci grup ise kullanılabilir kaynaklarını nakitte tutan ve likitide fiyatına dayalı olarak hisse senedi fiyat değerlendirmesi yapan taraftır. Likitidenin tanımı hatırlanacak olduğunda, ek hisse senedi girişinde likitide düşecek dolayısıyla ikinci grubun hisse senedine biçtiği değer azalacaktır. Dolayısıyla sisteme hisse senedi girişinin olacağı haberiyle, mevcut kabule göre, ikinci grup hisse senedi fiyatı, kendi biçtiği değere yakın olana kadar alım yapmaya yatkın olmayacaktır.

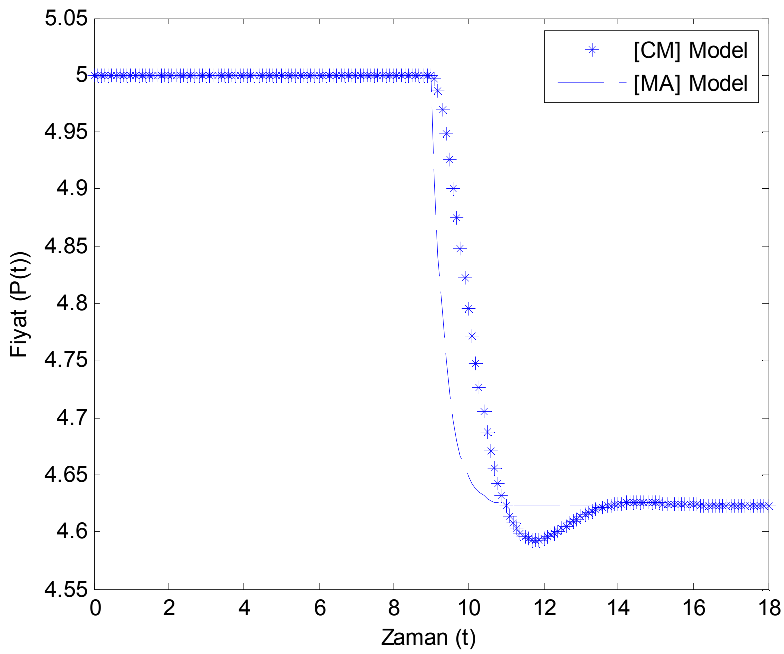
Nümerik çalışmalarda sisteme gerçek hisse senedi girişinin olmadığı ana kadar olan zaman aralığı çalışılmıştır. Yani, fiyat evrimi üzerinde sadece $t_1 = 9$ anında yapılan anonsun etkileri incelenmiştir.

Yapılan ilk nümerik çalışmada parametreler, $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1,\ q_2^{(i)} = 0.5$ olarak alınmıştır. $q_1^{(i)}$ değerlerine sırasıyla $0.01,\ 0.1,\ 0.4$ değerleri atanmıştır. Elde edilen grafik Şekil 4.1' de verilmiştir.

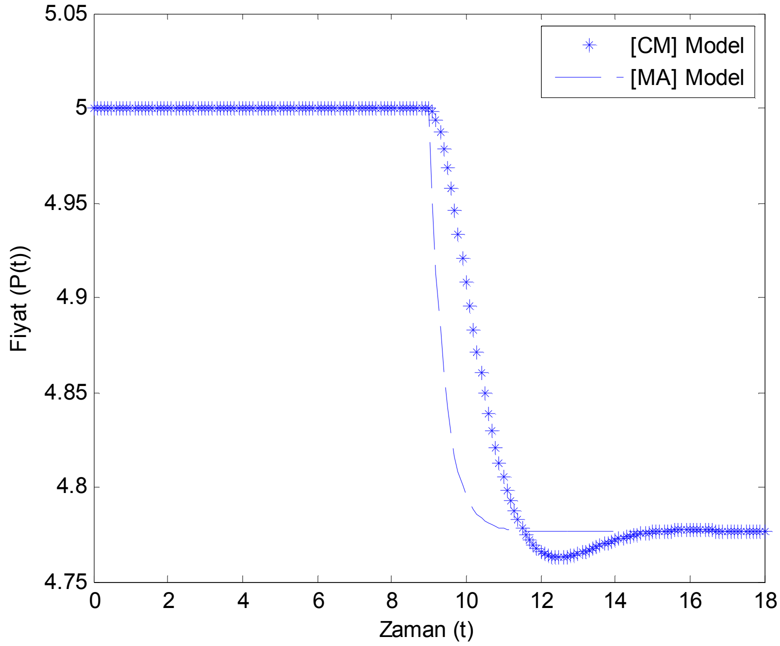


Şekil 4.1. Merdan & Altıntaş [MA] Modeli fiyat zaman grafiği

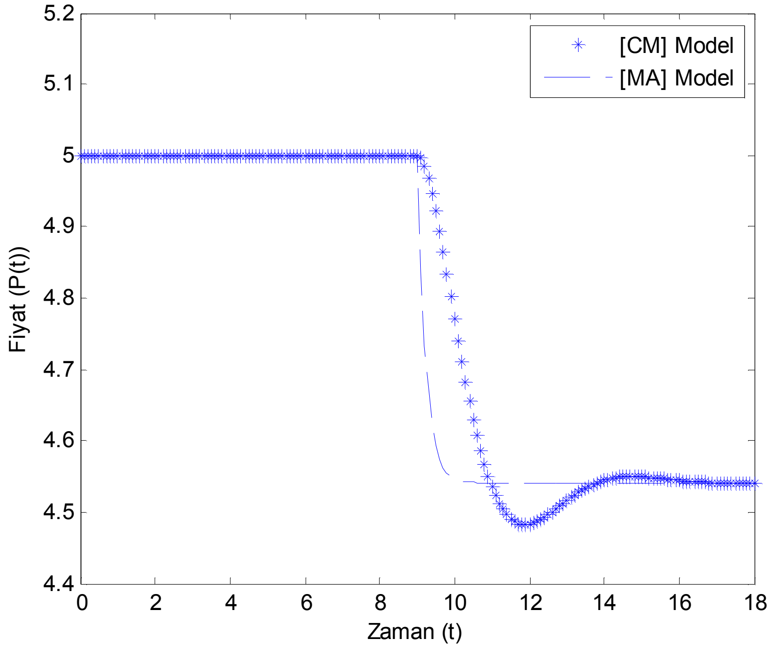
Bir sonraki nümerik çalışmada, [CM] modeli ile [MA] modelinin karşılaştırılması amaçlanmıştır. Bu nedenle, değişik parametrelerin atanmasıyla her iki modelin verdiği grafiklerin değerlendirilmesi yapılmıştır. Önce, [12] çalışmasında, $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1, q_2^{(i)} = 0.5,\ q_1^{(i)} = 0.1$ olarak alınan parametreler sonucu elde edilen grafik ile aynı parametrelerin kullanımı ile bu tez çalışmasında elde edilen grafik karşılaştırılmıştır. Bu grafik Şekil 4.2' de verilmiştir. Daha sonra, $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1$, $q_2^{(i)} = q_1^{(i)} = 0.2$ değerleri atanarak elde edilen grafikler incelenmiştir. Bu grafik ise Şekil 4.3' de gösterilmiştir. Daha sonra toplam sermayesinin büyük kısmını hisse senedinde tutan grubun, alım satımda hisse senedinin gerçek değerinden olan sapmasına önem vereceği ve kullanılabilir kaynaklarını nakitte tutan grubun da alım satımda fiyatın yönünü esas alacağı kabulü dikkate alınarak parametrelere değerler verilmiştir. Bunun için $q_1^{(1)} = q_2^{(2)} = 0.5,\ q_1^{(2)} = q_2^{(1)} = 0.1,\ c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1$ şeklinde atanmıştır. Elde edilen grafik Şekil 4.4' de verilmiştir. Dikkat edilirse, parametreler değişse de modellerin karşılaştırılması yapıldığında, her üç grafiğin de benzer bir yapıda olduğu görülür. Grafiklerden de görüldüğü üzere, [12] çalışmasındaki model sonucu incelenen hisse senedi fiyatı önce ani bir düşüş göstermiş, sonrasında ise bir salınım ile denge noktasına ulaşmıştır. Bu tez çalışmasında genişletilen model sonrası elde edilen grafiklerde ise ise, $t_1 = 9$ anında yapılan anons sonrası, ikinci grubun hisse senedine biçtiği değeri düşürmesiyle fiyat düşmüş, fakat salınım yapmadan denge noktasına daha çabuk ulaşmıştır.



Şekil 4.2. [CM] ve [MA] Modellerinin karşılaştırması



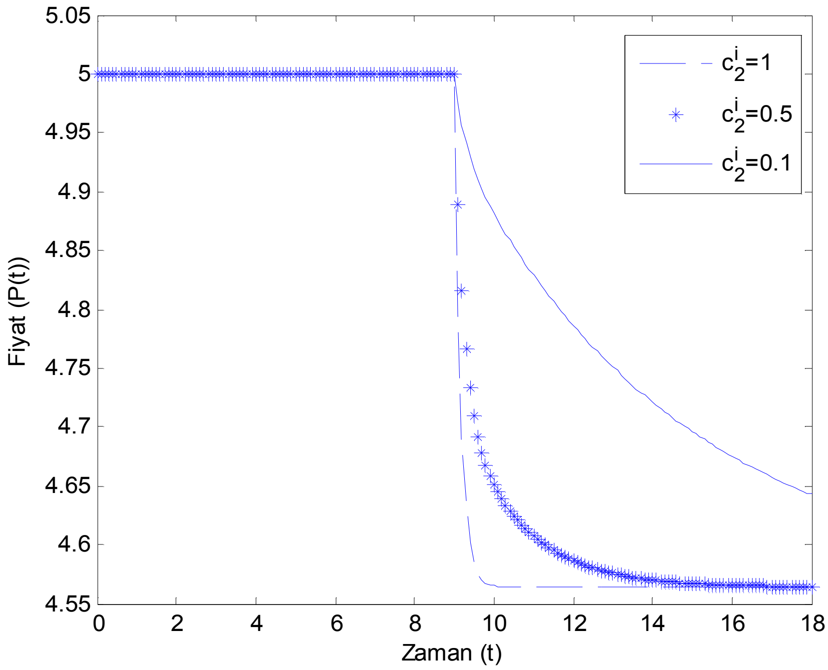
Şekil 4.3. [CM] ve [MA] Modellerinin karşılaştırması



Şekil 4.4. [CM] ve [MA] Modellerinin karşılaştırması

Fiyatın zamana göre değişim grafikleri incelendiğinde bazı sonuçlar çıkarılmıştır. Bu sonuçlar şu şekildedir. Hisse senedine olan talep ve arza dair daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalarda, yatırımcılar hisse senedinin ne zaman dengeye ulaşacağını [CM] modeline göre daha erken bir zamanda belirleyebilirler ve buna göre, alım satımda daha iyi pozisyon alabilirler. Örneğin, [12] çalışmasına göre hareket eden bir yatırımcı $t = 11$ anında fiyat dibe vurduğunda, fiyatın daha da düşeceğini düşünerek panik yapıp hisse senetlerini elinden çıkarabilir. Fakat, daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalarda, yatırımcı hisse senedi fiyatının gidişatı hakkında daha net bilgilere sahip olacağı için, daha erken pozisyon alabilecektir, panik halinde alım satım yapmasına gerek kalmayacaktır.

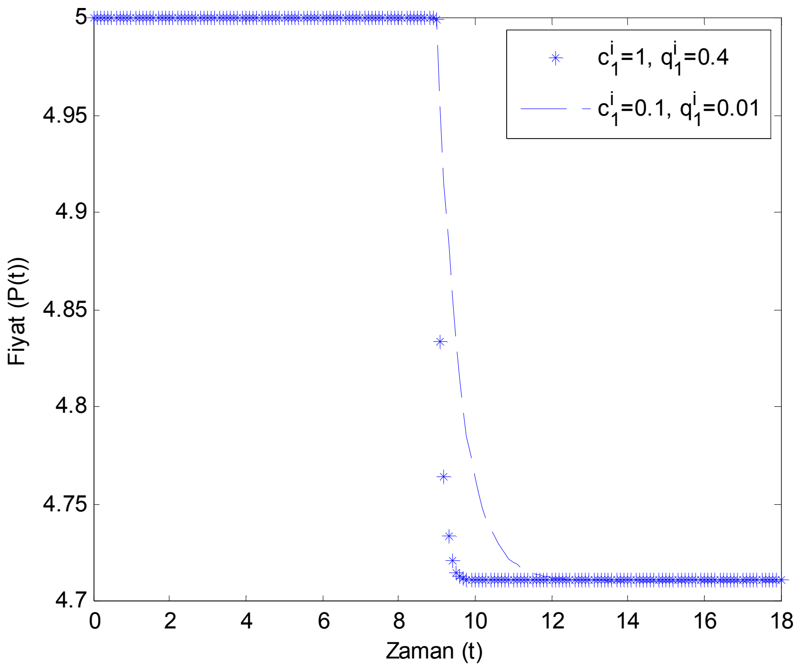
Yapılan bir başka nümerik çalışma ise, zihinsel eylemsizlik süresi ile alakalıdır. Zihinsel eylemsizlik süresinin, nümerik olarak çalışılabilmesi için $c_2^{(i)}$ parametrelerin değiştirilerek matlab kodunun çalıştırılması gerekmektedir. [12] çalışmasında, yatırımcılar hızlı bir şekilde karar vermediklerinde, (bu durum daha küçük $c_2^{(i)}$ değerlerine karşılık gelmektedir) fiyatın daha geç dengeye oturduğu gözlenmişti. Burada $q_1^{(1)} = q_2^{(2)} = 0.5,\ q_1^{(2)} = q_2^{(1)} = 0.2,\ c_1^{(i)} = 1$ olarak alınmıştır. Bu çalışmada, $c_2^{(i)}$ parametrelerine sırasıyla $0.1, 0.5, 1$ değerleri verildiğinde elde edilen grafik şu şekildedir:



Şekil 4.5. Farklı zaman parametrelerinin fiyatlara etkisi

Görüldüğü üzere, $c_2^{(i)}$ değerleri büyüdükçe, yani zihinsel eylemsizlik süresi kısalıp, yatırımcılar daha çabuk karar verdikçe, hisse senedi daha çabuk dengeye oturmaktadır. Bu sonuç, [12] çalışmasıyla uyumludur.

Son olarak, trend bazlı yatırımcı motivasyonunun hisse senedi fiyatı üzerindeki etkisinin araştırılması amaçlanmıştır. Bu nedenle trend bazlı bileşene ve bu bileşen için atanan hafıza uzunluğu süresine değişik değerler verilerek sonuçlar karşılaştırılmıştır. $q_2^{(i)} = 0.2, c_2^{(i)} = 1$ olarak sabit tutulmuştur. Modelin kuruluşuna dayanarak beklenen sonuç, her iki grup için hafıza süresi uzatıldığında ve trend bazlı bileşene verilen önem azaltıldığında, hisse senedi fiyatının denge noktasına ulaşırken ani düşmeler yaşamaması yönündedir. Bu nümerik çalışmanın sonucu Şekil 4.6' da gösterilmiştir. Grafikten görüldüğü üzere, söz konusu durumda, hisse senedi fiyatı dengeye ulaşırken ani bir düşme yaşamadan daha düzgün bir şekilde denge noktasına ulaşmıştır.



Şekil 4.6. Farklı ‘trend’ katsayıları ve zaman parametrelerinin analizi

BÖLÜM 5

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Talep ve arz fonksiyonlarının yalnız bir fiyattaki değerlerinden ziyade bu iki fonksiyonun türevlerinin tahmin edilmesine imkân sağlayan piyasalarda, mevcut rölatif fiyat değişimi denklemini içine alarak dinamik sistemler yaklaşımı ile kurulmuş olan modellerin yetersiz kalacağı düşüncesini hareket noktası kabul ederek yapılan bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. Bir t_1 anında, bir süre sonunda piyasaya ek hisse senedi gireceği anonsunun yapılması sonrası, piyasaya gerçek anlamda bir hisse senedi giriş olmasa dahi, hisse senedinin denge fiyatı değişmiştir. Hisse senedinin yeni denge fiyatı, başlangıçtaki değerinden daha aşağıda bir değerdedir.
2. Bu tez çalışmasında baz alınan Caginalp ve Merdan'ın çalışmasındaki ([CM]) model ile bu tez çalışmasında yeniden inşa edilen modelin ([MA]) nümerik olarak tahmin ettikleri denge fiyatları aynıdır.
3. [CM] modelinde fiyat anonsun etkisiyle ani bir düşüş gösterip sonrasında ise bir salınım ile denge noktasına ulaşmıştır. Bu tez çalışmasında kurulan modele göre elde edilen grafikte ise, anonsa bağlı olarak ikinci grubun hisse senedine biçtiği değeri düşürmesiyle fiyat düşmüş fakat salınım yapmadan denge noktasına daha erken bir zamanda ulaşmıştır.

Yukarıdaki sonuçlar ve nümerik çalışmalara göre elde edilen bulgular göz önüne alınarak, bu tez çalışması için bir takım analizler yapılabilir. Eğer yatırımcılar arz ve talebe dair daha fazla bilgiye sahiplerse, hisse senedinin ulaşacağı denge fiyatını, arz ve talebin yalnızca bir P fiyatındaki değerini hesaba katarak işlem yapan yatırımcılara göre daha erken öngörebileceklerdir. Bu da yatırımlarını sağlamlaştırmak için daha erken pozisyon alabilmelerine olanak sağlayacaktır. Çünkü yapılan nümerik çalışmalar sonrası görülmüştür ki, arz ve talep fonksiyonlarının yalnız bir fiyattaki değerini bilerek alım satın yapan yatırımcılar, hisse senedinin ani iniş çıkışlar yaşaması esnasında paniğe kapılıp hisse senetlerini elden çıkarmak isteyebilir ve yahut yanlış satın alımlara yönelebilir. Fakat bu tez çalışmasında, arz ve talep fonksiyonlarına dair daha fazla bilgi ihtiva eden piyasalar için türetilen model sonrası, bu iki fonksiyonun türevlerini de bilerek hareket eden yatırımcılar önceye nazaran daha avantajlı konuma geçerler ve karlarını maksimize veya zararlarını minimize edebilmek için pozisyon alabilirler ve portföylerini yeniden düzenleyebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Caginalp, G., Nonlinear Price Evolution, Quarterly of Applied Mathematics, 63, 715-720, 2005.

[2] Brigham, F.E., Gapenski, G.L., Financial Management Theory and Practise, The Dreyden Press, 66, 1991.

[3] Parasız, M.İ., Yıldırım K., Uluslararası Finansman Teori ve Uygulama, Ezgi Kitapevi Yayınları, Bursa, 5, 1994.

[4] Afşar, M., Finansal Sistem ve İşleyişi, Gülen Ofset, 2006.

[5] Mullineaux, D.J, Efficient Markets; Interest Rates and Monetary Police, 6, 1981.

[6] Caginalp, G., Ermentrout, G.B., A Kinetic Thermodynamics Approach to the Psychology of Fluctuations in Financial Markets, Appl. Math. Lett., 3, 17-19, 1990.

[7] Caginalp, G., Balenovich, D., Numerical Studies of Diferential Equations Related to Theoratical Financial Markets, Appl. Math. Lett., 4, 35-38,1991.

[8] Caginalp, G., Balenovich, D., Market oscilations induced by the competition between value-based and trend-based investment strategies, Appl. Math. Finance, 1, 129-164, 1994.

[9] Watson, D.S., Getz, M., Price Theory and its Uses, 5th edition, Univ. Press of America, 1981.

[10] Caginalp, G., Balenovich, D., Asset flow and momentum: deterministic and stochastic equations, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 357, 2119-2133, 1999.

[11] Henderson, J.M., Quandt, R.E., Microeconomic Theory, A Mathematical Approach, McGraw-Hill, 1980.

[12] Caginap, G., Merdan H., Asset Price Dynamics with Heterogeneous Groups Physica D, 225, 43-54, 2007.

[13] Beard, T., Beil, B., Do People Rely on the Self-interested Maximazation of Others? An Experimental Test, Manag. Sci. 40, 252-262, 1990.

[14] Davis, D., Holt, C., Experimental Economics, Princeton University Press, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ALTINTAŞ, İPEK
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 02.09.1985 Balıkesir
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (312) 292 43 28
Faks	: 0 (312) 292 40 91
e-mail	: ialtintas@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü	2008
Yüksek Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2010

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2008-2010	TOBB ETÜ	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce