HOMOJEN GRUPLARI İÇEREN PİYASALARDAKİ HİSSE SENEDİ FİYATLARININ MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

MELTEM ALİŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2010

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

____

Prof. Dr. Ünver KAYNAK

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

____

Prof. Dr. Ömer AKIN

Anabilim Dalı Başkanı

Meltem ALİŞEN tarafından hazırlanan HOMOJEN GRUPLARI İÇEREN PİYASALARDA HİSSE SENEDİ FİYATLARININ MATEMATİKSEL MODELLEMESİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

____

Doç. Dr. Hüseyin MERDAN

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan	Prof. Dr. Marat AKHMET	____________________
Üye	Doç. Dr. Hüseyin MERDAN	____________________
Üye	Dr. Ceren VARDAR	____________________

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

………………….

Meltem ALİŞEN

Üniversitesi	**: TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü	**: Fen Bilimleri Enstitüsü**
Anabilim Dalı	**: Matematik Bölümü**
Tez Danışmanı	**: Doç. Dr. Hüseyin MERDAN**
Tez Türü ve Tarihi	**: Yüksek Lisans – Temmuz 2010**

Meltem ALİŞEN

HOMOJEN GRUPLARI İÇEREN PİYASALARDAKİ HİSSE SENEDİ FİYATLARININ MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında hisse senedi fiyatlarını tahmin etmek için yeni bir fiyat değişim formülü kullanılarak elde edilen bir matematiksel model üzerinde çalışılmıştır. Bu modelde klasik ekonomide kabul gören ancak uygulamada kullanışlı olmayan kabullerin aksine, uygulamada kabul gören prensiplerin göz önüne alındığı tek çeşit hisse senedi ve bir grup aynı görüşteki yatırımcıdan oluşan bir sistem göz önüne alınmıştır. Bu sistemde bulunan tek çeşit hisse senedi, sistemdeki yatırımcılar arasında alınıp satılmaktadır. İlk olarak sistem kapalı olarak düşünülmüştür; daha sonra kapalı olan bu sistem dışarıdan içeriye veya içeriden dışarıya, para veya hisse senedi akışının olduğu kapalı olmayan bir sisteme genişletilmiştir. Elde edilen matematiksel model ile arz ve talep hakkında daha fazla bilgiye sahip olan piyasalarda hisse senedi fiyatlarının dinamiği çalışılmıştır.

Bu çalışmada elde edilen matematiksel modelin temeli, klasik ekonominin temelini oluşturan "arz ve talep birbirine eşit iken fiyat dengeye oturur" prensibine bağlı kalınarak yapılmış çalışmalara dayanmaktadır. Ancak bu tez çalışmasında, geçmişteki çalışmalardan farklı olarak, aşırı talep fonksiyonu kullanılarak elde edilmiş fiyatın zamana bağlı değişim denklemi yerine, Caginalp tarafından 2005 yılında yayınlanan çalışmada elde edilmiş yeni bir bağıl fiyat değişimi formülü kullanılmıştır. Bu formül arz ve talebin belirli bir fiyattaki değerinin yanında türevlerinin de bilindiği göz önüne alınarak çıkarılmıştır. Bu yeni formül kullanılarak elde edilen matematiksel modelin, arz ve talep hakkında daha fazla bilgi içeren piyasalarda, aşırı talep fonksiyonunun kullanıldığı matematiksel modellere nazaran daha iyi bir tahmin vereceği öngörülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Hisse senedi fiyatı dinamikleri, denge noktası, lineer olmayan arz ve talep fonksiyonları.

University	:	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	:	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	:	**Mathematics**
Supervisor	:	**Associate Professor Hüseyin MERDAN**
Degree Awarded and Date	:	**M.Sc. – July 2010**

Meltem ALİŞEN

MATHEMATICAL MODELING OF ASSET PRICE DYNAMICS IN THE MARKETS INVOLVING HOMOGENEOUS GROUPS

ABSTRACT

In this thesis, a new mathematical model which is derived by using a new relative price change formula is introduced for estimating asset price changes. In this model, a system is considered which has some assumptions valid in practice, contrary to the assumptions of classical economics which are not useful in practice and the system consists of a single asset and a homogeneous group of investors. The single asset in the system is traded by investors in the system. At first, the system is considered as a conserved system and then it is extended to system which involves exogenous cash and shares. Asset price diynamics is studied with this mathematical model in a market involving more information on demand and supply for a stock rather than their values at a price.

The basis of the mathematical model grounds on the studies which are based on the fundamental principal of classical economy "an equilibrium price is attained when supply and demand are equal". However in this thesis differently from the previous studies, a new relative price change formula derived by Caginalp is used instead of the relative price change formula involves excess demand function. This formula includes not only the values at a price but also first derivatives of demand and supply functions. The mathematical model derived by using this new formula may yield a better forecast than the formula involves excess demand function in markets involving more information about demand and supply functions.

Keywords: Asset price dynamics, equilibrium point, nonlinear demand and supply functions.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimin danışmanlığını üstlenerek, tez çalışmalarım boyunca destek ve katkılarıyla beni yönlendiren çok değerli hocam Doç. Dr. Hüseyin MERDAN' a, yardımlarını esirgemeyen asistan arkadaşlarıma, beni her zaman destekleyip bugünlere getiren sevgili aileme ve arkadaşlarımdan Duygu AKKOCA' ya manevi desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca yüksek lisans eğitimimdeki maddi desteğinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

1.1 Tez Çalışmasının Amacı

Yatırımcılar, piyasalarda işlem gören hisse senetlerinin değişen piyasa koşullarına göre gerçekleşen fiyat hareketlerinden faydalanarak yaptıkları yatırımlardan kâr elde etmek isterler. Bundan dolayı hisse senetlerinin zamana bağlı fiyat değişiminin nasıl olacağını tahmin etmek yatırımcılar açısından çok önemlidir. Çünkü yapılacak bu tahminler, yatırımcının kazanç ve kayıplarının büyüklüğünü belirleyebilir. Yalnız yatırımcıların yaptıkları tahminlerin kesinliği yoktur. Çünkü ekonominin dolayısıyla piyasaların belirsizlikler ve olasılıklar üzerine kurulu karmaşık bir yapısı vardır. İşte ekonominin doğasından kaynaklanan bu risk ve belirsizlik hisse senedi fiyatlarının zamana bağlı değişimini ve gelecekte ulaşacağı değeri tahmin etmeyi güçleştirmektedir. En doğru şekilde nasıl hareket edileceğinin kesin olarak bilinemediği bu piyasalarda bireysel yatırımcılar, kendi bilgi, deneyim, beklenti ve ihtiyaçlarından yola çıkarak bir takım stratejiler belirlemektedirler [1]. Bu stratejilere göre de alım-satım kararı vermektedirler.

Yatırımcıların alım-satım kararlarını etkileyen birçok faktör vardır. Bu kararların belirlenmesindeki en önemli ölçütlerden birisi hisse senedi fiyatlarıdır. Dolayısıyla hisse senedi fiyatlarını etkileyen her unsur yatırımcı kararını da etkileyecektir. Bu çalışma, hisse senedi fiyatını etkileyen faktörlerden en önemli ikisi olarak kabul edilebilecek olan gerçek değerdeki değişiklik ve fiyatın yönü faktörleri üzerine kurulmuştur. Ayrıca bir başka unsur olan likidite etkisi eklenerek çalışma genişletilmiştir.

Bu tez çalışmasının amacı, literatürdeki dinamik sistemler yaklaşımı ile yapılmış matematiksel modelleri analiz etmek ve hisse senedi fiyatları için daha iyi bir tahmin yapabilecek yeni bir matematiksel model oluşturmaktır. Bu sözü geçen yeni modeli elde etmek için ise fiyat değişimini belirlemek için klasik ekonomide genel olarak kabul görmüş bir formül olan aşırı talep fonksiyonunun yerine, daha önce Caginalp tarafından yapılmış olan [2] çalışmasında elde edilen formüllerden biri olan arz, talep ve bu iki fonksiyonun birinci mertebeden türevlerini de içeren bir fonksiyon kullanılmıştır. Caginalp bu fonksiyonu elde ederken, talep ve arz fonksiyonlarının birinci dereceden Taylor seri açılımlarından faydalanmıştır. İşte bu tez çalışmasında bu yeni formül esas alınarak, literatürde bulunan daha önceki çalışmalardakine benzer bir matematiksel model oluşturulmuştur. Bu matematiksel model, diferensiyel denklemlerden oluşan bir sistemi içermektedir. Sistem önce korunumlu bir sistem olarak ele alınmıştır. Yani sistemde dışarıdan içeriye veya içeriden dışarıya hisse senedi ve para akışı yoktur. Daha sonra ise bu sistem, gerçek piyasaya daha yakın olan korunumlu olmayan sisteme genişletilmiştir.

1.2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızın üzerine kurulu olduğu konu olan hisse senetlerinden bahsedilecektir. Hisse senedinin tanımı yapılıp hangi amaçlarla kullanıldığı, fiyatlarının nasıl belirlendiği gibi finansal piyasa bilgilerine yer verilecektir.

1.2.1 Piyasalar

Öncelikle piyasanın ne olduğu açıklanmalıdır. Piyasa, alıcı ve satıcılardan meydana gelen ve alıcı ve satıcıların birbirleri arasında mal ve hizmet alıp sattığı bir kanaldır [3]. Ekonomide iki çeşit piyasa türü bulunmaktadır. Bunlardan birincisi ürün piyasası, ikincisi ise faktör piyasasıdır. Ürün piyasasında ticari mallar ve hizmetler işlem görürken, faktör piyasalarında iş gücü, sermaye, toprak gibi üretim faktörleri alınıp satılır. Hisse senetlerinin alınıp satıldığı piyasa türü finansal piyasanın konusudur ki finansal piyasa, faktör piyasalarının en önemli kollarından biridir.

Finansal piyasalar bireylerin gelirlerini yatırıma dönüştürmek istemeleri sonucu oluşmuştur. Örneğin birey sahip olduğu gelirin hepsini tüketebilir ya da bir kısmını birikim haline getirip yatırıma dönüştürebilir. İşte gelirlerini yatırım haline dönüştüren birikim sahipleri ile yatırımcıları bir araya getiren alıcılar, satıcılar, yatırım araçları ve finansal kurumlardan oluşan pazarlara finansal piyasalar denir [3]. Bu piyasaların amacı tasarrufu özendirmek ve artırmak, böylece sermaye birikimi sağlamak, ülke fonlarının etkin kullanılmasını sağlamaktır. Finansal piyasalarda kendi içlerinde başta para ve sermaye piyasaları olmak üzere döviz piyasası, altın piyasası, tahvil ve bono piyasası, türev piyasası gibi farklı bölümlere ayrılır [4].

Para Piyasası: Finansal piyasanın kısa vadeli fonlarının arz ve talep edildiği piyasalardır. Kısa vade ile anlatılmak istenen, bu fonların bir yıldan az süreli olmasıdır. Bu piyasanın kurumları, ticaret bankaları ve devlet kurumlarından oluşur. İşletmeler genellikle bankalardan sağladıkları kısa vadeli kredilerle dönen varlıklarının finansman ihtiyaçlarını karşılarlar.

Sermaye Piyasası: En basit şekilde sermaye piyasası, sermaye arz ve talebinin eşleştiği piyasadır. Sermaye piyasaları, örgütlenmiş sermaye piyasaları ve örgütlenmemiş sermaye piyasaları olmak üzere iki şekilde nitelendirilebilirler:

<u>Örgütlenmiş sermaye piyasaları</u>, menkul kıymet borsalarıdır.

<u>Örgütlenmemiş sermaye piyasaları</u>, daha çok gelişmekte olan ülkelerde görülen gelişmemiş bir piyasa türüdür. Yasal düzenlemesi noksan, yardımcı kuruluşları eksik ve araçlar bakımından çeşitlenmemiş ve ekonomik kalkınmaya yeterince fon sağlayamayan bir sermaye piyasası, örgütlenmemiş bir sermaye piyasası sayılır.

Sermaye piyasası birincil, ikincil, üçüncül ve dördüncül piyasalar şeklinde dörde ayrılır:

<u>Birincil Piyasalar</u>; hisse senedi ve tahvil gibi menkul değerler ihraç eden şirketler ile alıcıların karşılaştıkları piyasalardır. Buna, hisse senetleri ve tahvillerin ilk kez sürüldükleri piyasa da denilebilir.

İkincil Piyasalar; yeni kurulan veya daha önceden kurulmuş bulunan işletmelere ait var olan pay senedi ve tahvillerin alınıp satıldığı piyasalardır.

Üçüncül Piyasalar; Borsaya kote edilmiş menkul kıymetlerin borsa dışında alınıp satılmasıyla oluşan piyasalardır.

Dördüncül Piyasalar; Menkul kıymetlerin aracısız alınıp satıldığı piyasalardır.

Sermaye Piyasasının Kurumları: Sermaye Piyasasının kurumları dört gruba ayrılır:

1. Halka açık şirketler,
2. Aracı kurumlar,
3. Sermaye piyasası kurulu,
4. Borsalar.

Borsalar: Borsa, aynı türden menkul kıymetlerin alınıp satıldığı piyasalardır. Ticaretle ve finansal işlemlerle uğraşan kişilerin bulunduğu açık kurallı finansal organizasyondur. Borsada alım satım işlemleri aracı kurumlar tarafından gerçekleştirilir. Aracılar, faaliyetlerini gerçekleştirirken piyasada iki farklı fonksiyonu yerine getirirler. Bunlar birincil piyasadaki faaliyetler ile ikincil piyasadaki faaliyetlerdir.

Yatırımcının borsada işlem yapması için bir aracı kurumda yatırım hesabı açtırması gerekir. Yatırımcı almak ya da satmak istediği hisse senetleri için aracı kuruma alım satım emirleri verir ve borsanın sistemine alım satım emirlerinin girilmesi ile bu emirlerin eşleşmesiyle ilgili işlemler yapılır. Yani borsada, alıcı ve satıcılar değil, onların emirleri karşı karşıya gelir. Borsanın işlevleri, likidite sağlama, piyasada tek fiyat oluşturma, güvence verme, sermayeye hareketlilik ve ekonomiye kaynak temin etme şeklinde sıralanabilir [5].

1.2.1 Hisse Senetleri

1.2.1.1 Konu İle İlgili Terimler

Aşağıda hisse senedi konusu ile ilgili olarak literatürde geçen ve sık kullanılan bazı terimlerin tanımları verilmiştir:

Acente: Belli bir sözleşme çerçevesi içerisinde ticari işletmeler adına işlemler yapan yani bu işlemlerde sözü geçen ticari işletmeye aracılık eden kimse ya da kuruluştur. Türk Ticaret Kanunu'nda (116 ve devamı maddelerinde) ise acentenin tanımı "Bir ticari işletmenin içinde ve o işletmeye bağlı olmaksızın belirli bir sözleşmeye dayalı olarak, bağımsız olarak çalışan, ticari işletmeyi ilgilendiren sözleşmelerde aracılık ederek sözleşmeyi ticari işletme nam ve hesabına yapan gerçek veya tüzel kişilerdir." olarak verilmektedir.

Açığa satış: Sahip olunmayan menkul kıymetlerin ödünç alınarak satılmasıdır.

Anonim şirket: Ana sözleşmesinde yazılı konularda faaliyette bulunmak üzere kurulmuş olan ve esas sermayesi belli paylara bölünmüş olan sermaye şirketleridir.

Aracı kurum: Sermaye piyasası faaliyetlerinde bulunmak üzere Sermaye Piyasası Kurulu tarafından aracılık yetkisi verilmiş anonim ortaklıklardır [3].

Aracı kuruluş: Sermaye piyasası faaliyetlerinde bulunmak üzere Sermaye Piyasası Kurulu'nca yetkili kılınmış bankalar ve aracı kurumlardır [3].

Arbitraj: Fiyat farklarından yararlanmak amacıyla para, kıymetli maden, tahvil ve hisse senedi alıp-satma işlemleridir. Yani yatırımcının farklı piyasalarda bulunan aynı çeşit menkul kıymeti, fiyatın düşük olduğu piyasadan alıp, fiyatın yüksek olduğu piyasada satmasıdır. Arbitraj düzgün işlemeyen piyasalarda oluşur. Çünkü düzgün işleyen piyasalarda aynı tür menkul kıymet için tek fiyat vardır.

Ayı Piyasası: Gelecek hakkında karamsarlığın ve fiyatların düşeceği beklentisinin hâkim olduğu piyasalardır. Bu piyasalarda kişiler ellerindeki hisse senetlerini gelecekte daha düşük bir fiyattan satın alabilecekleri düşüncesi ile satarlar. Bir başka deyişle ayı piyasası fiyatların düşme eğiliminde olduğu piyasalardır.

Boğa Piyasası: Talebin arzdan daha çok olduğu ve borsada fiyatların tırmanışa geçtiği dönemi ifade eder. Ayı piyasasının tersine, boğa piyasasında fiyatlar yükselme eğilimindedir.

Lot: Hisse senetleri piyasasında işlem birimidir.

Piyasa Fiyatı: Sermaye piyasasında yer alan finansal aracın arz ve talebinin karşılaşması sonucu oluşan fiyattır.

Rüçhan Hakkı: Ortaklıkların bedelli sermaye artırımlarına, mevcut ortakların öncelikle katılma hakkıdır.

Temettü: Ortaklıkların dönem içinde elde ettikleri kardan mevcut ortakların pay alma hakkıdır.

1.2.1.2 Hisse Senedi Kavramı

Hisse senedi, bu senedi çıkaran şirketin sermayesinde, senedin üzerinde yazılı tutar (nominal değer) kadar ortaklık hakkına sahip olunduğunu gösteren belgedir. Bir başka tanımı ise, anonim ortaklıklar tarafından çıkarılan ve anonim ortaklık sermayesine belirli bir katılma payını temsil eden, yasal şekil ve şartlara uygun olarak düzenlenmiş, kıymetli evraktır, şeklindedir. Hisse senetleri bir anlamda ortaklık belgesidir ve sahibine bazı haklar verir. Bunlar;

1) Şirket payından kar alma,
2) Yönetime katılma ve oy hakkı,

3) Rüçhan hakkı (yeni pay alma),

4) Tasfiyeden pay alma hakkı,

5) Şirketin faaliyetlerinden pay alma hakkıdır.

Hisse senetleri borsalarda işlem görür. Borsada hisse senetleri lot ile ifade edilir. 1 lot 1000 adet hisse senedidir. Örnekle açıklamak gerekirse; fiyatı 5 TL olan bir hisse senedi için 1 lot almak isteyen yatırımcının ödemesi gereken miktar (5*1000) 5.000 TL dir.

Borsada fiyatlar sürekli hareket halindedir. Bu dalgalanmalar aslında bir şirketin her bir bireyin kafasındaki değerinin ve yine bu bireylerin gelecekle ilgili öngörülerinin farklı olmasından kaynaklanır [6].

Halka arz olup borsada işlem görmeye başlayan şirketler arz ettikleri sermaye payına denk gelen oranda nominal değerli hisse senedini piyasaya sürerler. Şirket halka arz olduktan sonra arz talep durumuna göre şirket senetlerinin piyasa değeri oluşur. Piyasa değeri, aracının arz ve talebinin karşılaşması sonucu oluşur.

Meydana gelen piyasa değeri senedin üstünde yazılı olan nominal değerden farklı olur. Nominal değer yani hisse senedinin gerçek değeri, işletmenin varlıkları, kârlılık durumu, dağıtılan kâr payları, sermaye yapısı gibi değişkenlerinin belirlediği değerdir. Bir başka deyimle mevcut koşullar altında yatırımcılarca hisse senedine değer biçilmesi sonucu oluşan ve hisse senedi için normal bulunan değerdir. Bu değer ise yatırımcıların işletmeden bekledikleri gelir yaratma potansiyelini ve kazanç oranını yansıtır. Hisse senedi değerlemesi ise hisse senedinin piyasada sahip olduğu fiyatın ne derece gerçekçi olduğunun tespit edilmesidir. Hisse senedinin piyasa fiyatı gerçek değerinin altındaysa hisse senedi satın alınmalı, aksi takdirde ise hisse senedi elden çıkarılmalıdır. Dolayısıyla yatırımcının kararı için hisse senedinin gerçek değerinin bulunması gerekir. Hisse senedi fiyatlarını etkileyen faktörler genel anlamda ikiye ayrılabilir. Birincisi genel faktörler yani dünyadaki gelişmeler, politika gibi faktörlerdir. İkincisi ise şirketle ilgili faktörlerdir. Bunlar şirketin durumu, yönetimi, faaliyetleri, pazar payı gibi etkenler olabilir.

Hisse senedi yatırımcısı, yatırım yaptığı şirketin büyüme veya kârlı olma ihtimalinden pay alabilmek için yatırım yapar. Yatırımcı, yatırım yaptığı hisse senedinin gelecekteki fiyatının ne olacağını tahmin etmek ister, çünkü bu tahmin doğrultusunda kendisine bir pozisyon belirleyerek kaybını minimuma kazancını ise maksimuma çıkarmak çabası içindedir. Bu durumlar göz önüne alınarak finansal varlıkların gelecekteki değerlerini tahmin etmek için; temel analiz, teknik analiz, etkin piyasalar hipotezi gibi bilimsel yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlar arasında en sık kullanılanları temel analiz ve teknik analizdir. Temel analiz şirketlerin bilanço ve gelir tablolarının incelenmesi ile gelecekteki hisse senedi fiyat performansları arasında bilgi edinmeyi amaçlar.

Teknik analiz ise hisse senetlerinin geçmişteki fiyat ve hacim hareketlerinin grafiklerini bilgisayar programları yardımıyla inceleyerek, bu grafikleri belli başlı teknik analiz grafikleri ile ilişkilendirir. Böylece hali hazırda var olan fiyat hareketleri grafiklerinden yararlanarak, gelecekteki hareketlerle ilgili tahmin yürütmeye çalışır. Bir başka deyişle finansal araçların fiyat geçmişi örneklerini kullanarak, fiyatların gelecekteki durumlarını tahmin etmeye yarayan bir yöntemdir [7], [8], [9]. Yatırım araçlarının gerçek değerlerinin belirlenmesi ile uğraşan temel analiz yöntemine bir alternatiftir. Ancak temel analiz klasik ekonominin prensiplerini temel alır. Teknik analizde ise durum tam tersidir. Teknik analizin kullanımı etkin piyasa hipotezinin açıklayamadığı durumları açıklayabilir. Sonuç olarak teknik analiz ile etkin olmayan piyasa arasında bir ilişki vardır.

Teknik analiz konusunda yakın geçmişte yapılan çalışmalardan birisi 1994'te Blume tarafından yapılmıştır. Blume teknik analizin acentelerin bir öğrenme süreci olduğunu keşfetmiştir [10]. Bir başka çalışmada 1998'de Caginalp ve Laurent tarafından yapılmıştır [11]. Bunu aynı yıl Bessembinder ve Chan'in temettülerle ilgili çalışmaları izlemiştir [12]. Chang ve Osler ise 1999'da "Head and Shoulders (Kafa ve Omuzlar)" adlı modeli bulmuşlardır [13].

Klasik ekonominin açıklayamadığı durumlara Caginalp ve Balenovich "A Theoretical Foundation for Technical Analysis" adlı çalışmalarında yer vermişlerdir ve bu durumların teknik analizle açıklanabileceklerini ifade etmişlerdir [14]. Bu konuda verdikleri bazı örnekler şöyle sıralanabilir. Bireysel yatırımlarda gerçek değerin yukarısındaki değerlemelerin uzun süreli olması durumu bunlardan ilkidir. Örneğin 1989'da Japon hükümetinin bir telefon firmasını özelleştirmesi sebebiyle bu şirketin tüm Batı Alman piyasasının değerini aşan bir piyasa değerine sahip olmasıdır. Bu gibi durumlarda çok büyük şirketler temel ekonominin açıklayamayacağı piyasa değerlerine sahip olurlar. İkinci olarak piyasalardaki sert düşüşleri temel ekonomi prensipleri açıklayamaz. Bir diğeri yenilikler karşısındaki ani fiyat değişiklikleridir.

Bu tez çalışması teknik analizin prensipleri göz önüne alarak yürütülmüştür. Fiyat geçmişi ve trend bu çalışmada temel alınan en önemli iki kavramdır. Trend basitçe fiyatların hareket ettiği yöndür. Benzer şekilde piyasa hareketi ve fiyat hareketi teknik analizci için gerekli olan iki önemli kavramdır.

Teknik analizin üç önemli kabulü vardır. Bunlardan birincisi piyasa her şeyi hesaba katar felsefesidir. Yani hisse senedi fiyatını etkileyecek her şeyin ki bunlar politika, psikolojik durum, ekonomik durum vb. olabilir, hisse senedi fiyatına yansıdığı kabul edilir.

İkincisi fiyatlar trendlerle hareket eder, yani fiyatların yönünde bir süreklilik vardır ve bu süreklilik yatırım araçlarına olan arz ve talepte çok önemli bir değişiklik olmadıkça, arz ve talep oranının yavaş değiştiği anlamına gelir. Üçüncüsü ise geçmiş kendini tekrar eder ilkesidir. Bu kabul piyasa modellerinin tekrar ve tekrar gerçekleştiğini söyler. Bu durum "Tarih tekerrürden ibarettir" sözüyle de açıklanabilir. Bu modeller yatırımcı tepkilerinin sonuçları olarak gelişir. Yani aslında piyasada her zaman birbirine benzer yatırımcı profilleri vardır. Benzer yatırımcılar benzer motivasyonlara sahiptir ve bunun sonucunda piyasada karşılarına çıkan durumlarda benzer davranışlar gösterip piyasayı aynı yönde etkilerler.

Ayrıca teknik analizde bazı belli başlı fiyat grafiği modelleri vardır. Bunlar trend çizgileri, üçgen formasyonları, simetrik üçgen fonksiyonları, alçalan üçgen fonksiyonları, yükselen üçgen fonksiyonları, dikdörtgen formasyonları, elmas formasyonları, ters çanak ve çanak formasyonları, “V” formasyonları, ters “V” formasyonları, yükselen takoz formasyonları, alçalan takoz formasyonları, boşluklar, anahtar gün formasyonları, omuz-baş-omuz formasyonları, üçlü tepe ve üçlü dip formasyonları grafikleri gibi grafikler gözlemlenir.

BÖLÜM 2

2.1 Literatür Taraması

Finansal matematik, finansta uygulamalar bulan bir takım matematiksel tekniklerin toplamıdır. Finansal matematikte iki ana yaklaşım vardır. İlki olasılık ve stokastik süreçler yaklaşımı, ikincisi ise diferensiyel denklemler yaklaşımıdır. Stokastik süreçler yaklaşımı ile yapılan çalışmalar, hisse senedi fiyatının modellenmesi için Brownian Metodunun kullanılmasıyla başlamıştır. Brownian Metodunun matematiksel olarak modellenmesi için ilk girişimler, birbirinden habersiz olan üç kişi tarafından yapılmıştır. Birincisi, T.N. Thiele'dir. Thiele, 1880 yılında zaman serilerini çalışırken, Brownian hareketi için etkili bir model kurmuştur [15]. İkincisi 1900'de yine Brownian hareketi için bir model oluşturan Louis Bachelior'dur. L. Bachelior, Paris stok piyasasının dinamiğini çalışırken bu modeli bulmuştur. Spekülasyon Teorisi (The Theory of Speculation) adlı çalışması 1900 yılında yayınlanmıştır [16], [17], [18]. Üçüncüsü ise Albert Einstein'dır. 1905'te diğer fizikçileri maddenin moleküler yapıda olduğuna ikna etmek için bulunduğu bir girişimde, bir sıvı içinde asılı duran küçük parçacıkların hareketinin modelini önermiştir [19]. Finansal matematikteki ilk etkileyici iş ise, 1952 yılında Harry Markowitz tarafından yapılan "Modern Portfolio Theory" adlı portföy optimizasyonudur. Benzer olarak William Sharpe, piyasa ve her bir stok arasındaki korelasyona karar vermenin matematiğini geliştirmiştir. Öncü çalışmalarından dolayı Markowitz, Sharpe ve Merton Miller 1990 yılında ekonomi alanında Nobel ödülünü kazanmışlardır. Bu ödül finans alanında kazanılan ilk ödüldür. Yine bu alanda kullanılan tek periyotlu modeller, Robert Merton ve Paul Samuelson tarafından Brownian hareketi kullanılarak sürekli modeller olarak yenilenmişlerdir. Sonraki büyük gelişme 1973'te Fischer Black ve Myron Scholes'un Merton'un katkılarıyla yaptıkları çalışmalarıyla geldi. Bu çalışmada, Black ve Scholes stokastik süreçler ve kısmi türevli denklemler kullanarak finans piyasaları için bir model geliştirmişlerdir ve 1997 yılında ekonomi alanında Nobel Ödülü kazanmışlardır. 1980'de Harrison ve

Kreps stokastik bir süreç martingale yaklaşımı adlı tekniği finansal matematiğe getirdiler (Geleceğin en iyi değeri bugünkü değerdir) [20].

Bu kısma kadar anlatılan çalışmalar, stokastik süreçler ve olasılık yaklaşımı kullanılarak yapılmıştır. Bu tez çalışmasında ise finansal matematikteki ikinci yaklaşım olan diferansiyel denklemler yaklaşımı kullanılmıştır. 1990 yılından günümüze kadar bu tarzda birçok çalışma yapılmıştır. Ancak bu tez çalışması dört tanesini temel almıştır. Bunlardan ilki, ”A Kinetic Thermodynamics Approach to the Psychology of Fluctuations in Financial Markets” isimli çalışmadır [21]. 1990 yılında G. Caginalp ve G. B. Ermentrout tarafından ele alınan bu çalışmada yatırımcının psikolojisine bağlı finansal piyasa davranışları modellenmiştir. Bu makalenin amacı, piyasadaki fiyat dalgalanmalarının deterministik bir yolla modellenebileceğini göstermektir. Birden çok karar verme mekanizmasına bağlı bir finansal sistemin modellenmesi, fiziksel bir sistemin modellenmesine benzetilmiştir. Yatırımcılar alıcı ve satıcılardan oluşan bir topluluk olarak göz önüne alınmıştır. Bu topluluktaki alıcı ve satıcıların, bireysel olasılık toplamlarının olduğu varsayılmıştır. Alış ve satış işlemlerinin gerçekleşmesi olasılığı ise bir geçiş oranı fonksiyonu olarak kabul edilmiştir ki bu kimyasal kinetiğe benzerdir. Sonraki çalışma G. Caginalp ve D. Balenovich tarafından yapılan ve 1999 yılında yayınlanan “Asset flow and momentum: Deterministic and stochastic equations” adlı çalışmadır [22]. Bu çalışmada belirli sayıda hisse senedi ve belirli miktarda nakit para içeren bir piyasa için birinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi oluşturulmuştur. Bu sistem bazı basit enerji korunum kuralları ve mikro ekonomik eşitliklerden yola çıkılarak elde edilmiştir ve tek çeşit grup ile tek çeşit hisse senedi içermektedir. Daha sonra G. Caginalp ve H. Merdan 2007 yılındaki “Asset Price Dynamics with heterogeneous groups” adlı çalışmalarında farklı koşullar altındaki hisse senedi fiyat değişimlerini çalışmak için bir diferensiyel denklem sistemi kullanmışlardır [23]. Bu çalışmada tek bir hisse senedi ve iki veya daha fazla farklı grup olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım altında yukarıda sözü geçen diferansiyel denklem sistemi oluşturulmuştur. Diferensiyel denklemlerle, hisse senedi sayısının sonlu olması durumu ve yatırımcı stratejilerinin etkileri birleştirilmiştir. Sistem daha sonra hisse senedi ve nakit girişinin olduğu kapalı olmayan bir sisteme genişletilmiştir.

Bahsedilen bu çalışmalar, klasik ekonomide genel bir kural olan ve aşırı talep fonksiyonu olarak formüle edilen "Arz ve talep birbirine eşitken fiyat denge noktasına ulaşır" ifadesini prensip olarak alırlar. Fakat G. Caginalp, arz ve talep hakkında daha fazla bilgi içeren piyasalar için aşırı talep fonksiyonunun yerine daha iyi bir fiyat tahmini sağlayabilmesi mümkün olan yeni bir formül elde etmiştir. 2005 yılında "Nonlinear Price Evolution" adlı makalesinde bu çalışma yayınlanmıştır [2]. Bu tez çalışmasında da bu formül esas alınarak daha önceki çalışmalardaki gibi bir diferensiyel sistem kurulmuştur. Sayısal hesaplamalar kullanılarak literatürde yer alan çalışmalarla karşılaştırma yapılmıştır.

2.2. Geçmişte Yapılmış Dinamik Sistem Yaklaşımları

2.2.1. Notasyon

$P(t)$:= Hisse senedinin bir t anındaki fiyatı,

$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$:= Hisse senedi fiyatındaki bağıl (relatif) değişim,

$P_a(t)$:= Hisse senedi için yatırımcı tarafından belirlenen değer (gerçek değer),

$M(t)$:= t anında piyasada bulunan para miktarı,

$N(t)$:= t anında piyasada bulunan hisse senedi miktarı,

$\xi_1(t)$:= Yatırımcı kararına hisse senedi fiyatının yönüne göre etki eden bileşeni,

$\xi_2(t)$:= Yatırımcı kararına hisse senedinin gerçek değerine göre etki eden bileşeni,

$L(t)$:= Likidite değeri,

$k(t)$:= t anında bir birim paranın hisse senedine dönüşme olasılığı,

$B(t)$:= Yatırımın, t anında hisse senedinde olan kısmının toplam tutara oranı,

$1 - B(t)$:= Yatırımın, t anında nakitte olan kısmının toplam tutara oranı.

2.2.2. Deterministik Model Yaklaşımları

Finansal sistemlerin matematiksel olarak modellenmesi biçiminde olan ilk çalışma G. Caginalp ve G. B. Ermentrout tarafından yapılan "A Kinetic Approach to the Phsycology of Fluctuations in Financial Markets" adlı çalışmadır [21]. Bu çalışmada piyasadaki yatırımcıların hisse senedi alış satışı konusundaki davranışları için basit bir matematiksel model oluşturulmuştur. Modelde zamanla üstel olarak azalan fiyat geçmişinin etkisinin hafızada kalmasıyla oluşan yatırımcı motivasyonu dikkate alınmıştır. Ayrıca yatırımcıların motivasyonu, hisse senedi fiyatının gerçek değeriyle bugünkü değeri arasındaki farka göre de değişmektedir. Bunun gibi birden çok karar verici mekanizmasına bağlı bir finansal sistemin modellenmesi, fiziksel bir sistemin modellenmesine benzetilmiştir. Yatırımcılar, her bir bireyin kendine ait olasılık fonksiyonlarının olduğu, alıcı ve satıcılardan oluşan bir topluluğun parçası olarak görülürler. Bahsi geçen olasılık fonksiyonları alış ve satış işlemleri olarak kabul edilen iki farklı durum arasındaki geçiş oranını vermektedir. Bu çalışmada yatırımcının içerisinde bulunabileceği dört farklı durum incelenmiştir. Yatırımcı bu dört durumdan ancak birinde bulunabilir. Bu durumlar sırasıyla **A**, **B**, **C**, **D** harfleriyle sembolize edilmiştir.

A, **B**, **C**, **D** tanımları aşağıdaki gibidir:

A: Toplam mal varlığının içinde satış için teslim edilmiş hisse senedi,

B: Toplam mal varlığı içindeki hisse senedi,

C: Toplam mal varlığının paradaki kısmının hisse senedi alış emri ile ayrılmış kısmı,

D: Toplam mal varlığı içindeki para miktarı.

A, B, C, D harfleri ise sırasıyla, **A**, **B**, **C**, **D** durumlarının toplam mal varlığına olan oranını göstermektedir.

Bu dört durum arasındaki geçiş için, diferensiyel denklemler kullanılarak bir matematiksel modelleme yapılmıştır. Yapılan modelleme aşağıdaki gibidir:

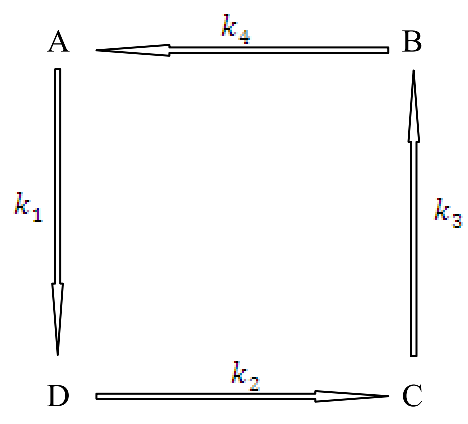
$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A \ + \ k_4 B, \tag{2.1}$$

$$\frac{dB}{dt} = -k_4 B + k_3 C \tag{2.2}$$

$$\frac{dC}{dt} = -k_3 C \ + \ k_2 D, \tag{2.3}$$

$$\frac{dD}{dt} = -k_2 D + \ k_1 A \tag{2.4}$$

Burada k_1, k_2, k_3, k_4 her birim durum arasındaki geçiş oranı fonksiyonlarıdır. Durumlar arasındaki geçiş Şekil 2.1' de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Yatırımcı konumları arasındaki geçiş durumu

Örnek olarak A' daki değişim incelenecek olursa, A, k_1 geçiş oranı fonksiyonu ile çarpıldığında D durumuna geçilir. Bu ise A durumunda bir azalışa sebep olur. Aynı şekilde B, k_4 ile çarpılırsa A durumuna geçilir ve bu durumda A da bir artış olur. Diğer durumlardaki değişimlerde benzer olarak açıklanabilir.

Bu çalışmada yatırımcının hisse senedi alıp satmasındaki motivasyonunu içeren bir fonksiyon tanımlanmıştır. Bu fonksiyon $\xi(t)$ olarak adlandırılmıştır.

$$\xi(t) = c_1 q_1 \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{-c_1(t-\tau)}\, d\tau \;+\; c_2 q_2 \int_{-\infty}^{t} \frac{P_a(\tau)-P(\tau)}{P_a(\tau)} e^{-c_2(t-\tau)}\, d\tau. \tag{2.5}$$

Burada q_1 ve q_2 terimleri sırasıyla duygusal bakış açısının ve mantıksal bakış açısının büyüklük katsayılarıdır. Bu eşitlik Bölüm 2‘ nin ilerleyen kısımlarında iki terimin toplamı olarak verilecektir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk integral ile geçmişten t anına kadar olan fiyat değişikliklerinin toplam etkisi tanımlanmıştır. $e^{-c_1(t-\tau)}$ fonksiyonunun değeri c_1 büyüdükçe azalmaktadır. c_1^{-1} ile hisse senedi fiyatındaki değişimin hafızada kalma süresi tanımlanmıştır. Örneğin piyasada iki gün önce olan fiyat değişikliği, yüz gün önce olan değişiklikten daha çok akılda kalır. c_1^{-1}, üstel fonksiyon ile kullanılarak hafızada kalma etkisinin fonksiyonu oluşturulmuştur. c_1 küçük değerler alırsa yani yakın geçmişteki değişikliklere bakılırsa, c_1^{-1} büyük değerler alır. c_1 küçülürse, $e^{-c_1(t-\tau)}$ büyük değerler alır. Böylece bağıl değişime olan etki büyür. Kısacası dünkü değişimin etkisi büyüktür. Geçmişe gidildikçe yani $t \to \infty$ durumunda etki çok azalır ve sıfıra gider. (2.5) denkleminde eşitliğin sağ tarafında bulunan ikinci integral ifadesi tanımlanırken de benzer bir düşünce kullanılmıştır. Fakat burada c_2^{-1}, bir hisse senedini almayı düşünülen zaman ile düşüncenin gerçekleştirildiği zaman arasındaki eylemsizlik demektir. Yine c_2^{-1} ve üstel fonksiyon kullanılarak, fiyatın gerçek değerindeki değişime olan etkisi tanımlanmıştır.

$$k_2 \coloneqq \alpha \; (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} tanh\xi(t) \,) \,, \tag{2.6}$$

$$k_4 \coloneqq \alpha \; (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} tanh\xi(t)) \,. \tag{2.7}$$

(2.6) ve (2.7) formülleri ile ifade edilen k_2 ve k_4 geçiş oranı fonksiyonları sırasıyla yatırımcının hisse senedi alma ve elindeki hisse senedini satma olasılıkları olduğundan dolayı bu olasılıkların toplamı 1'e eşittir. Ayrıca α ve β ise sabit katsayılardır. Bu varsayımlar altında k_2 ve k_4 geçiş oranı fonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\frac{k_2}{\alpha} + \frac{k_4}{\beta} = 1 \,. \tag{2.8}$$

Bu çalışmada Caginalp ve Ermentrout bağıl fiyat değişimi formülünü, alıcı ve satıcıları değişken olarak kabul eden bir fonksiyon olarak ifade etmişlerdir. Bu formül (2.9) ile verilmiştir:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \; f\left(\frac{C}{A}\right). \tag{2.9}$$

Yukarıdaki ifadede yer alan f fonksiyonu, $f(1) = 0$ koşulunu sağlayan artan bir fonksiyondur. Dikkat edilmelidir ki $f(1) = 0$ koşulunun sağlanması fiyattaki değişimin sıfır olması durumuna denktir. Bu ise arz ve talep durumlarının eşit olmasına işaret eder. Çünkü C durumu ve A durumu sırasıyla alış ve satış emirlerinin verilmesini temsil etmektedir bu ise talep ve arz fonksiyonlarının tanımlarıyla eşleşmektedir. Arz ve talep fonksiyonları bir piyasanın bel kemiği olarak nitelendirilebilirler. Çünkü piyasada bulunan alıcı ve satıcılar, alış satış işlemleri yaparak fiyatın belirlenmesini sağlarlar öyleyse buradan görülür ki fiyat arz ve talep fonksiyonlarının yansımalarını içerir.

Ayrıca çalışmada oluşturulan modelin basitleştirilmesi açısından (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) denklemleri, bir tek formüle indirgenmeye çalışılmıştır. Satış için hisse senedinin teslim edilmesi (**A** durumu) ve alış emrinin verilmesi (**C** durumu), durumlarının çok hızlı bir şekilde gerçekleştiği düşünülerek bu iki durum yok varsayılmıştır. Bu iki durumun yok sayılması, çalışmanın temel aldığı piyasaya uygunluk göstermiştir. Çünkü göz önüne aldıkları finansal piyasada alış ve satış emirleri çok hızlı gerçekleşmektedir. Bu indirgemeyi gerçekleştirmek için Caginalp ve Ermentrout tarafından aşağıdaki varsayımlar kullanılmıştır:

$$k_1 = \frac{\tilde{k}_1}{\varepsilon}, \qquad k_3 = \frac{\tilde{k}_3}{\varepsilon}. \tag{2.10}$$

(2.10) denklemlerinde $0 < \varepsilon \ll 1$ iken $\tilde{k}_1$ ve $\tilde{k}_3$ birinci dereceden hata terimleridir. Bu eşitliklerde $\varepsilon \to 0$ olarak alındığında , $A \to 0$ ve $C \to 0$ durumları dolayısıyla da $k_1A \to k_4B$ ve $k_3C \to k_2D$ durumları gerçekleşmiştir. Bu varsayımlar altında aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir:

$$\frac{dD}{dt} = k_4B - k_2D = -\frac{dB}{dt}. \tag{2.11}$$

(2.11) denkleminde $D = 1 - B$ ifadesi yerine yazılarak denklem aşağıdaki hale dönüşmüştür:

$$\frac{dB}{dt} = k_2(1 - B) - k_4 B \,. \tag{2.12}$$

Ayrıca (2.9) denkleminde $\frac{C}{A}$ ifadesinin aşağıdaki (2.13) formülüyle verilen yeni hali yerine yazılarak (2.14) denklemi elde edilmiştir:

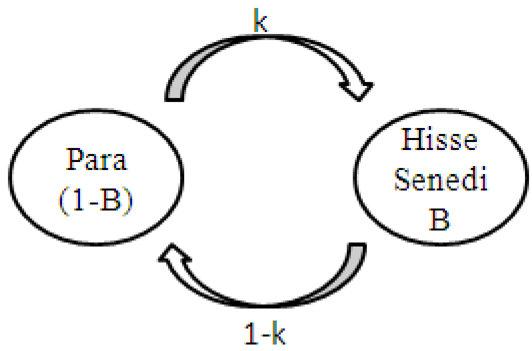
$$\frac{C}{A} = \frac{k_2 \tilde{k}_1}{k_4 \tilde{k}_3} \frac{1-B}{B} \,. \tag{2.13}$$

Bütün bu geçiş işlemlerinden sonra fiyattaki bağıl değişimi gösteren formül aşağıdaki halini almıştır:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = f\left(\frac{k_2 \tilde{k}_1}{k_4 \tilde{k}_3} \frac{1-B}{B}\right) . \tag{2.14}$$

(2.5), (2.6), (2.12) ve (2.14) formüllerinden oluşan sistem “Numerical Studies of Differential Equations Related to Theoretical Financial Markets” adlı çalışmada nümerik olarak çalışılmıştır [24]. Bu çalışmada [21] (“A Kinetic Thermodynamic Approach to the Psychology of Fluctuations in Financial Markets”) çalışmasında oluşturulan modelin piyasalardaki bakış açılarına göre nasıl bir davranış sergilediği incelenmiştir. Duygusal bakış açısı ve mantıksal bakış açısıyla ilgili parametreler değiştirilerek, etkin piyasanın cevap veremediği durumlara cevap verilmeye çalışılmıştır. Temel olarak $P_a(t)$’ nin üç durumu incelenmiştir. Bunlar $P_a(t)$’ nin sabit olduğu, sabitken ani bir değer düşüklüğü sonrasında yeniden sabitlendiği ve piyasa fiyatının çok üzerinde olduğu durumlardır. $P_a(t)$’ nin durumlarına göre bazı gözlemler yapılmıştır. Bunlardan ilki, c_1’ in ve q_1’ in küçük olduğu yani duygusal bakış açısının etkin olmadığı, bir başka deyişle ana değere verilen önemin büyük olduğu durumda fiyat grafiğinde fazla dalgalanma olmayacağıdır. İkincisi ana değere verilen önem küçükken yani mantıksal bakış açısının etkin olmadığı durumda dalgalanmalar çoktur. Sonuç olarak fiyat grafiği üzerindeki dalgalanmaları trend bazlı yatırımcı motivasyonunun artırdığı, ana değer bazlı yatırımcı motivasyonunun ise azalttığı gözlemlenmiştir.

Bu alandaki çalışmalardan bir diğeri de G. Caginalp ve D. Balenovich tarafından yapılan ve 1999 yılında yayınlanan ”Asset Flow and Momentum: deterministic and stochastic equations” adlı çalışmadır [22]. Bu çalışmada hisse senedi fiyatı tahmini yapabilmek için oluşturulan bir diferensiyel denklem sistemi vardır. Bu sistem daha öncede sözü geçtiği gibi birinci mertebeden bir diferansiyel denklem sistemidir ve sistem dışarıya kapalıdır. Sistem bazı varsayımlar altında oluşturulmuştur. Öncelikle sisteme dışarıdan ek yoktur. Bu modeli oluşturmak için arz, talep, geçiş oranı fonksiyonları tanımlanmıştır:



Şekil 2.2. Hisse Senedi ve Nakit Para Arasındaki Geçiş Durumu

Talep, D, bir birim paranın k oranında bir birim hisse senedine dönüşmesi, benzer şekilde arz, S, bir birim hisse senedinin $(1-k)$ oranında bir birim paraya dönüşmesi olarak tanımlanmıştır. Gerçekten mikroekonomide talep ve arz tanımları şöyledir; talep, diğer değişkenler sabit varsayılarak belirli bir zaman diliminde piyasada tüketicilerin farklı fiyat düzeylerinde satın almaya hazır oldukları mal ve hizmet miktarıdır. Ekonomideki tanım matematiğe uyarlanacak olursa alınan mal hisse senedi olduğuna göre, burada yatırımcı parasını hisse senedine dönüştürecektir. Bu geçiş oranı fonksiyonu önceki çalışmalarda olduğu gibi $k(t)$ olarak tanımlanmıştır. Öyleyse yatırımın parada olan kısmı $k(t)$ ile çarpılırsa, paranın hisse senedine dönüşme fonksiyonu talep olarak göz önüne alınabilir. Arz ise benzer şekilde diğer değişkenler sabit olmak üzere, belirli bir zaman diliminde piyasada üreticilerin değişik fiyat düzeylerinde satmaya hazır oldukları mal ve hizmet miktarını ifade eder. Bu modelde $(1-k(t))$ fonksiyonu hisse senedinin paraya dönüşme olasılığı olduğuna göre bu fonksiyon yatırımın hisse senedinde olan kısmıyla çarpılarak arz fonksiyonunun matematiksel ifadesi elde edilebilir. Bu tanımlar kullanılarak talep ve arz fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$D \coloneqq k(1-B), \qquad S \coloneqq (1-k)B, \qquad \frac{D}{S} = \frac{k}{1-k}\frac{1-B}{B}. \tag{2.15}$$

Geçiş oranı olarak alınan $k(t)$, hisse senedinin gerçek değerine önem verenler ve trende önem verenlerin motivasyon fonksiyonlarının ağırlıklı toplamıdır ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

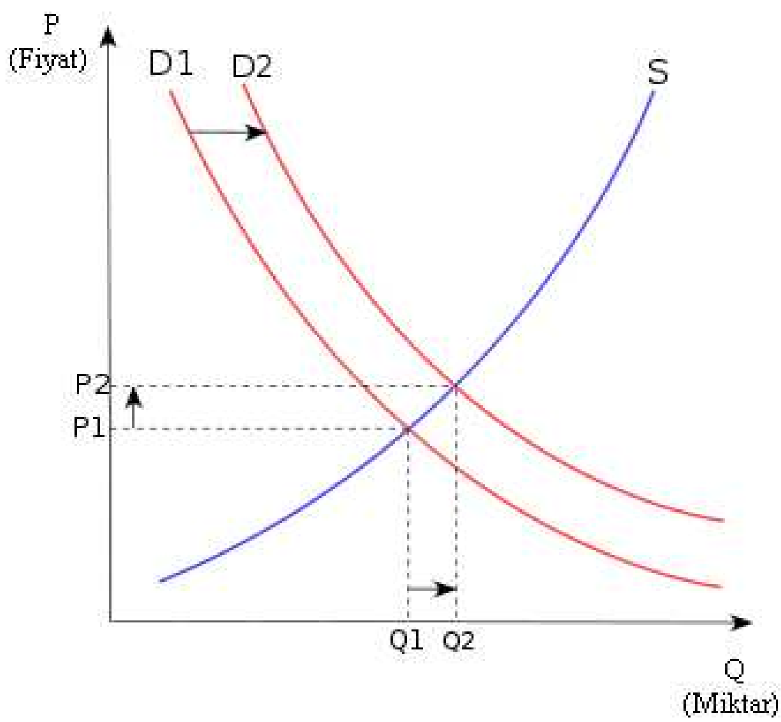
$$k(t) \coloneqq \frac{1}{2}(1+\xi), \qquad \xi(t) \coloneqq \xi_1(t) + \xi_2(t),$$

$$\xi_1(t) = \frac{q_1\tau_0}{P}\frac{dP}{dt}, \qquad \xi_2(t) = q_2\left(1 - \frac{P(t)}{P_a(t)}\right). \tag{2.16}$$

Fiyattaki bağıl değişim ise aşırı talep formülünün bir lineer fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Belirli bir piyasada belirli bir fiyat düzeyinde tüketicilerin almaya hazır oldukları mal miktarının, üreticilerin o fiyattan satmaya hazır oldukları miktardan fazla olması sonucu ortaya talep fazlası çıkar. Buna aşırı talep denir ve fiyattaki bağıl değişimin aşırı talep fonksiyonuna göre verilen formülü aşağıdaki gibidir:

$$\tau_0 \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1. \tag{2.17}$$

Aşırı talep fonksiyonunun grafiği incelenirse (2.17) ile verilen fiyat değişiminin matematiksel formülünün piyasadaki durumla uyumlu olduğu görülecektir. Bu grafik Şekil 2.1 ile verilmiştir ve aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3. Aşırı talep durumunun grafiği

Şekil 2.1 ile verilen grafikte P fiyatı, Q ise miktarı temsil etmektedir. Eğrilerde ise D talebi, S ise arzı göstermektedir. Talebin arza göre değişimini gösteren bu grafiğe göre talep eğrisi sağa kaymış yani talep yükselmiştir. Bunun sonucunda fiyat $P1$' den $P2$'ye çıkmış yani talebin artmasına paralel olarak artmıştır. İşte bu grafik aşırı talep fonksiyonunun geometrik yorumunu vermektedir.

Aşırı talep fonksiyonu kullanılarak elde edilen fiyatın bağıl değişim formülüne (2.17) dönülecek olursa burada τ_0 zamanı skale eden parametredir. Ayrıca toplam hisse senedi değerinin toplam mal varlığına oranı B, toplam paranın toplam mal varlığına oranı ise $1-B$ olarak tanımlanmıştır. Bu tanımlar matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$B = \frac{NP}{NP+M}, \tag{2.18}$$

$$1 - B = \frac{M}{NP+M}. \tag{2.19}$$

(2.18)-(2.19) denklemleri düzenlenerek aşağıdaki denklem bulunmuştur:

$$\frac{B}{1-B} = \frac{N}{M}P = \frac{P}{L}\ . \tag{2.20}$$

(2.20) formülünden B çekilip, ifadenin zaman göre türevi alınırsa,

$$\frac{dB}{dt} = B(1-B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.17) denkleminde $\frac{D}{S}$ yerine yazılırsa,

$$\frac{\tau_0}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{k}{(1-k)}\frac{L}{P} \quad -1\,. \tag{2.22}$$

İfadesi elde edilir. Bu denklemde $\frac{k}{(1-k)}$ ifadesi yerine yazılarak elde edilen denklemin yeni ifadesi şöyledir:

$$\frac{\tau_0}{P}\frac{dP}{dt} = \left[1+2\frac{q_1\tau_0}{P}\frac{dP}{dt}+2q_2\left(1-\frac{P(t)}{P_a(t)}\right)\right]\frac{L}{P} -1. \tag{2.23}$$

L ile sözü edilen kavram likiditedir. Likiditenin ekonomideki tanımı, herhangi bir ekonomik varlığın, istenildiği zamanda herhangi bir zarara uğramadan paraya çevrilebilme derecesidir. Bu çalışmada, $L = \frac{M}{N}$ olarak tanımlanmış olup, birimi M fonksiyonunun birimi ile aynıdır.

(2.23) denklemi $\frac{P}{L}$' nin bağımlı değişken ve t' nin bağımsız değişken olduğu denklem haline getirilirse aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tau_0\left(1-Q_1\frac{L}{P}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{L}\right) + \left(1+Q_2\frac{L}{P_a}\right)\frac{P}{L} = 1+Q_2. \tag{2.24}$$

Yukarıdaki denklemde $Q_1 \coloneqq 2q_1$ ve $Q_2 \coloneqq 2q_2$ olarak alınmıştır. Aşağıdaki

$$\boldsymbol{P} := \frac{P}{L}, \qquad \boldsymbol{P_a} := \frac{P_a}{L}, \quad \tau := \frac{t}{\tau_0} \tag{2.25}$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa, (2.24) denklemi

$$\left(1 - \frac{Q_1}{\boldsymbol{P}}\right)\frac{\boldsymbol{dP}}{d\tau} + \left(1 + \frac{Q_2}{\boldsymbol{P_a}}\right)\boldsymbol{P} = 1 + Q_2 \tag{2.26}$$

olarak yazılır.

Bir hisse senedinin fiyatı denge noktasına ulaştığı zaman, hisse senedinin fiyatının zamana göre türevi sıfıra eşit olur. Çünkü türev genel anlamıyla değişim demektir ve artık fiyatta herhangi bir değişiklik olmayacaktır. Bundan dolayı (2.26) denkleminde eşitliğin sol tarafındaki ilk terim sıfıra eşit olur. Denklemin Q_2' ye bölünmesiyle de aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left(\frac{1}{Q_2} + \frac{1}{P_a}\right)\boldsymbol{P_{eq}} = 1 + \frac{1}{Q_2}. \tag{2.27}$$

Bu denklemde Q_2'nin farklı durumlarına göre fiyatın nasıl değiştiği incelenmiştir. Yatırımcıların büyük bir kısmı, hisse senedinin piyasa fiyatının, hisse senedinin gerçek değerinden ne kadar uzak olduğunu ya da gerçek değerine ne kadar yakın olduğunu göz önüne alarak hareket ediyorsa başka bir deyişle hisse senedinin gerçek değerine önem veriyorsa yani Q_2 çok büyükse $\frac{1}{Q_2}$ ifadesi ihmal edilebilir. Bu durumda (2.27) eşitliğinin sağ ve sol kısmındaki $\frac{1}{Q_2}$ ifadeleri sıfıra gider. Bu da çok miktarda yatırımcının ana değere önem verdiği durumlarda fiyatın denge noktasının $\boldsymbol{P}_a$'ya gittiğini gösterir. Tam tersi durumda yani Q_2 çok küçükse $\frac{1}{Q_2}$ ifadesi çok büyük olur. Bu durumda ise,

$$\left(\frac{1}{Q_2}.P_{eq}\right) \sim \frac{1}{Q_2}. \tag{2.28}$$

elde edilir. Bu ise $\boldsymbol{P}_{eq}\sim 1$ olması demektir. Yani Q_2'nin çok küçük olduğu durumda $\frac{P}{L} \sim 1$ sağlanır. Bu ise fiyatın gerçek değerine verilen önemin çok küçük olmasının fiyatın likidite değerine yaklaşmasıyla sonuçlanır. (2.27) denkleminden Q_2 çözülürse,

$$Q_2 = \frac{1-\frac{Peq}{L}}{\frac{Peq}{Pa}-1} \tag{2.29}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikten Q_2' nin, denge fiyatının nasıl olacağı konusunda etkili olan bir faktör olduğu sonucu çıkarılmıştır. Q_2' nin büyüklüğünün değişmesiyle fiyat da P_a ve L fiyatları arasında salınım göstermektedir. Q_2 büyüdükçe denge noktası P_a' ya , Q_2 küçüldükçe denge noktası L' ye asimptotik olarak yaklaşır. Denge fiyatı Q_1' den bağımsızdır.

Bu çalışmanın şimdiye kadar anlatılan bölümünde göz önüne alınan sistem kapalıdır. Ayrıca yatırımcıların değişimlere hemen tepki verdikleri kabul edilmiştir. Aynı zamanda kapalı sistemin korunmadığı yani dışarıdan etkilere karşı açık olduğu ve içeriden dışarıya da geçiş olduğu durum çalışmanın bir diğer bölümünde incelenmiştir.

Sistem kapalı olduğunda sabit kabul edilen para miktarı ve hisse senedi sayısı artık zamana bağlı değişen fonksiyonlar olarak tanımlanmıştır. Hisse senedi sayısı $N(t)$ ve para miktarı $M(t)$ olmak üzere sistem kapalıyken sabit olan likidite fonksiyonu da değişken bir fonksiyon haline gelmiştir ve likidite fonksiyonun yeni hali aşağıdaki gibidir:

$$L(t) = \frac{M(t)}{N(t)}. \tag{2.30}$$

Bu durumda (2.26) denklemi aşağıdaki denkleme dönüşmüştür:

$$\tau_0 \left(1 - Q_1 \frac{L(t)}{P}\right) \frac{dP}{dt} + \left(1 + Q_2 \frac{L}{P_a}\right) P = (1 + Q_2) L(t). \tag{2.31}$$

Ayrıca bu çalışmada, Caginalp ve Balenovich kapalı olmayan bir sistemi göz önüne alarak bazı nümerik çalışmalar yapmıştır. Sisteme nakit para eklenmesinin fiyatlar üzerinde nasıl bir etkisi olduğunu gözlemlemişlerdir. Nakit para miktarını gösteren fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:

$$M(t) = M_0 + 0.24(t - 1)N. \tag{2.32}$$

Bu denklemde M_0 ile başlangıçtaki para miktarı gösterilmektedir ve her bir t anında sisteme hisse senedi başına 0.24 oranında temettü kadar para eklenmektedir. Böylece sistemde bulunan para miktarı artmış, yani sistemdeki likidite değeri artmıştır. Yapılan bu çalışmada piyasadaki nakit fazlalığının fiyatlar üzerinde büyük miktarlarda yükselmelere sebep olduğu gözlenmiştir. Likiditenin fiyatlar üzerinde etkin bir rol oynadığı kabul edilmiştir. Ancak hisse senedi fiyat tahmini yapmak için oluşturulan sisteme likidite katılmamıştır. Adı geçen bu sistemde yatırımcı motivasyonu fonksiyonları $\xi_1(t)$ ve $\xi_2(t)$ olarak alınmıştır ve aşağıdaki tanımları kullanılmıştır:

$$\xi_1(t) = c_1 q_1 \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{-c_1(t-\tau)} d\tau \tag{2.33}$$

$$\xi_2(\mathrm{t}) = c_2 q_2 \int_{-\infty}^{t} \frac{P_a(\tau)-P(\tau)}{P_a(\tau)} e^{-c_2(t-\tau)} d\tau \,. \tag{2.34}$$

Yani yatırımcılar artık olası değişimlere hemen tepki vermemektedirler. Bu fonksiyonların Leibnitz kuralına göre türevleri alınarak aşağıdaki diferensiyel denklemler elde edilmiştir:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = c_1 \left(q_1 \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1 \right), \tag{2.35}$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = c_2 \left(q_2 \frac{P_a-P}{P_a} - \xi_2 \right). \tag{2.36}$$

Bu çalışmada daha önce (2.16) denkleminde verilen geçiş oranı fonksiyonu $k(t)$, yeniden tanımlanmıştır ve tanımı aşağıdaki gibidir:

$$k(t) \coloneqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\xi_1(t) + \xi_2(t)\right). \tag{2.37}$$

Yukarıda verilen tanımda $tanh$ fonksiyonunun birinci dereceden Taylor seri açılımı yapılırsa elde edilen geçiş oranı fonksiyonunun formülü (2.16) denklemindeki haline dönüşür.

Ayrıca hisse senedinin toplam mal varlığına oranı olarak tanımlanmış olan $B(t)$ fonksiyonunun zamana göre değişimi de aşağıdaki gibi ifade edilmiştir. Çünkü hisse senedinin sayısındaki değişim alınan ve satılan hisse senedi miktarına ve dolaylı olarak da hisse senedi fiyatındaki değişime bağlıdır.

Bu formülün nasıl elde edildiği Caginalp ve Balenovich'in 1994 yılında yayınlanan "Market Oscillations Induced by Competition Between Investment Strategies " adlı çalışmalarında açıklanmıştır [25]. Hisse senedinin toplam mal varlığına oranının zamana bağlı değişimi, yatırımcının hisse senedi alması yani elinde bulunan parayı bir birim hisse senedi alma olasılıyla çarpmasıyla artar, elindeki hisse senedini satması durumunda ise azalır. Dolayısıyla hisse senedinin toplam mal varlığına oranının zamana bağlı değişimi, hisse senedinin alınıp satılmasındaki en önemli etken olan hisse senedi fiyatındaki değişikliğe bağlıdır. Böylece hisse senedinin toplam mal varlığı içindeki oranının zamana bağlı değişiminin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\frac{dB}{dt} = k(1 - B) + (k - 1)B + hisse\ senedinin\ fiyatındaki\ değişiklik.$$

Yukarıdaki ifadede eşitliğin sağ tarafında bulunan son terim, fiyattaki bir ΔP değişiminin toplam mal varlığındaki hisse senedi oranını nasıl değiştirdiği incelenerek bulunmuştur. Aşağıda fiyattaki bir ΔP değişiminden sonra toplam mal varlığında bulunan hisse senedi sayısının oranının nasıl değiştiği formüle edilmiştir:

$$\Delta B = (yeni\ oran) - B = \frac{B\left(1+\frac{\Delta P}{P}\right)}{B\left(1+\frac{\Delta P}{P}\right)+(1-B)} - B = B(1-B)\,\frac{1}{\frac{P}{\Delta P}+B}$$

Yukarıdaki denklemde $\Delta t \to 0$ iken limit alınması durumunda ise,

$$\frac{dB}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} B(1-B)\,\frac{1}{P\frac{\Delta t}{\Delta P}+\Delta t.B} = B(1-B)\,\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

ifadesi elde edilir. Böylece aşağıdaki denklem elde edilmiştir:

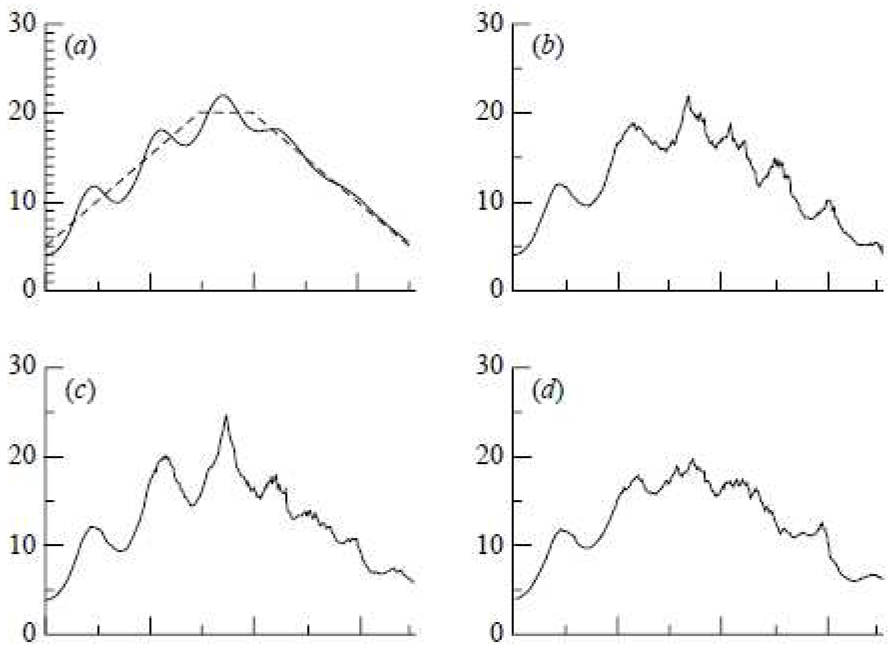
$$\frac{dB}{dt} = k(1-B) + (k-1)B + B(1-B)\,\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}. \tag{2.38}$$

(2.17), (2.35), (2.36), (2.37) ve (2.38) denklemlerinin kullanılmasıyla bir denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemi tamdır ve nümerik olarak çalışılabilir.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\xi_1}{dt} = c_1\left(q_1\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} - \xi_1\right),\\
&\frac{d\xi_2}{dt} = c_2\left(q_2\frac{P_a-P}{P_a} - \xi_2\right),\\
&\frac{dB}{dt} = k(1-B) + (k-1)B + B(1-B)\,\frac{1}{P}\frac{dP}{dt},\\
&\tau_0\,\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1.
\end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Caginalp ve Balenovich bu denklem sistemini oluşturduktan sonra sistem üzerinde bazı nümerik çalışmalar yapmışlardır. Öncelikle bu sistemi Matlab programı aracılığıyla nümerik olarak çözmüşlerdir. Daha sonra B fonksiyonuna stokastik terimler ekleyerek (2.39) sistemini tekrar nümerik olarak incelemişlerdir.

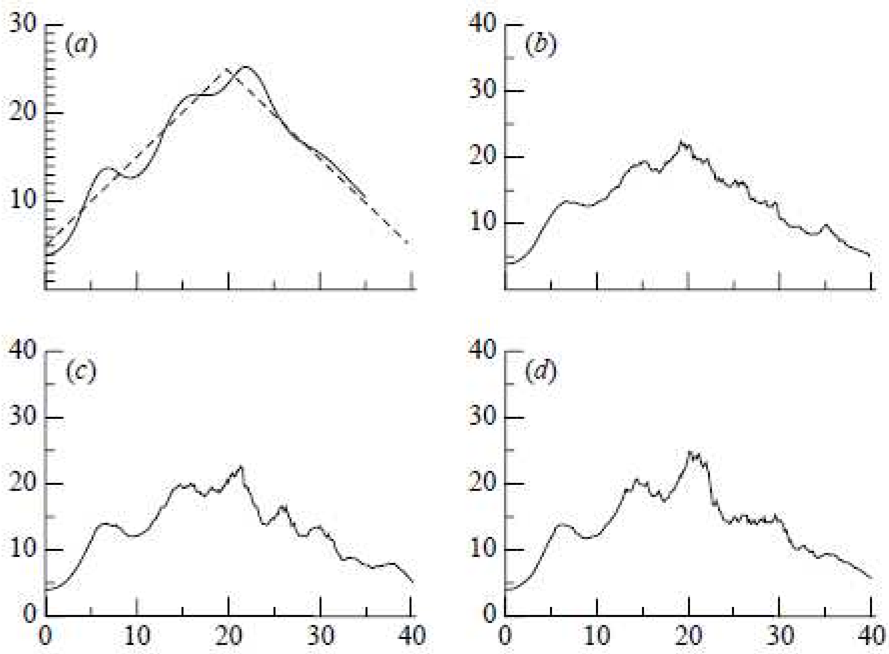
Her bir nümerik çalışmada (2.39) diferensiyel denklem sisteminin denklemleri kullanılmıştır. Aşağıda Şekil 2.4' te bulunan ilk grafikte parametreler $c_1 = 0.001$, $c_2 = 0.01$, $q_1 = 900$, $q_2 = 45$, başlangıç koşulları ise $B = 0.5$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$ olarak seçilmiştir. Ayrıca grafik $P_a(t)$ grafiği ile üst üste çizilmiştir. $P_a(t)$ grafiği ise birinci bölümde anlatılan teknik analizdeki kafa ve omuzlar fiyat modeline göre çizilmiştir. Şekil 2.4' teki diğer grafikler ise (2.17), (2.35), (2.36), (2.38) sistemine stokastik katsayılar eklenerek elde edilmiştir.



Şekil 2.4. [CB] Modeli Omuz-baş-omuz modeli temel alınarak elde edilen, fiyatın zamana bağlı değişim grafiği.

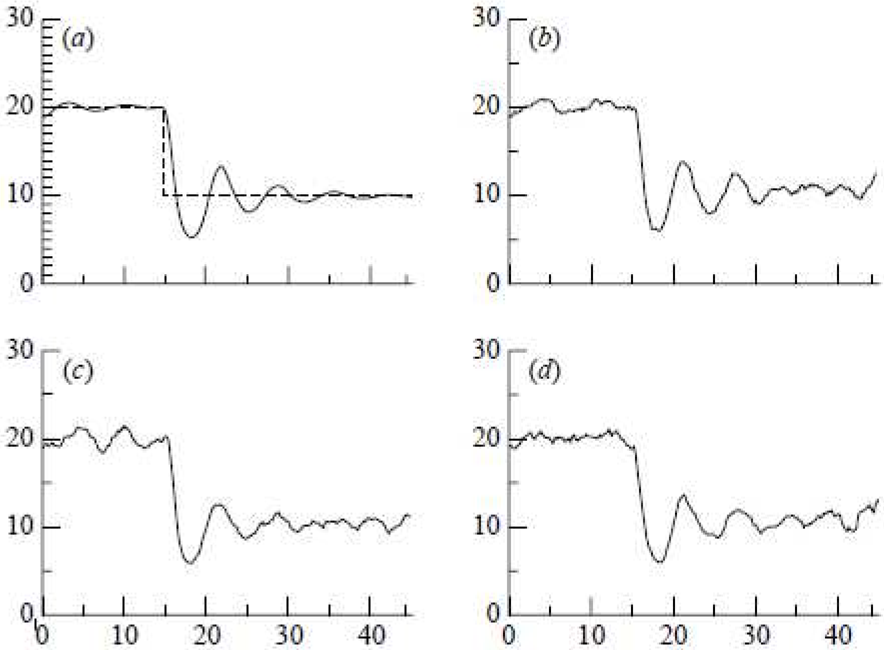
Bu grafiklerde gözlemlenen fiyat formasyonu omuz-baş-omuz formasyonudur. Bu formasyonda $P_a(t)$, "V" formasyonlarındaki gibi önce artıp sonra azalacaktır. Piyasalarda, omuz-baş-omuz formasyonunun yükselen trendin sonunda ortaya çıkabileceği gibi, alçalan trendin sonunda da görülebildiği fikri vardır.

Bu çalışmada incelenen bir başka teknik analiz fiyat modeli ise ters "V" modelidir.



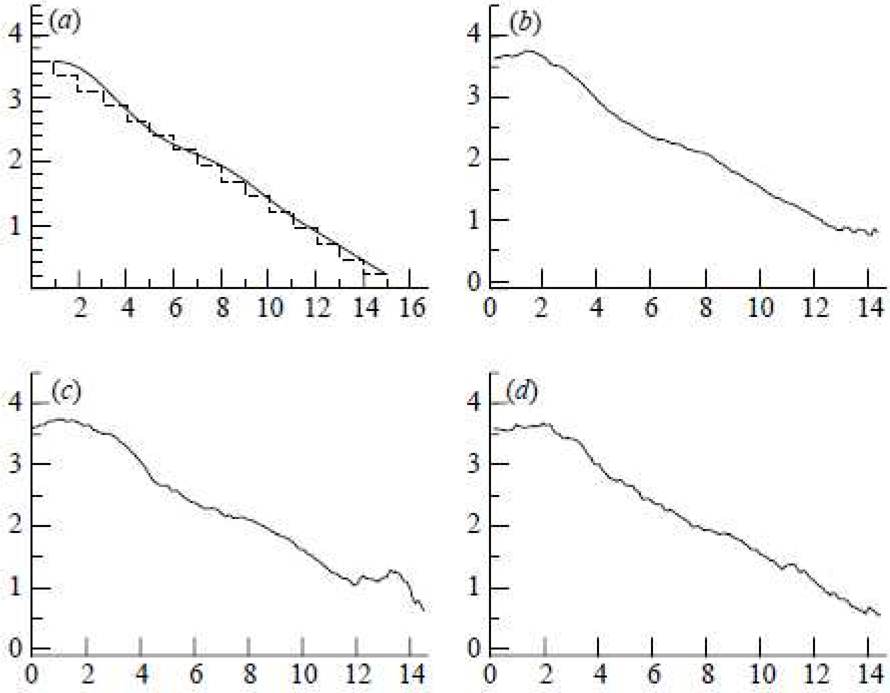
Şekil 2.5. Ters "V" modeli temel alınarak elde edilen fiyatın zamana bağlı değişim grafiği

Bu simülasyonlarda ise parametreler $c_1 = 0.001$, $c_2 = 0.001$, $q_1 = 875$, $q_2 = 250$ olarak, başlangıç koşulları ise Şekil 2.4' te kullanılan başlangıç koşulları esas alınarak kullanılmıştır. Ters "V" modelinde $P_a(t)$ bir $t = t_0$ anına kadar lineer olarak artmaktadır ve daha sonra da lineer olarak azalmaktadır. Bu ters "V" modelinde yuvarlak tepe oluşmuştur. Bu Caginalp ve Balenovich'in "Theoretical Foundation for Technical Analysis" adlı çalışmalarında belirttikleri gibi beklenebilir bir durumdur [17]. Çünkü yuvarlak tepeler q_2'nin q_1'e göre daha küçük olduğu yani değer bazlı yatırımcı stratejisinin baskın olmadığı durumlarda görülür.



Şekil 2.6. [CB] Modeli Fiyat-Zaman Grafiği

Şekil 2.6.'da verilen ilg grafikte başlangıç koşulları $P_a(0) = 19$, $B = 0{,}5$, $\xi_1 = \xi_2$=0 olarak alınmıştır. Parametreler $c_1 = 0.001$, $c_2 = 0.001$, $q_1 = 850$, $q_2 = 450$ dir. Şekil 2.6' daki diğer grafiklerde ise yine stokastik katsayılar kullanılmıştır. Buradaki fiyat grafiğinde $t = 15$ iken ani bir düşüş gözlemlenmektedir. Böyle ani düşüler piyasadaki hisse senedi bolluğundan, para azlığından kaynaklanabilir.



Şekil 2.7. [CB] Modeli Basamak Formu Temel Alınarak Elde edilen Fiyat-Zaman Grafiği

Bu örnekte ise $P_a(t) = 3.84 - 0.24t$ olarak alınmıştır. Parametreler $c_1 = 0.052$, $c_2 = 1$, $q_1 = 23.45$, $q_2 = 0.06$ olarak kullanılmıştır. $P(0) = 3.6$, $B = 0.5$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$ başlangıç koşullarıdır. Bu fiyat formasyonunda fiyatlar iki paralel çizginin arasında hareket ediyor gibidir. Şekil 2.7' de aşağı-trend çizgisi vardır. Yani $P_a(t)$ gerçek değerinin azalan bir grafik gösterdiği kabul edilir. Gerçekten $P_a(t) = 3.84 - 0.24t$ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. $P(t)$ ise kanal olarak ifade edilen iki çizginin arasında salınım gösterir. Bu kanalın genişliği sistemdeki parametrelerin büyüklüklerine göre değişir.

Bu alanda yapılan çalışmalardan birisi de "Asset Price Dynamics with Heterogeneous Groups" adlı makaledir [22]. Bu makale 2007 yılında Caginalp ve Merdan tarafından yayınlanmıştır. Bu çalışmada yine klasik ekonominin prensiplerinden biri olan bir hisse senedinin fiyatı, ona olan arz ve talep eşit iken dengeye oturur ifadesi temel alınmıştır. Klasik ekonomide kabul gören bazı teorilerin uygulama da yatırımcılar tarafından çok fazla dikkate alınmadığı belirtilmiştir. Bu kabuller aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

1) Finans piyasalarında para miktarı sınırsızdır.
2) Markette, tüm bilgilerin açık olduğu ve herkes tarafından bilindiği kabul edilir. Dolayısıyla fiyat tek türlü belirlenir.
3) Hisse senedi alışı ya da satışı sadece fiyata bağlıdır.

Yukarıdaki kabullerin aksine piyasadaki para ve hisse senedi miktarı sınırlıdır. Ayrıca hisse senedi fiyatı belirlenmesinde farklı görüşteki yatırımcıların etkisi mevcuttur ve hisse senedi alış ve satışında fiyatın yanında fiyatın yönünün de etkisi vardır. Caginalp ve Merdan çalışmalarında klasik ekonominin prensipleri yerine bu varsayımları temel almışlardır.

Bu çalışmada da öncelikle kapalı bir sistem incelenmiştir. Ancak Caginalp ve Balenovich'in çalışmalarından farklı olarak sistemde farklı motivasyonlara sahip iki yatırımcı grubu vardır. Bu yatırımcı grupları tek türlü hisse senedi alıp satmaktadırlar. Sistem korunumlu olduğu için hisse senedi sayısı ve para miktarı değişmemektedir.

$$M_1(t) + M_2(t) = M_0, \tag{2.40}$$

$$N_1(t) + N_2(t) = N_0. \tag{2.41}$$

Burada M_0 ve N_0 sırasıyla sistemdeki para miktarı ile hisse senedi sayısıdır ve değerleri sabittir. $M_1(t)$ birinci grubun elindeki para miktarını, $M_2(t)$ ise ikinci grubun elindeki para miktarını göstermektedir. Benzer şekilde $N_1(t)$ ve $N_2(t)$ birinci ve ikinci grubun elindeki hisse senedi miktarlarını gösterir. Çalışmada iki farklı yatırımcı grubu olduğu için talep ve arz tanımları aşağıdaki gibi değiştirilmiştir:

$$D = k_1 M_1 + k_2 M_2, \tag{2.42}$$

$$S = (1 - k_1) N_1 P + \ (1 - k_2) N_2 P. \tag{2.43}$$

Bu tanımlar kullanılarak elde edilen bağıl fiyat değişimi denklemi şöyledir:

$$\frac{\tau_0}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{k_1 M_1 + k_2\,(M_0 - M_1)}{(1-k_1)N_1 P + (1-k_2)(N_0 - N_1)P} - 1. \tag{2.44}$$

Her bir grubun elindeki hisse senedi ve para miktarı değişimlerini gösteren denklemler ise aşağıdaki gibidir ($i = 1{,}2$) :

$$P\frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1 - k_i) N_i\ , \tag{2.45}$$

$$\frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P. \tag{2.46}$$

Caginalp ve Balenovich' in, çalışmalarında kullandıkları yatırımcı motivasyonu fonksiyonları aynı kalmıştır. Fakat her grup için yatırımcı fonksiyonları $i = 1{,}2$ indisiyle ayırtedilmiştir. Elde edilen denklemler şöyledir:

$$\frac{d\xi_1^{(i)}}{dt} = c_1^{(i)}\ \left(q_1^{(i)}\ \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} - \xi_1^{(i)} \right) \tag{2.47}$$

$$\frac{d\xi_2^{(i)}}{dt} = c_2 \left(q_2^{(i)} \frac{P_a^{(i)}(t) - P(t)}{P_a^{(i)}(t)} - \xi_2^{(i)} \right). \tag{2.48}$$

Geçiş oranı fonksiyonu olan k_i bir olasılık fonksiyonu olduğu için tanımında, $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ve bu aralıkta $(-1,1)$ arasında değerler alan $tanh$ fonksiyonu kullanılmıştır. Çünkü $tanh$ fonksiyonu $(-1,1)$ arasında değerler alır ve aşağıdaki tanımla birlikte k_i fonksiyonunun değer aralığı, olasılık fonksiyonlarının değer aralığıyla uyumludur. İşte bu nedenle k_i aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$k_i \coloneqq \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh\left(\xi_1^{(i)} + \xi_2^{(i)}\right) \right\}. \tag{2.49}$$

Ayrıca bu makalede fiyatın yönüne ve gerçek değerine göre yatırımcı motivasyonları fonksiyonlarını gösteren ξ_i fonksiyonlarının sayısını çoğaltmanın daha kapsamlı bir yaklaşım olacağı ifade edilmiştir. Çünkü gerçek hayatta da yatırımcı psikolojisi çok fazla değişkenden etkilenmektedir.

Bütün bu varsayımlar ışığında yine bir diferensiyel denklem sistemi elde edilmiştir ve bu sistem 9 tane lineer olmayan diferensiyel denklemden oluşmaktadır. (2.49) ile birlikte aşağıdaki denklem sistemi tam bir sistem oluşturur.

$$
\left.
\begin{aligned}
&P\,\frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1-k_i)N_i\,, \\
&\frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1-k_i)N_i P\,, \\
&\frac{d\xi_1^{(i)}}{dt} = c_1^{(i)}\left(q_1^{(i)}\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} - \xi_1^{(i)}\right), \\
&\frac{d\xi_2^{(i)}}{dt} = c_2\left(q_2^{(i)}\frac{P_a^i(t)-P(t)}{P_a^i(t)} - \xi_2^{(i)}\right), \\
&\frac{\tau_0}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{k_1M_1 + k_2\,(M_0-M_1)}{(1-k_1)N_1P + (1-k_2)(N_0-N_1)P} - 1\,.
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.50}
$$

Yine aynı çalışmada bu kapalı diferensiyel denklem sistemi dışarıdan ek olarak para ve hisse senedi alan veya dışarıya para veya hisse senedi çıkaran bir sisteme genişletilmiştir. Yeni sistemdeki zamana bağlı olarak değişen para miktarı ile hisse senedi sayısı formülleri şöyledir:

$$M_0(t) = M_0^{başl} + M_1^{ek}(t) + M_2^{ek}(t)\,, \tag{2.51}$$

$$N_0(t) = N_0^{başl} + N_1^{ek}(t) + N_2^{ek}(t)\,. \tag{2.52}$$

Burada $M_0^{başl}$ ve $N_0^{başl}$ ile gösterilen sistemde başlangıçta bulunan para ve hisse senedi miktarlarıdır. $M_i^{ek}(t)$ ve $N_i^{ek}(t)$ ile ifade edilmek istenen ise sistemdeki iki grup yatırımcının varlıklarına eklenen veya ellerinden dışarıya çıkan para ve hisse senedi miktarlarıdır. Örneğin ek para miktarının fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

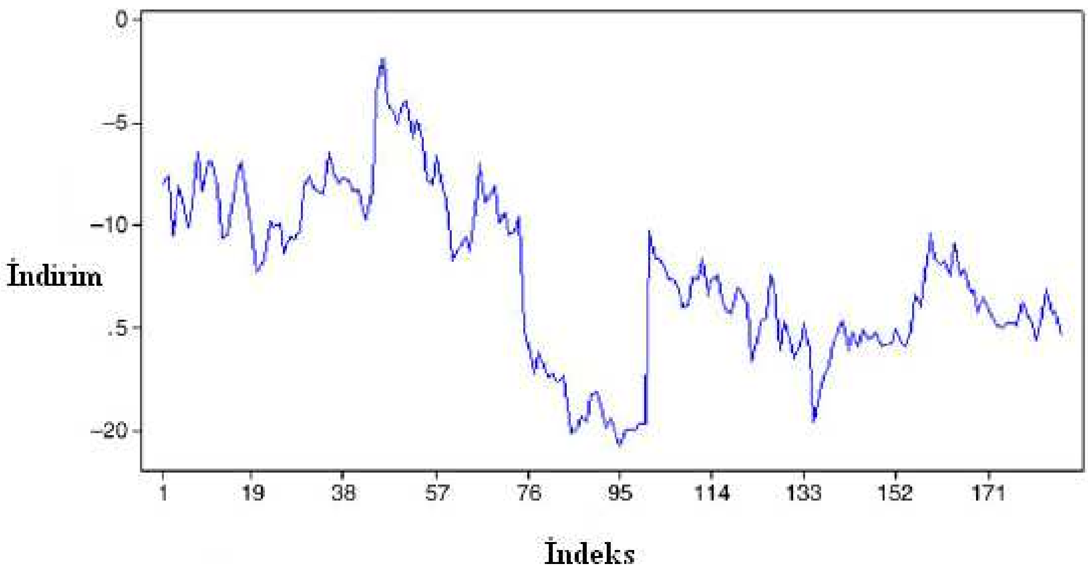
$$M_i^{ek}(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < t_1 \\ M_i^{ek}(t), & t \geq t_1 \end{cases} . \tag{2.53}$$

Buna göre (2.39) ve (2.40) ile ifade edilen para miktarı ve hisse senedi sayısındaki değişikliği gösteren denklemler aşağıdaki gibi değişmiştir:

$$P \frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1 - k_i) N_i P + P \frac{dN_i^{ek}}{dt} , \tag{2.54}$$

$$\frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P + \frac{dM_i^{ek}}{dt} . \tag{2.55}$$

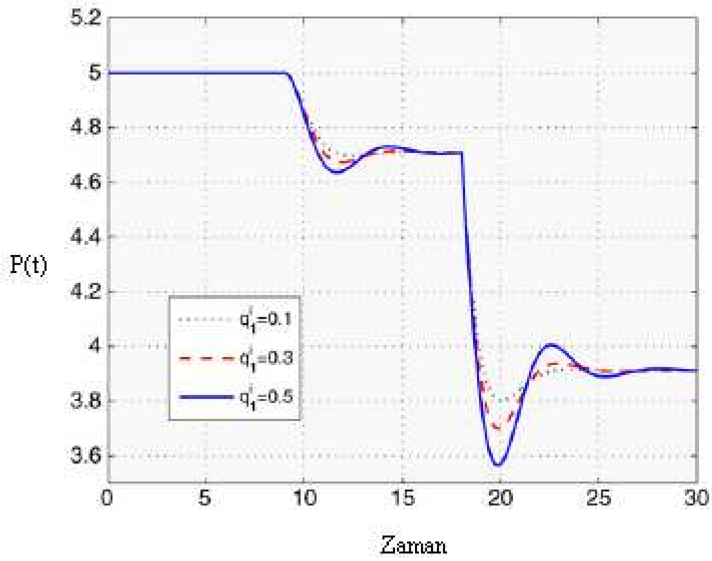
Caginalp ve Merdan çalışmalarında korumunlu olmayan bu sistem için bazı nümerik çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmaları gerçek piyasa olaylarıyla karşılaştırmışlardır. 2004 yılında CEE (Central Europe and Russia) adlı piyasada meydana gelen hisse senetlerinin bölünmesi adı verilen bir olayı incelemişlerdir. Hisse senedi bölünmesi olarak ifade edilen bu olayda, elinde bir A şirketinin hissesini bulunduran yatırımcıya ya elindeki hisse senedi miktarına göre belirli bir oranda hisse senedi verilir ya da o yatırımcıya daha ucuz fiyattan hisse senedi satılır. Klasik ekonomide bu durum sonucunda hisse senedi fiyatlarının değişmeyeceği konusunda yaygın bir görüş vardır. Ancak bu görüş uygulama da geçerli değildir. Caginalp ve Merdan makalelerinde oluşturdukları sistem ile bu yaygın görüşün geçerli olmadığını göstermişlerdir. Bu örnekte, ilgili şirket 2004 yılı Ocak ayında sözü geçen piyasaya $\frac{1}{3}$ oranında daha fazla hisse senedi süreceğini duyurmuştur ve Şubat ayında da bu hisse senetlerini piyasaya sürmüştür. Klasik ekonomiye göre hisse senedi fiyatlarının değişmemesi gerekmektedir. Ancak durum böyle olmamıştır. Hatta hisse senedi eklenmesi duyurusu bile fiyatları belli bir oranda düşürmüştür. Bunun nedenini Caginalp ve Merdan şöyle açıklamıştır. Çalışmalarında iki farklı görüşe sahip olan yatırımcı gruplarından elinde fazla miktarda hisse senedi bulunan grup fiyatların değişmeyeceğini umut etmişlerdir ve onların zihnindeki hisse senedi değerini düşürmemişlerdir. Ellerinde fazla miktarda para olan grup ise piyasaya daha fazla hisse senedi eklenmesiyle hisse senedi sayısında bir artış olacaklarını düşündükleri ve likidite değerinin düşeceğinden dolayı hisse senedinin gerçek değerini daha düşük belirlemişlerdir. Gerçekten bir piyasada arz fazla iken talep az ise satılan malın veya hizmetin fiyatı düşer ve nitekim bu olayda da böyle olmuştur. Aşağıdaki CEE piyasasının olayların meydana geldiği zamanı kapsayan grafik verilmiştir:



Şekil 2.7. 2004 CEE Değer Kaybı- Zaman Grafiği

Bu grafikte 47. Günde piyasaya hisse senedi sürülüceği duyurusu yapılmış ve fiyatlar düşmeye başlamıştır. 74. günde ise duyuruda sözü geçen hisse senetleri piyasaya sürülmüştür ve ardından büyük bir düşüş yaşanmıştır.

Caginalp ve Merdan' ın çalışmalarından nümerik simülasyonlarla elde ettikleri grafik ise aşağıdaki gibidir. Bu grafikte yatay eksen zamanı, dikey eksen ise hisse senedinin fiyatını göstermektedir.



Şekil 2.8 Caginalp&Merdan [CM] Modeli Fiyat-Zaman Grafiği

Bu makalenin sonucunda farklı motivasyonlara sahip yatırımcı gruplarını ele alarak oluşturulan sistemi tutarlılığı gözlemlenmiştir.

Bu tez çalışmasında göz önüne alınan bir diğer makale ise 2005 yılında G. Caginalp tarafından yayınlanan "Nonlinear Price Evolution" adlı makaledir [2]. Bu makaledeki problem G. Caginalp'e, Nobel ödüllü Vernon Smith tarafından önerilmiştir. Makalede fiyat değişimi için kullanılan aşırı talep fonksiyonu yerine farklı bir fonksiyon kullanılırsa sonucun ne olacağı tartışılmıştır. Neoklasik ekonomi görüşüne göre fiyatlar denge noktasına aşırı talep fonksiyonuyla orantılı biçimde yaklaşır. Yani artan taleple birlikte ilgili malın ya da hizmetin fiyatıda artmaktadır.

BÖLÜM 3

3. ARZ VE TALEP FONKSİYONLARI HAKKINDA DAHA FAZLA BİLGİ İÇEREN BİR PİYASA İÇİN HİSSE SENEDİ FİYAT DENKLEMİ

Bu tez çalışmasında temel alınan bir diğer çalışma da Caginalp tarafından 2005 yılında yayınlanan "Nonlinear Price Evolution" adlı makaledir [2]. Caginalp bu çalışmada, daha önce yapılmış çalışmalarda aşırı talep fonksiyonu kullanılarak elde edilen fiyat değişim denkleminin, talep ve arz fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi içeren bir piyasada yetersiz kalabileceğini belirtmiştir. Çünkü aynı denge noktasında kesişen birden fazla arz ve talep fonksiyonu grafiği bulabilmek mümkündür. Ancak bu grafiklerden hangisinin daha doğru olduğunu belirleyebilmek zordur. Eğer bu grafiklerin daha doğru bir şekilde belirlenmesi isteniyorsa, bu fonksiyonların bir P fiyatında sadece değerleri ilgili bilgi değil birinci, ikinci veya daha fazla mertebeden türevleriyle ilgili bilgi sahibi olmak yapılan tahmin için fayda sağlar. Caginalp bu varsayımları göz önüne alarak fiyatın zamana göre değişim denklemini elde etmek için yeni bir formül türetmiştir. Bu formülde arz ve talebin birinci mertebeden türevleri de bulunmaktadır. Aşağıda bu formülün elde edilişi anlatılacaktır.

Aşırı talep durumunda, diğer şartlarda bir değişme olmamak şartıyla, talep edilen mal miktarı ile arz edilen mal miktarı eşit oluncaya kadar arz ya da talep değişim gösterir. Arz ve talebin eşit olduğu durumda ise fiyat dengeye oturur. İşte mikroekonomin bu klasik prensibi şu şekilde ifade edilmiştir:

$$P(t+1) - P(t) = \frac{D}{S} - 1. \tag{3.1}$$

Yukarıdaki ifadede $P(t)$ ile bir hisse senedinin t anındaki fiyatı, D ve S ile de sırasıyla bir P fiyatında hisse senedine olan talep ve arz gösterilmektedir.

Bu formülde farklı iki andaki fiyat değişimin formülü arz ve talep fonksiyonlarının farkının arz fonksiyonuna bölünmesiyle elde edilmiştir. Gerçekten eşitliğin sağ tarafı incelenirse arz miktarı değişmezken talep miktarının artmasıyla D/S oranı büyüyecektir ve 1'den büyük olacaktır. Bu ise fiyat farkının pozitif olması demektir. Gerçekten fiyat farkı ayrık zamanlar için değil de sürekli olarak incelenirse, farkın pozitif olması fiyatın zamana bağlı türevinin pozitif olmasını ifade eder. Bu durum fiyatın arttığının göstergesidir. Çünkü artan bir fonksiyonun türevi pozitiftir. Bu kabuller altında (2.56) ifadesinin limiti alınarak elde edilen fiyatın zamana göre değişiminin ifadesi matematiksel olarak aşağıdaki gibi ele alınmıştır:

$$\tau_0 \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1. \tag{3.2}$$

Arz ve talep birbirine eşit olduğunda fiyat dengeye oturduğuna göre, bu fonksiyonlar hakkında herhangi miktardaki daha fazla bilgi, gelecekteki fiyatı tahmin etmek için çok önemli olacaktır. Caginalp bu varsayımlar altında bir P_0 noktasında arz ve talep hakkında bilgi sahibi olan yatırımcıların bu fonksiyonların birinci türevlerini de tahmin edebileceklerini öne sürmüştür. Aynı çalışmada söz konusu fonksiyonların kendileri ve türevleri hakkındaki bilgileri kullanarak gelecekteki hisse senedi fiyatı için daha iyi bir tahmin yapılabileceğini ifade etmiştir.

Caginalp öncelikle arz ve talep fonksiyonlarının belirli bir fiyat düzeyinde, kendileri ve birinci türevleri hakkında bilgi sahibi olunduğunu varsaymıştır. Ancak ikinci türevler hakkında bir bilgi yoktur. Bu varsayım ışığında arz ve talep fonksiyonlarının bir $P = P_0$ noktasındaki birinci dereceden Taylor seri açılımları kullanılmıştır ve bu seri açılımları aşağıdaki gibidir:

$$D(P) = D(P_0) + D'(P_0)(P - P_0)\ , \tag{3.3}$$

$$S(P) = S(P_0) + S'(P_0)(P - P_0)\ . \tag{3.4}$$

Bir P_1 noktasında arz ve talebin eşit olduğu göz önüne alınarak (3.3) ve (3.4) denklemleri eşitlenmiştir yani P yerine P_1 yazılarak aşağıdaki ifade bulunmuştur:

$$D(P_1) = D(P_0) + D'(P_0)(P_1 - P_0) = S(P_0) + S'(P_0)(P_1 - P_0) = S(P_1). \tag{3.5}$$

(3.5) eşitliğinde (P_1-P_0) ifadesi çekilerek,

$$P_1 - P_0 = -\frac{D(P_0) - S(P_0)}{D'(P_0) - S'(P_0)} \tag{3.6}$$

denklemi elde edilmiştir. (3.6) denkleminde, P_0 yerine $P(t)$, P_1 yerine ise $P(t + 1)$ yazılarak elde edilen (3.7) denklemi ise aşağıdaki gibidir:

$$P(t) - P(t + 1) = -\frac{D(P_0) - S(P_0)}{D'(P_0) - S'(P_0)}. \tag{3.7}$$

(3.7) denkleminde fiyat fonksiyonu için limit alınarak fark denklemi aşağıdaki diferensiyel denkleme dönüştürülmüştür:

$$\tau \frac{dP}{dt} = -\frac{D(P(t)) - S(P(t))}{D'(P(t)) - S'(P(t))}. \tag{3.8}$$

Yukarıdaki formülde $' \coloneqq \frac{d}{dP}$ anlamındadır. Ayrıca talep ve arz fonksiyonlarının ikinci dereceden Taylor seri açılımları kullanılarak fiyat için kuadratik bir yaklaşım yapılmıştır. Bu yaklaşımda yatırımcı arz ve talep fonksiyonları, onların birinci türevleri ve ikinci türevleri hakkında bilgi sahibidir. Bu birinci dereceden Taylor seri açılımına göre daha iyi bir yaklaşımdır çünkü daha fazla bilgi sahibi olmak daha kesin tahminler yapabilmeyi mümkün kılar. Aşağıda arz ve talep fonksiyonlarının ikinci dereceden Taylor seri açılımları verilmiştir:

$$D(P) = D(P_0) + D'(P_0)(P - P_0) + \frac{1}{2}D''(P_0)(P - P_0)^2 , \tag{3.9}$$

$$S(P) = S(P_0) + S'(P_0)(P - P_0) + \frac{1}{2}S''(P_0)(P - P_0)^2 . \tag{3.10}$$

Arz ve talebin eşit olduğu nokta yani denge noktası P_1 olarak kabul edilmiştir. (3.9) ve (3.10) eşitliklerinde P yerine P_1 alınarak denklemler birbirine eşitlendikten sonra aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$E(P_0) + E'(P_0)(P_1 - P_0) + \frac{1}{2}E''(P_0)\left(P_1 - P_0\right)^2 = 0 . \tag{3.11}$$

Burada $E(P) \coloneqq D(P) - S(P)$ olarak tanımlanmıştır. Yukarıda E' ve E'' ifadelerinde yer alan türev, P' ye yani fiyata bağlı türevi temsil etmektedir. Yani tanımı " $' := \frac{d}{dP}$" şeklindedir. (3.11) denkleminde, P_0 yerine $P(t)$, P_1 yerine ise $P(t+1)$ yazılırsa,

$$P(t) - P(t+1) := P_1 - P_0 = \frac{-E' \pm |E'| \sqrt{1 - \frac{2EE''}{E'^2}}}{E''} \tag{3.12}$$

ifadesi elde edilir. Denklem bazı düzenlemelerden sonra sürekli formda şöyle ifade edilmiştir:

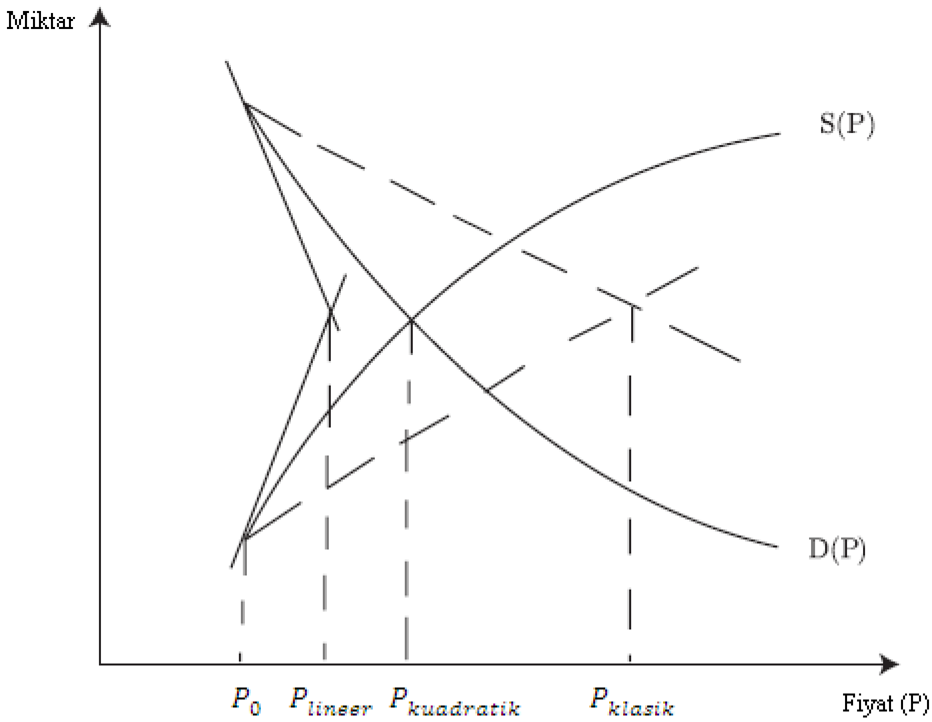
$$\tau \frac{dP}{dt} = -\frac{E}{E'} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{EE''}{E'^2}\right) . \tag{3.13}$$

Böylece kuadratik fiyat değişimi denkleminin ayrık ve sürekli biçimleri aşağıdaki gibidir:

$$P(t) - P(t+1) = -\frac{E'}{E''} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2EE''}{E'^2}} \right), \tag{3.14}$$

$$\tau_0 \frac{dP}{dt} = -\frac{E'}{E''} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2EE''}{E'^2}} \right). \tag{3.15}$$

Bu çalışmada Caginalp, üçüncü ve daha yüksek dereceden açılımların kullanılarak daha iyi yaklaşımlar yapılabileceğini ifade etmiştir. Gerçekten bir fonksiyonun ne kadar yüksek dereceden Taylor seri açılımını biliniyorsa o fonksiyonun gerçek değerine daha çok yaklaşılmış olur.



Şekil 3.1. Arz ve talep eğrilerinin fiyat ve miktara bağlı grafikleri

Bu grafikte şu anki fiyat olan P_0 ile üç farklı fiyat değişimi formülü kullanılarak elde edilen arz talep fonksiyonları grafikleri arasındaki ilişki incelenmiştir. P_{klasik} ile verilen grafik aşırı talep fonksiyonu kullanılarak elde edilen tahmindir. P_{lineer} ve $P_{kuadratik}$ ile verilen tahminlerde sırasıyla birinci dereceden ve ikinci dereceden türevleri içeren formüller kullanılarak elde edilen arz talep fonksiyonu grafikleridir.

BÖLÜM 4

4. KAPALI SİSTEMLER VE KAPALI OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN BİR MATEMATİKSEL MODEL

4.1. Notasyon

$P(t)$:= Hisse senedinin bir t anındaki fiyatı,

$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$:= Hisse senedi fiyatındaki bağıl (relatif) değişim,

$P_a(t)$:= Hisse senedi için yatırımcı tarafından belirlenen değer (gerçek değer),

$M(t)$:= t anında piyasada bulunan para miktarı,

$N(t)$:= t anında piyasada bulunan hisse senedi miktarı,

$\xi_1(t)$:= Yatırımcı kararına hisse senedi fiyatının yönüne göre etki eden bileşeni,

$\xi_2(t)$:= Yatırımcı kararına hisse senedinin gerçek değerine göre etki eden bileşeni,

$L(t)$:= Likidite değeri,

$k(t)$:= t anında bir birim paranın hisse senedine dönüşme olasılığı,

$B(t)$:= Yatırımın, t anında hisse senedinde olan kısmının toplam tutara oranı.

4.2. Kapalı Sistem İçin Bir Matematiksel Model

Bu bölümde, Caginalp ve Balenovich tarafından yayınlanan [22] çalışmasındaki kapalı (korunumlu sistem) diferensiyel denklem sistemi, Caginalp' in [2] çalışmasındaki bağıl fiyat fonksiyonu kullanılarak yeni bir diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında da önceki makaledeki gibi tek çeşit hisse senedi ve tek gruptan oluşan bir sistem göz önüne alınmıştır. Bu sisteme dışarıdan hiç bir müdahale olmamaktadır. Yani bütün işlemler sistemin içinde gerçekleşmektedir. Alınan ve satılan hisse senetleri grubun içindeki yatırımcılar arasında el değiştirmektedir. Bu tez çalışmasının amacı önceki çalışmalardan farklı olarak aşırı talep fonksiyonunun yerine (3.7) formülünü kullanarak yeni bir model oluşturmak ve oluşturulan modelin yardımıyla hisse senedi fiyat fonksiyonuna daha iyi bir yaklaşım yapmaktır.

Modelde M ile sistemdeki para miktarı, N ile sistemdeki hisse senedi sayısı gösterilmektedir. Kapalı sistem olduğu için M ve N sabit olarak alınmaktadır. Bu tez çalışmasında geçiş oranı fonksiyonu olan $k(t)$, yatırımcı strateji ve motivasyonlarının fonksiyonu olan $\xi_1(t)$ ve $\xi_2(t)$ fonksiyonları daha önceki çalışmalardaki tanımlarıyla ele alınmıştır yani aynı kalmışlardır:

$$k(t) := \frac{1}{2}\left\{1 + \tanh\left(\xi_1 + \xi_2\right)\right\}, \tag{4.1}$$

$$\xi_1(t) = c_1 q_1 \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{-c_1(t-\tau)}\, d\tau, \tag{4.2}$$

$$\xi_2(t) = c_2 q_2 \int_{-\infty}^{t} \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} e^{-c_2(t-\tau)}\, d\tau. \tag{4.3}$$

$\xi_1(t)$ ve $\xi_2(t)$ fonksiyonlarının Leibnitz kuralı ile türevleri alınarak elde edilen (2.25) formülleri de aynı kalmıştır:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = c_1 \left(q_1 \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} - \xi_1 \right), \tag{4.4}$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = c_2 \left(q_2 \frac{P_a - P}{P_a} - \xi_2 \right). \tag{4.5}$$

Ayrıca sırasıyla yatırımın, t anında hisse senedinde olan kısmının toplam tutara oranı ve yatırımın, t anında nakitte olan kısmının toplam tutara oranı olan $B(t)$ ve $1 - B(t)$ fonksiyonları olmak üzere,

$$\frac{dB}{dt} = k\big(1 - B\big) + \big(k - 1\big)B + B(1 - B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \tag{4.6}$$

formülü de aynı şekilde kalmıştır. Ancak Caginalp ve Balenovich'in çalışmasındaki aşırı talep fonksiyonundan farklı olarak yeni bir formül kullanılmıştır. Bu formül "Nonlinear Price Evolution" adlı makalede elde edilmiş olan talep ve arz fonksiyonlarının birinci türevlerini içeren formüldür [2].

Formülde kullanılan türev arz (S) ve talep (D) fonksiyonlarının fiyata (P) göre türevidir. Yani $' := \frac{d}{dP}$ olarak tanımlanmıştır ve bu yeni formülün ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\tau \frac{dP}{dt} = -\frac{D(P(t)) - S(P(t))}{[D'\big(P(t)\big) - S'\big(P(t)\big)]} = -\frac{D(P(t)) - S(P(t))}{\frac{d}{dP}[D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big)]}. \tag{4.7}$$

(4.7) formülü zincir kuralı kullanılarak aşağıdaki gibi yazılmıştır.

$$\tau \frac{dP}{dt} = -\frac{D(P(t)) - S(P(t))}{\frac{d}{dt}[D(P(t)) - S(P(t))]\frac{dt}{dP}} \;. \tag{4.8}$$

Bu denklem düzenlenerek,

$$\tau \frac{d}{dt}\left[D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big)\right] = -\left[D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big)\right] \tag{4.9}$$

ifadesi elde edilmiştir.

(4.9) denklemi birinci mertebeden bir adi diferensiyel denklem olup çözümü, türevinin negatif işaretli hali, kendisine eşit olan fonksiyondur. Türevi kendisine eşit olan fonksiyon, üstel fonksiyondur. Yani (4.9) denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big) = e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \;. \tag{4.10}$$

(4.10) denkleminde zaman ilerledikçe eşitlikte sağ taraftaki üstel fonksiyonun değeri azalır. Yani arz ve talep fonksiyonları birbirlerine yaklaşır. t' nin sonsuza gittiği durumda ise eşitliğin sağ taraftaki kısmı sıfıra gider. Bu arz ve talebin eşit olmasını gerektirir. Yani mikroekonomideki tanımdan yola çıkılırsa, fiyat dengeye oturmuş demektir.

Amacımız (4.8) denklemini düzenleyerek türev ifadelerinin tek bir tarafta bulunduğu yeni bir formül elde etmektir. Çünkü çalışmamızın amacı hisse senedi fiyatları için diferensiyel denklemler aracılığıyla bir model kurmak ve bu modeli oluşturan diferensiyel denklem sistemini çözerek bir fiyat tahmini yapmaktır. Bu tez çalışmasında elde edilen diferensiyel denklemi çözmek için ise Matlab Ode45 programı kullanılacaktır ve bu programda diferensiyel denklem sistemini çözmek için sistemde bulunan her bir diferensiyel denklemdeki eşitliklerin yalnız bir tarafında türev ifadesi bulunması gerekmektedir.

Arz ve talep fonksiyonlarını tanımlarını kullanılırsa,

$$D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big) = k(1-B) - (1-k)B \tag{4.11}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$D\big(P(t)\big) - S\big(P(t)\big) = k(t) - B(t) \tag{4.12}$$

ifadesi elde edilir. (4.12) ifadesi (4.8) denklemiyle birleştirilirse,

$$\tau \frac{d}{dt}\,[k(t) - B(t)] = B(t) - k(t) \tag{4.13}$$

elde edilir.

(4.12) ve (4.13) denklemleri birlikte düzenlenirse sağ tarafı P' ye göre türevden bağımsız rölatif fiyat değişimi formülü elde edilmiş olur ve ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 - c_2 q_2 \frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)}}{c_1 q_1 - B(1-B)2cos^2h(\xi_1 + \xi_2)}\ . \tag{4.14}$$

Bu son denklemin elde edilmesi ile (4.4), (4.5), (4.6), (4.14) olmak üzere birinci mertebeden lineer olmayan dört tane diferensiyel elde edilmiştir. Bu dört diferensiyel denklem, (4.1) cebirsel denklemi ile birlikte göz önüne alındığında tam bir sistem elde edilmiş olur. Elde edilen bu sistem tam olduğu için uygun başlangıç koşulları altında nümerik olarak çözümlenebilir.

3.3. Kapalı Olmayan Sistem İçin Bir Model

Bu bölümde önce kapalı olarak ele alınan sistem artık dışarıya açık haliyle incelenmiştir. Yani hem içeriden dışarıya hem de dışarıdan içeriye müdahale edilebilmektedir. Önceki bölümde sistemde bulunan hisse senedi sayısı ve para miktarı sabit olduğu için likidite değeri değişmemekteydi. Ancak bu bölümde para miktarında ve hisse senedinde oluşacak değişiklikler sebebiyle likidite değişken bir fonksiyon haline gelmiştir ve likiditenin zamana bağlı değişimi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{M^0+M^{ek}(t)}{N^0+N^{ek}(t)} - \frac{M^0}{N^0}. \tag{4.15}$$

Burada M^0 ile sistemde başlangıçta bulunan para miktarı, N^0 ile ise sistemde başlangıçta bulunan hisse senedi sayısı gösterilmektedir. Caginalp ve Balenovich'in çalışmasında, likidite sabit alınarak elde edilen (2.21) formülü ise aşağıdaki gibi değişir:

$$\frac{dB}{dt} = B(1 - B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} - \frac{B^2}{P}\frac{dL}{dt}\,. \tag{4.16}$$

Bu durumda tez çalışmamızda kullanılan (4.6) formülünün yeni hali ise şöyledir:

$$\frac{dB}{dt} = k(1 - B) + (k - 1)B + B(1 - B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} - \frac{B^2}{P}\frac{dL}{dt}\,. \tag{4.17}$$

Eğer sistem kapalı olsaydı likidite sabit olacağından eşitliğin sağ tarafındaki likiditenin değişim ifadesi sıfır olurdu bu durumda ise yatırımın hisse senedinde olan kısmının toplam tutara olan oranı önceki bölümdeki (2.38) haline dönüşürdü. Eğer sisteme hisse senedi eklenecek olursa yani $M^{ek}(t) = 0$ durumunda likidite fonksiyonunun değeri azalacak böylece $\frac{dL}{dt}$ teriminin işareti negatif olacaktır. Bu ise (4.17) denkleminde pozitif bir değişim sağlayacaktır ki gerçekten sistemde bulunan toplam hisse senedi oranı artacaktır.

Yeni (4.17) denkleminin kullanılmasıyla fiyattaki bağıl değişimi gösteren formül ise aşağıdaki hale dönüşecektir:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 - c_2q_2\frac{P_a(t)-P(t)}{P_a(t)} - 2cos^2h(\xi_1+\xi_2)\left[\frac{M^0+M^{ek}(t)}{N^0+N^{ek}(t)} - \frac{M^0}{N^0}\right]}{c_1q_1 - B(1-B)2cos^2h(\xi_1+\xi_2)}\,. \tag{4.18}$$

Bu tez çalışmasında ayrıca sırasıyla fiyatın yönüne ve hisse senedinin gerçek değerine bağlı yatırımcı motivasyonunu gösteren $\xi_1(t)$ ve $\xi_2(t)$ fonksiyonlarına ek olarak likidite faktörünü de içeren yeni bir yatırımcı motivasyon fonksiyonu sisteme dahil edilmiştir. Bu fonksiyon ilk defa Merdan ve Çakmak'ın "Likiditenin Hisse Senedi Fiyatlarına Etkisi" adlı çalışmasında kullanılmıştır [26]. Yeni $\xi_3(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\xi_3(t) = c_3 q_3 \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{-c_3(t-\tau)} \, d\tau \ . \tag{4.19}$$

$\xi_3(t)$ tanımlanırken likidite ve fiyatın yönünün arasında pozitif bir korelasyon olduğu gözlemlenmiştir. Bu nedenle $\xi_1(t)$ ve $\xi_3(t)$ fonksiyonlarının tanımları birbirlerine benzer olarak yapılmıştır. Eğer sistemde likidite fazla ise fiyatlar artacaktır. Likidite az ise tam tersi durum olarak fiyatlar düşecektir. $\xi_3(t)$ fonksiyonuna Leibnitz kuralı uygulanarak (4.18) denklemi aşağıdaki diferensiyel denkleme dönüşmüştürülmüştür:

$$\frac{d\xi_3}{dt} = c_3 \left(q_3 \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} - \xi_3 \right) . \tag{4.20}$$

Yatırımcı motivasyonu fonksiyonları kullanılarak elde edilen geçiş oranı fonksiyonu $k(t)$ ise yeniden düzenlendikten sonra aşağıdaki halini almıştır:

$$k(t) := \frac{1}{2} \{1 + \tanh\left(\xi_1(t) + \xi_2(t) + \xi_3(t)\right)\} . \tag{4.21}$$

(4.4), (4.5) (4.15), (4.17), (4.18), (4.20) diferensiyel denklemleri ve (4.21) cebirsel denklemi birlikte likiditenin etkisinin de hesaba katıldığı yeni bir sistem meydana gelmiştir. Bu sistem tamdır ve nümerik olarak çözülebilir.

BÖLÜM 5

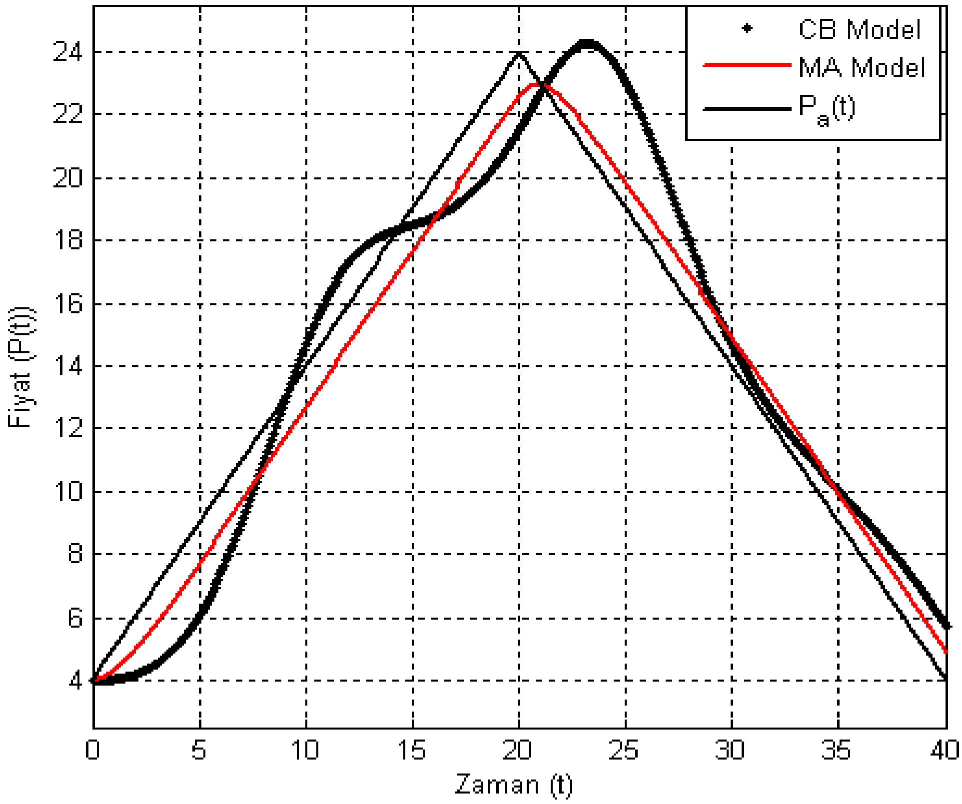
5. NÜMERİK ÇALIŞMALAR

Bu bölümde Caginalp ve Balenovich modeli ile bu tez çalışmasında oluşturulan model karşılaştırılmıştır. Bunun için elinde tek çeşit hisse senedi bulunan tek grup için farklı örnekler kullanılmıştır. Her bir örnekte dört bilinmeyenli dört diferensiyel denklemden oluşan sistem Matlab-ODE45 paketi kullanılarak çözülmüştür. Matlab-ODE45 paketi $M(t,y) * y' = F(t,y)$ tipindeki denklemleri çözebilmektedir.

İlk örneğimizde $P_a(t)$, ters “V” olacak şekilde tanımlanmıştır:

$$P_a(t) = \begin{cases} t+5, & t \leq 20 \\ 40-t, & t > 20 \end{cases} . \tag{5.1}$$

Yani hisse senedinin ana değeri $t = 20$ anına kadar lineer olarak artmakta ve bu t anından sonra lineer olarak azalmaktadır. Burada zaman parametreleri olan c_1 ve c_2 sırasıyla 0.001 ve 0.001 alınmıştır. Yatırımcı fonksiyonlarının büyüklük katsayıları olan q_1 ve q_2 ise sırasıyla 130 ve 450 olarak seçilmiştir. Bu değerler için elde edilen grafik Şekil 5.1 ile verilmiştir. Grafikte fiyat belli bir t anına kadar lineer olarak artmakta ve bu t anından sonra aynı şekilde azalmaktadır.

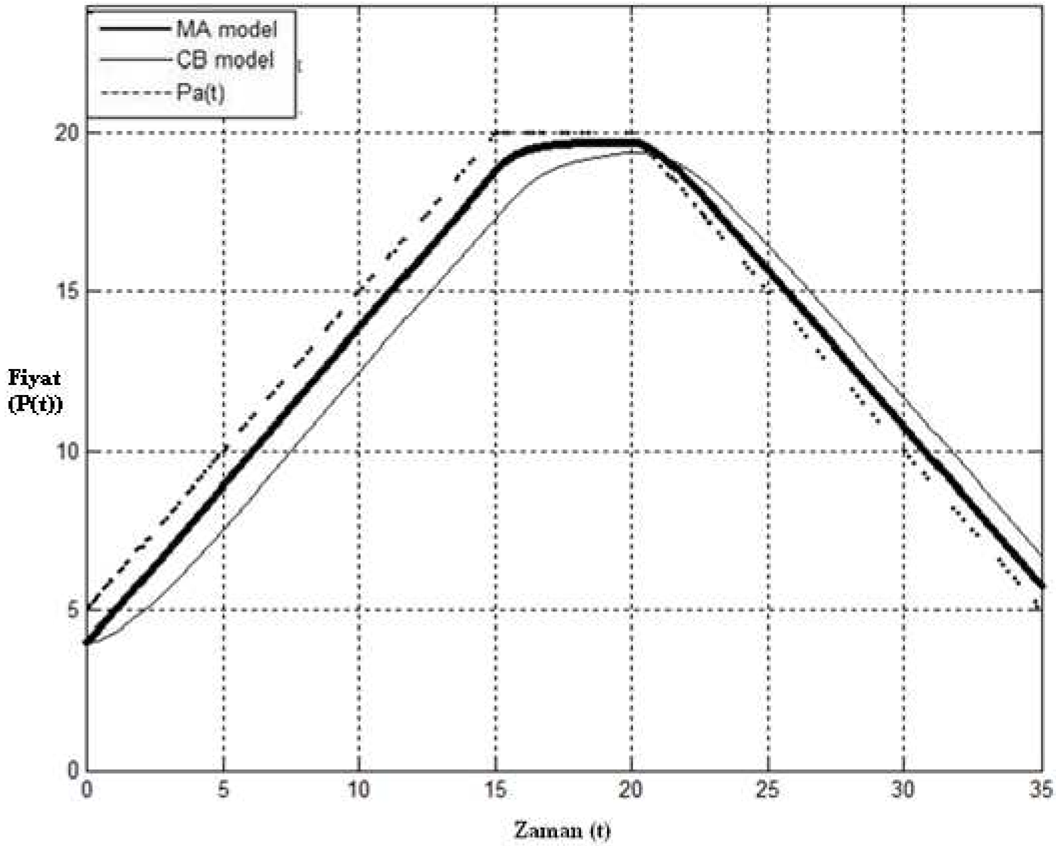


Şekil 5.1. [MA] ve [CB] Modellerinin Karşılaştırılması (Ters "V" formasyonu baz alınarak elde edilen fiyat değişim grafiği)
$c_1 = 0.001$, $c_2 = 0.001$, $q_1 = 130$ ve $q_2 = 450$ olarak kullanılmıştır.

İkinci örnekte ise $P_a(t)$ fonksiyonu, omuz-baş-omuz modeline göre tanımlanmıştır:

$$P_a(t) := \begin{cases} t+5, & t \leq 15 \\ 20, & 15 \leq t \leq 20 \\ 40-t, & t \geq 20 \end{cases} \quad . \tag{5.2}$$

Burada zaman parametreleri $c_1 = 0.001$ ve $c_2 = 0.01$ olarak alınmıştır. Yatırımcı motivasyonlarının büyüklük katsayıları olan q_1 ve q_2 ise sırasıyla 90 ve 45 olarak alınmıştır. Bu değerler kullanılarak elde edilen grafik Şekil 5.2 ile verilmiştir.



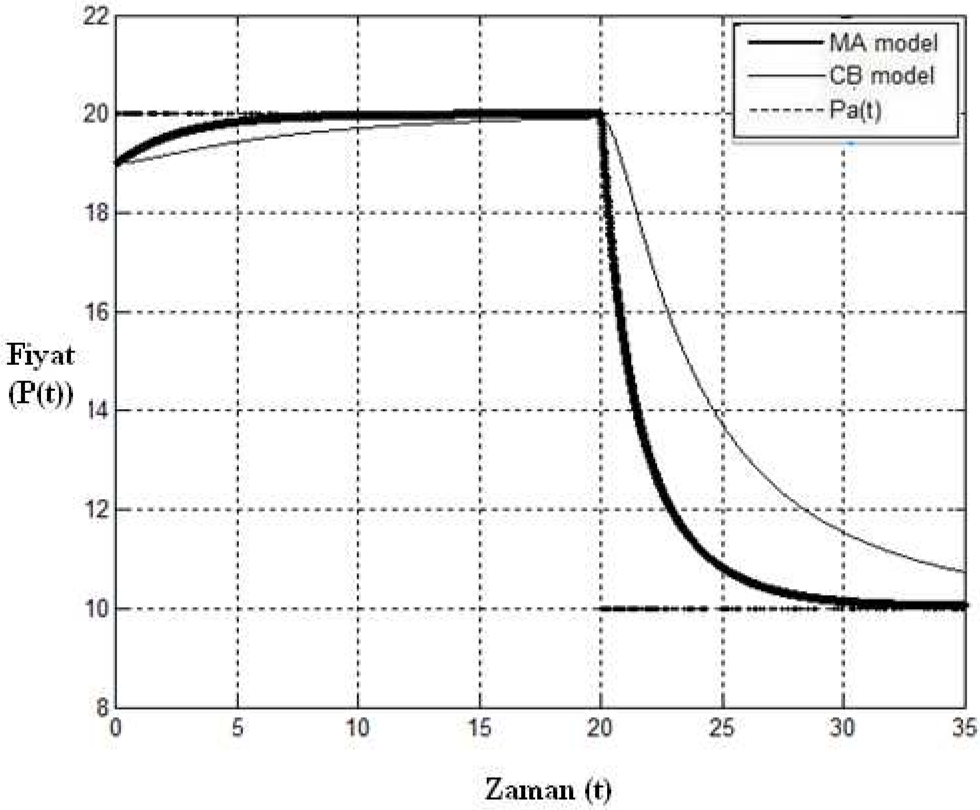
Şekil 5.2. [MA] ve [CB] Modellerinin Karşılaştırılması (Omuz-baş-omuz formu baz alınarak elde edilen fiyat değişim grafiği)

$c_1 = 0.001,\ c_2 = 0.001, q_1 = 90$ ve $q_2 = 45$ olarak kullanılmıştır.

Üçüncü nümerik örnekte ise $P_a(t)$ yani hisse senedini gerçek değerini gösteren fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$P_a(t) := \begin{cases} 20, & t < 20 \\ 10, & t \geq 20 \end{cases}. \tag{5.3}$$

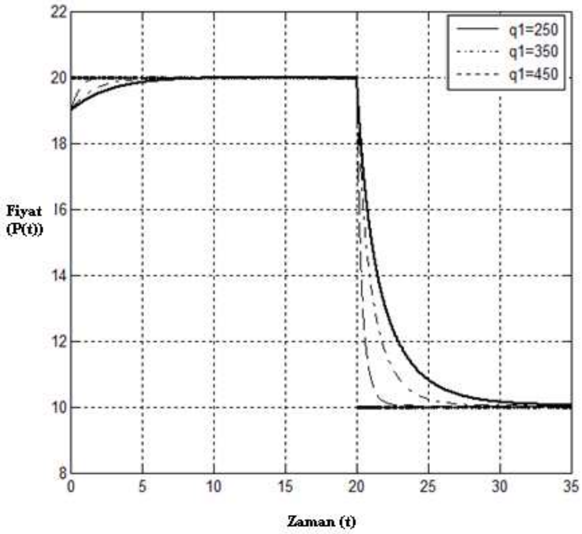
Bu $P_a(t)$ tanımı kullanılarak elde edilen grafik Şekil 5.3 ile verilmiştir. Bu grafik bir hisse senedinin fiyatının belli bir t anında ani bir düşüş yaşadığı piyasa olaylarına örnek verilebilir. Bölüm 2'de sözü geçen ve [16] çalışmasında incelenmiş örnekte bu duruma benzer bir piyasa olayından bahsedilmiştir. Bu örnekte, Caginalp ve Merdan çalışmalarında korumunlu olmayan bu sistem için bazı nümerik çalışmalar yapmışlardır. 2004 yılında CEE (Central Europe and Russia) adlı piyasada meydana gelen hisse senetlerinin bölünmesi adı verilen bir olayı incelemişlerdir ve bu olay sonucunda hisse senetleri fiyatlarında, bölünme anından sonra ani bir düşüş yaşanmıştır.



Şekil 5.3. [MA] ve [CB] Modellerinin Karşılaştırılması

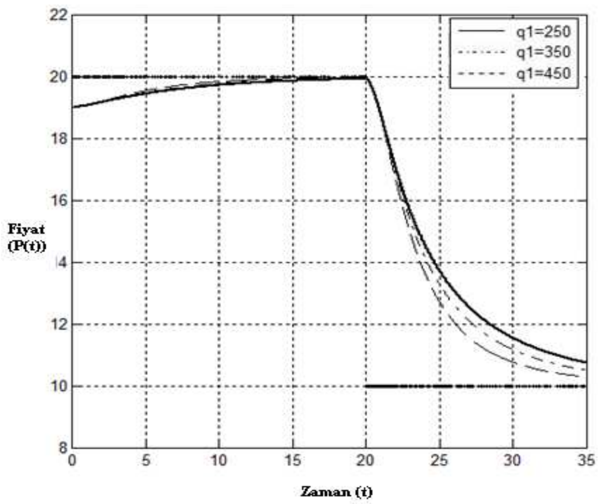
$c_1 = 0.001$, $c_2 = 0.001$, $q_1 = 450$ ve $q_2 = 495$ olarak kullanılmıştır.

Aşağıdaki grafiklerde ise farklı büyüklük katsayılarına göre iki modelin karşılaştırılması yapılmıştır. q_1 için farklı değerler kullanılıp , q_2 sabit tutulmuştur.



Şekil 5.4. [MA] Modeli-Farklı Büyüklük Katsayılarının Fiyatlara Etkisi

$c_1 = 0.001,\ c_2 = 0.001,\ q_2 = 495$ olarak kullanılmıştır.



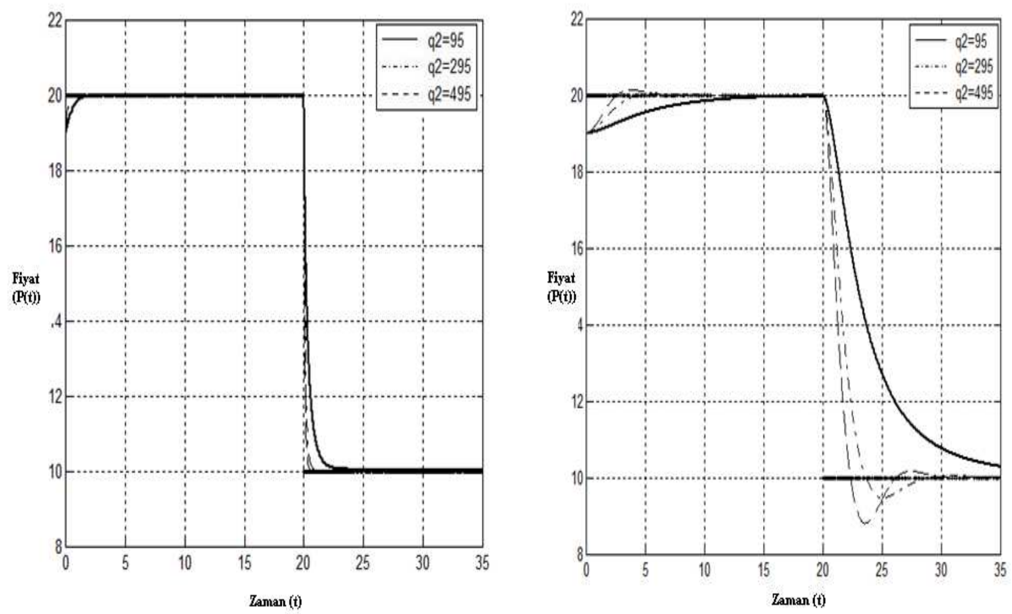
Şekil 5.5. [CB] Modeli-Farklı Büyüklük Katsayılarının Fiyatlara Etkisi.

$c_1 = 0.001,\ c_2 = 0.001,\ q_2 = 495$ olarak kullanılmıştır.

Şekil 5.4 Merdan & Alişen modelinin grafiği olup, Şekil 5.5, [22] çalışmasının grafiğidir. Bu iki grafik karşılaştırıldığında Şekil 5.4’ teki fiyat fonksiyonunun Şekil 5.5’ teki fiyat fonksiyonuna göre daha hızlı dengeye oturduğu görülür. Yani farklı parametreler kullanılarak yapılan nümerik çalışmalar, Merdan& Alişen modeli ile yapılan fiyat tahmininin daha önceki çalışmalara göre daha iyi bir tahmin yaptığı gerçeğini desteklemiştir.

Şekil 5.6.(a) ve Şekil 5.6.(b)‘ de ise q_2’nin farklı değerleri ele alınmış ve q_1 sabit tutulmuştur. Şekil 5.6.(a) ve Şekil 5.7.(b) grafikleri sırasıyla Merdan & Alişen modeli ile Caginalp & Balenovich [22] çalışmasının fiyat tahmin grafikleridir ve bu grafikler bu tez çalışmasında elde edilmiş modelin fiyat tahmininin önceki çalışmalardan daha iyi bir tahmin oluşturduğunu göstermektedir.

(a) (b)



Şekil 5.6. (a) [MA] Modeli - (b) [CB] Modeli

Farklı Büyüklük Katsayılarının Fiyatlara Etkisi

$c_1 = 0.001$, $c_2 = 0.001$, $q_1 = 450$ olarak kullanılmıştır.

BÖLÜM 6

6. SONUÇ

Neoklasik yaklaşım, fiyatların, denge noktasına talep ve arz fonksiyonlarının farkının arz fonksiyonuna bölünmesiyle elde edilen aşırı talep fonksiyonuyla orantılı bir biçimde ulaştığını savunur. Bu varsayım ile oluşturulan bağıl fiyat değişimi denklemi, tek çeşit hisse senedinin göze alındığı basit durumlarda bile yetersiz olabilir. Bunun iki sebebi vardır. Birincisi arz ve talep fonksiyonlarının eğimleri sabit olmak zorunda değildir. İkincisi ise bu eğimlerin sabit olmadığı yani arz ve talep fonksiyonlarının lineer olmadığı durumda konvekslik ve konkavlıktan dolayı ek hatalar ortaya çıkabilmektedir. İşte bu nedenlerden dolayı belirli bir P fiyatında, arz ve talep ile ilgili daha fazla bilgiye sahip olmak örneğin bu fonksiyonların bu belirli P fiyatında, arz ve talep fonksiyonlarının birinci türevlerinin bilinmesi durumunda daha yeterli ve daha iyi bir fiyat tahmini yapılabilir. Hatta söz konusu fonksiyonların birinci türevlerinin yanında ikinci ve üçüncü veya daha fazla mertebeden türevleri de biliniyorsa, birinci türevleri bilinerek yapılan yaklaşım daha kötü bir yaklaşım olabilir. Bu tez çalışmasında yukarıda bahsedilen nedenlerden dolayı literatürde bulunan diğer çalışmalardan daha iyi bir fiyat tahmini yapmak amacıyla, [2] ve [22] çalışmalarının ışığında hisse senedi fiyat tahmini için yeni bir model oluşturulmuştur.

Bu modelde [22] çalışmasından farklı olarak arz ve talep fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi içeren bir fiyat değişimi formülü kullanılmıştır. Bu formül [2] çalışması sonucunda ortaya çıkan formüldür. Çünkü piyasa verileri yatırımcıya arz ve talep fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi veriyorsa fiyata daha iyi bir yaklaşım elde edilmektedir. Çalışmamızda kullanılan fiyat değişim denklemi, arz ve talep fonksiyonlarının birinci türevlerini de içermektedir. Bu fiyat değişimi denklemi kullanılarak oluşan yeni model ile [22] çalışmasındaki model karşılaştırılmıştır.

İki model karşılaştırılırken nümerik çalışmalardan yararlanılmıştır. Matlab ODE45 programı aracılığıyla, diferensiyel denklemlerden oluşan modelin çözümü için bir yaklaşım yapılmıştır. Model yardımıyla, fiyatın nasıl bir davranış göstereceği Matlab ODE45 programıyla nümerik olarak çalışılmış ve elde edilen grafikler aracılığıyla yorumlanmıştır. Elde edilen grafiklerde, bu tez çalışmasında elde edilmiş yeni modelin fiyat tahmin grafiğinin, [14] çalışmasındakine göre daha az dalgalanma gösterdiği ve denge fiyatına daha hızlı ulaştığı gözlemlenmiştir. Göz önüne alınan her bir nümerik örnekte farklı $P_a(t)$ fonksiyonları alınarak çalışılmıştır ve her bir t anında hisse senedinin gerçek değer grafiği ile bu tez çalışmasındaki model ile elde edilen fiyat grafiği arasındaki fark, [22] çalışmasının grafiğinin gerçek değerle arasındaki farktan daha azdır. Yani bu çalışmada oluşturulmuş model ile yapılan tahmin gerçek değere daha çok yaklaşmaktadır.

Yapılan bu gözlemler sonucunda [22] çalışmasındaki modeldeki fiyat tahmininden daha iyi bir yaklaşım yapıldığı görülmüştür. Bu tez çalışmasındaki hisse senedi fiyat tahmininin, [22] çalışmasındakine göre daha hızlı denge fiyatına ulaşması ve daha az salınım yapması, ilgili hisse senedinin alış satışı ile uğraşan yatırımcının bu işlemlerinde kendine daha iyi bir konum belirlemesini sağlayarak karını artırmasını ya da zararını azaltmasını sağlar. Fiyat tahmini alanında yapılan çalışmalardaki temel amaç karı maksimuma, kaybı minimuma indirmek olduğundan modelimiz yatırımcılar açısından olumlu sonuçlar doğurur.

Ayrıca bu tez çalışmasında, önce kapalı bir sistem olan diferensiyel denklem sisteminin dışarıya açık olması yani içeriden dışarıya ve dışarıdan içeriye para ve hisse senedi akışı olduğu göz önüne alınarak yeni bir model oluşturulmuştur. Bu çalışmalara ek olarak sisteme likidite terimi eklenerek bir model çıkarılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda Sektör Bazında İşlem Gören Hisse Senetlerinin Alım-Satım Kararlarında En Yüksek Getirili Stratejilerin Belirlenmesi, Yard. Doç.Dr. Tuncay Özdil, Prof. Dr. Cengiz Yılmaz, YÖNETİM ve EKONOMİ Yıl:2006, Sayı:2 Celal Bayar Üniversitesi İ.İ.B.F Manisa.

[2] Caginalp,G., Nonlinear Price Evolution, Quarterly of Applied Mathematics Volume lxııı, number 4, December 2005, pages 715–720 S 0033-569X(05)00982-X Article electronically published on September 27, 2005.

[3] Hisse Senedinin Gerçek Değerinin Hesaplanması, Prof. Dr. Ümit Ataman, Halil Kibar.

[4] Capital Markets, Pınar Evrim Handancı, Halit Soydan.

[5] Sermaye Piyasası, BORSA, Menkul Kıymetler, Muharrem Karslı.

[6] İMKB Eğitim Seti. **www.imkb.gov.tr.**

[7] Caginalp, G. and Ermentrout, G.B. ,A Kinetic Thermodynamics Approach to the Psychology of Fluctuations in Financial Markets, Appl. Math. Lett. Vol. 3, No. 4, pp. 17-19, 1990.

[8] Edwards, R. And J. Magee 1992 : Technical Analysis of Stock Trends, Sixth Ed, New York Institute of Finance, New York.

[9] Myers T. 1989:The Technical Analysis Course, Probus, Chicago.

[10] Pring, M. 1993:Martin Pring on Market Momentum Int. Inst. for Economic Research, Inc. , Gloucester, VA.

[11] Blume, L. ,D. Easley and M. O'Hara 1994:'Market statistics and technical analysis:the Role of volume' J. Finance 69, 153-181.

[12] Caginalp, G. and H. Laurent 1998:'The predictive power of price patterns' Applied Mathematical Finance 1, 129-164.

[13] Bessembinder, H. And K. Chan 1998:'Market efficiency and returns to technical analysis' Financal Management 27, 5-13.

[14] Chang, P. H. And C. Osler 1999:'Methodical madness:Technical analysis and the Irrationality of exchange- rate forecasts' Economic Journal 109, 636-662.

[15] Gunduz Caginalp and Donald Balenovich, A Theoretical Foundation for Technical Analysis, Journal of Technical Analysis, Winter-Spring 2003.

[16] Thiele, T. N. , 1880 Sur la compensation de quelques erreurs quasi-syst´ematiques par la m´ethodes de moindre carr´es, Reitzel, Copenhagen.

[17] Bachelier, L., 1900 Th´eorie de la Sp´eculation, Annales Scientifiques de l'´Ecole Normale Sup´erieure, 21–86.

[18] Bachelier, L., 1900 Th´eorie de la Sp´eculation, Gauthier-Villars, Paris. {Note: This book has recently been reprinted by the Paris publisher ´Editions Jacques Gabay (1995).}

[19] Courtault, J-M, Kabanov, Y., Bru, B., Cr´epel, P., Lebon, I., and Le Marchand, A. ,2000 Louis Bachelier: On the Centenary of Th´eorie de la Sp´eculation, Mathematical Finance 10, 341–353.

[20] Einstein, A. , 1905 On the movement of small particles suspended in stationary liquid Demanded by the molecular-kinetic theory of heat, Ann. d. {In Investigations of the theory of Borwnian movement, edited by R.F¨urth, Dover, New York, 1956}.

[21] A Short History of Stochastic Integration and Mathematical Finance The early years, 1880-1970 Robert Jarrow and Philip Protter Cornell University November 22, 2003.

[22] Caginalp, G. and Balenovich, D. , Asset flow and momentum: deterministic and stochastic equations, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 357, 2119-2133, 1999.

[23] Caginalp, G. and Merdan, H., Asset Price Dynamics with Heterogenous Groups, Physica D, 225, 43-54, 2007.

[24] Caginalp, G. and Ermentrout, G.B. , Numerical Studies of Differential Equations Related to Theoretical Financial Markets, , Appl. Math. Lett. Vol.3 No. 1, pp. 35-38, 1991.

[25] Caginalp, G. and Balenovich, D. , Market oscilations induced by the competition between value-based and trend-based investment strategies, Appl. Math. Finance, 1, 129-164, 1994.

[26] Likiditenin Hisse Senedi Fiyatlarına Etkisi, H. Çakmak, Doç. Dr. Hüseyin Merdan

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ALİŞEN, Meltem
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 30.10.1986 Ankara
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (312) 382 13 02
e-posta	: malisen@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik	2008
	Anadolu Üniversitesi/İşletme	2010

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2008-2010	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce