

**ALLEE ETKİSİ ALTINDA BİR GENEL FARK DENKLEMİNİN
KARARLILIK ANALİZİ**

ESRA ERDOĞAN KARAOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

AĞUSTOS 2011

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ömer AKIN

Anabilim Dalı Başkanı

Esra ERDOĞAN KARAOĞLU tarafından hazırlanan ALLEE ETKİSİ ALTINDA BİR GENEL FARK DENKLEMİNİN KARARLILIK ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Hüseyin MERDAN

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Oktay DUMAN

Üye : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN

Üye : Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

.....

Esra ERDOĞAN KARAOĞLU

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Matematik Bölümü
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Ağustos 2011

Esra ERDOĞAN KARAOĞLU

ALLEE ETKİSİ ALTINDA KARARLILIK ANALİZİ

ÖZET

Son yıllarda matematiksel modelleme metotları, disiplinler arası çalışmada büyük önem taşımaktadır. Bir olguyu ya da problemi nicelik olarak çözemsek bile, nümerik çalışmalar yaparak problemin çözümüne tahmin vermek tıp, mühendislik, biyoloji ve ekoloji gibi bir çok bilimsel sahada ilerlemeyi beraberinde getirmiştir. Ayrıca kararlılık analizi, tahmin edilen bu çözümlerin doğruluğunu göstermekte ve problemin gelecek zamandaki davranışları hakkında bize bilgi vermektedir. Bu tez çalışmasında, $T = 3$ iken $X_{t+1} = \lambda X_t f(X_{t-T})$ lineer olmayan genel fark denkleminin kararlılık analizine bakılmıştır. Daha sonra denkleme Allee fonksiyonu olarak bilinen, negatif popülasyon yoğunluğunu simgeleyen fonksiyon eklenmiş ve kararlılık analizleri karşılaştırılmıştır. Allee etkisi eş bulamama, yiyecek kıtlığı, avlanma, az doğurganlık oranının olması gibi durumlarda ortaya çıkan, popülasyon yoğunluğu belli bir kritik yoğunluğun altında iken büyüme oranını düşürüp, popülasyonun yok olmasına sebep olan bir etkidir. Sonuç olarak, daha önce $T = 1$ ve $T = 2$ için yapılan çalışmalar ile karşılaştırılmış ve gecikme terimi arttıkça kararlılığın azaldığı, bazı durumlarda Allee etkisinin denklemin kararlılık yapısını bozduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, ‘Lojistik fark denklemleri’ adı verilen bir denklem üzerinde nümerik çalışmalarla bulunan sonuçlar desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Allee etkisi, kararlılık, fark denklemleri, gecikme

University : TOBB Economics and Technology University
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Department of Mathematics
Supervisor : Associate Professor Hüseyin MERDAN
Degree Awarded and Date : M.Sc. – August 2011

Esra ERDOĞAN KARAOĞLU

**STABILITY ANALYSIS OF A GENERAL DIFFERENCE EQUATION
UNDER ALLEE EFFECT**

ABSTRACT

Recently, mathematical models and methods have played an important role in interdisciplinary studies. Although we couldn't solve the problem or phenomena quantitatively, we can estimate the solutions by using numerical methods. Solving problems qualitatively in this way has led to improve different kinds of science, such as biology, ecology and engineering. Also stability analysis could reveal whether the estimated solution is true or not and could give a chance for making sense of behaviour in advance. In this thesis, stability analysis of a general nonlinear delay difference equation $X_{t+1} = \lambda X_t f(X_{t-T})$ is studied for $T = 3$. Later, the Allee effect function, known as a negative population density function, has been added to the equation. The Allee effect refers to a population that has a maximal per capita growth rate at low density. This effect can be caused by difficulties in, for example, mate finding, social dysfunction at small population sizes, inbreeding depression, food exploitation, and predator avoidance of defence. In conclusion, this model has been compared the situations $T = 1$ and $T = 2$ which had been studied before. It has been shown that the longer the delay be, the greater the destabilizing effect be. In some cases the Allee effect can even annihilate the stability structure. And eventually, the results found have been supported numerically with an example, called 'Logistic Difference Equation' by using Matlab.

Keywords: Allee effect, stability, difference equations, delay

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren kıymetli hocam Doç. Dr. Hüseyin MERDAN'a ve engin tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve asistan arkadaşlarıma, ayrıca bu süreç boyunca desteklerini esirgemeyip beni bu günlere getiren aileme ve her zaman yanımda olan kıymetli eşim Naim KARAOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca maddi desteğinden dolayı Tübitak'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
BÖLÜM 1	
1. GİRİŞ	1
1.1. Tez Çalışmasının Amacı	1
1.2. Fark Denklemlerine Genel Bir Bakış	3
1.3. Warder Clyde Allee ve Allee Etkisi	8
1.3.1. Allee Etkisi Üzerine Çalışmalar	8
1.3.2. Allee Etkisi Tanımı ve Bileşen ve Demografik Allee Etkisi	14
BÖLÜM 2	
2. $X_{t+1} = F(\lambda, X_t, X_{t-T})$ Denkleminde $T = 1$ Durumu	20
2.1. Notasyon	21
2.2. $T = 1$ Durumu İçin Genel Kabuller	22
2.3. Lokal Asimptotik Kararlılık İçin Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi	23
2.3.1. $t - 1$ Anında Allee Etkisi	25
2.3.2. t Anında Allee Etkisi	27

2.3.3. $(t, t - 1)$ Anında Allee Etkisi	29
---	----

BÖLÜM 3

3. $X_{t+1} = F(\lambda, X_t, X_{t-T})$ Denkleminde $T = 2$ Durumu	31
3.1. $t - 2$ Anında Allee Etkisi	33
3.2. t Anında Allee Etkisi	35
3.3. $(t, t - 2)$ Anında Allee Etkisi	39

BÖLÜM 4

4. $X_{t+1} = F(\lambda, X_t, X_{t-T})$ Denkleminde $T = 3$ Durumu	41
4.1. $k=4$ İçin Schur-Cohn Kriteri	42
4.2. Kararlılık Analizi	43
4.3. $t - 3$ Anında Allee Etkisi	45
4.4. t Anında Allee Etkisi	49
4.5. $(t, t - 3)$ Anında Allee Etkisi	54

	Sayfa
BÖLÜM 5	
5. Nümerik Çalışmalar	57
BÖLÜM 6	
6. Sonuçlar	64
KAYNAKLAR	65
EKLER	
A. Lokal Asimptotik Kararlılık İçin Schur-Cohn Kriteri	68
B. Eşitsizliklerin Çözülmesi	70
ÖZGEÇMİŞ	72

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Kararlı x^* denge noktası	6
Şekil 1.2. Kararsız x^* denge noktası	6
Şekil 1.3. Asimptotik kararlı x^* denge noktası	7
Şekil 1.4. Soğuk hava koşullarında kümeleşen bildircinlar	9
Şekil 1.5. 32 mg undaki kın kanatlı böceğin başlangıç yoğunluğu ve doğum oranı arasındaki ilişki	10
Şekil 1.6. Mahsullere çok zarar veren ve çabuk çoğalabilen, Allee etkisinin araştırılmalarında ilk kullanılanlardan kın kanatlı böcek	11
Şekil 1.7. Afrikalı vahşi köpekler	12
Şekil 1.8. Allee etkisine çeşitli örnekler	13
Şekil 1.9. Bileşen ve Demografik Allee etkileri	15
Şekil 1.10. Negatif yoğunluk bağımlılığı ve Allee etkisi	17
Şekil 1.11. Demografik Allee etkisi tanımları	18
Şekil 1.12. Popülasyon dinamiğinden basit bir lojistik denklem modeli	19
Şekil 5.1.a. Parametre değişiminin kararlılık üzerindeki etkisi, $\lambda = 1.2$	57
Şekil 5.1.b. Parametre değişiminin kararlılık üzerindeki etkisi, $\lambda = 1.3$	58
Şekil 5.1.c. Parametre değişiminin kararlılık üzerindeki etkisi, $\lambda = 1.4$	58
Şekil 5.2. $t = 3$ anında Allee etkisiz ve Allee etkili denklemin karşılaştırmaları	59
Şekil 5.3. $T = 2$ ve $T = 3$ olduğunda $t = T$ anında Allee etkileri	59
Şekil 5.4. $T = 2$ ve $T = 3$ olduğunda t anında Allee etkileri	60
Şekil 5.5. t anında Allee etkisinin kararlılığa etkisi	61
Şekil 5.6. t anında Allee etkisinin kararlılığa etkisi	61
Şekil 5.7. t anında Allee etkisinin kararlılığa etkisi	62
Şekil 5.8. Kararlılık karşılaştırmaları	63

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

1.1. Tez Çalışmasının Amacı

Son yıllarda popülasyon dinamiği üzerine çalışmak, biyolojik sistemleri matematiksel metotlar yardımıyla modellemek ve analiz etmek oldukça rağbet görmüştür ve görmektedir. Doğada cevabını bilemediğimiz bir çok olgunun, karmaşık yapıların bu metotlar yardımıyla yaklaşık olarak çözülmesi, çözümüne tahmin verilmesi bile çok büyük önem arz etmektedir. Öyle ki bu yöntemler sadece popülasyon dinamiğinde değil, tıp, ekonomi ve çeşitli mühendislik dallarında da kullanılmakta ve günümüz teknolojisinin hızla ilerlemesini sağlamaktadır. Bu açıdan matematiksel modelleme yöntemleri, nümerik çalışmalar ve bilgisayar uygulamaları birçok problemin cevabını bulmada ve doğadaki olayları anlamada en etkili yöntemlerden birisidir.

Matematiksel modelleme yapabilmek için olayları gerçeğe yakın ve mantıklı modellemek gerekir. Bu modelleri kurabilmek için en çok diferensiyel denklemler, fark denklemleri, kısmi türevli denklemler, kesirli diferensiyel denklemler, fonksiyonel diferensiyel denklemler kullanılmaktadır. Sürekli zamanlı devam eden bir olayın modellenmesinde diferensiyel denklem kullanılırken, ayrık zaman aralıklarındaki olayların modellenmesinde genellikle fark denklemleri kullanılır. Aslında fark denklemi, diferensiyel denkleme bir yaklaşım verir. Fark denklemlerinde bir önceki popülasyonun bir sonraki popülasyona etkisi yoktur. Bireyler yaşar, ölür ve yerini diğer nesle bırakır. Diferensiyel denklemlerde ise zaman $[0, \infty)$ aralığında düşünülebilir. Diferensiyel denklemlerin verdiği sonuçlar, bu şekilde nesillerin aynı anda yaşamadığı (nonoverlapping) popülasyonları modellemek açısından doğaya daha uygundur.

Matematiksel modeller geliştikçe, zaman içerisinde, önceden kurulan denklemlerin doğayı açıklamakta yeterli olmadığı anlaşılmıştır. Var olan denklemlere gecikme terimi eklemek veya problemi iyileştirecek şekilde fonksiyonları değiştirmek, fonksiyonlar eklemek modelin gerçeğe daha yakın olması için yapılan yenileştirmelerdendir.

Gecikme teriminin kullanılmasına bir örnek cinsel olgunlaşma sureci gösterilebilir. Bireylerin şu andaki büyüme oranlarına, kendinden önce gelen kuşakların etkisi varsa bu biyolojik anlamda gecikmeyi ifade eder. rnek olarak balinaları verebiliriz. Balina dişileri 7 yaşında cinsel olgunluğa ulaşmaktadır. Bu durumda şimdiki zamana etki eden doğurganlık, 7 yıl önce doğan bireylerden ve daha önce olgunluk kazanan diğer bireylerden gelmektedir.

Bir olayı modelledikten sonra ayrıca mühim olan kısmı onu olaya göre yorumlayabilmektir. Eldeki verilere göre tutarlı olup olmadığı deneme yanılma yöntemiyle belirlenebilir. Özellikle lineer olmayan bir fark denklemini ya da diferensiyel denklemi zemediğimiz zaman denklemi niteliksel olarak (qualitative) zebiliriz. Bu gayede popülasyon denklemlerinde kararlılık analizi çok önemlidir. Bir popülasyonun yok olmaması için denge yoğunluğuna ulaşması gerekmektedir. Modellemeler yardımıyla gelecek zamanlardaki durum belirlenebilir, kararlılık analiziyle de bu durumun devamı hakkında kesin bilgiye sahip olunabilir. Örneğin popülasyon dinamiğinde pozitif denge noktası, popülasyonun varlığını devam ettirmesi, sıfır denge noktası ise popülasyonun yok oluşu anlamına gelmektedir.

Bu tez çalışmasında, genel olarak ele alınan bir fark denklemine gecikme terimi eklenmiş, daha sonra denkleme Allee fonksiyonu katılmış ve denklemlerin kararlılık yapıları incelenmiştir. Bu alışmalar ‘Lojistik Fark Denklemi’ adı verilen bir örnek üzerinde nümerik çalışmalar yardımıyla da desteklenmiştir.

1.2. Fark Denklemlerine Genel Bir Bakış

Popülasyon dinamiğinde, diferensiyel denklemler sürekli zamanlı olayları modellemek için kullanılırken, fark denklemleri ayrık zamanlı olayları modellemek için kullanılır. Genellikle, ayrık zaman aralıkları değişimin olduğu aralığı ifade eder. Aralığın uzunluğu bize, değişimin gerçekleştiği sabit zamanı verir. Örneğin, aralığın uzunluğu bir yıl, bir ay, bir saniye olabilir ve çalışılan modele göre değişebilir. Eğer bir popülasyonda, bir önceki jenerasyon bir sonraki jenerasyon cinsinden yazılabiliyorsa fark denklemi ile ifade edilebilir. Örneğin $(t + 1)$ inci jenerasyonu $x(t + 1)$ ile gösterirsek ve bu jenerasyon t . jenerasyona bağlı ise

$$x(t + 1) = f(t, x(t)), \quad t = 0, 1, 2 \dots \quad (1.1)$$

olarak yazılabilir. (1.1) denklemi **birinci mertebeden fark denklemi** olarak adlandırılır. İlk durumda $x(t + 1) = f(x(t))$ olduğunu düşünelim. Diğer taraftan, herhangi bir $x(0)$ noktasından başlanırsa,

$$x(0), f(x(0)), f(f(x(0))), f(f(f(x(0)))) \dots \quad (1.2)$$

iterasyonları düşünülebilir. Notasyon olarak

$$x(0) = x_0 = f^0(x_0), f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))) \dots (1.3)$$

göz önüne alınmaktadır. $x(t) = f^t(x_0)$ alınarak düzenlenirse

$$x(t + 1) = f^{t+1}(x_0) = f(f^t(x_0)) = f(x_t) \quad (1.4)$$

elde edilir. Bu öteleme olayı “ayrık dinamik sistemler” için bir örnektir.

Tanım 1.2.1: f , reel değerli bir fonksiyon olmak üzere k . mertebeden en genel fark denklemi

$$f(x_{t+k}, x_{t+k-1}, \dots, x_{t+1}, x_t, t) = 0, \quad t = 0, 1, \dots \quad (1.5)$$

formundadır. Eğer f , t' ye bağılı ise **otonom olmayan**, t' ye bağılı değil ise **otonom fark denklemi** adı verilir.

(1.5) denkleminin en sık kullanılan gösterimini

$$x_{t+k} + a_1 x_{t+k-1} + \dots + a_k x_t = b_t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

olarak yazabiliriz. (1.6) denkleminde $a_k \neq 0$ olduğu takdirde denklemin mertebesi k ' dir denir. Genelde, katsayıların reel ve fonksiyonların reel değerli fonksiyon oldukları kabul edilir. a_j katsayıları $j = 1, \dots, k$ için t nin veya x_i nin ($i = t, \dots, t + k - 1$) bir fonksiyonu olabilir.

Tanım 1.2.2: a_j katsayıları $j = 1, \dots, k$ için t' den bağımsız veya sabit ise, veya x_i $i = t, \dots, t + k - 1$ değişkeninin bir fonksiyonu değilse, fark denkleminde **lineer** (doğrusal), aksi halde **lineer olmayan fark denklemi** adı verilir. Ayrıca (1.6) denklemini lineer ve $\forall t$ için $b_t = 0$ ise **homojen**, aksi takdirde **homojen olmayan fark denklemi** adı verilir.

Fark denkleminin çözümü, $t = 0, 1, \dots$ için yerine konulduğunda denklemi sağlayan x_t fonksiyonudur.

Örnek 1.1: t anındaki popülasyon büyüklüğünü x_t ile ve popülasyondaki her bireyin her jenerasyondaki doğurduğu birey sayısını a ile gösterebiliriz. (Bireylerin doğum yaptıktan sonra öldüğü kabul ediliyor). Bu durumda popülasyon modelimiz

$$x_{t+1} = ax_t \quad (1.7)$$

olacaktır. Bu denklem birinci mertebeden, lineer ve homojen bir denklemdir.

$$x_1 = ax_0, \quad x_2 = ax_1 = a^2 x_0, \dots \quad (1.8)$$

iterasyonlarıyla çözüm $x_t = a^t x_0$ olarak yazılabilir.

$$x_{t+k} + a_1 x_{t+k-1} + \dots + a_k x_t = 0 \quad (1.9)$$

lineer fark denkleminde $x_t = \lambda^t$, $\lambda \neq 0$ alınarak çözüm aranır,

$$\lambda^{t+k} + a_1 \lambda^{t+k-1} + \dots + a_k \lambda^t = 0 \quad (1.10)$$

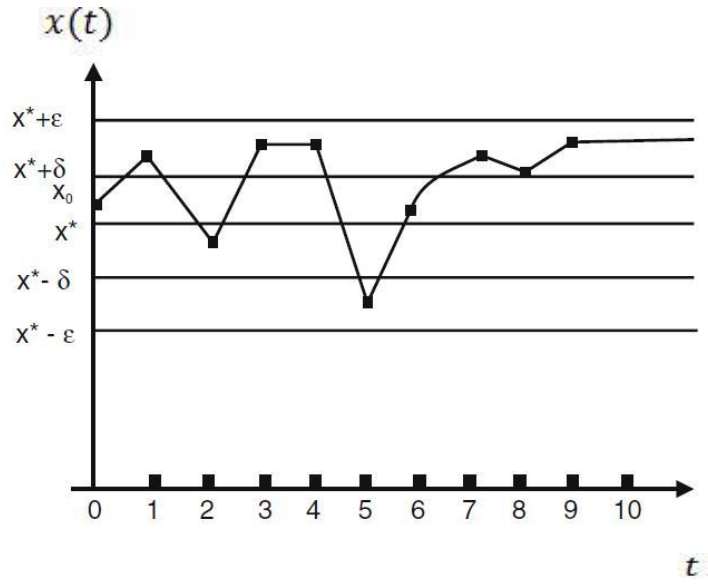
$$\lambda^t (\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k) = 0 \quad (1.11)$$

elde edilir ve $\lambda^t \neq 0$ olduğundan $(\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k) = 0$ olması gerektiği görülür.

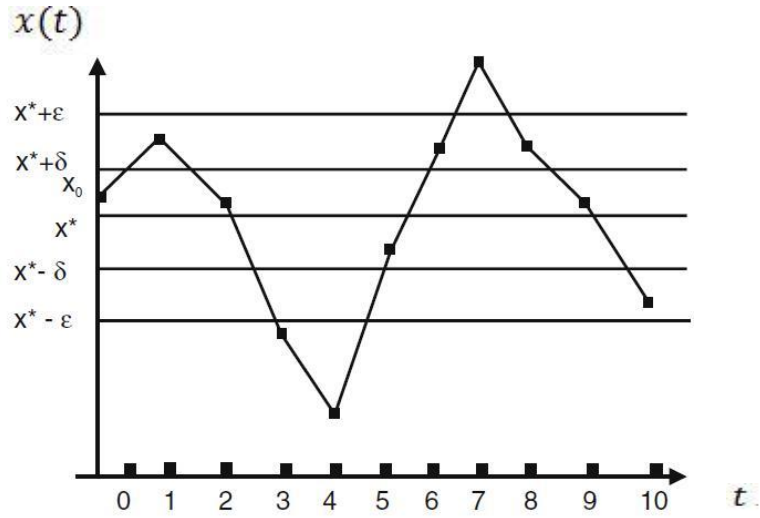
Tanım 1.2.3: $(\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k) = 0$ denkleminin (1.9) denkleminin **karakteristik polinomu** adı verilir. Bu polinomun her bir köküne **öz değer** adı verilir.

Tanım 1.2.4: $x_{t+k} = f(x_{t+k-1}, \dots, x_{t+1}, x_t)$ denkleminde $\tilde{x} = f(\tilde{x}, \dots, \tilde{x}, \tilde{x})$ eşitliğini sağlayan çözüme **denge çözümü (sabit nokta, denge noktası)** adı verilir.

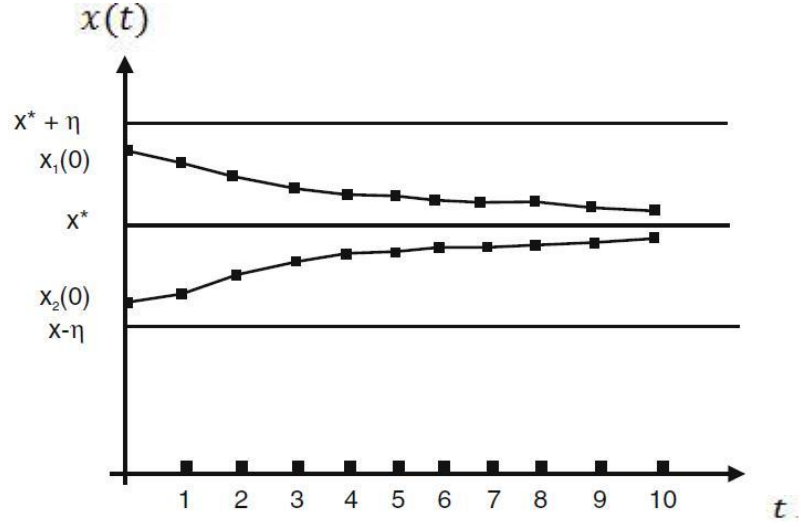
Tanım 1.2.5: Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x_0 - \tilde{x}| < \delta$ koşulunu sağlayan bütün x_t değerleri için $|x_t - \tilde{x}| = |f^t(x_0) - \tilde{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse \tilde{x} denge noktasına **kararlı denge noktası** denir, aksi takdirde **kararsızdır**. (Denk bir ifade ile \tilde{x} denge noktasının kararlı denge noktası olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur öyle ki $|x_0 - \tilde{x}| < \delta$ iken $\forall t \geq 0$ için $|x_t - \tilde{x}| = |f^t(x_0) - \tilde{x}| < \varepsilon$ sağlanmasıdır.) Ek olarak, öyle bir $\gamma > 0$ sayısı vardır öyle ki her $|x_0 - \tilde{x}| < \gamma$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \tilde{x}$ koşulu sağlanıyorsa \tilde{x} denge noktasına **çekici** adı verilir. Eğer bir denge noktası hem çekici hem de kararlı ise o denge noktasına **lokal asimptotik kararlı denge noktası** adı verilir.



Şekil 1.1. Kararlı x^* denge noktası
 x_0 başlangıç noktası x^* denge noktasının δ komşuluğunda iken
 $x(t)$ çözümleri $\forall t \geq 0$ için x^* denge noktasının ϵ komşuluğunda kalmaktadır [4].



Şekil 1.2. Kararsız x^* denge noktası
 x_0 başlangıç noktası x^* denge noktasına ne kadar yakın seçilirse seçilsin
 $x(t)$ çözümleri belirli bir t değerinden sonra, x^* denge noktasının ϵ komşuluğunun
içinde kalmamaktadır.



Şekil 1.3. Asimptotik kararlı x^* denge noktası $x(t)$ çözümleri zaman ilerledikçe x^* denge noktasına yaklaşmaktadır.

Bu tezde kolaylık açısından lokal asimptotik kararlı denge noktası yerine kısaca kararlı denge noktası ifadesi kullanılmıştır.

1.3. Warder Clyde Allee ve Allee Etkisi

Kariyerine Chicago’da başlayıp bitiren Warder Clyde Allee, çalışmalarında istatistiği kullanan ilk ekolojistlerden olup, aynı zamanda ekoloji dalının ayrı bir disiplin olarak rol almasında çok etkili bir isim olmuştur.

Allee’nin ilk hipotezi, sudaki bazı popülasyonların suyun kimyasını etkilediğine dayanmaktadır. Belirli su türleri suya kalsiyum tuzları gibi birçok koruyucu madde bırakmakta ve bu onların yaşama şansını yükseltmektedir. 1932 yılında yeterli sayıda ‘gold fish’ balığının, suyun optimal kimyasal özelliklerini sağlayabildiklerini göstermiştir. Daha sonra Allee, dinamik sistemlerin birbirlerini sadece yarış halinde iken değil, mutualist yaşarken de etkilediğini gösterecek deneysel ve gözlemsel çalışmalar yapmıştır. Bu popülasyonların kümeleşmesinin sonucu olarak, Odum 1953’te ‘Allee principle’ olarak bilinen Allee etkisini ortaya atmıştır [2].

1.3.1. Allee Etkisi Üzerine Çalışmalar

İlk çalışmalarda ‘tsetse’ sineğinin (tsetse fly), belirli bir yoğunluğun altında iken kendiliğinden ortadan kaybolduğu gözlemlenmiştir. Bazı türlerin (denizkestanesi, rotifer vb.) yaşama şanslarını daha çok artırmak amacıyla grupça yaşadığı analiz edilmiştir. Bu, türleri dışarıdan gelecek tehlikelere, kötü hava koşullarına, avcılara, kimyasal veya fiziksel olaylara karşı daha güçlü kılmaktadır. Bu durumda kümeleşme, toplam yüzeyi azaltmaktadır (Bakınız Şekil 1.4).



Şekil 1.4. Soğuk hava koşullarında kümeleşen bıldırcınlar

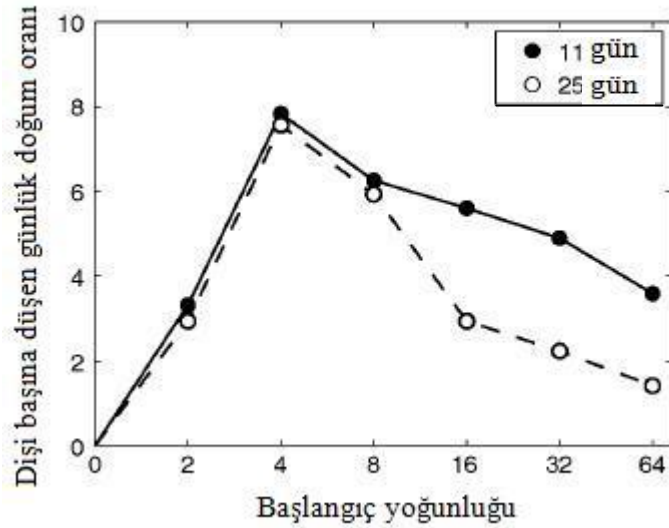
Grup küçüldükçe, soğuk havayla temas eden bıldırcın yüzeyi artar ve böylece ölüm oranı yükselir.

Kısa bir süre sonra, kın kanatlı böcek (*Tribolium confusum*) üzerine yapılan çalışmada, Allee, doğum oranının en yüksek olduğu zamanın popülasyonun denge yoğunluğunda olduğunu göstermiştir. Yüksek yoğunlukta bireyler arasındaki yarışın arttığı ve yetişkin bireylerin yumurtaları yemeye başladığı gözlemlenmiştir. Düşük yoğunlukta ise böcekler açısından ilginç bir sonuç olan, eş bulma durumunun azaldığı ve dişilerin daha az doğurduğu saptanmıştır (Bakınız Şekil 1.5).

Düşük yoğunluklu popülasyonlardaki klasik görüş, bir süre sonra popülasyonun denge yoğunluğuna ulaşmasıdır. Tüm kaynaklar elverişli olduğu sürece, (yemek, barınma koşulları, iklim vb.) popülasyon çoğalmaya başlar ve denge noktasına ulaşır. Ancak Allee, bunun her zaman böyle olmayacağını savunmuştur. Popülasyonda, birey sayısı azaldıkça doğum oranının azalacağını ve daha az genç birey üreyeceğini, daha az genç bireyden daha az popülasyon ortaya çıkacağını ve bu durumun popülasyon yok olana kadar devam edeceğini söylemiştir. Bu bir Allee etkisi örneğidir [5].

Yaklaşık elli yıl boyunca Allee etkisi, Allee ve öğrencileri tarafından çalışılmıştır. Ekoloji bilim adamları genel olarak iki sebeple bu konudan uzak durmuşlardır: Birinci olarak, popülasyon dinamiği üzerine bu konuda çalışmak gerçekten uzun bir süreç ve toplu bir veri gerektirmekteydi. İkinci durum ise o yıllarda bu konu ilgilerini pek çekmiyordu. Ancak biyoçeşitliliğin azalması, çevre dengelerinin bozulmaya başlaması ve Dennis'in [6] Allee etkisi üzerine yaptığı kısa bir araştırmadan sonra bilim adamlarının dikkatini çekmeye başlamıştır. Daha sonra azalan ya da küçük popülasyonların neden yok olduğu ilgi konusu olmuştur. Bu konuda Caughley 'the declining population paradigm', 'the small population paradigm' çalışmalarını yapmıştır [7].

90'ların başına gelindiğinde çalışmalar hızlanmaya başlamış ve çalışılan alanlar artmıştır. Deniz omurgasızları, bitkiler, böcekler, omurgalılar, düşük yoğunluklu popülasyonlarda eş bulamama durumu çalışılan konular arasında yer almaktadır [8-18].



Şekil 1.5. 32 mg buğday unundaki kın kanatlı böceğin başlangıç yoğunluğu ve doğum oranı arasındaki ilişki



Şekil 1.6. Mahsullere çok zarar veren ve çabuk çoğalabilen, Allee etkisinin araştırılmasında ilk kullanılanlardan kın kanatlı böcek

Son yıllarda yapılan çalışmalarda birçok hayvan türünün yok olmasına eş bulamama durumunun sebep olduğu görülmektedir. Yoğunluk azaldıkça, çiftleşme azalmaktadır. Burada popülasyonun yer aldığı alan da önem arz etmektedir. Alandaki birey sayısı seyredikçe, ya da popülasyonun yayıldığı alan genişledikçe yeterli derecede eşleşme olamamaktadır. Örnek olarak Hint Okyanusu'ndaki büyük midyelerin yerel yok oluşunu verebiliriz [19]. Yoğunluk arttıkça üreme oranının da arttığı gözlemlenmiştir. Ayrıca yine 1996'de yapılan bir çalışmada Madagaskar maymunu ve firavun faresinin kendi türleriyle birlikte tutsak edildiğinde, doğada ayrı halde yaşamalarından daha çok üredikleri gösterilmiştir [20].

Günümüzde soyu tükenmeye yüz tutan örneklerden bir tanesi de Afrikalı vahşi köpek türüdür (the African wild dog-AWD, the African hunting dog, the painted hunting dog). IUCN raporuna göre 5500 köpekten daha az bir popülasyon kaldığı ve bunların yarısından daha azının doğurganlık oranına sahip olduğu belirtilmiştir [21]. Bu yok olmanın temel sebepleri başlıca çevresel bozulma ve bulaşıcı köpek hastalıklarından (kuduz, distemper) ileri gelmektedir. Afrikalı vahşi köpek dişileri tek seferde yaklaşık 20 köpek yavrusu doğurabilmekte ve yardım edecek diğer

köpeklere de ihtiyaç duymaktadır. Köpeklerin bir kısmı bu yavrular için avlanmaya giderken, bir kısmı da bu yavruları korumak için dişilerin yanında kalmaktadır. Grup sayısının 4'ten daha az olması durumunda başarılı bir şekilde üreme olmayacağı [21] çalışmasında öne sürülmüştür. Bu türün toplu gezmesinin faydaları (foraging, breeding, survival), hayatta kalması için köpek gruplarının belirli bir sayının altına düşmemesi gerektiği (en az 5 yetişkin), kaplan ve sırtlanlara karşı savaşabilmek için toplu yaşamaları gerektiği daha birçok çalışmada yer almıştır [22-24].



Şekil 1.7. Afrikalı vahşi köpekler [24]

Geniş alana yayılan bir popülasyonun yoğunluğunun artmasına bazı türlere özgü davranışlar da etki edebilir. Dişileri etkilemek veya kendini göstermek için erkek bireylerin sergilediği davranışlar eşleşme zamanında eşlerin birbirlerini bulmasına yardım eden olaylardan biridir. Kuşlarda daha çok görülen bu davranışlar (lekking behaviour) yiyecek bulmak için alana yayılan popülasyonu tekrar toplamak için iyi bir fonksiyon olarak gösterilmektedir [25].



Şekil 1.8. Allee etkisine çeşitli örnekler

- a) Tek başına kalan ağaç tozlaşma yapamamakta ve çoğalamamaktadır. b) Avlanmak için birlikte gezen ton balıkları c) 400 den fazla çeşit ürünü yok edebilen meyve sineğini yok etmenin yollarından bir tanesi Allee etkisi yaratmaktadır. d) Zararsız bir papağan olan Kakapo, yeteri kadar üreyememiş ve dünyada sadece 54 tane kalmıştır [24].

Yüzyılın sonuna gelindiğinde ise, Courchamp ve arkadaşları ve Stephens ve Sutherland aynı dergide Allee etkisi üzerine iki makale yayınlamıştır [24,27]. Bu makalelerden sonra Allee etkisi ciddi şekilde dikkat çekmeye başlamıştır. Teorik ve deneysel olarak yürütülen Allee etkisi çalışmaları hala gereken önemini kazanamamıştır [5].

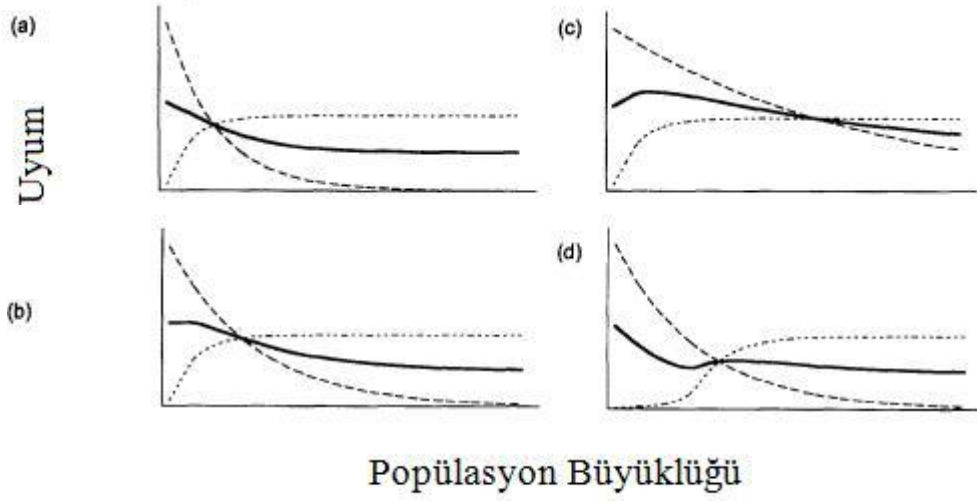
1.3.2. Allee Etkisi Tanımı ve Bileşen ve Demografik Allee Etkisi

Allee' nin yine ilk başlardaki çalışmalarından birisi kırmızı akvaryum balığı (goldfish) üzerinedir. Allee, suda hiç balık yokken suya balık atılması durumunda büyüme oranı ile suda daha önceden balık varken balık atılması durumunda büyüme oranlarını karşılaştırmış ve ilk durumda büyüme oranının daha az olduğunu gözlemlemiştir [1]. Daha sonraki çalışmalarda popülasyon sayısının artmasının üremeyi artırarak popülasyonun yaşama şansını kötü koşullara rağmen (sabit vücut ısısının yok olması örnek verilebilir) uzattığı ve zehirli kimyasal ayraçlardan (reagents-suyu test etmek için kullanılan kimyasallar) daha fazla korunmayı sağladığı gözlemlenmiştir.

Popülasyon sayısının artmasının daha bir çok yararı sıralanabilir; toplu halde yaşamak avcının da popülasyon büyüklüğünü etkileyebilir ve avcı popülasyonunda daralma ya da genişleme etkisi yapabilir. Grup halinde gezmek yine dışarıdan gelebilecek olası avcı tehlikelerine karşı daha tetikte olmayı sağlar. Avcıyı fark etmek ve saldırılara önlem almak daha erken olabilir. Yemek arayışlarında ortak hareket etmek daha kolay avlanmayı sağlar. Yine yukarıda bahsedildiği gibi vücut ısısının kötü hava koşullarına karşı sabit tutulması, eş bulma kolaylığı, üreme biçimine göre tozlaşma ya da döllenmeyi kolaylaştırma, yaşanılan çevre düzenlemesi ve iyileştirmesi gibi pek çok bakımından grup halinde yaşamak bireylere faydalıdır. 'Çoğu durumda türdeş bireylerin büyük topluluklar halinde yaşaması düşmanlarına karşı korunmak için mutlaka gereklidir' diyen Darwin'in de daha önceden buna benzer yaklaşımlar yaptığını görmekteyiz [29].

Allee tam olarak bir tanım yapmamasına rağmen, Allee etkisi tanımı, bireysel uyum ve türdeş yoğunluğu arasındaki pozitif bağıntı olarak verilmektedir [28]. Allee'nin orijinal gözlemlerine göre büyük popülasyonlarda bireysel uyum bileşeni (component of individual fitness) (ölüm veya üreme olasılığı örnek verilebilir) daha yüksektir. Burada bireysel uyum bileşeninden kasıt, bir bireyin yaşamının

popülasyonun yoğunluğunu nasıl etkilediğidir. Bu ayrışımı yapmak için Allee etkisini ‘Bileşen ve Demografik Allee etkisi’ olarak ikiye ayırabiliriz.



Şekil 1.9. Bileşen ve Demografik Allee etkileri

Grup halinde iken tetikte olmak gibi bir davranış bileşen Allee etkisini artırabilir (kısa noktalar). Demografik Allee etkisi negatif yoğunluğa bağlıdır (uzun noktalar, mücadele veya tüketim gibi). Popülasyonun tamamının uyumu (çizgi) a) güçlü b) ortalama c) zayıf negatif yoğunluklarda Allee etkileri d) Allee etkisinin sigmoid bileşeni ortalama yoğunluklarda demografik Allee etkisine yol açabilir [28].

Bileşen Allee etkisi (Component Allee Effect), Afrikalı köpeklerde olduğu gibi eş bulmaktan diğer bireylerin yardımına kadar pek çok şekilde değişen etkenin bireyin üremesini etkilemesidir. Diğer bir deyişle, bireysel uyum bileşeninin yoğunlukla olan pozitif ilişkisidir. Ancak düşük yoğunluklarda azalmaktadır. Örnekle daha iyi anlaşılır kılmak için X ve Y hayvanlarını ele alalım. X hayvanı kendi bölgesinde eş bulamayıp çoğalamamış olsun. Y hayvanı da eş bulmuş, 8 yavru doğurmuş, fakat bu yavruların 5 tanesi çiftçi tarafından zehirlenmiş olsun. Bu durumda X ve Y hayvanları bireysel olarak uyumdan düşmüştür ve o yıl normal üreme sayılarından daha az bir sayıyla popülasyonu etkilemiştir.

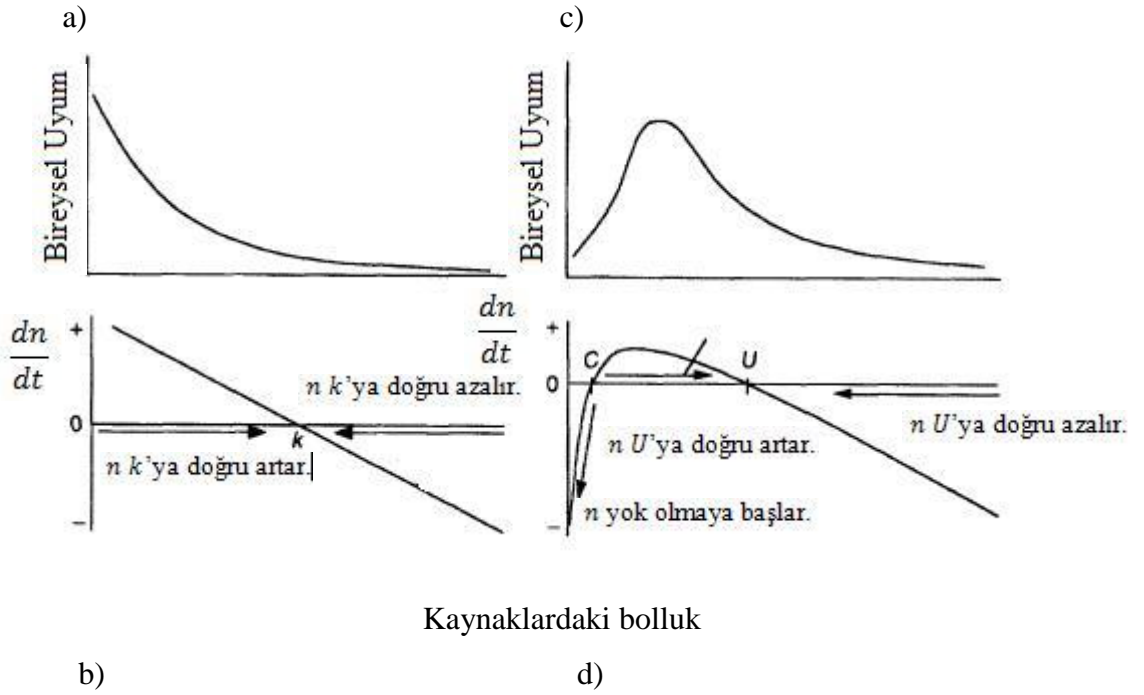
Bireysel uyum bileşeni, sadece üreme ile değil hayatta kalabilme mücadelesi ile de popülasyonun yoğunluğunu etkileyebilir. Avlanma riski altında olan türler veya

türler arası kümeleşmelerin arasında kalan küçük türler baskın türler tarafından hedef olabilir. Bu küçük türlerin yeterli yiyecek bulmak için daha az şansları olabilir.

Burada önemli olan [28] de açıklandığı gibi, bileşen Allee etkisi uyumda düşüş yaratabilir, fakat diğer sosyal veya çevresel faktörler daha ağır basarsa popülasyonun tamamında büyük bir düşüş yaratmayabilir. Eğer popülasyon çoksa avcılara karşı tetikte olmak daha kolay olabilir ve bireysel uyumu yükseltebilir. Ancak popülasyon aşırı çoksa bireyler arası rekabet başlayabilir, yiyecek bulmak zorlaşabilir ve bireysel uyum azalabilir. Yani burada önemli olan popülasyon büyüklüğü değil, popülasyon yoğunluğudur.

Bileşen Allee etkisi, sadece bireysel uyumu düşürmekle kalmayıp aynı zamanda tüm popülasyonu da etkilemeye başlıyorsa ‘Demografik Allee etkisi’ nden bahsetmek mümkündür. Burada önemli fark, demografik Allee etkisi bireysel uyumda düşüşe yol açan faktörlerin, yani bileşen Allee etkilerinin toplamıdır.

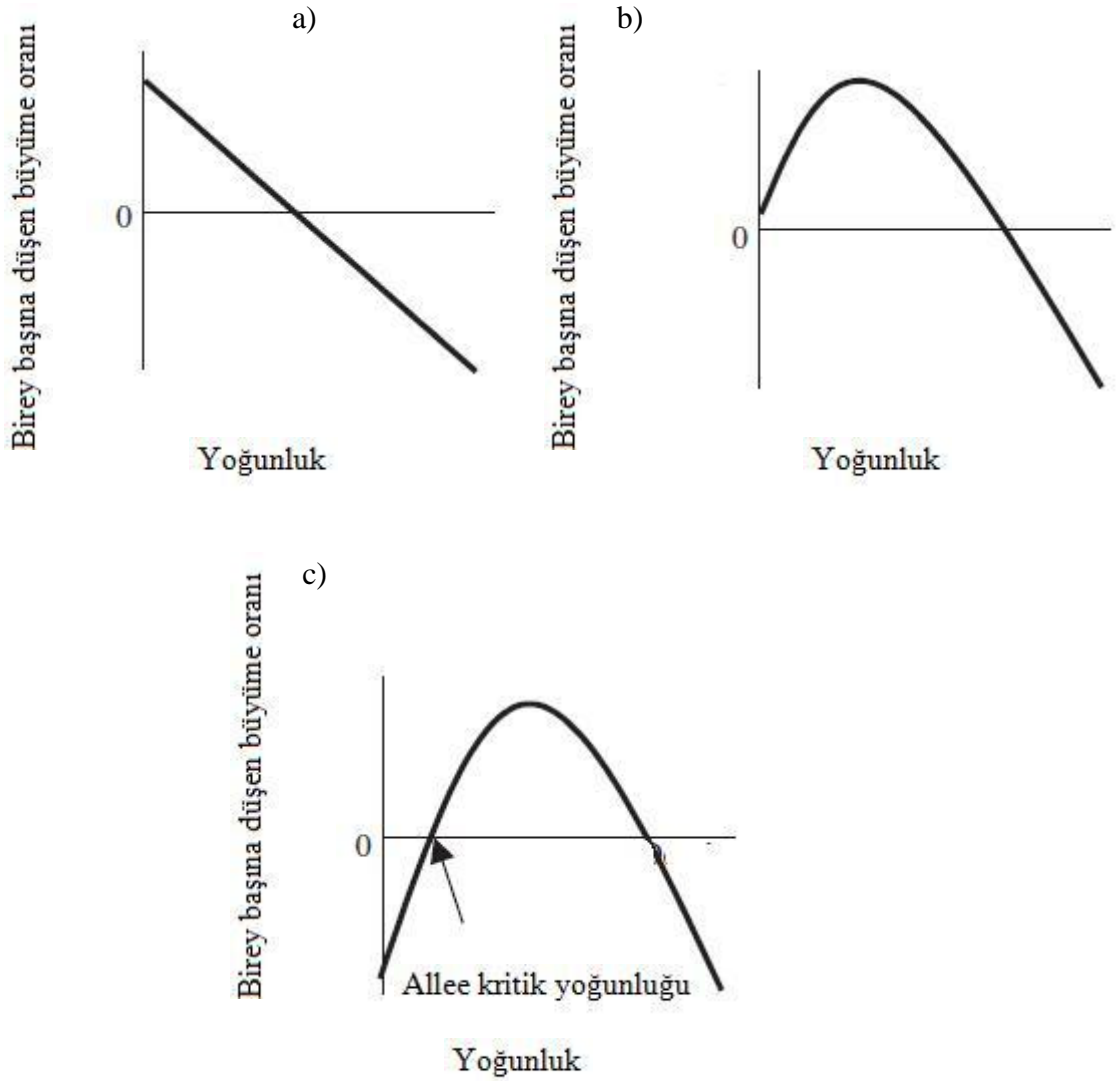
Burada dikkat edilmesi gereken bir husus da her zaman bileşen Allee etkisinin demografik Allee etkisini oluşturmayacağıdır. Mesela, yukarıdaki X hayvanı eş bulamamış fakat ona uygun olan bir dişi başka bir eş bulmuş ve X hayvanından olacak olan bireylerden belki de genotip ve fenotip olarak daha düzgün ve sağlıklı bireyler meydana getirmiştir. Bu durumda X hayvanının bireysel uyum bileşeninin hiçbir önemi kalmamıştır.



Şekil 1.10. Negatif yoğunluk bağımlılığı ve Allee etkisi
a) Popülasyon büyüme de kaynaklardaki azalma veya bireyler arasındaki yarış gibi sebeplerden bireysel uyumda azalma olabilir. b) Lojistik denklem örneğinde (Şekil 1.12) olduğu gibi bolluğun artmasıyla kararlı denge noktası (k) ya doğru lineer bir azalış olabilir. c) Bireysel uyum ortalama yoğunlukta en fazla olacaktır. d) Popülasyon düşük yoğunlukta iken büyüme oranı negatif ise biri kararsız (C) diğeri kararlı (U) iki tane denge noktası ortaya çıkacaktır.

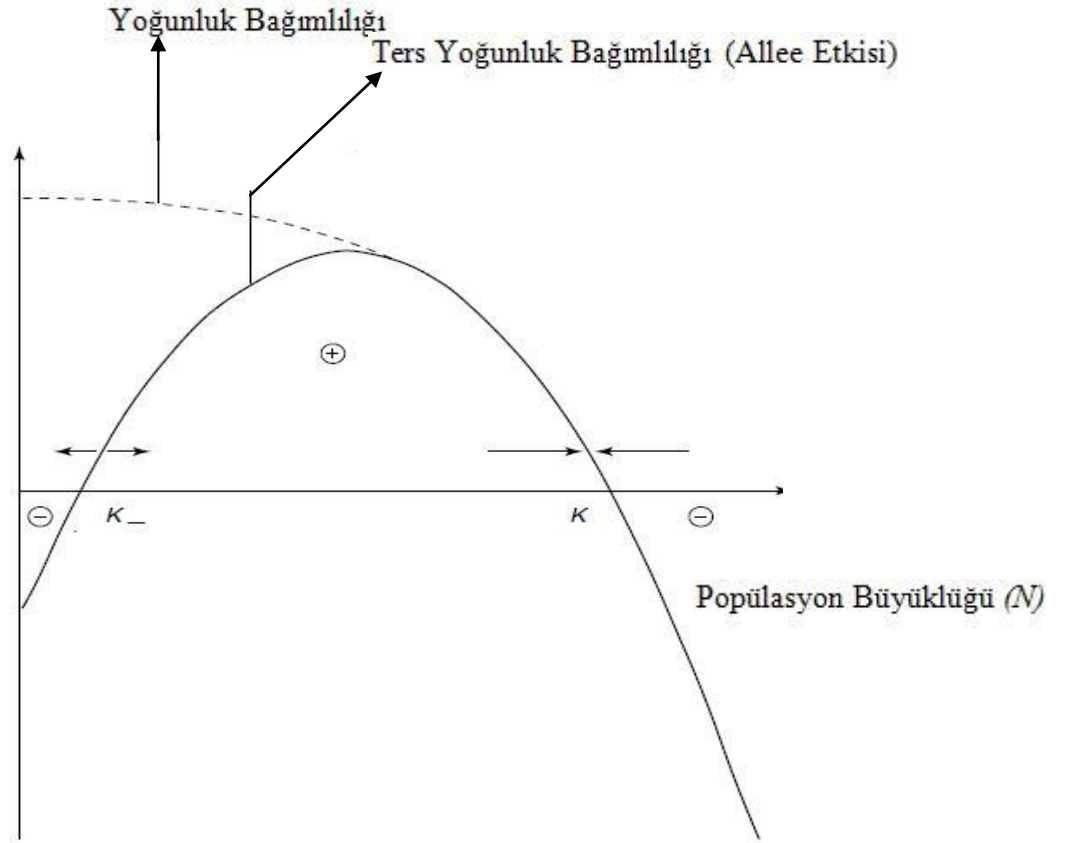
Demografik Allee etkisi de 'Güçlü ve Zayıf Allee etkisi' olarak ikiye ayrılmaktadır. Güçlü Allee etkisinde, yoğunluk belirli bir kritik yoğunluğun altına düştüğünde, birey başına düşen büyüme oranı negatiftir. Bu yoğunluğu geçemeyen popülasyonlar yok olur. Birçok çalışma sadece güçlü Allee etkisini düşünürken, Allee'nin kendi çalışmaları zayıf Allee etkisini de düşünmemiz gerektiğini göstermiştir [1,28,30-32]. Zayıf Allee etkisinde ise düşük yoğunluklarda birey başına düşen büyüme oranı daha düşüktür fakat hiçbir zaman negatif olmaz. Bu yüzden zayıf Allee etkisinde kritik yoğunluk değeri yoktur (Bakınız Şekil 1.11). Bu sebeptendir ki bazen zayıf Allee etkisi 'kritik değeri olmayan Allee etkisi', güçlü Allee etkisi de 'kritik Allee etkisi' olarak söylenmektedir. Balıkçılık literatüründe Allee etkisi 'cinsiyete bağımlı

ölümlülük' (depensation) olarak da kullanılır. Ancak 'cinsiyete bağımlı ölümlülük' bir popülasyon olayı olup Allee etkisi ile karıştırılmamalıdır [28,33].



Şekil 1.11. Demografik Allee etkisi tanımları
Birey başına düşen büyüme oranı ve yoğunluk az olduğunda yoğunluk arasındaki pozitif ilişki a) Allee etkisiz b) Zayıf Allee etkisi c) Güçlü Allee etkisi

Birey başına düşen
Büyüme oranı (dN/dt)



Şekil 1.12. Popülasyon dinamiğinden basit bir lojistik denklem modeli

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{K_-} - 1\right)$$

$\frac{dN}{dt}$, K taşıma kapasitesinin üstünde negatif ve altında pozitifdir. Allee etkisi olduğunda, $\frac{dN}{dt}$ verilen popülasyon yoğunluğunun altına düşer ve ayrıca kritik K_- yoğunluğunun da altında negatif olabilir. Bu durum popülasyonu yok olmaya götürebilir.

BÖLÜM 2

2. $X_{t+1} = F(\lambda, X_t, X_{t-T})$ Denkleminde $T = 1$ Durumu

Bu bölümde, bu tez çalışmasının temelini oluşturan, Çelik, Merdan, Duman ve Akın tarafından yayınlanan [34] çalışmasından bahsedilecektir. Bu makalede

$$X_{t+1} = F(\lambda, X_t, X_{t-T}) \quad (2.1)$$

fark denkleminde

$$X_{t+1} = F(\lambda, X_t, X_{t-1}) := \lambda X_t f(X_{t-1}) \quad (2.2)$$

alınarak, $T = 1$ için kararlılık analizi çalışılmıştır. Daha sonra denkleme Allee etkisi katılarak

$$X_{t+1} = \lambda^* X_t a f(X_{t-1}) \quad (2.3)$$

denkleminin kararlılık yapısı incelenmiştir ve Allee etkisinin bir denge noktasının kararlılığı üzerindeki etkileri tartışılmıştır. Burada $a := a(X_{t-T}, \dots, X_t)$ Allee etkisi fonksiyonunu temsil etmektedir.

2.1. Notasyon

λ := Popülasyonun büyüme oranı ($\lambda > 0$)

X_t := t anındaki popülasyon yoğunluğu

T := Gecikme terimi (örneğin üremek için gerekli olgunlaşma süreci)

$f(X_{t-T})$:= Türler arasındaki yarış, etkileşimi gösteren fonksiyon

$\frac{d}{dX}$:= Popülasyon yoğunluğuna göre türev

λ^* := Allee etkisi katılmış denklemdaki büyüme oranı

$a(X_{t-T}, \dots, X_t)$:= Allee etkisi fonksiyonu

2.2. $T = 1$ Durumu İçin Genel Kabuller

Denklem (2.2) deki f fonksiyonu üzerindeki genel kabuller şunlardır:

- 1) $X \in [0, \infty)$ için $\frac{d}{dX}(f(X)) < 0$ dır (Popülasyon yoğunluğu arttıkça, bireyler arasındaki yarışın azaldığı göz önüne alınmaktadır);
- 2) $f(0)$, pozitif sonlu bir sayıdır;
- 3) $\lim_{X \rightarrow \infty} f(X) = 0$ dır.

Allee etkisi fonksiyonu ile ilgili kabuller de şöyledir:

- 4) Popülasyon olmadan, Allee etkisi var olamaz, yani, $X = 0$ ise $a(X) = 0$ dır;
- 5) $X > 0$ için $\frac{d}{dX}(a(X)) > 0$ dır (ancak yoğunluk arttıkça, Allee etkisi azalır);
- 6) Yüksek yoğunluktaki popülasyonlarda Allee etkisi kaybolur, yani

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(X) = 1 \text{ dir.}$$

2.3. Lokal Asimptotik Kararlılık İçin Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi

Bu bölümde $T = 1$ durumu için incelenen [34] makalesinden bahsedilecektir. Bu makalede kullanılan kararlılık kriteri için aşağıdaki teoreme ihtiyaç duyulmaktadır.

Teorem 2.1:

$$X_{t+1} = F(X_t, X_{t-1}) \quad (2.4)$$

fark denklemi göz önüne alınsın. X^* , (2.4) denkleminin denge noktası olsun.

$p := \frac{\partial F}{\partial X_t}(X^*, X^*)$ ve $q := \frac{\partial F}{\partial X_{t-1}}(X^*, X^*)$ olmak üzere, X^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p| < 1 - q < 2$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır [47,48].

O halde şu teorem verilebilir:

Teorem 2.2: (2.2) denkleminin pozitif denge noktası X^* olsun. X^* denge noktası kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} > -1 \quad (2.5)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: X^* denge noktası olduğundan,

$$1 = \lambda f(X^*) \quad (2.6)$$

sağlanması gerektiği açıktır. Diğer taraftan, $p := F_{X_t}(\lambda; X^*, X^*)$ ve $q := F_{X_{t-1}}(\lambda; X^*, X^*)$ alınırsa $p = 1$ ve $q = X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)}$ olması gerektiği görülür.

Teorem 2.2 koşullarından X^* denge noktasının kararlı olması için gereken eşitsizliğin

$-1 < q < 0$ olduğu kolayca bulunabilir. Fakat her X için f azalan bir fonksiyon olduğundan $q < 0$ daima doğrudur. O halde kararlılık şartı (2.5) de verildiği gibidir.

Burada λ değiştikçe, denge noktalarının değiştiği de gözlemlenmektedir. Aklımıza λ nın değişiminin denge noktalarını nasıl etkilediği sorusu gelmektedir. Bu sorunun cevabı aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 2.3: $\lambda_i, i=1, 2$ büyüme oranlarına karşılık gelen denge noktaları $X^{(i)}$ ve $\lambda_1 < \lambda_2$ olsun. Bu durumda,

$$\int_{X^{(1)}}^{X^{(2)}} [X(\log f(X))']' dX < 0 \quad (2.7)$$

eşitsizliği sağlandığı takdirde, λ büyüdükçe, lokal kararlılık azalır.

İspat: Denge noktası tanımından

$$1 = \lambda_1 f(X^{(1)}) \text{ ve } 1 = \lambda_2 f(X^{(2)}) \quad (2.8)$$

olduğu bilinmektedir. $\lambda_1 < \lambda_2$ olduğundan $f(X^{(1)}) > f(X^{(2)})$ sağlanır. Üstelik f azalan bir fonksiyon olduğundan, $X^{(1)} < X^{(2)}$ dir. Her $i = 1, 2$ için

$q_i := F_{X_{t-1}}(\lambda_i; X^{(i)}, X^{(i)})$ alınırsa, $q_i = X^{(i)} \frac{f'(X^{(i)})}{f(X^{(i)})}$ olduğu görülür. Ayrıca Teorem 2.2 den $i = 1, 2$ için $X^{(i)}$ denge noktalarının kararlılık şartının

$$X^{(i)} \frac{f'(X^{(i)})}{f(X^{(i)})} > -1 \quad (2.9)$$

olduğu açıktır. (2.7) hipotezinden de

$$X^{(1)} \frac{f'(X^{(1)})}{f(X^{(1)})} > X^{(2)} \frac{f'(X^{(2)})}{f(X^{(2)})} \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.9) ve (2.10) karşılaştırılırsa, $X^{(2)}$ denge noktasının kararlılığının, $X^{(1)}$ denge noktasına göre daha az olduğu görülür.

Sonuç : λ_i , $i = 1, 2$ büyüme oranlarına karşılık gelen denge noktaları $X^{(i)}$ ve $\lambda_1 < \lambda_2$ olsun. Her $X \in [X^{(1)}, X^{(2)}]$ için $[X(\log f(X))]' < 0$ ise $X^{(2)}$ denge noktalarının kararlılığı, $X^{(1)}$ denge noktalarının kararlılığından daha azdır.

2.3.1. $t - 1$ Anında Allee Etkisi

İlk olarak bu bölümde gecikmeli lineer olmayan fark denklemi

$$X_{t+1} := \lambda^* X_t a(X_{t-1}) f(X_{t-1}) \quad (2.11)$$

incelenecektir.

Daha önce bahsedilen f ve a fonksiyonu üzerindeki kabullerimizden dolayı, (2.11) denkleminin en çok iki denge noktası vardır [35]. Kabul edelim bu denge noktaları X_1^* ve X_2^* ve genellikle bir şey kaybetmeden $X_1^* < X_2^*$ olsun. Denge noktası tanımından, $i = 1, 2$ için

$$\lambda^* a(X_i^*) f(X_i^*) = 1$$

eşitliği sağlanır.

$$s(X) := \lambda^* a(X) f(X)$$

olacak şekilde $s(X)$ fonksiyonunu tanımlarsak, Rolle Teoreminden, $X_1^* < X_k < X_2^*$ olacak şekilde en az bir X_k kiritik noktası vardır öyle ki $s'(X_k) = 0$ dır.

Şimdi (2.11) denkleminin için kararlılık şartı şu teorem ile verilebilir:

Teorem 2.4: X_1^* ve X_2^* , (2.11) denkleminin pozitif iki denge noktası olsun ve kabul edelim ki $X_1^* < X_2^*$ olsun. X_1^* denge noktası kararsızdır. X_2^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) > -1 \quad (2.12)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (2.11) denkleminde $\lambda^* X_t a(X_{t-1}) f(X_{t-1}) := F(\lambda^*, X_t, X_{t-1})$ olarak alınırsa, $p := \frac{\partial F}{\partial X_t}(X^*, X^*)$ ve $q := \frac{\partial F}{\partial X_{t-1}}(X^*, X^*)$ olduğundan, $i = 1, 2$ için $p_i^* = \lambda^* a(X_i^*) f(X_i^*) = 1$ ve $q_i^* = X_i^* \left(\frac{a'(X_i^*)}{a(X_i^*)} + \frac{f'(X_i^*)}{f(X_i^*)} \right)$ elde edilir. Buradan Teorem 2.1 den kararlılık şartının $i = 1, 2$ için $|p_i^*| < 1 - q_i^* < 2 \Leftrightarrow -1 < q_i^* < 0$ olması gerektiği görülür. $X_1^* \in (0, X_k)$ olduğundan $q_1^* > 0$ dır ve X_1^* denge noktası kararsızdır [35]. Diğer yandan $X_2^* \in (X_k, \infty)$ aralığında daima $q_2^* < 0$ olup X_2^* denge noktası (2.12) eşitsizliği sağlandığı takdirde kararlıdır.

Teorem 2.5: $t - 1$ anındaki Allee etkisi denge noktalarının kararlılığını artırır. Yani, (2.11) denkleminin denge noktalarının kararlılığı (2.2) denkleminin denge noktalarının kararlılığından fazladır.

İspat: (2.2) denkleminde $\lambda = \lambda^* a(X_2^*)$ olarak alınırsa, X_2^* denge noktası aynı zamanda (2.11) denkleminin de pozitif bir denge noktası olacaktır. ($a(X_2^*) < 1$ ve $\lambda = \lambda^* a(X_2^*)$ olduğundan $\lambda < \lambda^*$ olarak bulunur.) Ayrıca a fonksiyonunun özelliklerinden dolayı $X_2^* \frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} > 0$ dır.

$$X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} < X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right)$$

olduğu kolayca görülebilir. Şimdi Teorem 2.2 ve Teorem 2.4 birleştirilirse, Allee etkisiz denklemin kararsız ve Allee etkili denklemin kararlı olduğu aralık bulabildiğimiz için, (2.11) denkleminin denge noktalarının kararlılığı (2.2) denkleminin denge noktalarının kararlılığından fazladır.

2.3.2. t Anında Allee Etkisi

$$X_{t+1} := \lambda^* X_t a(X_t) f(X_{t-1}) \quad (2.13)$$

denklemini düşünelim. Kararlılık için aşağıdaki Teorem 2.6 verilmektedir.

Teorem 2.6: (2.13) denkleminin X_1^* denge noktası kararsızdır. X_2^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} > -1 \quad (2.14)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (2.13) denkleminde $\lambda^* X_t a(X_t) f(X_{t-1}) := \tilde{F}(\lambda^*, X_t, X_{t-1})$ olarak alınırsa, $p := \frac{\partial \tilde{F}}{\partial X_t}(X^*, X^*)$ ve $q := \frac{\partial \tilde{F}}{\partial X_{t-1}}(X^*, X^*)$ olduğundan, $i = 1, 2$ için $p_i^* = 1 + X_i^* \frac{a'(X_i^*)}{a(X_i^*)}$ ve $q_i^* = X_i^* \frac{f'(X_i^*)}{f(X_i^*)}$ elde edilir.

$$\begin{aligned} X_i^* \text{ kararlıdır} &\Leftrightarrow |p_i^*| < 1 - q_i^* < 2 \\ &\Leftrightarrow 1 + X_i^* \frac{a'(X_i^*)}{a(X_i^*)} < 1 - X_i^* \frac{f'(X_i^*)}{f(X_i^*)} < 2 \\ &\Leftrightarrow X_i^* \frac{a'(X_i^*)}{a(X_i^*)} < -X_i^* \frac{f'(X_i^*)}{f(X_i^*)} < 1 \\ &\Leftrightarrow X_i^* \left(\frac{a'(X_i^*)}{a(X_i^*)} + \frac{f'(X_i^*)}{f(X_i^*)} \right) < 0 < 1 + X_i^* \frac{f'(X_i^*)}{f(X_i^*)} \end{aligned}$$

$X_1^* \in (0, X_k)$ olduğundan

$$X_1^* \left(\frac{a'(X_1^*)}{a(X_1^*)} + \frac{f'(X_1^*)}{f(X_1^*)} \right) > 0$$

olup, X_1^* denge noktası kararsızdır. Diğer yandan $X_2^* \in (X_k, \infty)$ aralığında daima

$$X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) < 0$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuçta, X_2^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart (2.14) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(2.2) denkleminin X^* denge noktası olsun. $\lambda = \lambda^* a(X^*)$ alınarak (2.2) denkleminin denge noktaları ile (2.13) denkleminin denge noktaları aynı yapılabilir.

Sonuç: (2.2) denkleminin X^* denge noktası kararlıdır ancak ve ancak (2.13) denkleminin X^* denge noktası kararlıdır.

2.3.3. $(t, t - 1)$ Anında Allee Etkisi

$$X_{t+1} := \lambda^* X_t a(X_t, X_{t-3}) f(X_{t-1}) \quad (2.15)$$

denklemini göz önüne alalım. [34] makalesinde kararlılık şartı şu teoremlerle verilmiştir.

Teorem 2.7: (2.15) denkleminin X_1^* denge noktası kararsızdır. X_2^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-1}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*, X_2^*)}{f(X_2^*, X_2^*)} \right) > -1 \quad (2.16)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $i = 1, 2$ için $p_i^* = 1 + X_i^* \frac{a_{N_t}(X_i^*, X_i^*)}{a(X_i^*, X_i^*)}$ ve $q_i^* = X_i^* \left(\frac{a_{N_{t-1}}(X_i^*, X_i^*)}{a(X_i^*, X_i^*)} + \frac{f'(X_i^*, X_i^*)}{f(X_i^*, X_i^*)} \right)$ olduğu kolayca elde edilebilir. Teorem 2.1 den kararlılık için

$$1 + X_i^* \frac{a_{N_t}(X_i^*, X_i^*)}{a(X_i^*, X_i^*)} < 1 - X_i^* \left(\frac{a_{N_{t-1}}(X_i^*, X_i^*)}{a(X_i^*, X_i^*)} + \frac{f'(X_i^*, X_i^*)}{f(X_i^*, X_i^*)} \right) < 2 \quad (2.17)$$

şartının sağlanması gereklidir. (2.17) eşitsizliğine denk olarak

$$X_i^* \frac{a_{N_t}(X_i^*, X_i^*)}{a(X_i^*, X_i^*)} < -X_i^* \left(\frac{a_{N_{t-1}}(X_i^*, X_i^*)}{a(X_i^*, X_i^*)} + \frac{f'(X_i^*, X_i^*)}{f(X_i^*, X_i^*)} \right) < 1$$

yazılabilir. Bu durumda kararlılık şartları aşağıdaki (2.18) ve (2.19) eşitsizlikleri olacaktır.

$$X_i^* \left(\frac{a_{N_t}(X_i^*, X_i^*)}{a(X_i^*, X_i^*)} + \frac{a_{N_{t-1}}(X_i^*, X_i^*)}{a(X_i^*, X_i^*)} + \frac{f'(X_i^*, X_i^*)}{f(X_i^*, X_i^*)} \right) < 0 \quad (2.18)$$

$$0 < 1 + X_i^* \left(\frac{a_{N_{t-1}}(X_i^*, X_i^*)}{a(X_i^*, X_i^*)} + \frac{f'(X_i^*, X_i^*)}{f(X_i^*, X_i^*)} \right) \quad (2.19)$$

$X_1^* \in (0, X_k)$ olduğundan

$$X_1^* \left(\frac{a_{N_t}(X_1^*, X_1^*)}{a(X_1^*, X_1^*)} + \frac{a_{N_{t-1}}(X_1^*, X_1^*)}{a(X_1^*, X_1^*)} + \frac{f'(X_1^*, X_1^*)}{f(X_1^*, X_1^*)} \right) > 0$$

X_1^* denge noktası kararsızdır [35]. $X_2^* \in (X_k, \infty)$ aralığında (2.18) daima gerçekleşeceğinden, X_2^* için kararlılık koşulu (2.19) da verildiği gibidir. Bu ise ispatı tamamlar.

BÖLÜM 3

3. $X_{t+1} = F(\lambda, X_t, X_{t-T})$ Denkleminde $T = 2$ Durumu

Bu bölümde

$$X_{t+1} = \lambda X_t f(X_{t-T}) \quad (3.1)$$

denkleminin $T = 2$ durumu incelenmiştir [36]. Bu makalede notasyonlar ve f ve a fonksiyonu altındaki kabuller Bölüm 2 ile aynıdır. Bu makalede verilen teoremler aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1:

$$X_{t+1} = \lambda X_t f(X_{t-2}) \quad (3.2)$$

denkleminin pozitif denge noktası X^* olsun. X^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} > \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (3.3)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (3.2) denkleminin X^* civarında lineerleştirilmiş hali

$$U_{t+1} \approx \lambda f(X^*)U_t + \lambda f'(X^*)X^*U_{t-2} \quad (3.4)$$

olarak bulunacaktır. $U_{t-2} = \mu^t$ olarak yazılırsa, karakteristik denklem

$$p(\mu) = \mu^3 - \mu^2 - \lambda f'(X^*)X^* \quad (3.5)$$

olarak bulunur. Kararlılık analizi için Ek A da verilen Schur-Cohn kriterinin (a.3) ve (a.4) koşullarını uygulayabiliriz. Bu iki koşuldan

$$-2 < \lambda f'(X^*)X^* < 0 \quad (3.6)$$

$$|-\lambda f'(X^*)X^*| < 1 - [\lambda f'(X^*)X^*]^2 \quad (3.7)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.7) eşitsizliği çözümlerse

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \lambda f'(X^*)X^* < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (3.8)$$

olması gerektiği görülür. Diğer yandan $X \in [0, \infty)$ için f azalan bir fonksiyon olduğundan $\lambda f'(X^*)X^*$ ifadesi daima negatiftir. O halde (3.6) ve (3.8) eşitsizlikleri birleştirilirse, X^* denge noktasının kararlı olması için (3.3) şartının sağlanması gerektiğine ulaşılır.

Teorem 3.2: (3.1) denkleminde gecikme arttıkça kararlılık azalır.

İspat: (3.1) denkleminin bir denge noktası X^* olsun. Bölüm 2 deki Teorem 2.2 de $T = 1$ için kararlılık şartı

$$X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} > -1 \quad (3.9)$$

eşitsizliği ile verilmiştir. Diğer yandan $T = 2$ için Teorem 3.1 de

$$X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} > \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.6180 \quad (3.10)$$

eşitsizliği bulunmuştur. (3.9) ve (3.10) eşitsizliği karşılaştırılırsa, iddia edilen sonuca ulaşılır.

3.1. $t - 2$ Anında Allee Etkisi

Makalenin bu bölümünde gecikmeli, lineer olmayan Allee etkili fark denklemi

$$X_{t+1} := \lambda^* X_t a(X_{t-2}) f(X_{t-2}) \quad (3.11)$$

incelenmiştir. Bu denklem için kararlılık şartı şu teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.3: X_1^* ve X_2^* , (3.11) denkleminin pozitif iki denge noktası olsun ve $X_1^* < X_2^*$ olarak kabul edelim. X_1^* denge noktası kararsızdır. X_2^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) > \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (3.12)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (3.11) denkleminde $a(X_{t-2})$ ve $f(X_{t-2})$, X^* denge noktası civarında Taylor serisine açılıp, $U_t = X_t - X^*$ değişken değiştirmesi yapılırsa aşağıdaki lineerleştirilmiş (3.13) denkleme ulaşılır:

$$U_{t+1} \approx \lambda^* a(X^*) f'(X^*) U_t + \lambda^* X^* [a'(X^*) f(X^*) + a(X^*) f'(X^*)] U_{t-2} \quad (3.13)$$

$i = 1, 2$ için denge noktası koşulu olan $\lambda^* a(X_i^*) f(X_i^*) = 1$ koşulu kullanılırsa (3.13) denkleminin karakteristik denklemi

$$p(\mu) = \mu^3 - \mu^2 - X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right)$$

şeklinindedir. Schur-Cohn kriterleri koşullarından

$$-2 < X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) < 0 \quad (3.14)$$

$$\left| X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) \right| < 1 - \left[X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) \right]^2 \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) eşitsizliği çözümlerse

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (3.16)$$

bulunur. $X \in (0, X_k)$ için, Bölüm 2 de tanımlanan $s(X)$ artan bir fonksiyon olduğundan (3.14) eşitsizliği sağlanmaz ve X_1^* denge noktası kararsızdır [35]. Diğer yandan $s(X)$ fonksiyonu $X \in (X_k, \infty)$ aralığında azalan bir fonksiyondur. Bu aralıkta X_2^* denge noktasının kararlılığı için

$$X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) > \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (3.17)$$

şartının doğru olduğu görülür.

Teorem 3.4: $t - 2$ anında Allee etkisi kararlılığı artırır. Yani, (3.11) denkleminin denge noktalarının kararlılığı (3.2) denkleminin denge noktalarının kararlılığından fazladır.

İspat: (3.2) denkleminde $\lambda = \lambda^* a(X_2^*)$ olarak alınırsa, X_2^* denge noktası aynı zamanda (3.11) denkleminin de pozitif bir denge noktası olacaktır ($a(X_2^*) < 1$ ve $\lambda = \lambda^* a(X_2^*)$ olduğundan $\lambda < \lambda^*$ olarak bulunur). Ayrıca a fonksiyonunun özelliklerinden dolayı $X_2^* \frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} > 0$ dir.

$$X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} < X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \quad (3.18)$$

olduğu kolayca görülebilir. Teorem 3.1 ve Teorem 3.3 birleştirilirse, Allee etkisiz denklemin kararsız ve Allee etkili denklemin kararlı olduğu aralık bulabildiğimiz için, (3.11) denkleminin denge noktalarının kararlılığı (3.2) denkleminin denge noktalarının kararlılığından fazladır.

3.2. t Anında Allee Etkisi

$$X_{t+1} := \lambda^* X_t a(X_t) f(X_{t-2}) \quad (3.19)$$

denklemi göz önüne alındığında kararlılık şartı şu teoremle verilmiştir.

Teorem 3.5: (3.19) denkleminin X_1^* denge noktası kararsızdır. X_2^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) > -2 \quad (3.20)$$

$$X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \left[\left(X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} - \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) - 1 \right) \right] < 1 \quad (3.21)$$

$$X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \left[\left(X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) + 1 \right) \right] < 1 \quad (3.22)$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.3 deki adımlar takip edilerek benzer şekilde yapılabilir [36].

Teorem 3.6: t anındaki Allee etkisi kararlılığı azaltır.

İspat:

$$x := X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \text{ ve } y := X^* \frac{a'(X^*)}{a(X^*)} \quad (3.23)$$

olarak tanımlansın. Daha önceden verilen Bölüm 2.2 deki (1)-(6) şartlarından $x < 0$ ve $y > 0$ olduğu bilinmektedir. İspat iki aşamada yapılacaktır.

İlk olarak $x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğunu düşünelim. Bu durumda (3.2) denkleminin denge noktaları Teorem 3.1 gereğince kararlı olmayacaktır. Bu kabul altında (3.20), (3.21) ve (3.22) şartlarından en az bir tanesinin sağlanmadığını göstermeliyiz. Bu şartları x ve y cinsinden yazarsak

$$x + y > -2 \quad (3.20a)$$

$$x^2 - (1 + y)x - 1 < 0 \quad (3.21a)$$

$$x^2 + (1 + y)x - 1 < 0 \quad (3.22a)$$

elde edilir.

1. Durum: İlk önce $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğu duruma bakalım. (3.21a) eşitsizliğinde x değişkenini götürüp yerine yazarsak

$$x^2 - (1 + y)x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < (1 + y)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \quad (3.24)$$

$$\Leftrightarrow (1 + y) < 1 \Leftrightarrow y < 0 \quad (3.25)$$

Ancak y daima pozitif olduğundan (3.21a) eşitsizliği sağlanmaz ve (3.19) denkleminin denge noktaları da kararsızdır.

2. Durum: $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} &\Leftrightarrow -x > \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 > \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x^2 - 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Diğer yandan $(1 + y) > 1$ olduğundan

$$x < 0 \Rightarrow (1 + y)x < x \Rightarrow -(1 + y)x > -x > \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$$

yani,

$$-(1 + y)x > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.26) ve (3.27) birleştirilirse, bir kez daha (3.21a) eşitsizliği sağlanmaz ve (3.19) denkleminin denge noktalarının kararsız olduğu görülür.

İkinci olarak, $x > \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olsun. Teorem 3.1 den (3.2) denkleminin denge noktaları kararlıdır. Tekrar yukarıda verilen (3.20), (3.21) ve (3.22) şartlarının hepsinin sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmeliyiz.

$x + y > x > \frac{1-\sqrt{5}}{2} > -2$ olduğundan (3.20a) sağlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x > \frac{1-\sqrt{5}}{2} &\Rightarrow 0 < -x < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x^2 < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ayrıca $x < 0$ ve $y > 0$ olduğundan $(1+y)x < 0$ olduğu kolayca görülebilir. Bu eşitsizliği (3.28) ile birleştirirsek (3.22a) nın sağlandığını görürüz.

Son olarak (3.21a) eşitsizliğini kontrol etmeliyiz. Bunun için ilk olarak $z^2 - (1+y)z - 1 = 0$ denkleminin köklerini bulmalıyız. Bu denklemin kökleri $z_1 = \frac{(1+y)+\sqrt{(1+y)^2+4}}{2} > 0$ ve $z_2 = \frac{(1+y)-\sqrt{(1+y)^2+4}}{2} < 0$ dır. Sonuç olarak, eğer x bu köklerin arasında kalıyorsa, yani $z_2 < x < z_1$ ise (3.21a) eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan kabulümüzden $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0$ dır. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ile z_2 karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1-\sqrt{5}}{2} &< \frac{(1+y)-\sqrt{(1+y)^2+4}}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{5} < (1+y) - \sqrt{(1+y)^2+4} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(1+y)^2+4} < (1+y) + \sqrt{5} - 1 \\ &\Leftrightarrow (1+y)^2 + 4 < (1+y)^2 + 2(\sqrt{5}-1)(1+y) + 5 - 2\sqrt{5} + 1 \\ &\Leftrightarrow 2(\sqrt{5}-1) < 2(\sqrt{5}-1)(1+y) \Leftrightarrow y > \end{aligned}$$

olup, (3.21a) koşulunun $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq z_2 < x$ iken sağlandığını gösterir. Ancak $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < z_2$ iken (3.21a) koşulu sağlanmaz. Yani (3.2) denkleminin denge noktaları kararlı iken (3.19) denkleminin denge noktaları kararsızdır. Bu da ispatı tamamlar.

3.3. $(t, t - 2)$ Anında Allee Etkisi

Son olarak

$$X_{t+1} := \lambda^* X_t a(X_t, X_{t-2}) f(X_{t-2}) \quad (3.29)$$

denklemini ele alınmış ve kararlılık şartı şu şekilde verilmiştir.

Teorem 3.7: (3.29) denkleminin X_1^* denge noktası kararsızdır. X_2^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$X_2^* \left(\frac{a_{X_t}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{a_{X_{t-2}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) > -2 \quad (3.30)$$

$$X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-2}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \left[X_2^* \left(\frac{a_{X_t}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) + \left(1 + X_2^* \frac{a_{X_t}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} \right) \right] < 1 \quad (3.31)$$

$$X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-2}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \left[X_2^* \left(\frac{a_{X_t}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) - \left(1 + X_2^* \frac{a_{X_t}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} \right) \right] < 1 \quad (3.32)$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.3 deki adımlar takip edilerek benzer şekilde yapılabilir [36].

BÖLÜM 4

4. $X_{t+1} = F(\lambda, X_t, X_{t-T})$ Denkleminde $T = 3$ Durumu

Bu özgün tez çalışmasının amacı (2.1) ile verilen denklemde $T = 3$ iken denge noktalarının kararlılık yapılarını analiz etmek ve $T = 1$ ve $T = 2$ için yapılan çalışmalar ile kıyaslamaktır. f fonksiyonu ve Allee etkisi fonksiyonu ile ilgili kabullerimiz ve notasyonlar yine aynıdır.

Bu bölümde gecikmesini artırdığımız

$$X_{t+1} = \lambda X_t f(X_{t-3}) \quad (4.1)$$

dördüncü mertebeden fark denklemi ele alınacaktır. İlk olarak kararlılık koşulu verilecek, daha sonra sırasıyla $t, t - 3, (t, t - 3)$ zamanlarında denkleme Allee etkisi eklenerek elde edilen aşağıdaki

$$X_{t+1} = \lambda X_t a f(X_{t-3}) \quad (4.2)$$

denkleminin kararlılık yapısı ile karşılaştırılacaktır.

4.1. k=4 İçin Schur-Cohn Kriteri

$$x_{t+4} + a_1x_{t+3} + a_2x_{t+2} + a_3x_{t+1} + a_4x_t = 0 \quad (4.3)$$

fark denklemini ele alalım. Schur-Cohn kriterlerini bu denkleme uygulayıp, cebirsel işlemler yardımıyla düzenlersek aşağıdaki sonuç elde edilir.

(4.3) denklemine karşılık gelen

$$p(\mu) = \mu^4 + a_1\mu^3 + a_2\mu^2 + a_3\mu + a_4 \quad (4.4)$$

karakteristik polinomunun, köklerinin birim çember içerisinde yatması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki üç eşitsizliğin aynı anda sağlanmasıdır:

$$|a_1 + a_3| < 1 + a_2 + a_4 \quad (4.5)$$

$$|a_4| < 1 \quad (4.6)$$

$$\left| \begin{array}{c} a_2 + a_4 - a_2a_4 \\ -a_1a_3 - a_4^3 + a_1^2a_4 \end{array} \right| < 1 + a_2a_4 - a_3^2 + a_1a_3a_4 - a_4^2a_2 - a_4^2 \quad (4.7)$$

4.2. Kararlılık Analizi

$$X_{t+1} = \lambda X_t f(X_{t-3}) := F(X_t, X_{t-3}) \quad (4.8)$$

olarak tanımlayalım. X^* denge noktası ise,

$$F(X^*, X^*) = X^*$$

olacağından $1 = \lambda f'(X^*)$ koşulu sağlanmalıdır. Burada $X^* \neq 0$ ve $\lambda > 0$ olarak alınmaktadır. Denklemden $U_t = X_t - X^*$ değişken değiştirilmesi yaparak denge noktasını 0'a kaydırıp, $f(X_{t-3})$ fonksiyonunu X^* civarında Taylor serisine açarsak aşağıdaki sonuçlara ulaşırız:

$$\begin{aligned} U_{t+1} &= X_{t+1} - X^* \\ U_{t+1} &= \lambda X_t f(X_{t-3}) - X^* \\ U_{t+1} &\approx \lambda X_t [f(X^*) + f'(X^*)(X_{t-3} - X^*)] - X^* \\ U_{t+1} &= X_t + \lambda f'(X^*) X_t U_{t-3} - X^* \\ U_{t+1} &= X_t - X^* + \lambda f'(X^*) U_{t-3} (U_t + X^*) \\ U_{t+1} &= U_t + \lambda f'(X^*) U_{t-3} U_t + \lambda f'(X^*) X^* U_{t-3} \\ U_{t+1} &\approx U_t + \lambda f'(X^*) X^* U_{t-3} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Şimdi de, $U_{t-3} = \mu^t$ olarak yazılırsa, karakteristik denklem

$$p(\mu) = \mu^4 - \mu^3 - \lambda f'(X^*) X^* \mu \quad (4.10)$$

olarak bulunur. Burada kararlılık için artık $k = 4$ durumunda Schur-Cohn kriterini uygulayabiliriz.

Teorem 4.1: (4.1) denkleminin X^* pozitif denge noktası kararlıdır ancak ve ancak

$$X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} > x_0 \approx -0.4450 \quad (4.11)$$

sağlanır.

İspat: Lineerleştirilmiş denklemin karakteristik denkleminin $p(\mu) = \mu^4 - \mu^3 - \lambda f'(X^*)X^*$ olduğu açıkça bilinmektedir. Schur-Cohn kriterlerinin (4.5) ve (4.6) koşullarından

$$\lambda f'(X^*)X^* < 0 \quad (4.12)$$

$$\lambda f'(X^*)X^* < 2 \quad (4.13)$$

$$-1 < \lambda f'(X^*)X^* < 1 \quad (4.14)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Diğer yandan $X \in [0, \infty)$ için f azalan bir fonksiyon olduğundan $\lambda f'(X^*)X^*$ ifadesi daima negatiftir. O halde bu üç eşitsizlik

$$\lambda f'(X^*)X^* > -1 \quad (4.15)$$

eşitsizliğine indirgenir. Son olarak (4.7) şartından

$$|-2\lambda f'(X^*)X^* - [-\lambda f'(X^*)X^*]^3| < 1 - [-\lambda f'(X^*)X^*]^2 \quad (4.16)$$

eşitsizliğinin çözülmesi gerekmektedir (Bakınız Ek B). (4.15) ve (4.16) eşitsizlikleri birleştirilirse (4.11) hükmünün sağlandığı görülür.

Teorem 4.2: $\lambda_i, i=1, 2$ büyüme oranlarına karşılık gelen denge noktaları $X^{(i)}$ ve $\lambda_1 < \lambda_2$ olsun. Bu durumda,

$$\int_{X^{(1)}}^{X^{(2)}} [X(\log f(X))']' dX < 0 \quad (4.17)$$

eşitsizliği sağlandığı takdirde λ büyüdükçe, lokal kararlılık azalır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 2.3 deki ispata benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.3: (2.1) denkleminde gecikme arttıkça, kararlılık azalır.

İspat: X^* , (2.1) denkleminin denge noktası olsun. Daha önce yapılan [36] çalışmasında $T = 2$ için kararlılık şartı Teorem 3.1 ile verilmiştir. Bu durumda

$$X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} > \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.6180 \quad (4.18)$$

olması gerekmektedir. (4.18) eşitsizliği, (4.11) eşitsizliği ile karşılaştırılırsa, $T = 2$ anında kararlı fakat $T = 3$ anında kararsız olan denge noktaları bulunduğundan istenilen sonuca ulaşılır.

4.3. $t - 3$ Anında Allee Etkisi

Bu kısımda, (4.2) denkleminde Allee etkisi fonksiyonu olan a fonksiyonu, $a(X_{t-3})$ olarak alınmış, yani

$$X_{t+1} = \lambda^* X_t a(X_{t-3}) f(X_{t-3}) \quad (4.19)$$

denklemini incelenmiştir.

Daha önce 2.2. bölümünde bahsedilen f ve a fonksiyonu üzerindeki kabullerimizden dolayı, (4.19) denkleminin en çok iki denge noktası vardır [35]. Kabul edelim bu denge noktaları X_1^* ve X_2^* ve genellikle bir şey kaybetmeden $X_1^* < X_2^*$ olsun. Denge noktası tanımından, $i = 1, 2$ için

$$\lambda^* a(X_i^*) f(X_i^*) = 1 \quad (4.20)$$

eşitliği sağlanır.

$$s(X) := \lambda^* a(X) f(X)$$

olacak şekilde $s(X)$ fonksiyonunu tanımlarsak, Rolle Teoreminden, $X_1^* < X_k < X_2^*$ olacak şekilde en az bir X_k kiritik noktası vardır öyle ki $s'(X_k) = 0$ dir. O halde şu teorem verilebilir:

Teorem 4.4: (4.19) denkleminin X_1^* denge noktası kararsızdır. X_2^* denge noktası kararlıdır ancak ve ancak

$$X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) > x_0 \quad (4.21)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.19) denkleminde $a(X_{t-3})$ ve $f(X_{t-3})$, X^* denge noktası civarında Taylor serisine açılıp, $U_t = X_t - X^*$ değişken değiştirmesi yapılırsa aşağıdaki lineerleştirilmiş (4.22) denkleminde ulaşılır:

$$\begin{aligned}
U_{t+1} &= X_{t+1} - X^* \\
U_{t+1} &= \lambda^* X_t a(X_{t-3}) f(X_{t-3}) - X^* \\
U_{t+1} &= \lambda^* X_t [a(X^*) + a'(X^*)(X_{t-3} - X^*)] [f(X^*) + f'(X^*)(X_{t-3} - X^*)] - X^* \\
U_{t+1} &\approx \lambda^* X_t [a(X^*) f(X^*) + a(X^*) f'(X^*)(X_{t-3} - X^*) \\
&\quad + a'(X^*) f(X^*)(X_{t-3} - X^*) + a'(X^*) f'(X^*)(X_{t-3} - X^*)^2] - X^* \\
U_{t+1} &= X_t + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} X_t (X_{t-3} - X^*) + \frac{a'(X^*)}{a(X^*)} X_t (X_{t-3} - X^*) \\
&\quad + \frac{a'(X^*) f'(X^*)}{a(X^*) f(X^*)} X_t (X_{t-3} - X^*)^2 - X^* \\
U_{t+1} &= U_t + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} X^* U_{t-3} + \frac{a'(X^*)}{a(X^*)} X^* U_{t-3} + \frac{a'(X^*) f'(X^*)}{a(X^*) f(X^*)} X^* U_{t-3}^2 \\
U_{t+1} &\approx U_t + X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) U_{t-3}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

(4.22) denkleminin karakteristik denklemi

$$p(\mu) = \mu^4 - \mu^3 - X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right)$$

şeklindedir. Schur-Cohn kriterleri ilk ve ikinci koşullarından

$$-2 < X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) < 0 \tag{4.23}$$

$$-1 < X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) < 1 \tag{4.24}$$

elde edilir. $X \in (0, X_k)$ için $s(X)$ artan bir fonksiyon olduğundan (4.23) eşitsizliği sağlanmaz ve X_1^* denge noktası kararsızdır [35]. Diğer yandan $s(X)$ fonksiyonu $X \in (X_k, \infty)$ aralığında azalan bir fonksiyondur. Bu aralıkta X_2^* denge noktası için (4.23) ve (4.24) eşitsizliklerinin sağ tarafları daima doğrudur. X_2^* denge noktasının kararlılığı için (4.24) eşitsizliğinin sağ tarafı olan

$$X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) > -1 \quad (4.25)$$

koşulu ve Schur-Cohn kriterlerinin üçüncü koşulu olan (Teorem 4.1 deki (4.16) eşitsizliği ile aynı)

$$|-2\lambda^* f'(X^*)X^* - [-\lambda^* f'(X^*)X^*]^3| < 1 - [-\lambda^* f'(X^*)X^*]^2 \quad (4.26)$$

eşitsizliklerinin ortak çözülmesi gerekmektedir. Buradan yine kararlılık şartı için

$$X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) > x_0 \quad (4.27)$$

olması gerektiği görülür.

Teorem 4.5: $t - 3$ anındaki Allee etkisi denge noktalarının kararlılığını artırır. Yani, (4.19) denkleminin denge noktalarının kararlılığı (4.1) denkleminin denge noktalarının kararlılığından fazladır.

İspat: (4.1) denkleminde $\lambda = \lambda^* a(X_2^*)$ olarak alınırsa, X_2^* denge noktası aynı zamanda (4.1) denkleminin de pozitif bir denge noktası olacaktır. ($a(X_2^*) < 1$ ve $\lambda = \lambda^* a(X_2^*)$ olduğundan $\lambda < \lambda^*$ olarak bulunur.) Ayrıca a fonksiyonunun özelliklerinden dolayı $X_2^* \frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} > 0$ dir.

$$X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} < X_2^* \left(\frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \quad (4.28)$$

olduğu kolayca görülebilir. Şimdi Teorem 4.1 ve Teorem 4.4 birleştirilirse, Allee etkisiz denklemin kararsız ve Allee etkili denklemin kararlı olduğu aralık bulabildiğimiz için, (4.19) denkleminin denge noktalarının kararlılığı (4.1) denkleminin denge noktalarının kararlılığından fazladır.

4.4. t Anında Allee Etkisi

Bu bölümde (4.2) denklemini

$$X_{t+1} = \lambda^* X_t a(X_t) f(X_{t-3}) \quad (4.29)$$

formunda ele alınacaktır. Burada yine a fonksiyonu Allee etkisi fonksiyonunu temsil etmektedir. Yine X_1^* ve X_2^* gibi pozitif iki denge noktası olduğu ($X_1^* < X_2^*$) ve (4.20) eşitliğinin sağlandığı kabul edilmektedir.

Teorem 4.6: (4.29) denkleminin X_1^* denge noktası kararsızdır. Diğer yandan, X_2^* denge noktası kararlıdır ancak ve ancak

$$X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} > -1 \quad (4.30)$$

$$\left(X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)}\right)^3 + \left(X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)}\right)^2 - \left[\left(1 + X_2^* \frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)}\right)^2 + 1\right] \left(X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)}\right) - 1 < 0 \quad (4.31)$$

$$\left(X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)}\right)^3 - \left(X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)}\right)^2 - \left[\left(1 + X_2^* \frac{a'(X_2^*)}{a(X_2^*)}\right)^2 + 1\right] \left(X_2^* \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)}\right) + 1 > 0 \quad (4.32)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: (4.29) denkleminin sağ tarafı, X^* denge noktası civarında Taylor serisine açılıp, $U_t = X_t - X^*$ değişken değiştirmesi yapılırsa Teorem 4.4 dekinde benzer yolla aşağıdaki lineerleştirilmiş denkleme ulaşılır:

$$U_{t+1} = (\lambda^* a(X^*) f(X^*) + \lambda^* X^* a'(X^*) f(X^*)) U_t + \lambda^* X^* a(X^*) f'(X^*) U_{t-3} . \quad (4.33)$$

(4.20) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$U_{t+1} - \left(1 + X^* \frac{a'(X^*)}{a(X^*)}\right) U_t - \left(X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)}\right) U_{t-3} = 0 \quad (4.34)$$

elde edilir. Bu denklemin karakteristik polinomu

$$p(\mu) = \mu^4 - \left(1 + X^* \frac{a'(X^*)}{a(X^*)}\right) \mu^3 - \left(X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)}\right) \mu \quad (4.35)$$

biçimindedir. Schur-Cohn kriterlerinin ilk ikisinden

$$-2 < X^* \left(\frac{a'(X^*)}{a(X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) < 0 \quad (4.36)$$

ve üçüncüsünden

$$\left| -X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} + \left(X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right)^3 - \left(1 + X^* \frac{a'(X^*)}{a(X^*)} \right)^2 \left(X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) \right| < 1 - \left[X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right]^2 \quad (4.37)$$

elde edilir. $s(X)$ fonksiyonu $X \in (0, X_k)$ için artan bir fonksiyon olduğundan X_1^* denge noktası kararsızdır. Ayrıca $s(X)$ fonksiyonu $X \in (X_k, \infty)$ için azalan bir fonksiyon olduğundan, (4.36) ve (4.37) denklemleri birleştirilip ortak çözümlerse X_2^* denge noktası için kararlılık şartları (4.30), (4.31) ve (4.32) olacaktır.

Teorem 4.7:

$$\left[\left(X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right)^2 - 1 \right] \left[\left(X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) + 1 \right] > \left(1 + X^* \frac{a'(X^*)}{a(X^*)} \right)^2 X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \quad (4.38)$$

eşitsizliği sağlandığı takdirde, t anında Allee etkisi kararlı yapıyı kararsız hale dönüştürür, kararsız yapıyı bozmaz.

İspat: İlk olarak

$$x := X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \text{ ve } y := X^* \frac{a'(X^*)}{a(X^*)} \quad (4.39)$$

olarak tanımlansın. (4.38) koşulu bu tanımlamaya göre yeniden yazılırsa

$$(x^2 - 1)(x + 1) > (1 + y)^2 x \quad (4.38a)$$

elde edilir. Daha önceden verilen Bölüm 2.2 deki (1) – (6) şartlarından $x < 0$ ve $y > 0$ olduğu bilinmektedir. İspat iki kısımda yapılacaktır. İlk önce (4.1) denkleminin denge noktaları kararsız iken Allee etkili (4.29) denkleminin denge noktalarının kararsız olduğu gösterilecek, daha sonra (4.1) denkleminin denge noktalarının kararlı olduğu durumda, (4.38) şartı altında (4.29) denkleminin denge noktalarının kararsız yapıya dönüştükleri ispatlanacaktır.

1. Durum: İlk önce $x \leq x_0$ olduğu duruma bakalım. Bu durumda (4.1) denklemi, Teorem 4.1 deki (4.11) eşitsizliği sağlanmayacağından dolayı kararlı olmayacaktır. Hükmün gerçekleşmesi için Teorem 4.6 daki (4.30), (4.31) ve (4.32) eşitsizliklerinden en az birinin sağlanmadığını göstermeliyiz. Teorem 4.5 deki bu üç koşulu x ve y cinsinden sırasıyla yazacak olursak X_2^* denge noktası kararlıdır \Leftrightarrow

$$x > -1 \quad (4.30a)$$

$$x^3 + x^2 - [(1 + y)^2 + 1]x - 1 < 0 \quad (4.31a)$$

$$x^3 - x^2 - [(1 + y)^2 + 1]x + 1 > 0. \quad (4.32a)$$

- (i) $x = x_0$ olsun. Bu durumda (4.31a) koşulu sağlanır. (4.32a) koşulunun her iki tarafına $-2x$ eklenir ve $x = x_0$ yerine yazılırsa

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 - [(1 + y)^2 + 1]x < -2x$$

$$x_0, \text{ bu denklemin bir kökü olduğundan } \Leftrightarrow x - (1 + y)^2 x < 0$$

$$x < 0 \text{ olduğundan } \Leftrightarrow 1 - (1 + y)^2 > 0 \Leftrightarrow y < 0$$

bulunur. Ancak y daima pozitif olduğundan (4.31a) koşulu sağlanmaz ve sonuç olarak (4.29) denkleminin denge noktaları da kararsız olarak bulunmuş olur.

(ii) $x < x_0$ olsun. $x \leq -1$ iken (4.30a) koşulunun sağlanmadığı aşikardır. O halde $-1 < x < x_0$ olduğunu düşünelim. Bu aralıkta

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 1 > 2x \quad (4.40)$$

olduğunu biliyoruz (Bakınız Ek B). Diğer yandan $y > 0$ ve $x < 0$ olduğundan,

$$1 + y > 1 \Leftrightarrow (1 + y)^2 > 1$$

$$-(1 + y)^2 x > -x \Leftrightarrow -(1 + y)^2 x + x > 0$$

$$-(1 + y)^2 x - x + 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow -[(1 + y)^2 + 1]x + 2x > 0 \quad (4.41)$$

gerçeklenir. Şimdi (4.40) ve (4.41) birlikte düşünülürse $x^3 + x^2 - [(1 + y)^2 + 1]x - 1 > 0$ elde edilir ki, (4.31a) koşulunun bir kere daha sağlanmadığı görülmüş olur.

2. Durum: Son olarak $x_0 < x < 0$ olduğu duruma bakalım. Açıkça, Teorem 4.1 den (4.1) denkleminin denge noktaları kararlıdır. Amacımız, (4.38) şartı altında Teorem 4.5 deki üç şartın sağlanıp sağlanmayacağını kontrol etmektir.

$x > -1$ olduğundan (4.30a) koşulu sağlanır. Ayrıca bu aralıkta

$$-x^3 + x^2 + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 1 > 2x$$

$$x^3 - x^2 - [(1 + y)^2 + 1]x + 1 > 0$$

olur ki, bu da bize (4.32a) eşitsizliğinin daima sağlandığını gösterir. Son olarak, sadece (4.31a) eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek yeterlidir.

Hipotezden,

$$(x^2 - 1)(x + 1) > (1 + y)^2 x \Leftrightarrow x^2(x + 1) - (x + 1) > (1 + y)^2 x$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 > (1 + y)^2 x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - [(1 + y)^2 + 1]x - 1 > 0$$

olup, (4.31a) koşulunun (4.30) hipotezi altında sağlanmadığını gösterir. O halde (4.1) denkleminin denge noktaları kararlı iken (4.29) denkleminin denge noktaları kararsızdır. Bu da ispatı tamamlar.

4.5. ($t, t - 3$) Anında Allee Etkisi

Son kısım olarak bu bölümde

$$X_{t+1} = \lambda^* X_t a(X_t, X_{t-3}) f(X_{t-3}) \quad (4.42)$$

denklemini ele alınmıştır. Denge noktası, Allee etkisi, f fonksiyonu altındaki tüm koşullar burada da aynen kabul edilmektedir.

Teorem 4.8: (4.42) denkleminin X_1^* denge noktası kararsızdır. X_2^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$X_2^* \left(\frac{a_{X_t}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} - \frac{a_{X_{t-3}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} - \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) > -2 \quad (4.43)$$

$$-1 < \left[X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \right] < 1 \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} & - \left[X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \right]^3 - \left[X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \right]^2 \\ & + \left[1 + \left(1 + X_2^* \frac{a_{X_t}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} \right)^2 \right] \left[X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \right] > -1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
& - \left[X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \right]^3 + \left[X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \right]^2 \\
& + \left[1 + \left(1 + X_2^* \frac{a_{X_t}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} \right)^2 \right] \left[X_2^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X_2^*, X_2^*)}{a(X_2^*, X_2^*)} + \frac{f'(X_2^*)}{f(X_2^*)} \right) \right] < 1 \quad (4.46)
\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: (4.42) denkleminin X^* denge noktası civarında lineerleştirilmesiyle

$$\begin{aligned}
U_{t+1} &= (\lambda^* a(X^*, X^*) f(X^*) + \lambda^* X^* a_{U_t}(X^*, X^*) f(X^*)) U_t \\
&+ (\lambda^* X^* a_{U_{t-3}}(X^*, X^*) f(X^*) + \lambda^* X^* a(X^*, X^*) f'(X^*)) U_{t-3}
\end{aligned}$$

denklemi kolayca elde edilebilir. Denge noktası koşulu olan (4.20) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$U_{t+1} - \left(1 + X^* \frac{a_{U_t}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} \right) U_t - \left(X^* \frac{a_{U_{t-3}}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} + X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) U_{t-3} = 0 \quad (4.47)$$

elde edilir. (4.47) denkleminin karakteristik polinomu

$$p(\mu) = \mu^4 - \left(1 + X^* \frac{a_{X_t}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} \right) \mu^3 - X^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right)$$

şeklindedir. Schur-Cohn kriterinin ilk iki şartından

$$X^* \left(\frac{a_{X_t}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} + \frac{a_{X_{t-3}}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) < 0 \quad (4.48)$$

$$X^* \left(\frac{a_{X_t}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} - \frac{a_{X_{t-3}}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} - \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) > -2 \quad (4.49)$$

elde edilirken, üçüncü şartından ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\left| -X^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) + \left[X^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) \right]^3 - \left(1 + X^* \frac{a_{X_t}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} \right)^2 X^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) \right| < 1 - \left[X^* \left(\frac{a_{X_{t-3}}(X^*, X^*)}{a(X^*, X^*)} + \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right) \right]^2. \quad (4.50)$$

$s(X)$ fonksiyonu $X \in (0, X_k)$ için artan bir fonksiyon olduğundan (4.48) sağlanmayıp X_1^* denge noktası kararsızdır. Ayrıca $s(X)$ fonksiyonu $X \in (X_k, \infty)$ için azalan bir fonksiyon olduğundan, (4.49) ve (4.50) denklemleri birleştirilip ortak çözümlerse X_2^* denge noktası için kararlılık şartları (4.43), (4.44), (4.45) ve (4.46) olacaktır.

BÖLÜM 5

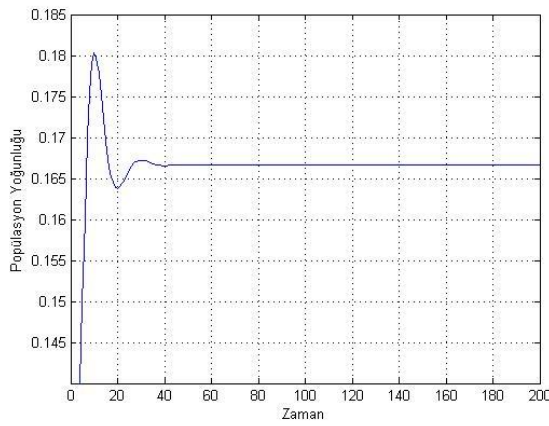
5. NÜMERİK ÇALIŞMALAR

Bu bölümde şu ana kadar yaptığımız teorik çalışmaları desteklemek amacıyla nümerik çalışmalara yer verilmiştir. Bu çalışmalar Matlab programı kullanılarak yapılmıştır. Örnek olarak ‘Lojistik Fark Denklemleri’ olarak bilinen

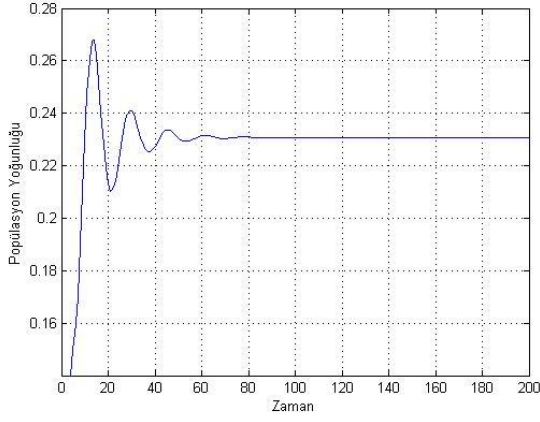
$$X_{t+1} = \lambda X_t (1 - X_{t-3}/K) \quad (5.1)$$

denklemleri kullanılmıştır [3]. Burada $\lambda > 0$ büyüme oranı ve $K > 0$ taşıma kapasitesi olarak ele alınmıştır. Başlangıç koşulları olarak $X_{-3}, X_{-2}, X_{-1}, X_0$ seçilmiş ve uygun bir $0 < X_0, X_{-1}, X_{-2}, X_{-3} < K$ seçimi ile $X_t > 0$ olacağı garanti edilmiştir.

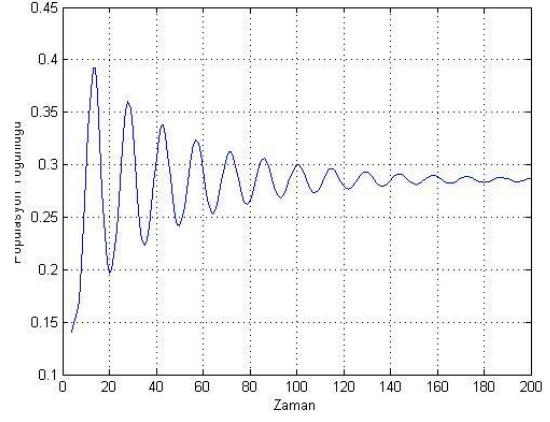
İlk olarak Şekil 5.1.a-c de λ parametresi arttıkça, denge noktalarının kararlılığının azaldığı görülmektedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 5.1.

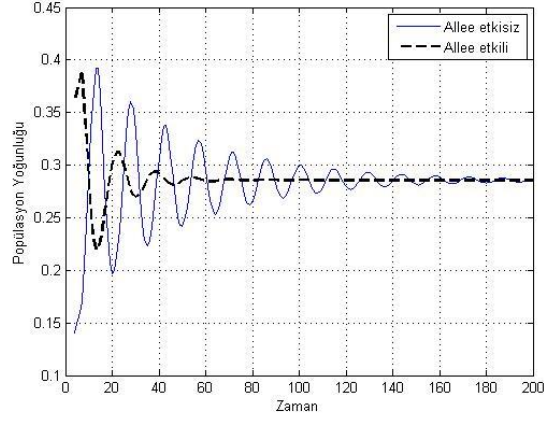
Parametre değişiminin kararlılık üzerindeki etkisi

$X_{t+1} = \lambda X_t(1 - X_{t-3})$ denkleminin yoğunluk-zaman grafiği ve başlangıç koşulları

$X_{-3} = 0.14, X_{-2} = 0.15, X_{-1} = 0.16$ ve $X_0 = 0.17$, a) $\lambda = 1.2$

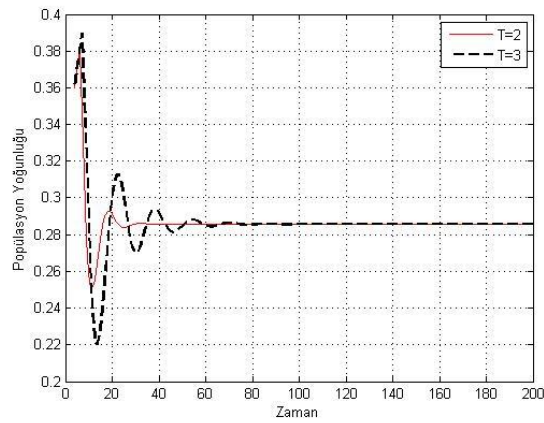
b) $\lambda = 1.3$ c) $\lambda = 1.4$

Şekil 5.2. de (5.1) denkleminde $t - 3$ anında Allee etkili ve etkisiz denklemler karşılaştırılarak, Teorem 4.5 desteklenmiştir. Allee etkili denklemden denge noktasına daha çabuk ulaşıldığı, kararlılığın arttığı görülmektedir.



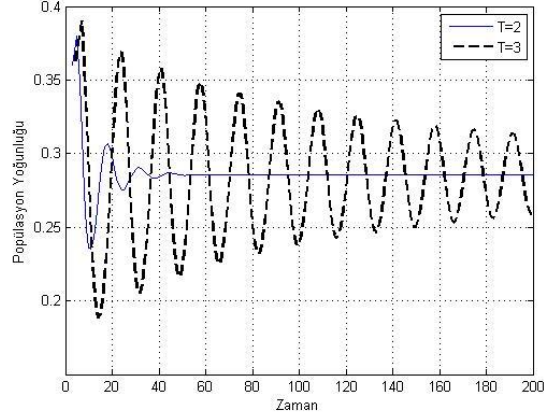
Şekil 5.2. $t - 3$ anında Allee etkisiz ve Allee etkili denklemin karşılaştırmaları $X_{t+1} = \lambda X_t(1 - X_{t-3})$ ve $X_{t+1} = \lambda^* X_t a(X_{t-3})(1 - X_{t-3})$ denklemlerinin yoğunluk-zaman grafiği, $a(X_{t-3}) = X_{t-3}/(\alpha + X_{t-3})$ ve $\alpha = 0.03$, $\lambda = \lambda^* a(X^*)$, başlangıç koşulları $X_{-3} = 0.36$, $X_{-2} = 0.37$, $X_{-1} = 0.38$ ve $X_0 = 0.39$.

Şekil 5.3. de $X_{t+1} = \lambda X_t(1 - X_{t-T}/K)$ denkleminde $K = 1$ olarak alınmış ve $T = 2$ ve $T = 3$ durumlarında $t - T$ anındaki Allee etkili ve etkisiz davranışlar karşılaştırılmıştır. Burada da Teorem 4.3 de gecikme arttıkça kararlılığın azaldığı doğrulanmaktadır.



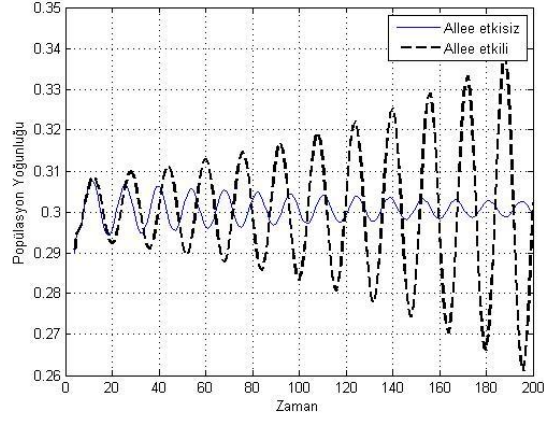
Şekil 5.3. $T = 2$ ve $T = 3$ olduğunda $t - T$ anında Allee etkileri $X_{t+1} = \lambda^* X_t a(X_{t-T})(1 - X_{t-T})$ ve $a(X_{t-T}) = X_{t-T}/(\alpha + X_{t-T})$, $\alpha = 0.03$, $\lambda = \lambda^* a(X^*)$, başlangıç koşulları $X_{-3} = 0.36$, $X_{-2} = 0.37$, $X_{-1} = 0.38$ ve $X_0 = 0.39$.

Şekil 5.4 de $X_{t+1} = \lambda X_t(1 - X_{t-T}/K)$ denkleminde $K = 1$ olarak alınmış ve $T = 2$ ve $T = 3$ durumlarında t anındaki Allee etkili ve etkisiz davranışlar karşılaştırılmıştır.



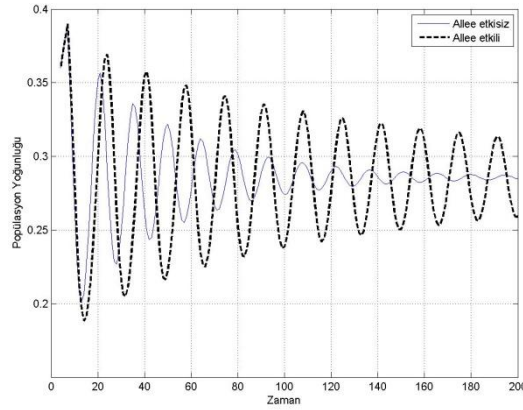
Şekil 5.4. $T = 2$ ve $T = 3$ olduğunda t anında Allee etkileri $X_{t+1} = \lambda X_t a(X_t)(1 - X_{t-T})$ ve $a(X_t) = X_t/(\alpha + X_t)$, $\alpha = 0.03$, $\lambda = \lambda^* a(X^*)$, başlangıç koşulları $X_{-3} = 0.36$, $X_{-2} = 0.37$, $X_{-1} = 0.38$ ve $X_0 = 0.39$.

Son olarak t anında Allee etkisi durumunda, Teorem 4.7 deki (4.38) koşulu $\lambda = 1.43$ olduğunda sağlanmış ve gerçekten kararlılık yapısının bozulduğu gözlemlenmiştir (Şekil 5.5). $\lambda = 1.4$ olduğunda, (4.38) koşulu sağlanmayıp sadece kararlılığın azaldığı gözlemlenmiştir (Şekil 5.6). $\lambda = 1.6$ olduğunda ise (4.38) koşulu sağlanmış fakat her iki durumda da denge noktası kararsızdır (Şekil 5.7).



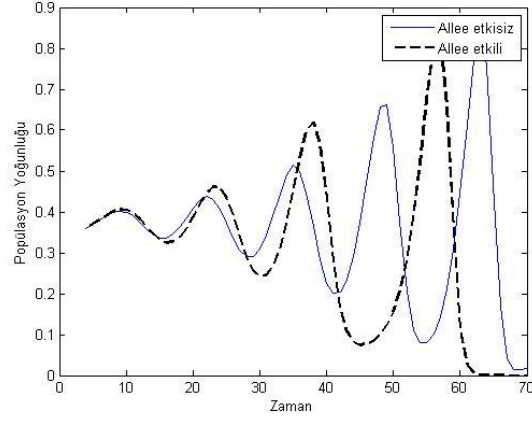
Şekil 5.5. t anında Allee etkisinin kararlılığa etkisi

$X_{t+1} = \lambda X_t(1 - X_{t-3})$ ve $X_{t+1} = \lambda^* X_t a(X_t)(1 - X_{t-3})$ ve $a(X_t) = X_t/(\alpha + X_t)$,
 $\alpha = 0.03$, $\lambda = \lambda^* a(X^*)$ ve $\lambda = 1.43$, başlangıç koşulları $X_{-3} = 0.29$, $X_{-2} = 0.295$,
 $X_{-1} = 0.296$ ve $X_0 = 0.297$.



Şekil 5.6. t anında Allee etkisinin kararlılığa etkisi

$X_{t+1} = \lambda X_t(1 - X_{t-3})$ ve $X_{t+1} = \lambda^* X_t a(X_t)(1 - X_{t-3})$ ve $a(X_t) = X_t/(\alpha + X_t)$,
 $\alpha = 0.03$, $\lambda = \lambda^* a(X^*)$ ve $\lambda = 1.4$, başlangıç koşulları $X_{-3} = 0.36$, $X_{-2} = 0.37$,
 $X_{-1} = 0.38$ ve $X_0 = 0.39$.



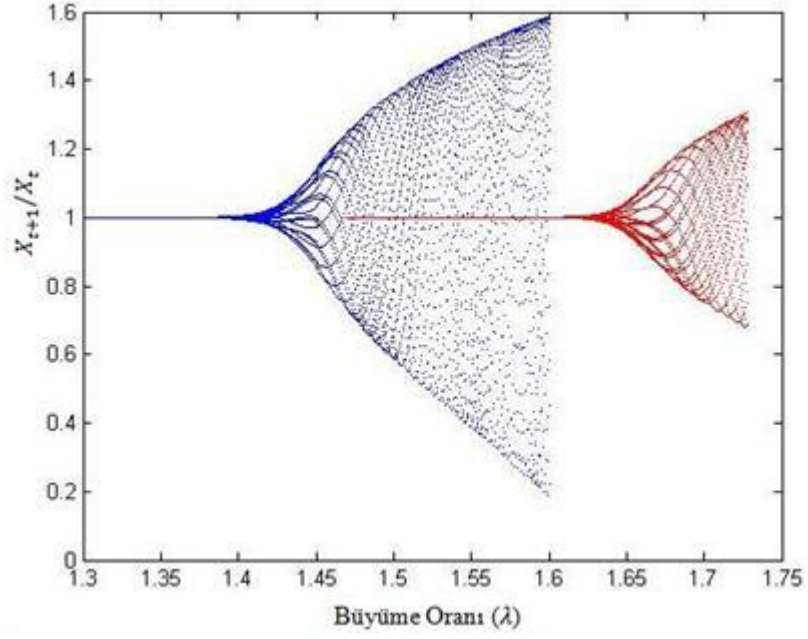
Şekil 5.7. t anında Allee etkisinin kararlılığa etkisi

$$X_{t+1} = \lambda X_t (1 - X_{t-3}) \text{ ve } X_{t+1} = \lambda^* X_t a(X_t) (1 - X_{t-3}) \text{ ve } a(X_t) = X_t / (\alpha + X_t),$$

$$\alpha = 0.03, \lambda = \lambda^* a(X^*) \text{ ve } \lambda = 1.6, \text{ başlangıç koşulları } X_{-3} = 0.36, X_{-2} = 0.37,$$

$$X_{-1} = 0.38 \text{ ve } X_0 = 0.39.$$

Son olarak Şekil 5.8 de (5.1) örneğinin büyüme oranı λ ya ve X_{t+1}/X_t oranına bağlı değişimini görmekteyiz. Gerçekten Allee etkili olan kısım (sağda), daha küçük olup Allee etkisinin kaotik çözümlerde dalgalanmaları daha az indirgediğini göstermektedir. Bu Allee ile ilgili diğer yaklaşımlara göre farklı bir davranıştır.



Şekil 5.8. Kararlılık karşılaştırmaları

$X_{t+1} = \lambda X_t(1 - X_{t-3})$ ve $X_{t+1} = \lambda^* X_t a(X_{t-3})(1 - X_{t-3})$ ve $a(X_{t-3}) = X_{t-3}/(\alpha + X_{t-3})$, $\alpha = 0.03$, $\lambda = \lambda^* a(X^*)$ ve $\lambda = 1.3:0.001:1.6$, başlangıç koşulları $X_{-3} = 0.2$, $X_{-2} = 0.3$, $X_{-1} = 0.4$ ve $X_0 = 0.5$ Allee etkisiz kısım (solda) ve Allee etkili kısım (sağda).

BÖLÜM 6

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, (2.1) genel fark denklemi ele alınmış ve T gecikme parametresi artırılmıştır. Bunun sonucu olarak dördüncü mertebeden fark denkleminin genel kararlılık kriterleri ve Allee etkisi altındaki kararlılık davranışları incelenmiştir. [34] çalışmasından farklı olarak Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi yerine Schur-Cohn Kriterleri kullanılmıştır.

Tanımlar, notasyonlar ve f ve a fonksiyonu altındaki koşullar [34] ve [36] makalesindekilerle aynı şekilde alınmıştır. Yine [34] çalışmasında olduğu gibi Allee etkisinin genelde kararlılığı artıran bir yapısı olmasına rağmen, bu çalışmada farklı bir sonuç elde edildiği gösterilmiştir. $T = 1$ için, $t - 1$ anındaki Allee etkisi denklemin kararlılık yapısını artırırken, t anındaki Allee etkisi kararlılık yapısını etkilememiştir. $T = 2$ için, $t - 2$ anındaki Allee etkisi denklemin kararlılık yapısını artırırken, t anındaki Allee etkisi kararlılık yapısını azaltmıştır. Bu çalışmada ise $T = 3$ için, $t - 3$ anındaki Allee etkisinin denklemin kararlılık yapısını artırdığı, ancak belli şart altında t anındaki Allee etkisinin kararlılık yapısını değiştirdiği sonucu elde edilmiştir. Bu sonuç diğer çalışmalardan oldukça farklı bir sonuç olup, kararlılık yapısını tamamen bozması biyolojik açıdan daha önemli ve gerçekçidir. Ayrıca gecikme parametresini artırdıkça, kararlılığın azaldığı gözlemlenmiştir. Bulunan teorik sonuçlar nümerik simülasyonlar ile desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Allee W.C., Animal Aggregations, A Study in General Sociology, *University of Chicago Press*, Chicago, 1931.
- [2] Odum E.P., Fundamentals of Ecology, *Saunders*, Philadelphia, Pennsylvania, 1953.
- [3] Allen L.J.S., An Introduction to Mathematical Biology, *Pearson*, New Jersey, 2007.
- [4] Elaydi S.N., An Introduction to Difference Equations, *Springer*, New York, 2006.
- [5] Courchamp F., Berec L., Gascoigne J. Allee Effects in Ecology and Conservation, *Oxford University Press*, New York, 2008.
- [6] Dennis B., Allee effects: population growth, critical density and the chance of extinction, *Natural Resource Modeling*, 3, 481-538, 1989.
- [7] Caughley G., Directions in conservation biology, *Journal of Animal Ecology*, 63, 215-44, 1994.
- [8] Levitan D.R., Influence of body size and population density on fertilization success and reproductive output in a free-spawning invertebrate, *Biological Bulletin*, 181, 261-8, 1991.
- [9] Pfister C.A. and Bradbury A., Harvesting red sea urchins: recent effects and future predictions, *Ecological Applications*, 6, 298-310.
- [10] Hoddle M.S., Lifetable construction for the gorse seed weevil, *Apion ulicis* (Forster)(Coleoptera, Apionidae) before gorse pod dehiscence, and life-history strategies of the weevil, *New Zealand Journal of Zoology*, 18, 399-404, 1991.
- [11] Lament B.B., Klinkhamer P.G.L. and Witkowski E.T.R. Population fragmentation may reduce fertility to zero in *Banksia goodii*—a demonstration of the Allee effect, *Oecologia*, 94, 446-50, 1993.
- [12] Widén B., Demographic and genetic effects on reproduction as related to population size in a rare, perennial herb, *Senecio integrifolius* (Asteraceae), *Biological Journal of the Linnean Society*, 50, 179-95, 1993.
- [13] Hopper K.R. and Roush R.T., Mate finding, dispersal, number released, and the success of biological-control introductions, *Ecological Entomology*, 18, 321-31, 1993.
- [14] Fauvergue X., Hopper K.R. and Antolin M.F., Mate finding via a trail sex-pheromone by a parasitoid wasp, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 92, 900-4, 1995.
- [15] Lande R., Engen S. and Saether B.E., Optimal harvesting, economic discounting and extinction risk in fluctuating populations, *Nature*, 372, 88-90, 1994.
- [16] Saether B.R., Engen S., and Lande R., Density-dependence and optimal harvesting of fluctuating populations, *Oikos*, 76, 40-6, 1996.
- [17] Myers R., Barrowman N., Hutchings J., and Rosenberg A., Population dynamics of exploited fish stocks at low population levels, *Science*, 269, 1106-8, 1995.

- [18] Amarasekare P. Allee effects in metapopulation Dynamics, *American Naturalist*, 52, 298-302, 1998a.
- [19] Peterson C. and Levitan D.R., The Allee effect: a barrier to recovery by exploited species, In J.D. Reynolds, G.M. Mace, K.H. Redford, and J.G. Robinson, eds. Conservation of exploited species, pp. 281-300, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2001.
- [20] Hearn G., Berghaier R., and George D, Evidence for social enhancement reproduction two Eulemur species, *Zoo Biology*, 15, 1-12, 1996.
- [21] Woodroffe R. et al. The African Wild Dog, Status Survey & Conservation Action Plan, IUCN, 1997.
- [22] Courchamp, F. and Macdonald D.W., Crucial importance of pack size in the African wild dog *Lycaon pictus*, *Animal Conservation* 4: 169-174, 2001.
- [23] Stephens P. A., Sutherland W. J., Apollonio, M., Festa-Bianchet, M. and Mainardi, D., Vertebrate Mating Systems, London, *World Scientific*, Chapter 9, 2000.
- [24] Courchamp F., Clutton-Brock T., Grenfell B., Inverse Density Dependence and the Allee Effect, *Tree* Vol. 14, 1999.
- [25] "African Wild Dogs and the Allee Effect" erişim adresi: <http://blogs.nature.com/amch/2011/01/10/african-wild-dogs-a-case-study-in-allee-effects> erişim tarihi: 10 Haziran 2011.
- [26] "Allee Effects, Round Two: Component versus Demographic Effects" erişim adresi: <http://blogs.nature.com/amch/2011/01/20/allee-effects-round-two-component-versus-demographic-effects> erişim tarihi: 10 Haziran 2011.
- [27] Stephens P. A., Sutherland W. J., Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation, *Trends in Ecology & Evolution*, 14:401-405, 1999.
- [28] Stephens P.A., Sutherland W.J., Freckleton R.P., What is the Allee Effect?, Blackwell Publishing on behalf of Nordic Society Oikos, 185-190, 1999.
- [29] Darwin, C. R., The origin of species by means of natural selection, 6th ed. - *John Murray*, London, 1872.
- [30] Fowler C. and Baker J., A review of animal population dynamics at extremely reduced population levels, Reports to the International Whaling Commission, 41, 545-54, 1991.
- [31] Wang M.H. and Kot M., Speeds of invasion in a model with strong or weak Allee effects, *Mathematical Biosciences*, 171, 83-97, 2001.
- [32] Wang M.H., Kot M., and Neubert M.G., Integrodifference equations, Allee effects, and invasions, *Journal of Mathematical Biology*, 44, 150-68, 2002.
- [33] Taylor C.M., Hastings A., Allee Effects in Biological Invasions, *Ecology Letters*, 2005,8:895-908.
- [34] Çelik C., Merdan H., Duman O., Akın Ö., Allee effects on population Dynamics with delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, 37:65-74, 2008.
- [35] Scheuring I. Allee effect increases the dynamical stability of populations, *J Theor Biol*, 1999, 199:407-414.
- [36] Merdan H., Gumus O. A., Stability Analysis of a General Discrete-Time Population Model Involving Delay and Allee Effects, *Mathematical and Computational Applications*, 2011, (Baskıda).

- [37] Duman O., Merdan H., Stability Analysis of Continuous Population Model Involving Predation and Allee Effect, *Chaos, Solitons & Fractals*, 41:1218-1222, 2009.
- [38] López-Ruiz R., Fournier-Prunaret D., Indirect Allee effect, bistability and chaotic oscillations in a predator-prey discrete model of logistic type *Chaos, Solitons & Fractals*, 24:85-101, 2005.
- [39] McCarthy M. A., The Allee effect, finding mates and theoretical models *Ecological Modelling*, 103:99-102, 1997.
- [40] Merdan H., Duman O., On the Stability Analysis of a General Discrete-Time Population Model Involving Predation and Allee Effects, *Chaos, Solitons & Fractals*, 40:1169-1175, 2009
- [41] Merdan H., Duman O., Akın Ö., Çelik C., Allee effects on population dynamics in continuous (overlapping) case, *Chaos, Solitons & Fractals*, 39:1994-2001, 2009.
- [42] Murray J. D. *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [43] Sophia R., Jang J., Allee effects in a discrete-time host-parasitoid model with stage structure in the host, *Disc & Cont Dyn Sys-B*, 8:145-159, 2007.
- [44] Zhou S. R., Liu Y. F., Wang G., The stability of predator-prey systems subject to the Allee effects, *Theor Population Biol*, 67:23-31, 2005.
- [45] Fowler M.S., Ruxton G.D., Population dynamic consequences of Allee effects, *J Theor Biol*, 215:39-46, 2002.
- [46] Jang S.R.J., Allee effects in a discrete-time host parasitoid model with stage structure in the host, *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 8:145-159, 2007.
- [47] Kulenović M. R. S., Ladas G., Prokup N. R., A rational difference equations, *Comput Math Appl*, 41:671-678, 2001.
- [48] Cunningham K., Kulenović M.R.S., Ladas G., Valicenti S.V., On the recursive sequences $x_{n+1} = (\alpha + \beta x_n)/(Bx_n + Cx_{n-1})$, *Nonlinear Anal*, 47:4603-4614, 2001.
- [49] Hale J., Koçak H. *Dynamics and Bifurcation*, Springer-Verlag, New York, 1991.

EKLER

A. Lokal Asimptotik Kararlılık İçin Schur-Cohn Kriteri

a_i 'ler reel sayı olmak üzere, k . mertebeden lineer fark denklemini ele alalım:

$$x_{t+k} + a_1x_{t+k-1} + a_2x_{t+k-2} + \dots + a_kx_t = 0 \quad (\text{a.1})$$

(a.1) denkleminin denge noktalarının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$p(\mu) = \mu^k + a_1\mu^{k-1} + \dots + a_k \quad (\text{a.2})$$

karakteristik polinomunun kökleri olan μ ' lerin $|\mu| < 1$ şartını sağlamasıdır.

Şimdi (a.2) denkleminin köklerinin $|\mu| < 1$ şartını sağlaması için gerekli olan teorem verilecektir. Ancak, bunun için bazı tanımlar verelim:

Tanım A.1: Herhangi bir $B = (b_{ij})$ matrisinin ilk ve son satır ve sütunlarının aynı anda silinmesiyle elde edilen matrislere, B matrisinin 'iç matrisleri' (inner matrix) adı verilir. B matrisinin kendisi de iç matristir.

Tanım A.2: Eğer bir B matrisinin tüm iç matrislerinin determinantı pozitif ise, B matrisine 'pozitif içlenebilir matris' (positive innerwise) adı verilir.

Teorem A.1: (a.2) denkleminin köklerinin birim çember içinde yatması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki üç eşitsizliğin sağlanmasıdır:

- 1) $p(1) > 0$,
- 2) $(-1)^k p(-1) > 0$,
- 3) $(k-1)x(k-1)$ boyutundaki

$$B_{k-1}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-3} & & & 1 \\ a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & a_k & a_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_k & & a_4 & a_3 \\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

matrislerinin pozitif içlenebilir matris olması gerekmektedir.

Burada dikkat çekeceğimiz önemli bir husus, Schur-Cohn kriterinin $k = 2$ durumunun Bölüm 2 de verilen Teorem 2.1 deki ‘Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi’ ile birebir örtüşmesidir. Gerçekten $k = 2$ için karakteristik denklem $p(\mu) = \mu^2 + a_1\mu + a_2$ olup yukarıdaki kararlılık şartları $|a_1| < 1 + a_2 < 2$ eşitsizliğine indirgenmektedir. $k = 3$ durumunda ise $p(\mu) = \mu^3 + a_1\mu^2 + a_2\mu + a_3$ karakteristik denklem olup denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$|a_1 + a_3| < 1 + a_2 \tag{a.3}$$

$$|a_2 - a_1 a_3| < 1 - a_3^2 \tag{a.4}$$

eşitsizlikleri ile verilmektedir. Bu tez çalışmasında ise $k = 4$ için Schur-Cohn kriteri indirgenerek Bölüm 4 ‘te verilmiş ve asimptotik kararlılık için bu şart kullanılmıştır.

B. Eşitsizliklerin Çözülmesi

Teorem 4.1 de verilen (4.16) eşitsizliğinin çözümü için $\lambda = \frac{1}{f(X^*)}$ yazılarak (4.16) eşitsizliği

$$\left| -2X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} + \left[X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right]^3 \right| < 1 - \left[X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right]^2 \quad (\text{b.1})$$

eşitsizliğine indirgenebilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\left[X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right]^3 + \left[X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right]^2 - 2X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} - 1 < 0 \quad (\text{b.2})$$

$$- \left[X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right]^3 + \left[X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} \right]^2 + 2X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)} - 1 < 0 \quad (\text{b.3})$$

eşitsizliklerine ulaşılır. $x := X^* \frac{f'(X^*)}{f(X^*)}$ alınarak yeniden yazarsak $-x^3 + x^2 + 2x - 1 < 0$ ve $x^3 + x^2 - 2x - 1 < 0$ eşitsizlik sistemine ulaşılır. Bu sistemin köklerini Matlab kullanarak bulursak aşağıdaki sonuçlar elde edilir :

Matlab komutu: solve(' -x^3+x^2+2*x-1')

birinci kök yaklaşık olarak : $\frac{1}{6} \frac{28+(84\sqrt{3}i-28)^{\frac{2}{3}}+2(84\sqrt{3}i-28)^{\frac{1}{3}}}{(84\sqrt{3}i-28)^{\frac{1}{3}}}$

$\approx 1.801937735804838$

İkinci kök : $\frac{1}{12} \frac{4(84\sqrt{3}i-28)^{\frac{1}{3}}-(84\sqrt{3}i-28)^{\frac{2}{3}}-28\sqrt{3}i+\sqrt{3}i(84\sqrt{3}i-28)^{\frac{2}{3}}-28}{(84\sqrt{3}i-28)^{\frac{1}{3}}}$

$$\approx 1.246979603717467$$

$$\text{Üçüncü kök : } \frac{1}{12} \frac{28\sqrt{3}i - \sqrt{3}i(84\sqrt{3}i - 28)^{\frac{2}{3}} - (84\sqrt{3}i - 28)^{\frac{2}{3}} - 28 + 4(84\sqrt{3}i - 28)^{\frac{1}{3}}}{(84\sqrt{3}i - 28)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\approx 0.445041867912629 := x_0$$

Köklerin işaret tablosu aşağıda bulunmaktadır:

	-1.8019	-1.2470	-0.4450	0.4450	1.2470	1.8019	
$-x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$	+	+	-	-	+	+	-
$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$	-	+	+	-	-	+	+

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ERDOĞAN KARAOĞLU, Esra
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 23.06.1987, Ankara
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (505) 346 40 49
e-mail : esraerdogan929@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi / Matematik	2009

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-2011	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayımlar

Consequences of Allee Effects on Stability Analysis of the Population Model
 $X_{t+1} = \lambda X_t f(X_{t-3})$ (incelemede).