İKİ DEĞİŞKENLİ POISSON-CAUCHY SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İLE İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM

Merve KESTER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Bölümü

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2011

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ömer AKIN

Anabilim Dalı Başkanı

Merve KESTER tarafından hazırlanan İKİ DEĞİŞKENLİ POISSON-CAUCHY SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İLE İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Oktay DUMAN

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan: Doç. Dr. Ogün DOĞRU

Üye: Prof. Dr. Oktay DUMAN

Üye: Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

……………….

Merve KESTER

Üniversitesi	:	**TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü	:	**Fen Bilimleri Enstitüsü**
Anabilim Dalı	:	**Matematik Bölümü**
Tez Danışmanı	:	**Prof. Dr. Oktay DUMAN**
Tez Türü ve Tarihi	:	**Yüksek Lisans – Temmuz 2011**

Merve KESTER

İKİ DEĞİŞKENLİ POISSON-CAUCHY SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İLE İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM

ÖZET

Bu tezde orijin merkezli, π yarıçaplı bir disk üzerinde sürekli ve periyodu 2π olan iki değişkenli fonksiyonlara her zaman pozitif olmayan iki değişkenli Poisson- Cauchy singüler integral operatörleri ile yaklaşmanın mümkün olduğu gösterilmiştir. Bu tezde elde edilen sonuçlar klasik yaklaşım özelliklerini içermekle kalmayıp istatistiksel yaklaşım özelliklerini de kapsamaktadır.

Anahtar Kelimeler: *A*-istatistiksel yakınsaklık, İstatistiksel Yaklaşım, Poisson-Cauchy singüler integral operatörleri.

University	**:**	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	**:**	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	**:**	**Department of Mathematics**
Supervisor	**:**	**Professor Dr. Oktay DUMAN**
Degree Awarded and Date	**:**	**M.Sc. – July 2011**

STATISTICAL APPROXIMATION BY DOUBLE POISSON-CAUCHY SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

ABSTRACT

In this thesis we show that it is possible to approximate a continuous and 2π-periodic function on the disk centered origin with radius π by means of double Poisson-Cauchy singular integral operators which do not need to be positive in general. Our results cover not only the classical approximation but also the statistical approximation process.

Keywords: *A*-statistical convergence, Statistical approximation, Poisson-Cauchy singuler integral operators.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Oktay DUMAN'a ve araştırmalarımızı beraber yürüttüğümüz değerli çalışma arkadaşım Alperen Ali ERGÜR'e, ayrıca bu süreç boyunca desteklerini esirgemeyen bugüne kadar ki tüm asistan arkadaşlarıma ve Krzysztof SADOWSKI'ye, son olarak beni her zaman destekleyip bugünlere getiren sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\#\{K\}$	*K* kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	*K* kümesinin yoğunluk fonksiyonu
C_1	Birinci mertebeden Cesàro matrisi
$\{(Ax)_n\}$	*x* dizisinin *A* matrisi altındaki dönüşüm dizisi
χ_K	*K* kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\lVert . \rVert$	Operatör normu
C[a,b]	*[a,b]* üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{2\pi}(D)$	D kümesi üzerinde 2π periyotlu sürekli fonksiyonlar uzayı
I	Birim matris
$\omega(f,\delta)$	*f* fonksiyonunun süreklilik modülü
$\{Q_{r,n}^{[m]}\}$	İki değişkenli Poisson-Cauchy singüler integral operatörleri dizisi
$C_{2\pi}^{(m)}(D)$	2π periyodlu, m. mertebeden türevlenebilir ve *D* kümesi üzerinde kendisi ve türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı.

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, Klasik Analizde üzerinde en çok inceleme yapılan konulardan biridir. Özellikle de fonksiyon dizilerinin ve sayı dizilerinin yakınsaklığını geliştirme yönünde şimdiye kadar çok ciddi adımlar atılmıştır. Örneğin fonksiyon dizilerinin bilinen düzgün ve noktasal yakınsaklıklarına ilaveten hemen hemen yakınsaklık, ölçüsel yakınsaklık, L_p-yakınsaklık gibi yeni yakınsaklık çeşitleri tanımlanmıştır. Bunlarla ilgili sonuçlara ileri analiz içerikli pek çok kaynak kitap ve makalelerden ulaşmak mümkündür. Diğer taraftan, sayı dizilerinin yakınsaklığını geliştirme yönünde en önemli atılım 1951 yılında Steinhaus ve Fast tarafından yapılmıştır (bkz. [1, 2]). 1951'de Polonya'da yapılan bir konferansta "İstatistiksel Yakınsaklık" isminde yeni bir yakınsaklık kavramı Steinhaus tarafından sunulmuş ve aynı yıl bu kavram Fast tarafından kesin bir formulasyona kavuşmuştur. İstatistiksel yakınsaklığın, bilenen yakınsaklığa göre pek çok avantajlı yönlerinin olması bu kavramı kısa sürede oldukça popüler hale getirmiştir. Özellikle istatistiksel yakınsaklık, Toplanabilme Teorisi, Fourier Serileri, Fonksiyonel Analiz, Ölçü Teorisi, Yaklaşımlar Teorisi, Bulanık Mantık Teorisi gibi matematiğin birçok alanında uygulanmıştır.

İyi bilindiği üzere klasik analizde yakınsak bir dizinin neredeyse tüm terimleri limit noktasının istenildiği kadar küçük komşuluğuna ait olmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık kavramının temel fikri bu koşulu sıfır yoğunluklu kümeleri gözönünde bulundurarak zayıflatmaktır. Bu zayıflatma yakınsak olmadığı halde istatistiksel anlamda yakınsak olan dizilerin varlığını ortaya koymaktadır. Konuyla ilgili tanım ve örnekler bir sonraki bölümde detaylı bir şekilde ele alınacaktır. Ayrıca 1981 yılında Freedman ve Sember [3] regüler toplanabilme matrisleri kullanarak istatistiksel yakınsaklık kavramını "A- istatistiksel yakınsaklık" adıyla daha da genelleştirmişlerdir.

Öte taraftan, pozitif lineer operatör dizileriyle fonksiyonlara yaklaşım ilk kez Korovkin tarafından 1950 li yıllarda ortaya atılmıştır. Korovkin, oldukça elemanter argümanlar kullanarak, pozitif lineer operatör dizilerinin "test fonksiyonu" adını verdiği sonlu sayıdaki fonksiyonlar üzerindeki yaklaşımını inceleyerek reel sayıların kapalı ve sınırlı bir aralığı üzerindeki herhangi sürekli bir fonksiyona yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Son derece güçlü olan bu sonucun ardından literatürde "Korovkin Teorisi" olarak bilinen yeni ve aktif bir çalışma sahası ortaya çıkmıştır. Son 50 yıldır Korovkin Teorisi üzerinde pekçok inceleme ve geliştirme yapılmış ve yapılmaya da devam etmektedir. Bu teoriyle ilgili en temel kaynaklar [4, 5, 6, 7] nolu referanslarda bulunmaktadır. Özellikle 2002 yılında Gadjiev ve Orhan [8] bu teoriyi istatistiksel yakınsaklık kavramıyla geliştirmişlerdir. Bu yöndeki diğer ilerlemelere [9, 10, 11, 12] nolu kaynaklardan ulaşmak mümkündür.

Korovkin Teorisi temel olarak lineer operatörlerin pozitifliğine ve onların klasik limitlerinin varlığına dayanmaktadır. Dolayısıyla her nekadar güçlü olsa da Korovkin teoremi pozitif olan lineer operatörlerin yaklaşım özelliklerine cevap vermesine rağmen herzaman pozitif olmayan veya lineer olmayan operatörlerin yaklaşım özellikleri konusunda yetersiz kalmaktadır.

Zaman içerisinde Korovkin teoreminin uygulanamadığı operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemek için bazı çalışmalar da yapılmıştır. Bunlardan birkaçı [13, 14, 15, 16, 17] de görülebilir. Bu çalışmalarda genel olarak Korovkin teoreminin pozi– tiflik şartını sağlamayan birkaç operatör olan Picard, Gauss-Weierstrass ve Possion-Cauchy singüler integral operatörlerinin tek değişkenli versiyonları ele alınmış ve bu operatörlerin klasik anlamdaki yaklaşım özellikleri süreklilik modülü kavramı kullanılarak incelenmiştir.

Daha sonraki yıllarda ise [18] ve [19] da görüleceği gibi, Duman ve Anastassiou tarafından Picard ve Gauss-Weierstrass singüler integral operatörlerinin iki değişkenli versiyonları tanımlanmış ve bu operatörlerin klasik anlamdaki yaklaşım özelliklerinin yanısıra A-istatistiksel anlamdaki yaklaşım özellikleri de ele alınmıştır.

Bu yüksek lisans tezinin oluşmasına zemin hazırlayan çalışmalar ise [20, 21] nolu kaynaklardır. Bu çalışmalarda belli ek koşullar altında bir fonksiyona tek değişkenli (pozitif olması gerekmeyen) Poisson-Cauchy singüler integral operatörleri ile klasik anlamda yaklaşmanın mümkün olduğu gösterilmiştir.

Bu tez çalışmamızda öncelikle Korovkin teoreminin pozitiflik şartını herzaman sağlamayan iki değişkenli Poisson-Cauchy singüler integral operatörlerini ele aldık. Bunun için ilk olarak $r, m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ parametrelerinin ve pozitif herhangi bir (ξ_n) dizisinin yardımıyla iki değişkenli Poisson-Cauchy singüler integral operatörleri ailesini tanımlayıp genelleştirdik. Daha sonra ise bu operatörlerin A-istatistiksel yaklaşım özellikleri üzerinde durduk. Bu çalışmamızda $m \in \mathbb{N}$ durumunda [20, 21] çalışmalardakinin aksine iki değişkenli bir fonksiyona tanımladığımız operatörler ailesi ile hiçbir kısıtlama olmadan yaklaşmanın mümkün olduğunu gördük. Sadece $m = 0$ durumunda bir kısıtlamaya ihtiyaç duyduk. Ayrıca bu çalışmamızda elde ettiğimiz yaklaşım özellikleri klasik anlamdaki yaklaşım özelliklerini içerdiği gibi istatistiksel anlamdaki yaklaşım özelliklerini de içermektedir.

Bu yüksek lisans tezi sırasıyla giriş, temel kavramlar, iki değişkenli Poisson-Cauchy singüler integral operatörleri ve sonuçlar olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölüm olan temel kavramlar kısmında bu çalışma içinde kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Sırasıyla, pozitif lineer operatör kavramı ve Korovkin teorisi, süreklilik modülü ve temel özellikleri, istatistiksel yakınsaklık, A-istatistiksel yakınsaklık kavramı bu bölümde verilecektir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise bu çalışma sonucunda elde ettiğimiz orjinal sonuçlar bulunmaktadır. Operatörlerin inşaası, onlar için hata tahminleri ve istatistiksel yaklaşım özellikleri üçüncü bölümde incelenirken; elde ettiğimiz sonuçların klasik durumlara göre kuvvetli yanları ve gelecekte konuyla ilgili daha ne gibi gelişmeler yapılabileceği son bölümde tartışılmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde ihtiyaç duyacağımız bilinen bazı tanım, teorem ve notasyonlara değineceğiz. İlk olarak “Pozitif Lineer Operatör” kavramından bahsedilecek ve “Korovkin Teorisi” hakkında genel bir bilgi verilecektir. Daha sonra operatörlerin yaklaşımındaki hataları ölçmemize imkan sağlayan “süreklilik modülü” kavramı hatırlatılacak ve bunun Korovkin Teoremi ile ilşkisi vurgulanacaktır. Son olarak, “İstatistiksel Yakınsaklık” ve “A-İstatistiksel Yakınsaklık” kavramları ele alınacak ve bunlardan elde edilen temel teoremler ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

2.1. Pozitif Lineer Operatör Kavramı ve Korovkin Teorisi

Bu bölümde öncelikle "Pozitif Lineer Operatör" kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.1.1 *X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere, $L : X \to Y$ operatörü, $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall f, g \in X$ için,*

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

şartını sağlıyorsa L ye lineer operatör adı verilir. Özel olarak $\forall f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ oluyorsa L ye pozitif lineer operatör adı verilir [4].

Yukarıda tanımladığımız lineer operatörlerin pozitiflik koşulu aynı zamanda monotonluğu da gerektirir. Şimdi bunu bir lemma ile verelim.

Lemma 2.1.2 *X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere, $L : X \to Y$ pozitif lineer bir operatör olsun. Bu durumda L monotondur [7].*

İspat. $f, g \in X$ ve $f \geq g$ olsun. O halde,

$$f - g \geq 0$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafına L operatörü uygulanırsa,

$$L(f - g) \geq L(0)$$

elde edilir. L pozitif olduğundan,

$$L(f - g) \geq 0$$

olur. Son olarak L lineer olduğundan,

$$L(f) - L(g) \geq 0$$

yani istenilen sonuç olan,

$$L(f) \geq L(g)$$

elde edilir. ■

Bir operatörün monoton olması büyüklük ve küçüklüğü koruduğu için önemlidir. Şimdi ise pozitif lineer operatörlerin sağladığı önemli bir eşitsizliği aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Lemma 2.1.3 *X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere, $L : X \to Y$ pozitif lineer bir operatör olsun. Bu durumda $\forall f \in X$ için*

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır [7].

İspat. g_1 ve g_2 fonkiyonlarını

$$g_1 := |f| - f$$

$$g_2 := |f| + f$$

olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse $g_1, g_2 \geq 0$ dır. İlk olarak,

$$g_1 \geq 0$$

eşitsizliğini ele alalım. Eşitsizliğin her iki tarafına L operatörü uygulanırsa,

$$L(g_1) = L(|f| - f) \geq L(0)$$

elde edilir. L pozitif olduğundan,

$$L(|f| - f) \geq 0$$

yazılabileceği açıktır. Ayrıca L lineer olduğundan,

$$L(|f|) - L(f) \geq 0$$

yani

$$L(|f|) \geq L(f) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi ise

$$g_2 \geq 0$$

eşitsizliğini ele alalım. Benzer şekilde eşitsizliğin her iki tarafına L operatörü uygulanırsa,

$$L(g_2) = L(|f| + f) \geq L(0)$$

elde edilir. L pozitif olduğundan,

$$L(|f| + f) \geq 0$$

bulunur. Ayrıca L operatörü lineer olduğundan,

$$L(|f|) + L(f) \geq 0$$

ve dolayısıyla

$$L(|f|) \geq -L(f) \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.1.1) ve (2.1.2) eşitsizlikleri göz önünde bulundurulursa istenilen eşitsizlik olan

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

sonucuna varılır. ■

Şimdi fonksiyonlar teorisinde temel teşkil eden $C[a, b]$ uzayını hatırlatalım.

Tanım 2.1.4 *$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı $C[a, b]$ ile gösterilir. $C[a, b]$ uzayı, üzerinde tanımlanan*

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır [4].

Şimdi ise pozitif lineer operatörlerin yakınsaklığı hakkında önemli bir kolaylık sağlayan "Klasik Korovkin Teoremi" ni hatırlatalım.

Teorem 2.1.5 (**Klasik Korovkin Teoremi**) *$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C[a, b]$ uzayını kendi üzerine dönüştüren pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ test fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bu durumda her $i = 0, 1, 2$ için, $\{L_n(e_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin e_i ye $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $f \in C[a, b]$ için $\{L_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ nin f ye $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır [4].*

Aşağıdaki örnekte klasik Korovkin teoreminin bir uygulamasını vereceğiz.

Örnek 2.1.6 *$f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda Bernstein polinomu*

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olarak tanımlanır [5]. Daha önceden ifade edildiği gibi $e_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2,$ olmak üzere Bernstein polinomlarının tanımından

$$\begin{aligned} B_n(e_0;x) &= e_0(x) = 1, \\ B_n(e_1;x) &= e_1(x) = x, \\ B_n(e_2;x) &= e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. O halde $[0,1]$ üzerinde $\{B_n(e_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi her $i = 0,1,2$ için e_i test fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Dolayısıyla teorem uyarınca, her $f \in C[0,1]$ için $\{B_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $[0,1]$ üzerinde f ye düzgün yakınsak olacaktır.

Klasik Korovkin teoremi, cebirsel fonksiyonlar için geçerli olduğu gibi periyodik fonksiyonlar için de geçerlidir. Fakat bu durumda ilgili test fonksiyonları da buna göre değişecektir. 2π-periyodlu ve sürekli olan reel değerli fonksiyonların sınıfını $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki sonuç, Korovkin teoreminin periyodik karşılığıdır.

Teorem 2.1.7 *$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ uzayını kendi üzerine dönüştüren pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanan test fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bu durumda her $i = 0,1,2$ için, $\{L_n(f_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin e_i ye $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için $\{L_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ nin f ye $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır [4].*

Teorem 2.1.5, 2002 yılında Gadjiev and Orhan [8] tarafından ve Teorem 2.1.7 ise 2003 yılında Duman [12] tarafından, klasik yakınsaklık yerine istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak geliştirilmiştir. Bu kavram literatürde "İstatistiksel Korovkin Teorisi" olarak bilinmektedir. İstatistiksel Korovkin Teorisi ile ilgili son gelişmeler için [9, 10, 11] nolu kaynaklardan yararlanılabilir.

Dikkat edilirse Klasik Korovkin Teoremi pozitif lineer operatörlerin yaklaşım özellikleri hakkında bize fikir vermektedir. Fakat literatürde pozitif olması gerekmeyen pekçok lineer operatör de bulunmaktadır. Elbette bu durumda Korovkin teoremi geçersiz olacaktır. İşte bu yüksek lisans tezindeki en önemli amacımız pozitif olması gerekmeyen operatörler inşaa ederek onların yaklaşım özelliklerini araştırmaktır.

Üstelik klasik anlamda yakınsaklığın gerçeklenmediği durumlar da bile istatistiksel anlamda bu operatörlerle fonksiyonlara yaklaşabilmenin mümkün olduğunu göstereceğiz.

2.2. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Yaklaşımlar Teorisinde operatörlerin fonksiyonlara ne hızla yaklaştığını ölçmek için kullanılan en önemli kavramlardan biri de "süreklilik modülü" dür. Bu alt başlık altında süreklilik modülü ile ilgili genel bir bilgi verilecek ve onun klasik Korovkin teoremi ile ilişkisi vurgulanacaktır.

Süreklilik modülü kavramını tanımlamadan önce ihtiyaç duyacağımız aşağıdaki ileri fark operatörü kavramına değinelim.

Tanım 2.2.1 *$h \in \mathbb{R}$ ve $r \geq 1$ bir tamsayı olsun. f herhangi bir reel aralık üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olmak üzere, f nin ileri fark operatörü*

$$\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca buradan, $r \geq 2$ şartını sağlayan r ler için

$$\Delta_h^r f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f(x)) \tag{2.2.1}$$

yazmak mümkündür [7].

Şimdi ise bu tanımdan yola çıkarak süreklilik modülünü hatırlayalım.

Tanım 2.2.2 *$f \in C[a,b]$ (veya $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$) olsun. Bu durumda, $\delta > 0$ ve $r \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, f nin r.yinci mertebeden süreklilik modülü*

$$\omega_r(f,\delta) := \max_{|h|\leq\delta} \|\Delta_h^r f\| \tag{2.2.2}$$

olarak tanımlanır. (2.2.2) eşitsizliğinde $r = 1$ olarak alınırsa elde edilen birinci mertebeden süreklilik modülüne kısaca f nin "süreklilik modülü" denir ve $\omega(f,\delta)$ olarak gösterilir [7].

Şimdi ise yukarıda tanımladığımız süreklilik modülünün önemli özelliklerini bir teoremle vereceğiz.

Teorem 2.2.3 *f, f_1, f_2, f_3 fonksiyonlarının $C[a,b]$ veya $C_{2\pi}(\dot{\mathbb{R}})$ uzayına ait olduğunu kabul edelim. $\delta, \delta_1, \delta_2 > 0, \lambda > 1, n \geq 1$ özelliğinde bir tamsayı, $1 \leq s < r$ özelliğindeki tamsayılar ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır :*

(i) $\omega_r(f,\delta)$, *δ ya göre artandır,*

(ii) $\omega_r(\alpha f_1 + f_2, \delta) \leq |\alpha|\, \omega_r(f_1,\delta) + \omega_r(f_2,\delta)$,

(iii) $\omega_r(f, n\delta) \leq n^r \omega_r(f,\delta)$,

(iv) $\omega_r(f,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)^r \omega_r(f,\delta)$,

(v) $\dfrac{\omega_r(f,\delta_2)}{\delta_2^r} \leq 2^r \dfrac{\omega_r(f,\delta_1)}{\delta_1^r}$,

(vi) $\omega_r(f,\delta) \leq 2^{r-s}\omega_s(f,\delta) \leq 2^r \|f\|$,

(vii) $\omega(f,\delta_1+\delta_2) \leq \omega(f,\delta_1) + \omega(f,\delta_2)$,

(viii) $\omega_r(f,\delta_2) - \omega_r(f,\delta_1) \leq 2^r \omega(f, r(\delta_2-\delta_1))$,

(ix) $\omega_r(f,\delta), \delta$ *ya göre süreklidir ve* $\delta \to 0^+$ *iken* $\omega_r(f,\delta) \to 0$ *dır* [7].

Bu alt başlık altında son olarak süreklilik modülünün Korovkin teoremiyle bağlantısını ortaya koyan aşağıdaki sonucu vereceğiz.

Teorem 2.2.4 *$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C[a,b]$ uzayını kendi üzerine dönüştüren pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $x \in [a,b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\alpha_n^2(x) := L_n\left((t-x)^2; x\right)$$

fonksiyon dizisi tanımlansın. Eğer $f \in C[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned} |L_n(f;x) - f(x)| &\leq |f(x)|\,|L_n(e_0;x) - e_0(x)| \\ &\quad + \left\{L_n(e_0;x) + \sqrt{L_n(e_0;x)}\right\}\omega\left(f, \alpha_n(x)\right) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Eğer $f' \in C[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned} |L_n(f;x) - f(x)| &\leq |f(x)|\,|L_n(e_0;x) - e_0(x)| + |f'(x)|\,|L_n\left((t-x);x\right)| \\ &\quad + \left\{1 + \sqrt{L_n(e_0;x)}\right\}\alpha_n(x)\omega\left(f', \alpha_n(x)\right) \end{aligned}$$

olur [6].

Yukarıdaki teoremin periyodik karşılığı ise şu şekildedir:

Teorem 2.2.5 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *uzayını kendi üzerine dönüştüren pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.* $x \in [-\pi, \pi]$ *ve* $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere*

$$\beta_n^2(x) := L_n\left(\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right); x\right)$$

fonksiyon dizisi tanımlansın. Eğer $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *ve* $x \in [-\pi, \pi]$ *ise, bu durumda*

$$\begin{aligned} |L_n(f;x) - f(x)| &\leq |f(x)|\,|L_n(f_0;x) - f_0(x)| \\ &\quad + \left\{L_n(f_0;x) + \pi\sqrt{L_n(f_0;x)}\right\}\omega\left(f, \beta_n(x)\right) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Eğer $f' \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *ve* $x \in [-\pi, \pi]$ *ise, bu durumda*

$$\begin{aligned} |L_n(f;x) - f(x)| &\leq |f(x)|\,|L_n(f_0;x) - f_0(x)| \\ &\quad + |f'(x)|\left\{|L_n\left(\sin\left(t-x\right); x\right)| + \pi^2\beta_n^2(x)\right\} \\ &\quad + \pi^2\left\{1 + \sqrt{L_n(f_0;x)}\right\}\beta_n(x)\omega\left(f', \beta_n(x)\right) \end{aligned}$$

olur [6].

2.3. İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere bir $K \subset \mathbb{N}$ alt kümesi verilsin. K_n kümesi,

$$K_n := \{k \leq n : k \in K\} \tag{2.3.1}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca K_n kümesinin kardinalitesi (eleman sayısı) $\#\{K_n\}$ ile gösterilsin.

Tanım 2.3.1 $K \subset \mathbb{N}$ *ve* K_n (2.3.1) *deki gibi olmak üzere, eğer*

$$\lim_n \frac{\#\{K_n\}}{n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değeri K *kümesinin (doğal) yoğunluğu olarak adlandırılır ve* $\delta(K)$ *ile gösterilir* [22, 23].

Örneğin,

$$\delta(\mathbb{N}) = 1$$

$$\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$$

$$\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$$

olduğu yoğunluk tanımından kolayca görülebilir. Ek olarak, asal sayıların ve hatta doğal sayıların herbir sonlu altkümesinin de sıfır yoğunluklu olduğu söylenebilir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramını verelim.

Tanım 2.3.2 $x := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *reel ya da kompleks terimli bir dizi olmak üzere, eğer* $\forall\varepsilon > 0$ *için*

$$\delta\left(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

olacak şekilde bir L *sayısı mevcut ise,* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisi* L *değerine istatistiksel olarak yakınsar denir ve*

$$st - \lim_k x_k = L$$

şeklinde gösterilir [2].

Yukarıdaki tanımdan kolayca görülebileceği gibi, bir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi bir L sayısına istatistiksel olarak yakınsıyor ise, L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta elemanı bulunurken bu komşuluğun dışında, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla, yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum, istatistiksel yakınsaklığın klasik yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, istatistiksel yakınsak dizi uzaylarının klasik yakınsak dizi uzaylarını kapsadığını söyleyebiliriz. İstatistiksel yakınsak olduğu halde klasik anlamda yakınsak olmayan diziler mevcuttur. Aşağıdaki örnekle bunu gösterelim.

Örnek 2.3.3 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin terimlerini*

$$x_n = \begin{cases} 1; & n = m^2 \ ise \\ 0; & n \neq m^2 \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Tanım 2.3.2 *den*

$$st - \lim_n x_n = 0$$

bulunur. Ancak dikkat edilirse $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi klasik anlamda yakınsak değildir.*

Bilindiği gibi klasik anlamda yakınsak olan her dizi sınırlıdır. Ancak bir dizi istatistiksel yakınsak ise sınırlı olmak zorunda değildir. Bu durumu da bir örnekle inceleyelim.

Örnek 2.3.4 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin terimleri*

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{n}; & n = m^2 \ ise \\ 0; & n \neq m^2 \ ise \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Dikkat edilirse,

$$st - \lim_n x_n = 0$$

olmasına rağmen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi üstten sınırlı değildir.*

Şimdi ise istatistiksel yakınsaklık kavramının bazı karakteristik özellikleri üzerinde duralım.

Teorem 2.3.5 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin bir* L *sayısına istatistiksel yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart* $\delta\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$ *ve* $\lim_k x_{n_k} = L$ *olacak şekilde en az bir* (n_k) *indis dizisi vardır* [*24*, *25*].

Teorem 2.3.5 den kolayca görülebileceği gibi, bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi sıfır youğunluklu indis kümesi dışında (ya da bir yoğunluklu indis kümesi üzerinde) L değerine klasik anlamda yakınsak ise aynı $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi L ye istatistiksel anlamda yakınsaktır diyebiliriz.

Eğer $\delta\{k \in \mathbb{N} : P(k)$ geçerli değil$\} = 0$ ise bu durumda P önermesi hemen hemen heryerde geçerlidir denir ve kısaca "*h.h.h.*" şeklinde yazılır. Verilen bu açıklamaların sonucu olarak bir dizinin istatistiksel yakınsak olmasını için aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

"$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin L değerine istatistiksel yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart $h.h.h. \lim_n x_n = L$ olmasıdır".

İstatistiksel yakınsaklık ile ilgili diğer tüm bilgilere [2, 24, 25, 26, 27] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

2.4. A-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu başlık altında istatistiksel yakınsaklık kavramından daha geniş bir kavram olan A-istatistiksel yakınsaklıktan bahsedeceğiz.

Biliyoruz ki bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması demek, $\forall\epsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n}\#\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\} = 0$$

olması demektir. Bu ifadeye denk olarak,

$$K := K(\epsilon) = \{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}$$

olmak üzere $\forall \epsilon > 0$ için

$$\lim_n (C_1 \chi_{K(\epsilon)})_n := \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_{K(\epsilon)}(k) = 0 \tag{2.4.1}$$

ifadesi yazılabilir. Burada χ_K, K kümesinin karakteristik fonksiyonudur ve $C_1 := (c_{nk})$ ise literatürde birinci mertebeden Cesáro matrisi (veya aritmetik ortalama matrisi) olarak bilinmektedir ve tanımı ise

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}; & 1 \leq k \leq n \; ise \\ 0; & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

1981 yılında Freedman ve Sember [3] yukarıdaki durumdan yola çıkarak, istatistiksel yakınsaklık tanımında Cesáro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisini alarak tanımı daha da genelleştirmişlerdir. A-istatistiksel yakınsaklık tanımına geçmeden önce ihtiyaç duyulan birkaç ifadeyi hatırlatalım.

Tanım 2.4.1 *$A := (a_{nk})$ $(n, k = 1, 2, ...)$ sonsuz bir matris olmak üzere, verilen bir $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin "A-dönüşüm dizisi",*

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

şeklinde tanımlıdır ve

$$Ax := ((Ax)_n)$$

şeklinde gösterilir. Burada herbir n için yukarıdaki serinin yakınsak olduğu kabul edilmektedir. Eğer

$$\lim_n x_n = L$$

olduğunda

$$\lim_n (Ax)_n = L$$

oluyorsa, A matirsine "regüler matris" adı verilir [28].

Örneğin C_1 matrisi bir regüler matristir. Yukarıdaki ifadeye ek olarak, bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olup olmadığı Silverman-Toeplitz koşulları olarak bilinen aşağıda vereceğimiz teoremle karakterize edilebilmektedir.

Teorem 2.4.2 *Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart*

(*i*) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

(*ii*) $\forall k$ *için* $a_k := \lim_n a_{nk} = 0$,

(*iii*) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır [*28*, *29*].

Şimdi (2.4.1) de C_1 matrisi yerine negatif olmayan regüler A matrisini alarak A-istatistiksel yakınsaklık tanımını elde ederiz. Bu durumu aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz:

Tanım 2.4.3 *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan ve regüler bir matris olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için*

$$K := K(\epsilon) = \{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}$$

olmak üzere

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\chi_{K(\epsilon)}(k) = 0$$

oluyorsa, ya da buna denk olarak, $\forall \epsilon > 0$ için

$$\lim_n \sum_{k:|x_k - L| \geq \epsilon} a_{nk} = 0$$

sağlanıyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına "A- istatistiksel yakınsaktır" denir ve

$$st_A - \lim x = L$$

ile gösterilir [*3*].

Tanım 2.4.3 de özel olarak A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa klasik anlamdaki yakınsaklık, C_1 matrisi alınırsa da istatistiksel yakınsaklık elde edilir. Sonuç olarak, A-istatistiksel yakınsaklık klasik yakınsaklığı ve istatistiksel yakınsaklığı kapsar. Klasik anlamda yakınsak olan her dizi, herhangi bir negatif olmayan regüler A matrisi verildiğinde aynı zamanda A-istatistiksel yakınsak olacaktır. Ancak bu önermenin karşıtı herzaman doğru değildir. Aşağıda vereceğimiz teoremle durumu daha da kesin hale getirebiliriz.

Teorem 2.4.4 *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun.*

$$\lim_n \max_k \{a_{nk}\} = 0$$

ise, A-istatistiksel yakınsaklık alışılmış yakınsaklıktan daha kuvvetlidir [30].

A-istatistiksel yaınsaklık ile ilgili detaylı bilgilere [3, 30, 31] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

3. İKİ DEĞİŞKENLİ POISSON-CAUCHY SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İLE İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM

Bu bölümde, iki değişkenli Possion-Cauchy singüler integral operatörleri ile ilgili genel bir bilgi vermek amaçlanmıştır. Öncelikle bu operatörlerin tanımı ve genel özellikleri hakkında bilgi verilecek daha sonra ise yine aynı operatörlerin hata tahminleri ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1. Operatörlerin Tanımlanması ve Genel Özellikleri

Bu bölümde amacımız iki değişkenli Poisson-Cauchy singüler integral operatörlerini tanımlamak ve bu operatörlerin genel özelliklerini incelemektir. Operatörleri tanımlamadan önce kullanacağımız birkaç notasyona değinelim.

Tanım 3.1.1 *$\forall\ r, n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ için $\left(\alpha_{j,r}^{[m]}\right)$ $(j = 0, 1, ..., r)$ dizisi,*

$$\alpha_{j,r}^{[m]} := \begin{cases} (-1)^{r-j}\binom{r}{j} j^{-m}, & j = 1, 2, ..., r, \\ 1 - \sum\limits_{k=1}^{r} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} k^{-m}, & j = 0. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

şeklinde verilir [32, 33].

Sonuç 3.1.2 *(3.1.1) de tanımlanan $\left(\alpha_{j,r}^{[m]}\right)$ $(j = 0, 1, ..., r)$ dizisi*

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_{j,r}^{[m]} = 1 \ \ ve \ \ -\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j} = (-1)^r\binom{r}{0} \tag{3.1.2}$$

eşitlikleri sağlar [32, 33].

Şimdi ise yukarıda tanımladığımız notasyonları kullanarak operatörlerimizi inşaa edelim.

Tanım 3.1.3 *(ξ_n) pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun.*

$$\mathbb{D} := \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq \pi^2\right\}$$

şeklinde tanımlı olan $\mathbb{D}$ kümesi üzerindeki tüm Lebesque ölçülebilir f fonksiyonları için, $\forall(x,y)\in\mathbb{D}$, $\forall\ r,n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}_0$ ve (λ_n) dizisi:

$$\lambda_n := \frac{1}{\pi\ln\left(1+\pi^2/\xi_n^2\right)} \tag{3.1.3}$$

olmak üzere, iki değişkenli Poisson-Cauchy singüler integral operatörleri :

$$Q_{r,n}^{[m]}(f;x,y) = \lambda_n\sum_{j=0}^{r}\alpha_{j,r}^{[m]}\left(\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{f\left(x+sj,y+tj\right)}{\left(s^2+t^2\right)+\xi_n^2}dsdt\right) \tag{3.1.4}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanımladığımız $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörlerinin genel özelliklerini aşağıda vereceğimiz iki lemma altında inceleyeceğiz.

Lemma 3.1.4 *İki değişkenli sabit fonksiyonlar, $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörleri altında korunurlar.*

İspat. C bir reel sabit olmak üzere $f(x,y)=C$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
Q_{r,n}^{[m]}(C;x,y) &= \lambda_n\sum_{j=0}^{r}\alpha_{j,r}^{[m]}\left(\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{C}{\left(s^2+t^2\right)+\xi_n^2}dsdt\right)\\
&= C\lambda_n\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho}{\rho^2+\xi_n^2}d\rho d\theta\\
&= C\frac{\pi\ln\left(1+\pi^2/\xi_n^2\right)}{\pi\ln\left(1+\pi^2/\xi_n^2\right)}\\
&= C
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

$Q_{r,n}^{[m]}$ operatörlerine klasik Korovkin teorisinin uygulanamamasının nedeni bu operatörlerin her zaman pozitif olmamasıdır. Şimdi operatörlerin bu özelliğini de bir lemma olarak verelim.

Lemma 3.1.5 $Q_{r,n}^{[m]}$ *operatörleri her zaman pozitif değildir.*

İspat. $\mathbb{D}$ bölgesi üzerinde negatif olmayan $\varphi(u,v)=u^2+v^2$ fonksiyonunu ele alalım. (3.1.1) ve (3.1.4) de $r=2$, $m=3$, ve $u=v=0$ olarak seçelim. $\forall t>0$ için

$ln(1+t) < t$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
Q^{[3]}_{2,n}(\varphi;0,0) &= \lambda_n \left(\sum_{j=0}^{2} \alpha^{[3]}_{j,2}\right) \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(sj,tj)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&= \lambda_n \left(\sum_{j=0}^{2} \alpha^{[3]}_{j,2}\cdot j^2\right) \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{s^2+t^2}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&= \frac{-3\lambda_n}{2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{\rho^2+\xi_n^2} d\rho d\theta \\
&= \frac{-3\pi^2}{2\ln\left(1+\pi^2/\xi_n^2\right)} + \frac{3\xi_n^2}{2} < 0
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Son olarak ilerideki hesaplamalarımızda sıklıkla kullanacağımız bir integral hesabını ele alalım.

Lemma 3.1.6 *$k \in \mathbb{N}$ olsun. $l = 0,1,\ldots,k$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için;*

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{s^{k-\ell}t^{\ell}}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt = \begin{cases} 2B\left(\frac{\ell+1}{2},\frac{k-\ell+1}{2}\right)\gamma_{n,k}, & k \text{ ve } \ell \text{ çift} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.1.5}$$

dir. Burada $B(\alpha,\beta)$ klasik beta fonksiyonu olup,

$$\gamma_{n,k} := \int_0^{\pi} \frac{\rho^{k+1}}{\rho^2+\xi_n^2} d\rho$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. Eğer k veya l den biri tek ise (3.1.5) de integrant s veya t ye göre tek fonksiyon olacağından integralin sıfır çıkacağı aşikardır. Eğer k ve l aynı anda çift olurlarsa (3.1.5) de açık olarak integrant s ve t ye göre çift fonksiyon olur ve buradan;

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{s^{k-\ell}t^{\ell}}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} \frac{\rho^{k+1}\cos^{k-\ell}\theta\sin^{\ell}\theta}{\rho^2+\xi_n^2} d\rho d\theta \\
&= 2B\left(\frac{\ell+1}{2},\frac{k-\ell+1}{2}\right)\int_0^{\pi} \frac{\rho^{k+1}}{\rho^2+\xi_n^2} d\rho \\
&= 2B\left(\frac{\ell+1}{2},\frac{k-\ell+1}{2}\right)\gamma_{n,k}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. ■

3.2. Operatörler İçin Hata Tahminleri

Bu bölümde (3.1.4) de tanımladığımız $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörleri için hata tahminleri verilecektir. Bu tahminler genel olarak $m \in \mathbb{N}$ ve $m = 0$ olmak üzere iki alt başlık altında incelenecektir. İlk olarak ihtiyacımız olan birkaç notasyona değinelim.

Tanım 3.2.1 *$C_{2\pi}(\mathbb{D})$, $\mathbb{D}$ üzerinde sürekli ve her koordinata göre 2π periyodik olan tüm fonksiyonların kümesi olsun. $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ olmak üzere f nin r. mertebeden (iki değişkenli) süreklilik modülü*

$$\omega_r(f;h) := \sup_{\sqrt{u^2+v^2} \leq h;\ (u,v)\in\mathbb{D}} \left\| \Delta_{u,v}^r(f) \right\| < \infty, \quad h > 0 \tag{3.2.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $\|\cdot\|$ ise bilinen supremum normudur ve

$$\Delta_{u,v}^r\left(f(x,y)\right) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x+ju, y+jv) \tag{3.2.2}$$

olarak tanımlıdır [33].

Yukarıdaki tanım göz önüne alınırsa, $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ her koordinata göre 2π periyotlu, x ve y ye göre m yinci dereceden sürekli kısmi türevlere sahip, $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların sınıfı olmak üzere, $f \in C^{(m)}(\mathbb{D})$ ise $\forall \ell = 0, 1, ..., m$ için

$$\left\| \frac{\partial^m f(\cdot,\cdot)}{\partial^{m-\ell}x\partial^\ell y} \right\| := \sup_{(x,y)\in\mathbb{D}} \left| \frac{\partial^m f(x,y)}{\partial^{m-\ell}x\partial^\ell y} \right| < \infty \tag{3.2.3}$$

şartının sağlandığı kolayca görülebilir.

3.2.1. $m \in \mathbb{N}$ Durumu İçin Hata Tahminleri

Bu alt başlıkta $m \in \mathbb{N}$ durumunu inceleyeceğiz. İlk olarak bu alt başlık altında sıklıkla kullanacağımız bir tanımla başlayalım.

Tanım 3.2.2 *$m \in \mathbb{N}$ ve $(x,y),(s,t) \in \mathbb{D}$ olmak üzere $G_{x,y}^{[m]}$ fonksiyonu,*

$$\begin{aligned} G_{x,y}^{[m]}(s,t) := \ & \frac{1}{(m-1)!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \int_0^1 (1-w)^{m-1} \\ & \times \left\{ \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{m-\ell} \left| \frac{\partial^m f(x+jsw, y+jtw)}{\partial^{m-\ell}x\partial^\ell y} \right| \right\} dw \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

olarak tanımlıdır.

Dikkat edilirse, (3.2.3) şartından dolayı $G_{x,y}^{[m]}(s,t)$ fonksiyonu herbir $m \in \mathbb{N}$ için iyi tanımlıdır.

İlk hata tahminimizi verebilmek için aşagıdaki lemmaya ihtiyaç duyarız.

Lemma 3.2.3 *$m, r \in \mathbb{N}$ ve$f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ olsun. O halde $\forall\ (x,y) \in \mathbb{D}$ için,*

$$\left|Q_{r,n}^{[m]}(f;x,y) - f(x,y) - I_{m,n}(x,y)\right| \leq \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\left(|s|^m + |t|^m\right) G_{x,y}^{[m]}(s,t)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \qquad (3.2.5)$$

sağlanır. Burada $I_{m,n}(x,y)$,

$$I_{m,n}(x,y) := 2\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \frac{\gamma_{n,2i}\delta_{2i,r}^{[m]}}{(2i)!} \sum_{t=0}^{i} \binom{2i}{2i-2t} \frac{\partial^{2i} f(x,y)}{\partial^{2i-2t}x\partial^{2t}y} B\left(\tfrac{2t+1}{2}, \tfrac{2i-2t+1}{2}\right) \qquad (3.2.6)$$

$$\delta_{k,r}^{[m]} := \sum_{j=1}^{r} \alpha_{j,r}^{[m]} j^k,\ k = 1,2,...,m$$

olarak tanımlıdır. (3.2.6) *deki toplamda $m=1$ için $I_{m,n}(x,y) = 0$ alınır.*

İspat. $(x,y) \in \mathbb{D}$ ve $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ olsun. f nin Taylor açılımından,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r} \alpha_{j,r}^{[m]} \left(f(x+js, y+jt) - f(x,y)\right) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta_{k,r}^{[m]}}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{k-\ell} s^{k-\ell} t^{\ell} \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial^{k-\ell}x\partial^{\ell}y} \\ &\quad + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-w)^{m-1} \varphi_{x,y}^{[m]}(w;s,t)dw\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\varphi_{x,y}^{[m]}(w;s,t) := \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \left\{ \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{m-\ell} s^{m-\ell} t^{\ell} \frac{\partial^m f(x+jsw, y+jtw)}{\partial^{m-\ell}x\partial^{\ell}y} \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. (3.1.4) ten,

$$R_n^{[m]}(x,y) := \frac{\lambda_n}{(m-1)!} \iint\limits_{\mathbb{D}} \left(\int_0^1 (1-w)^{m-1} \varphi_{x,y}^{[m]}(w;s,t)dw \right) \frac{dsdt}{(s^2+t^2)+\xi_n^2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} Q_{r,n}^{[m]}(f;x,y)-f(x,y) &= \lambda_n \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta_{k,r}^{[m]}}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{k-\ell} \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial^{k-\ell}x\partial^{\ell}y} \\ & X \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{s^{k-\ell}t^{\ell}}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt + R_n^{[m]}(x,y) \end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz bu son eşitliğe (3.1.6) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Q_{r,n}^{[m]}(f;x,y)-f(x,y) &= 2\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \frac{\gamma_{n,2i}\delta_{2i,r}^{[m]}}{(2i)!} \sum_{t=0}^{i} \binom{2i}{2i-2t} \frac{\partial^{2i} f(x,y)}{\partial^{2i-2t}x\partial^{2t}y} \\ & XB\left(\frac{2t+1}{2}, \frac{2i-2t+1}{2}\right) + R_n^{[m]}(x,y) \end{aligned}$$

bulunur. (3.2.6) göz önüne alınırsa,

$$Q_{r,n}^{[m]}(f;x,y)-f(x,y)-I_m(x,y) = R_n^{[m]}(x,y) \tag{3.2.7}$$

şeklinde olduğu görülür. Ayrıca,

$$\left|\varphi_{x,y}^{[m]}(w;s,t)\right| \leq (|s|^m+|t|^m) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{m-\ell} \left| \frac{\partial^m f(x+jsw,y+jtw)}{\partial^{m-\ell}x\partial^{\ell}y} \right|$$

olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|R_n^{[m]}(x,y)\right| \leq \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{(|s|^m+|t|^m)\, G_{x,y}^{[m]}(s,t)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \tag{3.2.8}$$

Sonuç olarak, (3.2.7) ve (3.2.8) göz önüne alınırsa, (3.2.5) in sağlandığı görülür. ■

Şimdi ise ilk teoremimizi verelim.

Teorem 3.2.4 *$m,n,r \in \mathbb{N}$ olsun. O halde , $\forall\ f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ için,*

$$\left\|Q_{r,n}^{[m]}(f)-f\right\| \leq C_{r,m}\lambda_n$$

dir. Burada $C_{r,m}$, r ve m ye bağlı pozitif bir sabittir.

İspat. Lemma 3.2.3 te eşitsizliğin her iki tarafının $(x,y) \in \mathbb{D}$ için supremumu alınırsa,

$$\left\|Q_{r,n}^{[m]}(f)-f\right\| \leq \|I_m\| + \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{(|s|^m+|t|^m)\left\|G_{x,y}^{[m]}(s,t)\right\|}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt$$

elde edilir. $\|I_m\|$ yi tahmin ededebilmek için aşağıdaki hesaplamayı yaparsak,

$$\begin{aligned}
\|I_m\| &\le 2\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \frac{\gamma_{n,2i}\delta_{2i,r}^{[m]}}{(2i)!} \sum_{t=0}^{i} \binom{2i}{2i-2t} B\left(\frac{2t+1}{2}, \frac{2i-2t+1}{2}\right) \left\| \frac{\partial^{2i} f(\cdot,\cdot)}{\partial^{2i-2t} x \partial^{2t} y} \right\| \\
&\le K_{r,m}\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Eşitsizlikteki $K_{r,m}$,

$$K_{r,m} := \max_{1\le i\le [m/2]} \left\{ \frac{2\delta_{2i,r}^{[m]}}{(2i)!} \left(\sum_{\ell=0}^{2i} B\left(\frac{2i-\ell+1}{2}, \frac{\ell+1}{2}\right) \binom{2i}{2i-\ell} \left\| \frac{\partial^{2i} f(\cdot,\cdot)}{\partial^{2i-2t} x \partial^{2t} y} \right\| \right) \right\}$$

şeklinde verilmektedir. Diğer taraftan,

$$\left\| G_{x,y}^{[m]}(s,t) \right\| \le \frac{2^r}{m!} \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{m-\ell} \left\| \frac{\partial^m f(\cdot,\cdot)}{\partial^{m-\ell} x \partial^{\ell} y} \right\| := L_{r,m}$$

olacaktır. $\mathbb{D}_1$ kümesini,

$$\mathbb{D}_1 := \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le s \le \pi \text{ and } 0 \le t \le \sqrt{\pi^2 - s^2} \right\} \tag{3.2.9}$$

şeklinde tanımlar ve Lemma 3.1.6 ile bulduğumuz sonuçları kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\left\| Q_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| &\le K_{r,m}\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i} + L_{r,m}\lambda_n \iint_{\mathbb{D}} \frac{(|s|^m + |t|^m)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} ds dt \\
&= K_{r,m}\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i} + 4L_{r,m}\lambda_n \iint_{\mathbb{D}_1} \frac{(s^m + t^m)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} ds dt \\
&= K_{r,m}\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i} + 4\lambda_n L_{r,m} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \gamma_{n,m} \\
&\le M_{r,m}\lambda_n \left(\gamma_{n,m} + \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $M_{r,m}$,

$$M_{r,m} := K_{r,m} + 4L_{r,m} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

şeklinde tanımlı bir sabittir. Ayrıca dikkat edilirse herbir sabit tutulmuş k için,

$$\gamma_{n,k} = \int_0^\pi \frac{\rho^{k+1}}{\rho^2 + \xi_n^2} d\rho \leq \frac{\pi^{k+2}}{\pi^2 + \xi_n^2} \leq \pi^k \tag{3.2.10}$$

gerçeklenir. Buradan ise,

$$\left\| Q_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| \leq M_{r,m} \lambda_n \left(\pi^m + \sum_{i=1}^{[m/2]} \pi^{2i} \right)$$

elde edilir. Son olarak $C_{r,m}$,

$$C_{r,m} := M_{r,m} \left(\pi^m + \sum_{i=1}^{[m/2]} \pi^{2i} \right)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\left\| Q_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| \leq C_{r,m} \lambda_n$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.2.2. $m = 0$ Durumu

Bu alt başlık altında $m = 0$ durumu için hata tahmini yapılıcaktır.

Teorem 3.2.5 $\forall\, r, n \in \mathbb{N}$ *ve* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ *için,*

$$\left\| Q_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| \leq 4\lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}_1} \frac{\omega_r\left(f; \sqrt{s^2 + t^2}\right)}{(s^2 + t^2) + \xi_n^2} ds dt \tag{3.2.11}$$

elde edilir. Burada $\mathbb{D}_1$ *kümesi* (3.2.9) *da tanımlandığı gibidir.*

İspat. $(x, y) \in \mathbb{D}$ ve $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ sabit tutulsun. (3.1.4) te $m = 0$ alınırsa,

$$Q_{r,n}^{[0]}(f; x, y) - f(x, y) = \lambda_n \sum_{j=1}^r \alpha_{j,r}^{[0]} \iint\limits_{\mathbb{D}} \left\{ \left(\frac{f(x + sj, y + tj) - f(x, y)}{(s^2 + t^2) + \xi_n^2} \right) \right\} ds dt$$

$$= \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \left(\frac{\sum_{j=1}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + sj, y + tj) - \sum_{j=1}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x, y)}{(s^2 + t^2) + \xi_n^2} \right) ds dt$$

elde edilir. Buradan,

$$Q_{r,n}^{[0]}(f;x,y)-f(x,y)=\lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \left\{ \sum_{j=0}^{r} \frac{(-1)^{r-j}\binom{r}{j} f\left(x+sj,y+tj\right)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} \right\} dsdt$$

ve

$$Q_{r,n}^{[0]}(f;x,y)-f(x,y)=\lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\Delta_{s,t}^{r}\left(f(x,y)\right)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt$$

olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \left|Q_{r,n}^{[0]}(f;x,y)-f(x,y)\right| &\leq \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\left|\Delta_{s,t}^{r}\left(f(x,y)\right)\right|}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\ &\leq \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\omega_r\left(f;\sqrt{s^2+t^2}\right)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\ &= 4\lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}_1} \frac{\omega_r\left(f;\sqrt{s^2+t^2}\right)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \end{aligned}$$

bulunur. ■

Şimdi ise bir sonraki sonucumuz için kullanacağımız özel bir sınıfın tanımını verelim.

Tanım 3.2.6 *$C_{2\pi}(\mathbb{D})$ nin bir alt kümesi olan Lip_M^* kümesi,*

$$Lip_M^* := \{f \in C_{2\pi}(\mathbb{D}) : \omega_r(f,h) \leq Mh^r\}$$

şeklinde tanımldır. Burada M pozitif bir sabittir.

Şimdi ise bu tanımın yardımıyla elde ettiğimiz sonuca değinelim.

Sonuç 3.2.7 *(ξ_n), $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $0 < \xi_n \leq 1$ özelliğinde bir dizi olsun. O halde $\forall n, r \in \mathbb{N}$ ve $\forall f \in Lip_M^*$ için,*

$$\left\|Q_{r,n}^{[0]}(f)-f\right\| \leq K\lambda_n$$

eşitsizliği elde edilir. Burada K pozitif bir sabittir.

İspat. (3.2.11) eşitsizliğini ve $\omega_r(f;\alpha u) \leq (1+\alpha)^r \omega_r(f;u)$, $\alpha, u > 0$, eşitsizliğini göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}
\left\|Q_{r,n}^{[0]}(f) - f\right\| &\leq 4\lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}_1} \frac{\omega_r\left(f;\sqrt{s^2+t^2}\right)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&\leq 4\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \iint\limits_{\mathbb{D}_1} \frac{\left(1+\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{\xi_n}\right)^r}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&= 4\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi} \left(1+\frac{\rho}{\xi_n}\right)^r \rho\left[\rho^2+\xi_n^2\right]^{-1} d\rho d\theta \\
&= 2\pi\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \int\limits_0^{\pi} \left(1+\frac{\rho}{\xi_n}\right)^r \rho\left[\rho^2+\xi_n^2\right]^{-1} d\rho
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u = \frac{\rho}{\xi_n}$, değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\left\|Q_{r,n}^{[0]}(f) - f\right\| &\leq 2\pi\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \int\limits_0^{\pi/\xi_n} \frac{u(1+u)^r}{u^2+1} du \\
&\leq 2\pi\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \int\limits_0^{\pi/\xi_n} \frac{(1+u)^{r+1}}{u^2+1} du
\end{aligned}$$

olur ve $f \in Lip_M^*$ olduğundan son eşitsizliğimiz

$$\left\|Q_{r,n}^{[0]}(f) - f\right\| \leq 2\pi M \lambda_n \xi_n^r \int\limits_0^{\pi/\xi_n} \frac{(1+u)^{r+1}}{u^2+1} du \tag{3.2.12}$$

şeklinde bulunur. Biliyoruz ki herhangi bir $0 < \varepsilon \leq 1$, için

$$\varepsilon^r \int\limits_0^{\pi/\varepsilon} \frac{(1+u)^{r+1}}{u^2+1} du \leq C \ , \ C > 0$$

eşitsizliği sağlanır (bkz. [21]). Dolayısıyla (3.2.12) eşitsizliğinden,

$$\left\|Q_{r,n}^{[0]}(f) - f\right\| \leq 2\pi C M \lambda_n$$

elde edilir. $K := 2\pi C M$, olarak alınırsa ispat tamamlanır. ■

3.3. Operatörler ile İstatistiksel Yaklaşım

Bu bölümde operatörlerimizin istatistiksel yaklaşım özelliklerine değineceğiz. Bir önceki bölümde olduğu gibi operatörlerimizin istatistiksel yaklaşım özelliklerini $m \in \mathbb{N}$ ve $m = 0$ olmak üzere iki durum altında inceleyeceğiz. İlk olarak $m \in \mathbb{N}$ için elde ettiğimiz teoremimizi verelim.

Teorem 3.3.1 *$A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris ve $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif reel sayıların*

$$st_A - \lim_n \xi_n = 0 \tag{3.3.1}$$

koşulunu gerçekleyen bir dizisi olsun. Bu durumda, $\forall m, r \in \mathbb{N}$ ve $\forall f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ için ,

$$st_A - \lim_n \left\| Q_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| = 0 \tag{3.3.2}$$

sağlanır.

İspat. (3.3.1) şartından hemen görülebilir ki,

$$st_A - \lim_n \lambda_n = 0 \tag{3.3.3}$$

olur. Burada (λ_n) dizisi (3.1.3) te verildiği gibidir. Teorem 3.2.4 ten,

$$\left\| Q_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| \leq C_{r,m}\lambda_n$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Şimdi verilen $\varepsilon > 0$ için son eşitsizlikten,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \left\| Q_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| \geq \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geq \frac{\varepsilon}{C_{r,m}} \right\}$$

yazılabilir. Herbir $j \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{n: \left\| Q_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| \geq \varepsilon} a_{jn} \leq \sum_{n: \lambda_n \geq \frac{\varepsilon}{C_{r,m}}} a_{jn}$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafının $j \to \infty$ iken limiti alınırsa ve (3.3.3) göz önünde tutulursa,

$$\lim_j \sum_{n\in E} a_{jn} = 0$$

olur ve böylece istenilen sonuç elde edilir. ■

Şimdi ise $m = 0$ durumu için operatörlerimizin istatistiksel yaklaşım özelliklerini verelim.

Teorem 3.3.2 *$A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris ve $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 < \xi_n \leq 1$, reel sayıların (3.3.1) özelliğini sağlayan bir dizisi olsun. $\forall r \in \mathbb{N}$ ve $\forall\ f \in Lip_M^*$ için*

$$st_A - \lim_n \left\| Q_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| = 0 \tag{3.3.4}$$

sağlanır.

İspat. Sonuç 3.2.7 kullanılarak, herbir $f \in Lip_M^*$ için,

$$\left\| Q_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| \leq K\lambda_n$$

yazılabilir. Burada K, herhangi bir pozitif sabittir. Sonrasında, verilen bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \left\| Q_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| \geq \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geq \frac{\varepsilon}{K} \right\}$$

olduğu gözlenebilir. Buradan, herbir $j \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{n:\left\| Q_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| \geq \varepsilon} a_{jn} \leq \sum_{n:\lambda_n \geq \frac{\varepsilon}{K}} a_{jn}$$

olduğu görülür. $j \to \infty$ için son eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa ve (3.3.3) göz önünde bulundurulursa,

$$\lim_j \sum_{n:\left\| Q_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| \geq \varepsilon} a_{jn} = 0$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 bize pozitif olmayan operatörlerle fonksiyonlara istatistiksel anlamda yaklaşılabileceğini göstermektedir. Elbette eğer klasik anlamda bir yaklaşım varsa bu durumda teoremlerimiz doğrudan geçerli olacaktır. Fakat bu teoremler sayesinde, klasik yaklaşımın olmadığı durumlarda bile nasıl hareket edebileceğimizi görebiliyoruz. Bir sonraki bölümde bu durumları bir örnekle ele alacağız.

4. Sonuçlar

Bu başlık altında genel olarak bu yüksek lisans tezi sonucunda elde ettiğimiz yaklaşım teoremlerinin bazı sonuçları üzerinde duracağız ve ileride bu çalışmaların üzerine yapılabilecek geliştirmelerden bahsedeğiz.

4.1. Yaklaşım Teoremlerinin Sonuçları

İlk sonucumuzu Teorem 3.3.1 den elde edeceğiz. Gerçekten de Teorem 3.3.1 de $A = [a_{jn}]$ matrisi yerine $A = I$ birim matrisi alınırsa aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 4.1.1 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reel sayıların pozitif terimli, sıfıra yakınsayan bir dizisi olmak üzere* $\forall m, r \in \mathbb{N}$ *ve* $\forall\ f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ *için,* $\left(Q_{r,n}^{[m]}(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi* $\mathbb{D}$ *üzerinde* f *ye düzgün yakınsar.*

Bir diğer sonucumuzu da Teorem 3.3.2 den elde edeceğiz. Teorem 3.3.2 de $A = [a_{jn}]$ matrisi yerine $A = I$ birim matrisi alınırsa aşağıdaki sonuç görülmektedir.

Sonuç 4.1.2 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reel sayıların pozitif terimli,* $0 < \xi_n \leq 1$ *özelliğindeki,*0 *a yakınsayan bir dizisi olmak üzere* $\forall r \in \mathbb{N}$ *ve*$\forall\ f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ *için eğer* $f \in Lip_M^*$ *ise* $\left(Q_{r,n}^{[0]}(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi* $\mathbb{D}$ *üzerinde* f *ye düzgün yakınsar.*

Bu iki sonuçtan, tezin üçüncü bölümünde ispatladığımız Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 nin klasik teoriyi kapsadığını söyleyebiliriz. Üstelik aşağıdaki örnekte olduğu gibi klasik yaklaşımın gerçeklenmediği bir istatistiksel yaklaşım operatörü de inşaa etmek mümkündür.

Örnek 4.1.3 *Genel terimi*

$$\xi_n := \begin{cases} 1, & n = k^2,\ k = 1, 2, ... \\ \frac{1}{n}, & \textit{diğer durumlar} \end{cases}$$

olan $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisini ele alalım. Açık olarak görülebilir ki* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi klasik anlamda yakınsak olmayan bir dizidir. Dolayısıyla bu dizi yardımıyla tanımlanan* $Q_{r,n}^{[m]}$ *operatörleriyle bir* f *fonksiyonuna bilinen anlamda yakınsamak mümkün değildir. Diğer taraftan dikkat edilirse,* $A = C_1$ *olmak üzere,*

$$st_{C_1} - \lim_n \xi_n = st - \lim_n \xi_n = 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla bu dizi yardımıyla tanımlanan $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörleri için Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 geçerli olacaktır. Sonuç olarak, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla kurulan $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörleri ile klasik anlamda bir yaklaşım yapılamasa da bizim üçüncü bölümde verdiğimiz Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 yardımıyla istatistiksel anlamda yaklaşımlar elde etmek mümkündür. Bu ise elde ettiğimiz teoremlerin klasik teoriden daha güçlü olduğunu gösterir.

4.2. Yapılabilecek Geliştirmeler

Şimdi bu yüksek lisans tezi üzerinde ileride yapılabilecek geliştirmelerden kısaca bahsedeceğiz.

- Dikkat edilirse tez çalışmamızda $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörlerini reel uzayda inşaa ettik. Bunun yerine ileride bu $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörleri kompleks uzayda inşaa edilerek istatistiksel yaklaşım teoremleri elde edilmesi ilginç bir araştırma konusu olabilir.
- Burada yaklaşımlar yaparken kullandığımız norm iyi bilinen alışılmış supremum normu idi. İlerideki çalışmalarda bu norm yerine L_p normu kullanılarak çalışma sahası geliştirilebilir.
- Yeni operatörler inşa edilerek yeni yaklaşımlar bulmak amaçlanabilir.

Kaynaklar

[1] Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73-74, 1951.

[2] Fast, H., Sur la convergence statistiquie, Colloq. Math., 2, 241-244, 1951.

[3] Freedman, A.R., Sember, J.J., Densities and summability, Pacific J. Math., 95, 293-305, 1981.

[4] Korovkin, P.P., Linear Positive Operators and Approximation Theory, *Hindustan Publishing Corp.*, India, Delhi, 1960.

[5] Altomare, F., Campiti, M., Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications, *Walter De Gruyter Inc.*, 1994.

[6] DeVore, R.A., The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators, *Springer-Verlag*, 1972.

[7] Mhaskar, N.H., Pai, D.V., Fundamentals of Approximation Theory, *Alpha Science International Ltd.*, U.K., 2000.

[8] Gadjiev, A.D., Orhan, C., Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math., 32, 129-138, 2002.

[9] Duman, O., Khan, M.K., Orhan, C., A-statistical convergence of approximatig operators, Math. Inequal. Appl. 6, 689-699, 2003.

[10] Duman, O., Orhan, C., Statistical approximation by positive linear operators, Studia Math. 161, 187-197, 2004.

[11] Erkuş, E., Duman, O., A Korovkin type approximation theorem in statistical sense, Studia Sci. Math. Hungar., 43, 285-294, 2006.

[12] Duman, O., Statistical approximation for periodic functions, Demonstratio Math., 36, 873-878, 2003.

[13] Anastassiou, G.A., Global smoothness and uniform convergence of smooth Picard singular operators, Comput. Math. Appl., 50, 1755-1766, 2005.

[14] Anastassiou, G.A., Basic convergence with rates of smooth Picard singular integral operators, J. Comput. Anal. Appl., 8, 313-334, 2006.

[15] Anastassiou, G.A., Mezei, R.A., Global smoothness and uniform convergence of smooth Gauss-Weierstrass singular operators, Math. Comput. Modelling, 50, 984-998, 2009.

[16] Anastassiou, G.A., Mezei, R.A., Uniform convergence with rates of smooth Gauss-Weierstrass singular integral operators, Appl. Anal., 88, 1015-1037, 2009.

[17] Aral, A., Pointwise approximation by the generalization of Picard and Gauss-Weierstrass singular integrals, J. Concr. Appl. Math., 6, 327-339, 2008.

[18] Anastassiou, G.A., Duman, O., Statistical approximation by double Picard singular integral operators, Studia Univ. Babes-Bolyai Math., 55, 3-20, 2010.

[19] Anastassiou, G.A., Duman, O., Uniform approximation in statistical sense by double Gauss-Weierstrass singular integral operators, Nonlinear Funct. Anal. Appl., 15, 487-502, 2010.

[20] Anastassiou, G.A., Gal, S.G., General theory of global smoothness preservation by singular integrals, univariate case, J. Comput. Anal. Appl., 1, 289-317, 1999.

[21] Anastassiou, G.A., Gal, S.G., Convergence of generalized singular integrals to the unit, univariate case, Math. Inequal. Appl., 4, 511-518, 2000.

[22] Niven, I., Zuckerman, H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, *John Wiley & Sons*, 4th. Ed., New York, 1980.

[23] Buck, R.C., Generalized asymptotic density, Amer. J. Math., 75, 335-346, 1953.

[24] Fridy, J.A., On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313, 1985.

[25] Connor, J.S., The statistical and strong p-Cesáro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63, 1988.

[26] Salat, T., On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30, 139-150, 1980.

[27] Fridy, J.A., Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc, 125, 3625-3631, 1997.

[28] Hardy, G.H., Divergent Series, *Oxford Univ. Press*, London, 1949.

[29] Maddox, I.J., Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press*, 1970.

[30] Kolk, E., Matrix summability of statistically convergent sequences, Analysis, 13, 77-83, 1993.

[31] Miller, H. 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. Trans. Amer. Math. Soc., 347, 1811-1819, 1995.

[32] Anastassiou, G.A., Gal, S.G., Convergence of generalized singular integrals to the unit, multivariate case, Applied Mathematics Reviews, 1, 1-8, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.

[33] Anastassiou, G.A., Gal, S.G., Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation, *Birkhäuser Boston, Inc.*, Boston, MA, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: KESTER, Merve
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 02.01.1988 İzmir
Medeni hali	: Bekâr
Telefon	: 0 (312) 292 43 28
Faks	: 0 (312) 292 40 76
e-mail	: mkester@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Uludağ Üniversitesi/Matematik	2008

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009-2011	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce, Fransızca

Yayınlar

1.O.Duman and M.Kester, “Statistical Approximation by Double Poisson-Cauchy Singular Integral Operators”, accepted by Results in Mathematics, March 2011.