# SOYUT UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL

# YAKLAŞIM TEOREMLERİ

**Alperen Ali ERGÜR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Bölümü**

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Temmuz 2011**

**ANKARA**

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ömer AKIN

Anabilim Dalı Başkanı

Alperen Ali ERGÜR tarafından hazırlanan SOYUT UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM TEOREMLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Oktay Duman

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan :Doç. Dr. Şeyhmus Yardımcı

Üye : Prof. Dr. Oktay Duman

Üye : Doç. Dr. Ogün Doğru

**TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

……………….

Alperen Ali Ergür

| | | |
|---|---|---|
| **Üniversitesi** | : | **TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi** |
| **Enstitüsü** | : | **Fen Bilimleri Enstitüsü** |
| **Anabilim Dalı** | : | **Matematik Bölümü** |
| **Tez Danışmanı** | : | **Prof. Dr. Oktay DUMAN** |
| **Tez Türü ve Tarihi** | : | **Yüksek Lisans – Temmuz 2011** |

**Alperen Ali ERGÜR**

**SOYUT UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM TEOREMLERİ**

## ÖZET

$X$ bir Haussdorf uzayı ve $(X, U)$ bir düzgün yapı olsun. $F$, $X$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlardan oluşan bir vektör uzay olsun ve sabit fonksiyonları içersin. Ayrıca kabul edelim ki $Y$ uzayı $X$ uzayının kompakt bir alt uzayı ve $\{L_n\}$ , $F$ den $R^Y$ ye tanımlı pozitif lineer bir operatörlerin bir dizisi olsun. Bu yüksek lisans tezinde istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremleri elde ettik. Daha sonra elde ettiğimiz teoremlerin önemli uygulamaları üzerinde durularak elde ettiğimiz yaklaşım sonuçlarının klasik teoremlerden daha güçlü ve uygulanabilir olduğunu gösterdik. Üstelik sonuçlarımızı çok değişkenli fonksiyon uzaylarına da genelleştirdik.

**Anahtar Kelimeler: A-istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, filtre, düzgün yapı, Korovkin Teoremi.**

**University** : **TOBB University of Economics and Technology**

**Institute** : **Institute of Natural and Applied Sciences**

**Science Programme** : **Department of Mathematics**

**Supervisor** : **Professor Dr. Oktay DUMAN**

**Degree Awarded and Date** : **M.Sc. – July 2011**

**Alperen Ali ERGÜR**

**Statistical Approximation Theorems on Abstract Spaces**

## ABSTRACT

Let $X$ be a Haussdorff space provided with the uniform structure $(X, U)$. Let $F$ be a vector space of real-valued functions defined on $X$ including the constant-valued functions, Assume further that $Y$ is a compact subspace of $X$ and that $\{L_n\}$ is a sequence of positive linear operators of $F$ into $R^Y$. In this thesis, we obtain an abstract Korovkin-type approximation theorem in statistical sense. Then, by displaying some significant applications, we show that our approximation is more applicable and powerful than the classical ones. Furthermore, we extend our results to the multivariate function spaces.

**Keywords: A-statistical convergence, statistical approximation, filter, uniform structure, the Korovkin theorem.**

**TEŞEKKÜR**

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Oktay Duman'a, araştırmamızı beraber yürüttüğümüz değerli çalışma arkadaşım Merve Kester'e, benden desteğini esirgemeyen kıymetli dostlarım Mustafa Tarhan, Mehmet Emin Aktaş, Ferit Recepli, Hakan Yılmaz'a, tez yazımı sırasında beni anlayışla karşılayan eşime teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

## SİMGE LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\#\{K\}$ | K kümesinin eleman sayısı |
| $\delta(K)$ | K kümesinin yoğunluk fonksiyonu |
| $\delta_A(K)$ | K kümesinin A-yoğunluk fonksiyonu |
| $C_1$ | Birinci mertebeden Cesàro matrisi |
| $\{(Ax)_n\}$ | x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi |
| $\|.\|$ | Alışılmış supremum normu |
| $C$[a,b] | [a,b] üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $C_{2\pi}(D)$ | D kümesi üzerinde sürekli 2π periyotlu fonksiyonlar uzayı |
| I | Birim matris |
| $A \times B$ | A ve B kümelerinin Kartezyen çarpımı |
| $\prod_{i\in N} X_i$ | $X_i$ Kümelerinin Kartezyen çarpımı |

# 1. GİRİŞ

Reel Analizde fonksiyon dizilerinin hemen hemen yakınsaklığı ve ölçüsel yakınsaklığı gibi yakınsaklık metotları iyi bilinmekte olup şimdiye kadar bunların birbirleriyle olan ilişkileri, zayıf ve kuvvetli halleri pekçok şekilde incelenmiştir. Sayı dizilerinin klasik yakınsaklığı kavramı ise 1950 li yıllardan itibaren literatürde "istatistiksel yakınsaklık" ismiyle bilinen yeni bir yakınsaklık metodu yardımıyla geliştirilmiştir (bkz. [1, 2, 3]). İstatistiksel yakınsaklık, son yıllarda Toplanabilme Teorisi [4, 5], Fourier Serileri [6], Topoloji [7, 8], Ölçü Teorisi [9, 10], Yaklaşımlar Teorisi [11, 12], Bulanık Mantık Teorisi [13, 14], Operatör Teori [15, 16, 17] gibi matematiğin birçok alanında kullanılmıştır. İstatistiksel yakınsaklığın böylesine geniş bir sahada uygulama alanı bulması bu konuyu yarım asırdır birçok matematikçinin ilgi odağı haline getirmiştir.

Daha sonra istatistiksel yakınsaklık kavramı 1993 te Fridy [18] tarafından üretilen "istatistiksel limit noktaları" ve 1997 yılında Fridy ve Orhan [19] tarafından verilen "istatistiksel limit inferior" ve "istatistiksel limit superior" kavramlarıyla zenginleştirilmiş ve matematik analizin yeni bir dalı olarak değer kazanmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı daha sonra "$A$-istatistiksel yakınsaklık" kavramına genelleştirilmiştir (bkz. [20, 21]).

Korovkin 1950 li yıllarda daha sonra yaklaşımlar teorisinde adıyla anılan teoremi ortaya atmıştır. Korovkin bu teoreminde oldukça elementer argümanlar kullanarak, pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım özelliklerine ilişkin çok önemli bir karakterizasyon elde etmiştir. Böylece "Korovkin Teorisi" ortaya çıkmış ve daha sonraki yıllarda bu teorinin pekçok alanda genelleşmesi elde edilmiştir (bkz. [22, 23, 24]).

Korovkin Teorisinde kullanılan klasik yakınsaklık ilk kez 2002 yılında Gadjiev ve Orhan [11] tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak geliştirilmiştir. Bu yöndeki diğer ilerlemelere [12, 25, 26, 27] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

Korovkin Teorisinin bazı soyut uzaylar üzerindeki genelleşmesi 1976 yılında Yoshinaga ve Tamura [28] tarafından ele alınmış ve daha sonra [23, 29] nolu çalışmalarda da incelenmiştir.

Özellikle son 10 yılda istatistiksel yakınsaklık kavramının Yaklaşımlar Teorisinde oldukça etkin bir şekilde kullanıldığını görüyoruz. Bu yüksek lisans tez çalışmasındaki amacımız da [28] de soyut uzaylarda verilen Korovkin tipindeki yaklaşım teoremlerini istatistiksel yakınsaklık aracılığıyla geliştirmek olacaktır. Ayrıca tezde sonuçlarımızın çok değişkenli fonksiyonlar üzerinde de geçerli kaldığı ispatlanacaktır. Elde ettiğimiz sonuçlar son haliyle bu alanda literatürde kayıtlı en genel ve kuvvetli sonuçlar olarak görünmektedir. Bizi bu kanıya vardıran husus, literatürde halihazırda bulunan Korovkin tipindeki yaklaşım teoremlerinin bir çoğunun çalışmamızın özel durumları olarak elde edilebileceğini görmemiz olmasıdır. Ayrıca klasik yaklaşımı gerçeklemediği halde istatistiksel anlamdaki yaklaşımı gerçekleyen operatör dizilerinin örneklerine de bu tez çalışmamızda değineceğiz.

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm Giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tezde ihtiyaç duyacağımız temel tanım ve teoremler sunulacaktır. İstatistiksel yakınsaklık, $A$-istatistiksel yakınsaklık, klasik Korovkin teoremi ve onun soyut uzaylar üzerindeki gelişmelerine ikinci bölümde yer vereceğiz. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise bu çalışmada elde ettiğimiz orijinal sonuçlar bulunmaktadır. Burada öncelikle soyut uzaylarda genel bir istatistiksel yaklaşım teoremi elde edilecek, daha sonra bunun çok değişkenli fonksiyonlar üzerinde karşılığı aranacaktır. Son olarak elde ettğimiz sonuçların özel hallerinin klasikte bilinen pekçok teoreme indirgendiği gösterilecek ve istatistiksel yaklaşımın daha genel olduğunu vurgulamak için önemli uygulamalar verilecektir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışmamız boyunca kullanacağımız bazı temel kavramlar hatırlatılacaktır. Daha sonra bu kavramlarla ilgili temel sonuçlar verilecektir. Sırasıyla, istatistiksel yakınsaklık, $A$-istatistiksel yakınsaklık, klasik Korovkin teoremi ve onun soyut uzaylardaki gelişmelerine değineceğiz.

## 2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılacak ve bu kavramla ilgili temel teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1.1** *$\#\{K\}$ sembolü ile $K \subset \mathbb{N}$ altkümesinin eleman sayısını göstersin. Bu durumda*

$$\lim_j \frac{\#\{k \leq j : k \in K\}}{j}$$

*limiti mevcutsa, bu limit değeri $K$ kümesinin **yoğunluğu** olarak adlandırılır ve $\delta(K)$ ile gösterilir. [30].*

**Tanım 2.1.2** *Bir $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisi verilsin. $\forall\ \varepsilon > 0$ için*

$$\delta\left(\{n : |x_n - L| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_j \frac{\#\{n \leq j : |x_n - L| \geq \varepsilon\}}{j} = 0$$

*ise, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $L$ sayısına **istatistiksel yakınsaktır** denir*

$$st - \lim_n x_n = L$$

*ile gösterilir [1].*

İstatistiksel yakınsaklık tanımından anlaşılacağı üzere $(x_n)$ dizisi $L$ sayısına istatistiksel yakınsak ise $L$ sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz elemanı olacağı gibi indis kümesinin yoğunluğu 0 olmak üzere komşuluğun dışında da sonsuz sayıda eleman olabilir. Dolayısıyla bir noktaya yakınsak herhangi bir dizi aynı noktaya istatistiksel yakınsaktır fakat bunun aksi herzaman doğru değildir. Başka bir deyişle yakınsak dizilerin uzayını $c$ ile, istatistiksel yakınsak dizilerin uzayını da $s$ ile gösterirsek, $c \subset s$ olur. Bu içerme kesin olup aşağıdaki örnekler bu durumu açıklamaktadır:

**Örnek 2.1.3** *$(u_n)$ dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım :*

$$u_n := \begin{cases} 1, & n = m^2,\ m \in \mathbb{N} \\ 0, & \textit{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

*Bu durumda doğrudan*

$$st - \lim_n u_n = 0$$

*elde edilir. Üstelik* $(u_n)$ *dizisinin klasik manada yakınsak olmadığına dikkat ediniz.*

**Örnek 2.1.4** $(u_n)$ *dizisi şu şekilde tanımlansın :*

$$u_n := \begin{cases} n^2, & n = m^3,\ m \in \mathbb{N} \\ 1/n, & \textit{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

*Açıkca görülmektedir ki*

$$st - \lim_n u_n = 0$$

*eşitliği sağlanır. Burada* $(u_n)$ *dizisi ne klasik anlamda yakınsak ne de sınırlıdır. O halde sınırsız bazı diziler istatistiksel yakınsak olabilir.*

Şimdi istatistiksel yakınsaklık için bazı karakterizasyonları hatırlatalım.

**Teorem 2.1.5** $x = (x_n)$ *dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul*

$$\delta\{n_k : k \in N\} = 1,\ \lim_k x_{n_k} = L$$

*olacak şekilde en az bir* $(x_{n_k})$ *altdizisinin olmasıdır* [*3, 31*].

**Sonuç 2.1.6** $st - \lim_n x_n = L$ *olması için gerek ve yeter koşul her* $\varepsilon > 0$ *için* $\delta(K) = 1$ *olacak şekilde bir* $K \subseteq N$ *kümesi ve* $n_o = n_0(\varepsilon)$ *indisi vardır öyle ki* $n \in K$ *koşulunu gerçekleyen her* $n > n_0$ *için* $|x_n - L| < \varepsilon$ *sağlanır. Başka bir deyişle,* 0 *yoğunluklu bir indis kümesi dışında* $(x_n)$ *dizisinin klasik manada yakınsak olması, dizinin istatistiksel yakınsak olmasına eşdeğerdir.* [*3, 31*].

$\delta\{k \in N : \ P(k)$ geçerlidir$\} = 1$ ise $P$ önermesi hemen hemen her yerde geçerlidir denir ve kısaca "*h.h.h.*" ile gösterilir. Dolayısıyla yukarıdaki bilgiler bize gösterir ki "$(x_n)$ dizisinin $L$ ye istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart *h.h.h.* $\lim_n x_n = L$ olmasıdır".

## 2.2. $A$-istatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde $A$-istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılacak ve bu kavramla ilgili temel teoremler verilecektir. Öncelikle toplanabilme teorisinde iyi bilinen aşağıdaki kavramlara ihtiyaç duyacağız.

**Tanım 2.2.1** *Sonsuz boyutlu* $A := [a_{jn}]$ $(j, n = 1, 2, ...)$ *matrisi ve* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi için,*

$$(Ax)_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}x_n$$

*şeklinde tanımlanan* $Ax := ((Ax)_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *dizisine* $x$ *in* $A$-***dönüşüm dizisi*** *denir; burada her* $n$ *için* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}x_n$ *serisinin yakınsak kabul edilmektedir [32].*

**Tanım 2.2.2** *Eğer her* $\lim_n x_n = L$ *için* $\lim_n (Ax)_n = L$ *ise* $A$ *matrisine* ***regüler matris*** *denir [32, 33].*

Aşağıda Silverman-Toeplitz koşulu olarak bilinen regüler matrisler için bir karakterizasyon verilmektedir.

**Teorem 2.2.3** *Bir* $A = [a_{jn}]$ *matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart*

(*i*) $\sup_j \sum_{n=1}^{\infty} |a_{jn}| < \infty$,

(*ii*) $\forall n$ *için* $a_n := \lim_j a_{jn} = 0$,

(*iii*) $\lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$

*koşullarının sağlanmasıdır [32, 33].*

Şimdi regüler matris için bir örnek verelim.

**Örnek 2.2.4** *Terimleri* $1 \leq j \leq n$ *için* $c_{jn} = 1/j$ *ve diğer durumlarda* $c_{jn} = 0$ *olarak tanımlanan* $C_1 = [c_{jn}]$ *matrisi, Cesáro matrisi olarak adlandırılır. Cesáro matrisinin regüler olduğu kolayca görülebilir.*

Bu bilgilerden sonra $A$-yoğunluk ve $A$-istatistiksel yakınsaklık kavramlarını verebiliriz.

**Tanım 2.2.5** $A = [a_{jn}]$ *negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Verilmiş* $K \subset \mathbb{N}$ *kümesi için* $K$ *nın* $A$-***yoğunluğu***

$$\delta_A(K) := \lim_j \sum_{n\in K} a_{jn}$$

*şeklinde tanımlanır; burada* $\lim_j \sum_{n\in K} a_{jn}$ *limitinin mevcut olduğu kabul edilmektedir.*

**Tanım 2.2.6** *Her $\varepsilon > 0$ için*

$$\delta_A\left(\{n : |x_n - L| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_j \sum_{n:|x_n - L| \geq \varepsilon} a_{jn} = 0$$

*ise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $L$ sayısına $A$-**istatistiksel yakınsak** denir ve*

$$st_A - \lim_n x_n = L$$

*ile gösterilir [20].*

Tanım 2.2.6 dan anlaşılabileceği üzere $A$-istatistiksel yakınsaklık tanımı, istatistiksel yakınsaklık tanımının daha genelleştirilmiş halidir. $A$ matrisi yerine $C_1$ matrisi alınırsa $A$-istatistiksel yakınsaklık tanımı, istatistiksel yakınsaklık tanımına indirgenir. Eğer $A$ matrisi yerine $I$ birim matrisi alınırsa, $A$-istatistiksel yakınsaklık klasik yakınsaklık tanımına dönüşür. Teorem 2.1.5 in benzeri $A$-istatistiksel yakınsaklık için aşağıdaki şekilde verilebilir:

**Teorem 2.2.7** *Bir $x = (x_n)$ dizisi verildiğinde*

$$st_A - \lim_n x_n = L$$

*eşitliğinin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul*

$$\delta_A\{n_k : k \in N\} = 1, \ \lim_k x_{n_k} = L$$

*olacak şekilde en az bir $(x_{n_k})$ altdizisinin olmasıdır [9].*

$A-$istatistiksel yakınsaklık kavramı normlu uzaylarda şu şekilde verilmiştir:

**Tanım 2.2.8** *$(X, \|.\|)$ normlu uzay ve $x = (x_n)$, $X$ değerli bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta_A\left(\{n \in N : \|x_n - x_0\| \geq \varepsilon\}\right) = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası varsa $x = (x_n)$ dizisi $x_0$ noktasına $X$ normlu uzayında $A$-istatistiksel yakınsaktır denir [21].*

Teorem 2.2.7 den yakınsak her dizinin $A$-istatistiksel yakınsak olduğu kolaylıkla görülebilir; fakat bunun aksi herzaman doğru değildir. Aşağıda verilecek teorem bu durumu açıkca göstermektedir:

**Teorem 2.2.9** *$A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. $\lim_j \max_n\{a_{jn}\} = 0$ ise, $A$-istatistiksel yakınsaklık alışılmış yakınsaklıktan daha kuvvetlidir [21].*

## 2.3. Korovkin Teoremi

Bu bölümde klasik Korovkin Teoremi tanıtılacaktır. Teorem verilmeden önce bu konuyla ilgili fonksiyonel analizde iyi bilinen aşağıdaki temel tanımlara ihtiyaç du yacağız.

**Tanım 2.3.1** *$X$ ve $Y$, $K$ skalar cismi üzerinde iki fonksiyon uzayı ve $\phi : X \to Y$ dönüşümü gözönüne alınsın (buradaki $K$ skalar cisminin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olduğu gözönüne alınmaktadır). Bu şekildeki $\phi$ dönüşümüne bir **operatör** adı verilir. Özel olarak $Y = K$ alınırsa, $\phi$ ye bir **fonksiyonel** denir.*

**Tanım 2.3.2** *$\phi : X \to Y$ operatörü verildiğinde her $f, g \in X$ ve $a, b \in K$ için*

$$\phi(a.f + b.g) = a.\phi(f) + b.\phi(g)$$

*özelliğini sağlıyorsa, $\phi$ ye **lineer operatör** denir. Benzer şekilde lineer fonksiyonel de tanımlanabilir.*

**Tanım 2.3.3** *$\phi : X \to Y$ lineer operatörü verildiğinde $\forall\ f \geq 0$ için $\phi(f) \geq 0$ özelliğini sağlıyorsa, $\phi$ dönüşümü **pozitif lineer operatör** adını alır.*

Alışıldığı gibi, bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel-değerli fonksiyonların uzayını $C[a, b]$ ile gösterelim. Bu durumda $C[a, b]$ uzayı alışılmış supremum normuna göre bir Banach uzayıdır. Şimdi klasik Korovkin teoremini verebiliriz.

**Teorem 2.3.4** *$L_n : C[a, b] \to C[a, b]$ pozitif lineer operatorler dizisi olsun. Herbir $i = 0, 1, 2,\quad e_i(x) = x^i$ olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(e_i; x) = e_i(x)$$

*eşitliği sağlanıyorsa, her $f \in C[a, b]$ için*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f; x) = f(x)$$

*olur; buradaki yakınsaklıklar, $[a, b]$ üzerinde düzgündür [22].*

Orhan ve Gadjiev 2002 yılında klasik Korovkin Teoremine, toplanabilme teorisinden istatistiksel yakınsaklık metodunu uygulayarak daha genel bir teorem elde etmişlerdir.

**Teorem 2.3.5** *$L_n : C[a, b] \to C[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. Herbir $i = 0, 1, 2$ için*

$$st - \lim_{n\to\infty} \|L_n(e_i) - e_i\| = 0$$

*eşitliği sağlanıyorsa, her $f \in C[a,b]$ için*

$$st - \lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\| = 0$$

*olur; buradaki $\|\cdot\|$ sembolu alışılmış supremum normunu göstermektedir [11].*

## 2.4. Topolojik Uzaylarda Yakınsaklık

Bu bölümde topolojik uzaylarda yakınsaklık ve bu kavramla ilgili olarak filtre kavramı tanımlanacaktır. Topolojik uzaylarda yakınsaklıkla ilgili birkaç temel özellikten bahsedilecektir. Bu bölümde kullanacağımız temel tanımlar ve teoremler [34] nolu kaynaktan alınmıştır.

**Tanım 2.4.1** *$X$ boştan farklı bir küme ve $\tau \subseteq X$ bir kümeler ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(X, \tau)$ **topolojik uzay** olarak adlandırılır:*

*(i)* $\varnothing \in \tau$,

*(ii)* $X \in \tau$,

*(iii)* $U \in \tau$ *ve* $V \in \tau$ *ise* $U \cap V \in \tau$,

*(iv)* *$I$ indis kümesi olsun. Her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\cup_{i\in I} U_i \in \tau$ olur [34].*

**Tanım 2.4.2** *$X$ topolojik uzay ve $x = (x_n)$, $X$ de bir dizi olsun. $x$ dizisi $x_0$ noktasına **yakınsaktır** ancak ve ancak $x_0$ ın her $U$ komşuluğu için öyle bir $n_0 \in N$ vardır ki $\forall n \geq n_0$ için $x_n \in U$ olur. Bu durum $x_n \to x$ veya $\lim_n x_n = x$ ile gösterilir [34].*

**Tanım 2.4.3** *$X$ bir topolojik uzay ve $F \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki üç özelllik sağlanıyorsa $F$ bir **filtre** adını alır [34] :*

*(i)* $\forall\ U \in F$ *ve* $U \subseteq V$ *için* $V \in F$,

*(ii)* $U, V \in F$ *ise* $U \cap V \in F$,

*(iii)* $\varnothing \notin F$.

**Örnek 2.4.4** *$X$ topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $U_x$, $x$ noktasının komşuluk sistemi olsun. $U_x$ bir filtredir.*

**Tanım 2.4.5** *$X$ topolojik uzay ve $C$, $X$ in boş olmayan alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Her $U_1, U_2 \in C$ için $U_3 \subset U_1 \cup U_2$ ve $U_3 \in C$ olacak şekilde bir $U_3$ kümesi varsa, $C$ ye bir **filtre bazı** denir [34].*

**Tanım 2.4.6** *$X$ bir topolojik uzay, $x \in X$, $F$ bir filtre olsun. Her $U \subseteq F$ için $x \in U$ ise $F$ filtresi $x$ noktasına yakınsaktır denir ve $F \to x$ ile gösterilir [34].*

Aşağıdaki sonuçlar verilen tanımlardan elde edilebilir.

**Teorem 2.4.7** *$X$ topolojik uzay, $x \in X$ , $A \subset X$ olsun . $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter koşul öyle bir $F \subseteq X$ filtresi vardır ki $F \to x$ gerçeklenir [34].*

**Lemma 2.4.8** *$X$ Haussdorf topolojik uzayı ise her $F \subseteq X$ filtresi için $F$ in yakınsadığı en fazla tek nokta vardır [34].*

**Lemma 2.4.9** *$X, Y$ topolojik uzaylar $x \in X$, $F \subseteq X$ bir filtre ve $F \to x$ olsun. $g : X \to Y$ fonksiyonu, sürekli bir fonksiyon ise $g(F) \to g(x)$ olur [34].*

**Tanım 2.4.10** *$X$ topolojik uzay ve $\phi$, $X$ üzerinde bir kümeler ailesi olsun. $\phi$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\phi$ küme ailesine $X$ üzerinde bir **düzgün yapı** denir [34] :*

(i) *$U \in \phi$ ise $U$, $\triangle = \{(x, x) : x \in X\}$ köşegenini içerir,*

(ii) *$U \in \phi$, $U \subseteq V$, $V \subseteq X \times X$ ise $V \in \phi$ dir.*

(iii) *$U, V \in \phi$ ise $U \cap V \in \phi$ dir,*

(iv) *$U \in \phi$ ise öyle bir $V \in \phi$ kümesi vardır ki her $(x, y)$ ve $(y, z) \in V$ için $(x, z) \in U$ olur,*

(v) *$U \in \phi$ ise $U^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in U\}$ kümesi de $\phi$ nin elemanıdır.*

## 2.5. Çarpım Uzaylarında Yakınsaklık

Bu bölümde topolojik uzaylarda tanımladığımız özelliklerin çarpım uzayları için geçerli olanları ele alınacaktır.

**Tanım 2.5.1** *$A$ bir indis kümesi, $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ bir kümeler ailesi olsun. $X_\alpha$ kümeler ailesinin **kartezyen çarpımı** $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır [34] :*

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : x,\ A \text{ dan } \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ ya bir fonksiyondur öyle ki } \forall \alpha \in A \text{ için } x(\alpha) \in X_\alpha\ \}$$

**Tanım 2.5.2** *$A$ bir indis kümesi, $\forall \alpha \in A$ için $X_\alpha$ bir topolojik uzay olsun. $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ bir **çarpım uzayı**dır [34].*

**Tanım 2.5.3** ***Çarpım topolojisi*** *ya da diğer ismiyle* ***Tychonoff çarpım topolojisi*** $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *uzayı üzerinde* $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ *kümesini baz olarak alan topoloji olarak tanımlanır öyle ki* $\forall \alpha \in A$ *için* $U_\alpha$ *kümesi* $X_\alpha$ *üzerinde açık bir kümedir ve* $U_\alpha \neq X_\alpha$ *olan en az sonlu sayıda* $\alpha \in A$ *vardır [34].*

Yakınsaklık, filtre, filtre bazı, filtre yakınsaklığı tanımları çarpım uzaylarında da aynen geçerlidir.

**Tanım 2.5.4** $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta,\ \pi_\beta(x) = x_\beta$ *olarak tanımlanan,* $\pi_\beta$ *fonksiyonu* $\beta$***.yıncı projeksiyon*** *olarak isimlendirilir [34].*

**Teorem 2.5.5** *$F$, $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ çarpım uzayı üzerinde bir filtre olsun. $F$ filtresinin $X$ çarpım uzayı üzerinde yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \alpha \in A$ için $\pi_\alpha(F)$, $X_\alpha$ da yakınsak olmasıdır [34].*

Haussdorf yakınsaklık özellikleri, filtrelerle ilgili diğer teoremler ve düzgün yapı tanımı çarpım uzaylarında topolojik uzaylardaki tanım hiç değiştirilmeden aynı haliyle geçerlidir.

## 2.6. Yoshinaga-Tamura Yaklaşım Teoremi

Teorem 2.3.4 ün ifadesinden anlaşılabileceği üzere Korovkin Teoremi sürekli fonksiyon uzayları üzerinde geçerlidir. Sonraki yıllarda Korovkin Teoreminin daha genel fonksiyon uzaylarında geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde vereceğemiz Yoshinaga-Tamura Teoremi, Korovkin Teoreminin soyut topolololjik uzaylarda geçerli bir genelleşmesidir.

Aşağıdaki şartlar teoremin varsayımlarıdır:

$(i)$ $X$ Haussdorff uzayı ve $(X,\mathcal{U})$ bir düzgün yapı olsun.

$(ii)$ $\mathcal{U}$ aralıklardan oluşan bir filtre olsun öyle ki $\Delta \subseteq \mathcal{U}$ gerçeklensi;burada $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$.

$(iii)$ $Y \subseteq X$ ve $Y$ kompakt olsun. $\mathcal{F}$, $X$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlardan oluşan bir vektör uzayı olsun öyle ki $1 \in \mathcal{F}$ gerçeklensin.

$(iv)$ $L_n : \mathcal{F} \to \mathcal{R}^Y$ pozitif lineer oparetorlerin dizisi olsun.

$(v)$ Reel değerli $X \times Y$ üzerinde tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan $F(x,y)$ fonsiyonlarının mevcut olduğunu kabul edelim:

- $X \times Y$ üzerinde $F(x,y) \geq 0$ ve her $y \in Y$ için $F(y,y) = 0$ dir.

- $F_y$ fonksiyonu $X$ üzerinde $F_y(x) := F(x,y)$ olarak tanımlanır ve her $y \in Y$ için $F_y \in \mathcal{F}$ dir.

- Her $y \in Y$ için $F_y(x)$ fonksiyonu, $Y$ üzerinde süreklidir.

- Her $U \in \mathcal{U}$ için $(X \times Y) - U$ kümesi üzerinde hesaplanan $\rho(U) = \inf F(x,y) > 0$ dir.

- Öyle $y_1, y_2 \in Y$ , $y_1 \neq y_2$ noktaları vardır ki $F_{y_1}(x)$ ve $F_{y_2}(x)$ sınırlı fonksiyonlardır ve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} L_n(F_{y_1})(x) &= F(x,y_1) \\ \lim_{n\to\infty} L_n(F_{y_2})(x) &= F(x,y_2) \\ \lim_{n\to\infty} L_n(F_y)(y) &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Yukarıdaki varsayımlar altında Yoshinaga ve Tamura aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

**Teorem 2.6.1** *$f$, $X$ üzerinde tanımlı ve sınırlı, $Y$ üzerinde sürekli, reel değerli bir fonksiyon olsun. $f \in \mathcal{F}$ ise, her $y \in Y$ için*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)(y) = f(y)$$

*gerçeklenir* [28].

Teoremin hipotezlerini incelediğimizde görüyoruz ki sonuç bütün $X$ Haussdorff uzayları ve $(v)$ şartını sağlayan $F(x,y)$ fonksiyon ailesi üzerinde geçerlidir. Buradan anlaşılacağı üzere Yoshinaga-Tamura teoremi Korovkin Teoremini önemli ölçüde geliştirmektedir.

Bir sonraki bölümde bu teoremin istatistiksel versiyonunu elde etmeye çalışacağız.

# 3. İstatistiksel Yaklaşım Teoremleri

Bu bölümde Yoshinaga-Tamura teoremini istatistiksel yakınsaklık yardımıyla geliştireceğiz. Elde edeceğimiz teorem topolojik uzaylarda geçerli genel bir istatistiksel yaklaşım teoremi olacaktır. İlk olarak tek değişkenli hali ispatlayıp daha sonra sonuçlarımızı çok değişkenli fonksiyonlara taşıyacağız.

## 3.1. Tek Değişkenli Haldeki Teoremler

Elde edeceğimiz teoremimizin beş varsayımının ilk dördü Yoshinaga-Tamura teoremiyle aynı olacaktır. Beşinci kabulü ise aşağıdaki şekilde daha zayıf bir koşulla değiştirilecektir.

Şimdi teoremimizin tüm kabüllerini sıralayalım.
$(i)-(iv)$ koşulları Bölüm 2.6 da verildiği gibi alınsın. Şimdi oradaki $(v)$ koşulunu şu şekilde zayıflatalım:

$(v)'$ Reel değerli $X \times Y$ üzerinde tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan $F(x,y)$ fonksiyonlarının varlığını kabul edelim:

- $X \times Y$ üzerinde $F(x,y) \geq 0$ ve her $y \in Y$ için $F(y,y) = 0$ dir.
- $F_y$ fonksiyonu $X$ üzerinde $F_y(x) := F(x,y)$ olarak tanımlanıyor ; her $y \in Y$ için $F_y \in \mathcal{F}$ dir.
- Her $y \in Y$ için $F_y(x)$ fonksiyonu, $Y$ üzerinde süreklidir.
- Her $U \in \mathcal{U}$ için $(X \times Y) - U$ kümesi üzerinde hesaplanan $\rho(U) = \inf F(x,y) > 0$ dır
- Öyle $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, vardır ki $F_{y_1}(x)$ ve $F_{y_2}(x)$ sınırlı fonksiyonlardır ve her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} st_A - \lim_n \|L_n(F_{y_1}) - F_{y_1}\| &= 0, \\ st_A - \lim_n \|L_n(F_{y_2}) - F_{y_2}\| &= 0, \\ st_A - \lim_n \left( \sup_{y \in Y} L_n(F_y; y) \right) &= 0, \end{aligned}$$

özdeşlikleri sağlanır; burada $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan bir toplanabilme matrisini ve $\|\cdot\|$ sembolü ise kompakt $Y$ kümesi üzerinde tanımlı klasik supremum normunu göstermektedir.

Yukarıdaki varsayımlar altında aşağıdaki teoremin gerçeklendiği bu bölümde gösterilecektir.

**Teorem 3.1.1** *$f$, $X$ üzerinde tanımlı ve sınırlı tanımlı ve $Y$ üzerinde sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. $(L_n)$ pozitif lineer operatörler dizisi yukarıdaki koşulları gerçeklesin. Bu durumda her $f \in \mathcal{F}$ için,*

$$st_A - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

*gerçeklenir.*

Burada dikkat edelim ki aşağıdaki koşul tek başına teoremimizin hipotezlerini gerektirir:

$$st_A - \lim_n \left( \sup_{x,y \in X} |L_n(F_y; x) - F_y(x)| \right) = 0 \tag{3.1.1}$$

Teoremin ispatına geçmeden önce gerekli lemmalar verilecektir. Aşağıdaki ilk lemma Yoshinaga ve Tamura tarafından ispatlanmıştır.

**Lemma 3.1.2** *$V \subseteq X \times Y$ açık bir küme ve $\Delta_Y := \Delta \cap (X \times Y) \subseteq V$ olsun. $U \cap (X \times Y) \subset V$ olacak şekilde en az bir $U \in \mathcal{U}$ vardır [28].*

**Lemma 3.1.3** *$\{\|L_n(e_0)\|\}$ dizisi $A$-istatistiksel sınırlıdır; yani öyle bir $M > 0$ sayısı ve $A$-yoğunluğu 1 olan $K \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır ki her $n \in K$ için*

$$\|L_n(e_0)\| \leq M$$

*eşitsizliği gerçeklenir.*

**İspat.** $(v)'$ şartını sağlayan her $y_1, y_2$ noktaları için öyle bir $U_0 \in \mathcal{U}$ kümesi vardır ki $(y_1, y_2) \notin U_0$ olur. Şimdi keyfi bir $U \in \mathcal{U}$ kümesi alalım öyle ki $U = U^{-1}$ ve $U \circ U \subset U_0$ olsun. Öyleyse aşağıdaki eşitsizlik her $x \in X$ için geçerlidir:

$$F_{y_1}(x) + F_{y_2}(x) \geq \rho(U).$$

Eşitsizliğin her iki tarafına $L_n$ operatörünü uygularsak her $y \in Y$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$L_n(F_{y_1}; y) + L_n(F_{y_2}; y) \geq \rho(U) L_n(e_0; y) \geq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \rho(U) L_n(e_0; y) \quad &\leq \quad |L_n(F_{y_1}; y) - F_{y_1}(y)| + |L_n(F_{y_2}; y) - F_{y_2}(y)| \\ &\quad + \{F_{y_1}(y) + F_{y_2}(y)\} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $y \in Y$ üzerinden her iki tarafın supremumunu alırsak ve

$$M_1 := \frac{1}{\rho(U)} \|F_{y_1} + F_{y_2}\|$$

yazarsak, her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\|L_n(e_0)\| \leq \frac{1}{\rho(U)} \|L_n(F_{y_1}) - F_{y_1}\| + \frac{1}{\rho(U)} \|L_n(F_{y_2}) - F_{y_2}\| + M_1. \tag{3.1.2}$$

Şimdi herhangi bir $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım

$$\begin{aligned} K_1 &: = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|L_n(F_{y_1}) - F_{y_1}\| \geq \frac{\varepsilon\rho(U)}{2} \right\}, \\ K_2 &: = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|L_n(F_{y_2}) - F_{y_2}\| \geq \frac{\varepsilon\rho(U)}{2} \right\} \end{aligned}$$

$(v)'$ koşulundan yararlanarak

$$\delta_A(K_1) = \delta_A(K_2) = 0$$

buluruz. $K$ kümesini $K := (\mathbb{N} - K_1 \cup K_2)$ olarak tanımlarsak

$$\delta_A(K) = 1$$

olduğu görülür. (3.1.2) eşitsizliğinden yararlanarak her $n \in K$ öyle ki $n \notin K_1$ ve $n \notin K_2$ için

$$\|L_n(e_0)\| \leq \varepsilon + M_1 =: M,$$

olduğu görülür ki bu eşitsizlik ispatı tamamlar. ■

**Lemma 3.1.4** *$g(x,y)$ sınırlı, reel değerli, $X \times Y$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca $g$ fonksiyonu $\Delta_Y = \{(y,y) : y \in Y\}$ üzerinde sürekli olsun. Her $y \in Y$ için $g_y$ fonksiyonu $g_y(x) := g(x,y)$ olarak tanımlansın. Kabul edelim ki $g_y \in \mathcal{F}$ , her $y \in Y$ için $g_y(y) = 0$ olsun. Bu durumda*

$$st_A - \lim_n \left( \sup_{y \in Y} |L_n(g_y; y)| \right) = 0$$

*olur.*

**İspat.** $g$ fonksiyonu her $(y,y) \in \Delta_Y$ noktası üzerinde sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ ve $y \in X$ için öyle bir $V(y)$ komşuluğu vardır ki

$$|g(x,y)| = |g(x,y) - g(y,y)| < \varepsilon$$

eşitsizliği her $(x, y) \in V(y) \times (V(y) \cap Y)$ için gerçeklenir. $V$ kümesini

$$V := \bigcup_{y \in Y} \{V(y_0) \times (V(y_0) \cap Y)\}$$

şeklinde tanımlarsak, kolaylıkla $V$ nin $X \times Y$ kümesinin $\Delta_Y$ yi içeren açık bir altkümesi olduğunu görebiliriz. Ayrıca Lemma (3.1.2) den bazı $U \in \mathcal{U}$ kümeleri için $U \cap (X \times Y) \subset V$ olduğu bulunur. Şimdi

$$C := \sup_{(x,y) \in X \times Y} |g(x, y)|$$

olarak tanımlanırsa her $(x, y) \in X \times Y$ için

$$|g(x, y)| \leq \varepsilon + \frac{C}{\rho(U)} F_y(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak

$$|L_n(g_y; y)| \leq L_n (|g_y| ; y)) \leq \varepsilon L_n(e_0; y) + \frac{C}{\rho(U)} L_n (F_y; y)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\sup_{y \in Y} |L_n(g_y; y)| \leq \varepsilon \|L_n(e_0)\| + \frac{C}{\rho(U)} \sup_{y \in Y} L_n(F_y; y).$$

Lemma (3.1.3) den yararlanarak, aşağıdaki eşitsizliği her $n \in K$ için sağlayan $\delta_A(K) = 1$ olacak şekilde $K \subseteq N$ kümesi ve $M$ reel sayısının varlığını görebiliriz:

$$\sup_{y \in Y} |L_n(g_y; y)| \leq M\varepsilon + \frac{C}{\rho(U)} \sup_{y \in Y} L_n(F_y; y). \tag{3.1.3}$$

Verilen $r > 0$ sayısı için öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim ki $r > M\varepsilon$ sağlansın.Şimdi aşağıdaki kümeleri gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} D \ &: = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sup_{y \in Y} |L_n(g_y; y)| \geq r \right\}, \\ D' \ &: = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sup_{y \in Y} L_n(F_y; y) \geq \frac{(r - \varepsilon M)\, \rho(U)}{C} \right\}. \end{aligned}$$

(3.1.3) eşitsizliğini kullanarak $D \cap K \subset D' \cap K \subset D'$ içermelerini elde ederiz ki bu bize her $j \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq \sum_{n \in D \cap K} a_{jn} \leq \sum_{n \in D' \cap K} a_{jn} \leq \sum_{n \in D'} a_{jn}.$$

sonucunu verir. Şimdi $j \to \infty$ için her iki tarafın limitini alırsak, $(v)'$ koşulundan yararlanarak

$$\lim_j \sum_{n \in D \cap K} a_{jn} = 0 \tag{3.1.4}$$

sonucunu elde ederiz. Ayrıca aşağıdaki eşitliği de kolaylıkla yazabiliriz:

$$\sum_{n \in D} a_{jn} = \sum_{n \in D \cap K} a_{jn} + \sum_{n \in D \cap (\mathbb{N} - K)} a_{jn} \leq \sum_{n \in D \cap K} a_{jn} + \sum_{n \in (\mathbb{N} - K)} a_{jn} \tag{3.1.5}$$

$\delta_A(K) = 1$ olduğundan $\delta_A(\mathbb{N} - K) = 0$ olur. Dolayısıyla (3.1.4) ve (3.1.5) ten yararlanarak

$$\lim_j \sum_{n \in D} a_{jn} = 0$$

olur. Yani

$$st_A - \lim_n \left( \sup_{y \in Y} |L_n(g_y; y)| \right) = 0$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu sonuç ispatı tamamlar. ■

Şimdi Teoremimizi ispatlamaya hazırız.

**Teorem 3.1.1 in İspatı.** Lemma [3.1.3] ün ispatındaki gibi, $U_0, U \in \mathcal{U}$ kümelerini alalım öyle ki $y_1, y_2$ noktaları $(v)'$ koşulunu sağlayan noktalar olsun ve, $U = U^{-1}$, $(y_1, y_2) \notin U_0$ ve $U \circ U \subset U_0$ gerçeklensin. Her $(x, y) \in X \times Y$ için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

$$G(x) := F(x, y_1) + F(x, y_2) \tag{3.1.6}$$

ve

$$g(x, y) := f(x) - \frac{f(y)}{G(y)} G(x) \tag{3.1.7}$$

$G \in \mathcal{F}$ olduğu görülür. $F_{y_1}$ ve $F_{y_2}$ nin $X$ üzerinde sınırlılığından dolayı $0 < \rho(U) \leq G(x) \leq C$ eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sayısı vardır. Ayrıca her $y \in Y$ için $g_y \in \mathcal{F}$ ve $g_y(y) = 0$ olduğunu gözönünde bulunduralım. Her $y \in Y$ noktası için $G(y) > 0$ ve $f(x)$, $f(y)$, $G(x)$, $G(y)$ fonksiyonları $y$ noktasında sürekli olduğundan, $g(x, y)$ fonksiyonunun her $(y, y) \in \Delta_y$ noktasında sürekli olduğu görülür. $f$, $X$ kümesi üzerinde sürekli olduğundan $M := \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$ yazabiliriz. Dolayısıyla her $(x, y) \in X \times Y$ için aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir:

$$|g(x, y)| \leq M + \frac{M}{\rho(U)} C.$$

Lemma (3.1.4) ten yararlanarak

$$st_A - \lim_n \left( \sup_{y \in Y} |L_n(g_y; y)| \right) = 0 \tag{3.1.8}$$

bulunur: Öte yandan (3.1.6) ve (3.1.7) den

$$g_y(x) = f(x) - \frac{f(y)}{F_{y_1}(y) + F_{y_2}(y)} \left( F_{y_1}(x) + F_{y_2}(x) \right)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu eşitsizlik aşağıdaki sonucu gerektirir:

$$L_n(g_y; y) = L_n(f; y) - \frac{f(y)}{F_{y_1}(y) + F_{y_2}(y)} \left( L_n(F_{y_1}; y) + L_n(F_{y_2}; y) \right).$$

Buradan

$$\begin{aligned} L_n(f; y) - f(y) \quad = \quad & L_n(g_y; y) + \frac{f(y)}{F_{y_1}(y) + F_{y_2}(y)} \{ (L_n(F_{y_1}; y) - F_{y_1}(y)) \\ & + (L_n(F_{y_2}; y) - F_{y_2}(y)) \} \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafında $y \in Y$ üzerinden supremum alırsak,

$$\begin{aligned} \|L_n(f) - f\| \leq \; & \sup_{y \in Y} |L_n(g_y; y)| \\ & + \frac{M}{\rho(U)} \{ \|L_n(F_{y_1}) - F_{y_1}\| + \|L_n(F_{y_2}) - F_{y_2}\| \} \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

olduğunu görürüz. Şimdi verilen bir $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} E \quad : \quad & = \{ n \in \mathbb{N} : \|L_n(f) - f\| \geq \varepsilon \}, \\ E_1 \quad : \quad & = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sup_{y \in Y} |L_n(g_y; y)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}, \\ E_2 \quad : \quad & = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|L_n(F_{y_1}) - F_{y_1}\| \geq \frac{\varepsilon \rho(U)}{3M} \right\}, \\ E_3 \quad : \quad & = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|L_n(F_{y_2}) - F_{y_2}\| \geq \frac{\varepsilon \rho(U)}{3M} \right\}. \end{aligned}$$

Bu durumda (3.1.9) dan

$$E \subset E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

olur. Dolayısıyla her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n \in E} a_{jn} \leq \sum_{n \in E_1} a_{jn} + \sum_{n \in E_2} a_{jn} + \sum_{n \in E_3} a_{jn}$$

elde edilir. Şimdi $j \to \infty$ için limit alınırsa $(v)'$ koşulu uyarınca, (3.1.8) den

$$\lim_j \sum_{n \in E} a_{jn} = 0$$

eşitliği elde edilir ki bu sonuç ispatı tamamlar. ■

Bu teoremin özel halleri dördüncü bölümde tartışılacaktır. Fakat öncelikle elde ettiğimiz bu sonucun Yoshinaga-Tamura teoreminden daha kuvvetli olduğunu gösterebilmek için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

**Örnek 3.1.5** *$A = C_1$ Cesáro matrisi olsun ve $(u_n)$ dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım*

$$u_n := \begin{cases} 1, & n = m^2, \ m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

*İstatistiksel yakınsaklığın tanımından*

$$st_{C_1} - \lim_n u_n = st - \lim_n u_n = 0$$

*bulunur. $\{L_n\}$, Yoshinaga-Tamura Teoreminin koşullarını sağlayan operatörler dizisi olmak üzere $T_n$ operatörlerini*

$$T_n(f) := (1 + u_n) L_n(f)$$

*şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $T_n$ operatörlerinin teoremimizin şartlarını sağladığı açıktır ve dolayısıyla her $f \in \mathcal{F}$ için*

$$st - \lim_n \|T_n(f) - f\| = 0.$$

*elde edilir. Fakat dikkat edilirse $(u_n)$ dizisinin seçiminiden dolayı $T_n$ operatörleri Yoshinaga-Tamura teoreminin şartlarını sağlamamaktadır. Bu durum Teorem* 3.1.1 *in daha kuvvetli bir yaklaşım sonucu olduğunu gösterir.*

## 3.2. Çok Değişkenli Haldeki Teoremler

Bir önceki bölümde herhangi bir $X$ Haussdorff uzayı üzerinde belli koşullar altında genel bir istatistiksel yaklaşım teoremi elde etmiştik. Şimdi kabulleri uygun bir şekilde değiştirererk bu teoremi çok değişkenli fonksiyonlar teorisi üzerinde ele alacağız. Bunun için ikinci bölümde değindiğimiz çarpım uzaylarından yardım alacağız.

Teoremimizi çarpım uzaylarına genişletmek için bazı varsayımlara ihtiyacımız olacak. Bunlara geçmeden önce temel tanımları verelim.

Her $k=1,2,...,r$ $(r\in\mathbb{N})$ için $X_k$ bir Haussdorfff uzayı ve $(X_k,\mathcal{U}_k)$ düzgün yapı olsun. $\mathcal{U}_k$ küme ailesi $X_k$ üzerinde tanımlı ve $\Delta_k=\{(x_k,x_k):x_k\in X_k\}\subseteq X_k\times X_k$ $(k=1,2,...,r)$ köşegini içeren filtre olsun. $\mathbf{X}:=\prod_{k=1}^{r}X_k$ ve $\mathbb{U}:=\prod_{k=1}^{r}\mathcal{U}_k$, olarak tanımlanırsa $\mathbf{X}$ uzayının $r$-boyutlu bir Haussdorff uzayı olduğu ve $(\mathbf{X},\mathbb{U})$ nun $X$ üzerinde bir düzgün yapı olduğu görülür. Her $k=1,2,...,r$, için $Y_k$ uzayı $X_k$ uzayının bir kompakt altkümesi olsun. $\mathbf{Y}:=\prod_{k=1}^{r}Y_k$ olarak tanımlarsak $\mathbf{Y}$ uzayının $\mathbf{X}$ in kompakt bir altkümesi olduğu görülür. Daha önce de tanımladığımız gibi $\mathcal{F}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun, $\mathcal{F}$ 'nin elemanları $X$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsunlar ve $\mathcal{F}$, sabit fonksiyon olan $e_0(x)=1$ fonksiyonunu içersin. Ayrıca her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathbf{L}_n:\mathcal{F}\to\mathbb{R}^{\mathbf{Y}}$ pozitif lineer operatörler olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathbf{F}:X\times X\to R$ fonksiyonunun varlığını kabul edelim:

$(i)$ Her $\mathbf{x}=(x_1,..,x_r)\in\mathbf{X}$ ve $\mathbf{y}=(y_1,..,y_r)\in\mathbf{Y}$ için $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq 0$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{y},\mathbf{y})=0$ dır.

$(ii)$ Her $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}$ için $\mathbf{F}_{\mathbf{y}}$ fonksiyonu $\mathbf{X}$ üzerinde $\mathbf{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}):=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ olarak tanımlanırsa $\mathbf{F}_{\mathbf{y}}\in\mathcal{F}$ olur.

$(iii)$ Her $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}$ için $\mathbf{F}_{\mathbf{y}}$ fonksiyonu $\mathbf{Y}$ üzerinde süreklidir,

$(iv)$ Her $k=1,2,...,r$, için $\mathbf{U}:=\prod_{k=1}^{r}U_k$ ve $U_k\in\mathcal{U}_k$ olarak alınırsa $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{U})=\inf\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})-\mathbf{U}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})>0$ olur.

$(v)$ Öyle $\mathbf{y}',\mathbf{y}''\in\mathbf{Y}$, $\mathbf{y}'\neq\mathbf{y}''$ noktaları ve $\mathbf{X}$ üzerinde tanımlı, sınırlı $\mathbf{F}_{\mathbf{y}'}$ ve $\mathbf{F}_{\mathbf{y}''}$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} st_A-\lim_n\|\mathbf{L}_n(\mathbf{F}_{\mathbf{y}'})-\mathbf{F}_{\mathbf{y}'}\| &= 0,\\ st_A-\lim_n\|\mathbf{L}_n(\mathbf{F}_{\mathbf{y}''})-\mathbf{F}_{\mathbf{y}''}\| &= 0,\\ st_A-\lim_n\left(\sup_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\mathbf{L}_n(\mathbf{F}_{\mathbf{y}};\mathbf{y})\right) &= 0 \end{aligned}$$

koşullarını gerçekler; burada $A=[a_{jn}]$ negatif olmayan bir toplanabilme matrisini ve $\|\cdot\|$ sembolu ise $\mathbf{Y}$ üzerinde tanımlı klasik supremum normunu göstermektedir.

Bu varsayımlar altında tek değişkenli fonksiyonlar için ispatladığımız lemma ve teoremler aynen çok değişkenli fonksiyonlarda da geçerli olacaktır. Buna göre aşağıdaki yaklaşım teoremini ispatsız olarak verebiliriz.

**Teorem 3.2.1** *$f$, $\mathbf{X}$ üzerinde tanımlı ve sınırlı, $Y$ üzerinde sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. $\{\mathbf{L}_n\}$ yukarıdaki koşulları gerçekleyen pozitif lineer operatörlerin bir* *dizisi olsun. Bu durumda her* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ *için*

$$st_A - \lim_n \|\mathbf{L}_n(\mathbf{f}) - \mathbf{f}\| = 0$$

*gerçeklenir.*

# 4. Uygulamalar ve Sonuç Uyarıları

Bu bölümde elde ettiğimiz istatistiksel yaklaşım teoremlerinin özel halleri üzerinde duracağız ve ayrıca gelecekte konuyla ilgili daha neler yapılabileceğini tartışacağız.

## 4.1. Uygulamalar

İlk olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

**Sonuç 4.1.1** *$X$, kompakt Haussdorff uzayı ve $f_1, f_2, ..., f_m \in C(X)$ olsun. Kabul edelim ki*

$$g_1, g_2, ..., g_m \in C(X)$$

*fonksiyonları yardımıyla tanımlanan*

$$P(x,y) := \sum_{i=1}^{m} g_i(y) f_i(x)$$

*fonksiyonu her $x, y \in X$ için $P(x,y) \geq 0$ ve $P(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ özelliklerini sağlasın. $L_n : C(X) \to C(X)$ pozitif lineer operatörler dizisi ve $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer*

$$st_A - \lim_n \|L_n(f_i) - f_i\| = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., m) \tag{4.1.1}$$

*eşitliği sağlanıyorsa, $\forall\ f \in C(X)$ için*

$$st_A - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

*elde edilir.*

**İspat.** $\mathcal{F} = C(X)$, $X = Y$ ve $F(x,y) = P(x,y)$ seçelim. Bu durumda

$$L_n(P_y; x) - P_y(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i(y) \{L_n(f_i; x) - f_i(x)\}$$

olduğundan $C := \max_{i=1,2,...,m} \|g_i\|$ için

$$\sup_{x,y \in X} |L_n(P_y; x) - P_y(x)| \leq C \sum_{i=1}^{m} \|L_n(f_i) - f_i\| \tag{4.1.2}$$

bulunur. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} B &: = \left\{ n \in N : \sup_{x,y \in X} \left| L_n\left(P_y; x\right) - P_y(x) \right| \geq \varepsilon \right\}, \\ B_i &: = \left\{ n \in N : \| L_n(f_i) - f_i \| \geq \frac{\varepsilon}{mC} \right\}, \ i = 1, 2, ..., m. \end{aligned}$$

Bu durumda (4.1.2) eşitsizliğinden

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

içermesi elde edilir ki bu içerme her $j \in N$ için

$$\sum_{n \in B} a_{jn} \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{n \in B_i} a_{jn}$$

eşitsizliğini gerektirir. Şimdi (4.1.1) den

$$st_A - \lim_n \sum_{n \in B} a_{jn} = 0$$

eşitliğinin gerçeklendiği görülür. Dolayısıyla

$$st_A - \lim_n \left( \sup_{x,y \in X} \left| L_n\left(P_y; x\right) - P_y(x) \right| \right) = 0$$

bulunur. Buradan (3.1.1) şartının $P(x, y)$ fonksiyonu için geçerli olduğu görülür. Sonuç olarak Theorem 3.1.1 in bütün koşullarının gerçekleneceği için istenilen sonuca doğrudan ulaşılır. ■

Bu sonuç daha önce Duman ve Orhan [29] tarafından ispatlanmıştı; fakat bunun aslında elde ettiğimiz Teorem 3.1.1 in özel bir hali olduğunu görüyoruz.

Bir diğer sonuç ise şu şekilde ifade edilebilir:

**Sonuç 4.1.2** *$X$, $f_1, f_2, ..., f_m, g_1, g_2, ..., g_m$, $P(x, y)$ ve $\{L_n\}$ Sonuç 4.1.1 deki gibi tanımlansın. Her $i = 1, 2, \ldots, m$ için $\{L_n(f_i)\}$ operatör dizisi $f_i$ ye $X$ üzerinde düzgün yakınsak ise her $f \in C(X)$ için $\{L_n(f)\}$ dizisi $f$ ye düzgün yakınsaktır.*

**İspat.** Sonuç 4.1.1 de $A$ matrisi, birim matris alınırsa ispat doğrudan elde edilir. ■

Bu son elde edilen sonuç yaklaşımlar teorisinin iyi bilinen bir teoremidir (bkz. [24]).

Cebirsel durumda Korovkin teoreminin test fonksiyonları $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2$ olarak tanımlanır. Şimdi bu durumla ilgili uygulamamazı verelim.

**Sonuç 4.1.3** *$L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi ve $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. Eğer*

$$st_A - \lim_n \|L_n(e_i) - e_i\| = 0, \qquad i = 0, 1, 2,$$

*eşitliği sağlanıyorsa, $\forall\ f \in C[a,b]$ için*

$$st_A - \lim_n \|L_n(f) - f\|$$

*olur.*

**İspat.** $X = Y = [a,b]$, $\mathcal{F} = C[a,b]$ ve $F(x,y) = (y-x)^2$ olarak alındığında Teorem 3.1.1 in bütün şartlarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■
Bu sonuç daha önce Duman, Khan ve Orhan [12] tarafından farklı bir yöntem kullanılarak ispatlanmıştı.

**Sonuç 4.1.4** *$L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi, $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. Eğer*

$$st - \lim_n \|L_n(e_i) - e_i\| = 0, \qquad i = 0, 1, 2,$$

*eşitliği sağlanıyorsa, $\forall\ f \in C[a,b]$ için*

$$st - \lim_n \|L_n(f) - f\|$$

*elde edilir.*

**İspat.** Sonuç 4.1.3 te $A = C_1$ almak yeterlidir. ■
Bu sonuç daha önce Gadjiev ve Orhan [11] tarafından elde edilmişti.

**Sonuç 4.1.5** *$L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(e_i, x) = e_i(x)$$

*eşitliği sağlanıyorsa, her $f \in C[a,b]$ için*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f, x) = f(x)$$

*eşitliği sağlanır; buradaki yakınsamalar $[a,b]$ üzerinde düzgündür.*

**İspat.** Sonuç 4.1.3 te $A = I$ alınırsa ispat tamamlanır. ■

Bu sonuç daha önce de ifade ettiğimiz gibi klasik Korovkin Teoremi'nin kendisidir. Aşağıdaki sonuçlar da Korovkin teoreminin periyodik karşılıklarına indirgenmektedir.

**Sonuç 4.1.6** *$C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli, sürekli ve $2\pi$-periyotlu fonksiyonların uzayı olsun. $f_0,\ f_1,\ f_2$ test fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \cos x.$$

*Ayrıca $L_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \to C_{2\pi}(\mathbb{R})$ pozitif lineer operatörler dizisi ve $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer*

$$st_A - \lim_n \|L_n(f_i) - f_i\| = 0, \qquad i = 0, 1, 2,$$

*ise, bu durumda $\forall\ f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için*

$$st_A - \lim_n \|L_n(f) - f\|$$

*eşitliği sağlanır.*

**İspat.** $X = \mathbb{R}$, $Y = [-\pi, \pi]$, $\mathcal{F} = C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ve $F(x,y) = 2\sin^2\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ özel durumunun Teorem 3.1.1 nin bütün şartlarını sağladığı görülebilir. Dolayısıyla ispat doğrudan Teorem 3.1.1 den elde edilir. ■
Bu sonuç daha önce Duman [35] tarafından 2003 yılında ispat edilmişti.

**Sonuç 4.1.7** *$L_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \to C_{2\pi}(\mathbb{R})$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. Her $i = 0, 1, 2$ için $\{L_n(f_i)\}$, $f_i$ ye $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak ise, her $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için $\{L_n(f)\}$, $f$ ye düzgün yakınsaktır.*

**İspat.** Sonuç 4.1.6 da $A = I$ alınırsa ispat tamamlanır. ■
Bu sonuç literatürde Korovkin teoreminin periyodik karşılığı olarak bilinmektedir [22].

Uygulamalar bölümümüzde buraya kadar teoremimizin tek değişkenli halinin özel hallerini inceledik. Bundan sonra ise çok değişkenli halinin uygulamalarını inceleyeceğiz.

**Sonuç 4.1.8** **X**, *$r$-boyutlu Haussdorff uzayı ve $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m \in C(\mathbf{X})$ olsun. Kabul edelim ki*

$$\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_m \in C(\mathbf{X})$$

*fonksiyonları yardımıyla tanımlanan* $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{m} \mathbf{g}_i(\mathbf{y})\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ *fonksiyonu her* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r) \in \mathbf{X}$ *ve* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_r) \in \mathbf{X}$ *için* $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$ *ve* $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ *özellikerini sağlasın.* $\mathbf{L}_n : C(\mathbf{X}) \to C(\mathbf{X})$ *pozitif lineer operatörler dizisi ve* $A = [a_{jn}]$ *negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer*

$$st_A - \lim_n \|\mathbf{L}_n(\mathbf{f}_i) - \mathbf{f}_i\| = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m$$

*eşitliği sağlanıyorsa,* $\forall\ \mathbf{f} \in C(\mathbf{X})$

$$st_A - \lim_n \|\mathbf{L}_n(\mathbf{f}) - \mathbf{f}\| = 0$$

*olur.*

**İspat.** Teorem 3.2.1 de $\mathcal{F} = C(\mathbf{X})$ , $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ alınırsa ispat tamamlanır. ∎

**Sonuç 4.1.9** $\mathbf{X}$, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_m$, $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *ve* $\mathbf{L}_n$, *Sonuç 4.1.8 gibi tanımlansın. Her* $i = 1, 2, \ldots, m$ *için* $\{\mathbf{L}_n(\mathbf{f}_i)\}$ *operatör dizisi* $\mathbf{f}_i$ *ye* $\mathbf{X}$ *üzerinde düzgün yakınsak ise her* $\mathbf{f} \in C(\mathbf{X})$ *için* $\{\mathbf{L}_n(\mathbf{f})\}$ *dizisi* $\mathbf{f}$ *ye düzgün yakınsaktır*

**İspat.** Sonuç 4.1.8 de $A = I$ almak yeterlidir. ∎

Bildiğimiz kadarıyla Sonuç 4.1.8 ve Sonuç 4.1.9 daha önce literatürde bulunmamaktadır.

**Sonuç 4.1.10** $\mathbf{L}_n : C(\mathcal{K}) \to C(\mathcal{K})$ *pozitif lineer operatörler dizisi olsun.* $\mathcal{K} := \prod_{k=1}^{r} [a_k, b_k]$ *olarak tanımlansın.* $A = [a_{jn}]$ *negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun.* $\mathbf{e}_0(x_1, ..., x_r) = 1$, $\mathbf{e}_i(x_1, ..., x_r) = x_i$ $(i = 1, 2, ..., r)$, *ve* $\mathbf{e}_{r+1}(x_1, ..., x_r) = \sum_{k=1}^{r} x_k^2$ *için*

$$st_A - \lim_n \|\mathbf{L}_n(\mathbf{e}_i) - \mathbf{e}_i\| = 0 \quad (i = 0, 1, ..., r+1)$$

*eşitliği geçerli ise, her* $\mathbf{f} \in C(\mathcal{K})$ *için aşağıdaki gerçeklenir:*

$$st_A - \lim_n \|\mathbf{L}_n(\mathbf{f}) - \mathbf{f}\|.$$

**İspat.** Teorem 3.2.1 de $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathcal{K}$, $\mathcal{F} = C(\mathcal{K})$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{r} (y_k - x_k)^2$ alınırsa ispat tamamlanır. ∎

Bu sonuç daha önce Erkuş ve Duman [26] tarafından 2006 yılında ispat edilmişti.

**Sonuç 4.1.11** $\mathbf{L}_n : C(\mathcal{K}) \to C(\mathcal{K})$ *pozitif lineer operatörler dizisi olsun. Her* $i = 0, 1, ..., r+1$, $\{\mathbf{L}_n(\mathbf{e}_i)\}$ *dizisi* $\mathbf{e}_i$ *ye* $\mathcal{K}$ *üzerinde düzgün yakınsak ise, her* $\mathbf{f} \in C(\mathcal{K})$ *için* $\mathbf{L}_n(\mathbf{f})$ *dizisi* $\mathbf{f}$ *ye* $\mathcal{K}$ *üzerinde düzgün yakınsaktır.*

**İspat.** Sonuç 4.1.10 te $A = I$ alındığında ispat tamamlanır. ■
Bu sonucun iki değişkenli versiyonu daha önce Volkov [36] tarafından elde edilmişti.

Şimdi $C_{2\pi}(\mathbb{R}^r)$ ile $\mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N})$ üzerinde sürekli, reel değerli ve $2\pi$ periyotlu fonksiyonların uzayını gösterelim. Burada $\mathbf{f}$ fonksiyonunun, $\mathbb{R}^r$ üzerinde $2\pi$ periyotlu olması demek her $(x_1, x_2, ..., x_r) \in \mathbb{R}^r$ ve $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ için aşağıdaki eşitliklerin geçerli olması demektir (bkz. [37]):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x_1, x_2, ..., x_r) &= \mathbf{f}(x_1 + 2k\pi, x_2, ...., x_r) \\ &= \mathbf{f}(x_1, x_2 + 2k\pi, ..., x_r) \\ &\quad ... \\ &= \mathbf{f}(x_1, x_2, ..., x_r + 2k\pi) \end{aligned}$$

Dolayısıyla çok değişkenli trigonometrik fonksiyonlar için Teorem 3.2.1, aşağıdaki bilinen sonuçları gerektirir:

**Sonuç 4.1.12** $\mathbf{L}_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}^r) \to C_{2\pi}(\mathbb{R}^r)$ *pozitif lineer operatörler dizisi ve* $A = [a_{jn}]$ *negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun.*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0(x_1, ..., x_r) &= 1, \\ \mathbf{f}_i(x_1, ..., x_r) &= \cos x_i \ (i = 1, 2, ..., r), \\ \mathbf{f}_j(x_1, ..., x_r) &= \sin x_j \ (j = r+1, ..., 2r) \end{aligned}$$

*olmak üzere eğer*

$$st_A - \lim_n \|\mathbf{L}_n(\mathbf{f}_i) - \mathbf{f}_i\| = 0 \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 2r$$

*eşitliği sağlanıyorsa,* $\forall\ \mathbf{f} \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^r)$ *için*

$$st_A - \lim_n \|\mathbf{L}_n(\mathbf{f}) - \mathbf{f}\|.$$

*olur.*

**İspat.** Teorem 3.2.1 de $\mathbf{X} = \mathbb{R}^r$, $\mathbf{Y} = \prod_{k=1}^{r}[-\pi, \pi]$, $\mathcal{F} = C_{2\pi}(\mathbb{R}^r)$, ve

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\sum_{k=1}^{r} \sin^2\left(\frac{x_k - y_k}{2}\right)$$

almak yeterlidir. ■
Bu sonuç daha önce Duman ve Erkuş [38] tarafından ispatlanmıştı.

**Sonuç 4.1.13** $\mathbf{L}_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}^r) \to C_{2\pi}(\mathbb{R}^r)$ *pozitif lineer operatörler dizisi olsun. Her* $i = 0, 1, 2, \ldots 2r$ *için* $\{\mathbf{L}_n(\mathbf{f}_i)\}$ , $\mathbf{f}_i$ *ye* $\mathbb{R}^r$ *üzerinde düzgün yakınsak ise, her* $\mathbf{f} \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^r)$ *için* $\{\mathbf{L}_n(\mathbf{f})\}$, $f$ *ye düzgün yakınsaktır.*

**İspat.** Sonuç 4.1.12 te $A = I$ alınırsa ispat tamamlanır. ■
Bu sonucun iki değişkenli versiyonu daha önce Mond ve Shisha [39] tarafından 1966 yılında ispat edilmişti.

## 4.2. Sonuç Uyarıları

Bu yüksek lisans tezinde klasik Korovkin teoremini soyut uzaylarda inceledik ve istatistiksel yakınsaklık yardımıyla daha genel ve kuvvetli yaklaşım teoremleri elde ettik. Gelecekte çalışmamızı aşağıdaki şekilde genelleştirebiliriz:

- Operatörlerin yaklaşımında "ideal yakınsaklık" kavramı gibi istatistiksel yakınsaklıktan daha genel bir yaklaşım metodu kullanılarak önemli sonuçlara ulaşılabilir.
- Zayıf ve kuvvetli yakınsaklık kavramının operatörlerinin yaklaşımı üzerindeki etkileri incelenebilir.
- Operatörlerin pozitiflik koşulunu zayıflatma yönünde çalışmalar yapılabilir.
- Soyut uzaylarda tanımlı ve herhangi bir metrik uzayda değerler alan operatörlerin hem klasik hem de istatistiksel yakınsaklık özellikleri incelenebilir. Örneğin kompleks değerli operatörler üzerinde yapılacak çalışmalar dikkate değer sonuçlar üretebilir.

# Kaynaklar


[1] Fast, H., Sur la convergence statistiquie, Colloq. Math., 2, 241-244, 1951.

[2] Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73-74, 1951.

[3] Fridy, J.A., On statistical convergence, Analysis, 4, 301-313, 1983.

[4] Connor, J., $R$-type summability methods, Cauchy criteria, $P$-sets and statistical convergence, Proc. Amer. Math. Soc. 115, 319-327, 1992.

[5] Móricz, F., Tauberian conditions, under which statistical convergence follows from statistical summability $(C, 1)$, J. Math. Anal. Appl. 275, 277-287, 2002.

[6] Móricz, F., Statistical convergence of Walsh-Fourier series, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.), 20, 165-168, 2004.

[7] Di Maio, G., Kočinac, L.D.R., Statistical convergence in topology, Topology Appl., 156, 28-45, 2008.

[8] Lafuerza-Guillén, B., Rafi, M., Statistical convergence in strong topology of probabilistic normed spaces, Note Mat. 29, 79-88, 2009.

[9] Miller, H.I., A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Trans. Amer. Math. Soc., 347, 1811-1819, 1995.

[10] Cheng, L., Lin, G., Shi, H., On real-valued measures of statistical type and their applications to statistical convergence, Math. Comput. Modelling, 50, 116-122, 2009.

[11] Gadjiev, A.D., Orhan, C., Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math., 32, 129-138, 2002.

[12] Duman, O., Khan, M.K., Orhan, C., A-statistical convergence of approximatig operators, Math. Inequal. Appl. 6, 689-699, 2003.

[13] Anastassiou, G.A., Duman, O., Statistical fuzzy approximation by fuzzy positive linear operators, Comput. Math. Appl., 55, 573-580, 2008.

[14] Anastassiou, G.A., Duman, O., High order statistical fuzzy Korovkin theory, Stochastic Anal. Appl., 27, 543-554, 2009.

[15] Gadjiev, A.D., Linear $k$-positive operators in a space of regular functions, and theorems of P. P. Korovkin type (Russian), Izv. Akad. Nauk Azerbaĭdžan. SSR Ser. Fiz.-Tehn. Mat. Nauk, 5, 49-53, 1974.

[16] Gadjiev, A.D., Ghorbanalizadeh, A.M., Approximation of analytical functions by sequences of $k$-positive linear operators, J. Approx. Theory, 162, 1245-1255, 2010.

[17] Duman, O., Statistical approximation theorems by $k$-positive linear operators, Arch. Math. (Basel), 86, 569-576, 2006.

[18] Fridy, J.A., Statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc., 118, 1187-1192, 1993.

[19] Fridy, J.A., Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc., 125, 3625-3631, 1993.

[20] Freedman, A.R., Sember, J.J., Densities and summability, Pacific J. Math., 95, 293-305, 1981.

[21] Kolk , E., Matrix summability of statistically convergent sequences, Analysis, 13, 77-83, 1993.

[22] Korovkin, P.P., Linear Positive Operators and Approximation Theory, *Hindustan Publishing Corp.*, India, Delhi, 1960.

[23] Altomare, F., Campiti, M., Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications, *Walter De Gruyter Inc.*, 1994.

[24] Mhaskar, N.H., Pai, D.V., Fundamentals of Approximation Theory, *Alpha Science International Ltd.*, U.K., 2000.

[25] Duman, O., Orhan, C., Statistical approximation by positive linear operators, Studia Math. 161, 187-197, 2004.

[26] Erkuş, E., Duman, O., A Korovkin type approximation theorem in statistical sense, Studia Sci. Math. Hungar., 43, 285-294, 2006.

[27] Doğru, O., Duman, O., Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on $q$-integers, Publ. Math. Debrecen, 68, 199-214, 2006.

[28] Yoshinaga, K., Tamura, S., On a Korovkin theorem of uniform convergence, Bull. Kyushu Inst. Tech. Math. Natur. Sci., 23, 1-9, 1976.

[29] Duman, O., Orhan, C., An abstract version of the Korovkin approximation theorem, Publ. Math. Debrecen 69, 33-46, 2006.

[30] Niven, I., Zuckerman, H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, *John Wiley & Sons*, 4th. Ed., New York, 1980.

[31] Connor, J.S., The statistical and strong $p$-Cesáro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63, 1988.

[32] Hardy, G.H., Divergent Series, *Oxford Univ. Press*, London, 1949.

[33] Maddox, I.J., Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press*, 1970.

[34] S.W. Davis, Topology, *McGraw Hill*, 2004.

[35] Duman, O., Statistical approximation for periodic functions, Demonstratio Math., 36, 873-878, 2003.

[36] Volkov, V.I., On the convergence sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables (Russian), Dokl, Akad. Nauk. SSSR, 115, 17-19, 1957.

[37] Myint-U, T., Debnath, L., Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, *Prentice Hall*, USA, 1987.

[38] Duman, O., Erkuş, E., Approximation of continuous periodic functions via statistical convergence, Comput. Math. Appl. 52, 967-974, 2006.

[39] Mond, B., Shisha, O., On the approximation of functions of several variables, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 70B, 211-218, 1966.

# ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

| | |
|---|---|
| Soyadı, adı | : ERGÜR, Alperen Ali |
| Uyruğu | : T.C. |
| Doğum tarihi ve yeri | : 03.06.1986 Ankara |
| Medeni hali | : Evli |
| Telefon | : 0 (312) 292 43 28 |
| Faks | : 0 (312) 292 40 76 |
| e-mail | : aergur@etu.edu.tr |

**Eğitim**

| **Derece** | **Eğitim Birimi** | **Mezuniyet tarihi** |
|---|---|---|
| Lisans | Bilkent Üniversitesi/Matematik | 2009 |

**İş Deneyimi**

| **Yıl** | **Yer** | **Görev** |
|---|---|---|
| 2009-2011 | TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi | Araştırma Görevlisi |

**Yabancı Dil**

İngilizce

**Yayınlar**

1.A.Ergur and O.Duman, Statistical Korovkin Theorems on Abstract Spaces (submitted for publication)