GENELLEŞTİRİLMİŞ YANSITAN BARİYERLİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

BAŞAK GEVER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2011

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ömer SAATCIOĞLU

Anabilim Dalı Başkanı

Başak GEVER tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ YANSITAN BARİYERLİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİNİN ASİMTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Tahir KHANİYEV	Prof. Dr. İ. Burhan TÜRKŞEN
Tez Danışmanı	Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan: Prof. Dr. Ömer SAATCIOĞLU

Üye : Prof. Dr. Tahir KHANİYEV

Üye : Prof. Dr. İ. Burhan TÜRKŞEN

Üye : Prof. Dr. Ömer AKIN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Berrin AYTAÇ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

……………….

Başak GEVER

Üniversitesi	:	**TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü	:	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	:	**Endüstri Mühendisliği**
Tez Danışmanları	:	**Prof. Dr. Tahir KHANİYEV,**
		Prof. Dr. İ. Burhan TÜRKŞEN
Tez Türü ve Tarihi	:	**Yüksek Lisans – Aralık 2011**

Başak GEVER

GENELLEŞTİRİLMİŞ YANSITAN BARİYERLİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada, genelleştirilmiş yansıtan bariyerli bir ödüllü yenileme süreci ele alınmış ve sürecin olasılık karakteristikleri analitik ve asimtotik yöntemlerle hem klasik hem de bulanık mantık çerçevesinde incelenmiştir. Çalışmanın birinci kısmında, süreç matematiksel olarak inşa edilmiş ve sonlu boyutlu dağılımları ele alınmıştır. Ardından sürecin üç önemli sınır fonksiyoneli tanımlanmış ve bu sınır fonksiyonellerinin momentleri hesaplanmıştır. Daha sonra sürecin bazı şartlar altında ergodikliği ispatlanmış ve ergodik dağılımının genel şekli bulunmuştur. Buna ek olarak, ergodik dağılım için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiş ve limit dağılımının açık şekli bulunmuştur. Bunun yanı sıra, bulunan limit dağılımının bir "Kalan Ömür" dağılımı olduğu gösterilmiştir. Bu bölümün sonunda ise sürecin ergodik dağılımının tüm momentleri için asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, bazı önemli durumlarda (Üstel, Erlang ve Rayleigh Dağılımları durumunda) sürecin ilk dört momenti için açık katsayılı asimtotik açılımlar yazılmıştır.

Tezin ikinci kısmında ise, talepleri ifade eden rasgele değişkenlerin, bulanık parametreli Üstel, Gama, Erlang ve Weibull dağılımlarına sahip olduğu durumlarda sürecin ergodik dağılımı ele alınmış ve ergodik dağılımın bulanık mantık karakteristikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ödüllü yenileme süreci, Yansıtan bariyer, Sonlu boyutlu dağılımlar, Ergodik dağılım, Ergodik moment, Zayıf yakınsama, Asimtotik açılım, Kalan ömür, Sınır fonksiyonelleri, Üyelik fonksiyonu, Alfa kesitler, Bulanık yenileme fonksiyonu, Bulanık parametreli ergodik dağılım.

University	**:**	**TOBB Economics and Technology University**
Institute	**:**	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	**:**	**Industrial Engineering**
Supervisor	**:**	**Professor Dr. Tahir KHANİYEV**
		Professor Dr. İ. Burhan TÜRKŞEN
Degree Awarded and Date	**:**	**M.Sc. – December 2011**

Başak GEVER

INVESTIGATION OF THE RENEWAL REWARD PROCESS WITH GENERALIZED REFLECTING BARRIER BY ASYMPTOTIC METHODS

ABSTRACT

In this study, a generalized renewal reward process with reflecting barrier is considered and probability characteristics of the process is investigated by analytic and asymptotic methods in both crisp logic and fuzzy logic. In the first part of the study, the process is constructed mathematically and its finite dimensional distributions are examined. Then, the three important boundary functionals are defined and the first four moments of these boundary functionals are calculated. Later, under some conditions the ergodicity of the process is proved and the exact expression of ergodic distribution of the process is obtained. Moreover, the weak convergence theorem for the ergodic distribution of the process is proved and the explicit form of the limit distribution of the process is found. Besides, it is shown that the obtained limit distribution is a residual waiting time distribution. At the end of the first part, the exact form of the moments of the ergodic distribution is obtained. In some important cases (in the cases of Exponential, Erlang and Rayleigh distributions), the asymptotic expansions of the first four moments with the explicit coefficients are written. In the second part of the study, when the random variables expressed demands, having Exponential, Gama, Erlang and Weibull distributions with a fuzzy parameter, the ergodic distribution of the process is examined. After that, the fuzzy characteristics of the ergodic distribution are investigated and the explicit forms of these characteristics are obtained.

Keywords: Renewal reward process, Reflecting barrier, Finite dimensional distribution, Ergodic distribution, Ergodic moment, Weak convergence, Asymptotic expansion, Residual waiting time, Boundary functional, Membership functions, Alpha cuts, Fuzzy renewal function, Ergodic distribution with a fuzzy parameter.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca önemli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren çok değerli danışman hocalarım Prof. Dr. Tahir KHANİYEV ve Prof. Dr. İ. Burhan TÜRKŞEN' e teşekkürü bir borç bilirim.

Kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme ve ayrıca "110T559" numaralı projedeki maddi desteği için TÜBİTAK' a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\boldsymbol{\Omega}$	Bir stokastik deneyin örnek uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	Bir Ω' nın alt kümeleri üzerinde inşa edilmiş bir σ cebir
$\boldsymbol{P(A)}$	A olayının olasılığı
$\boldsymbol{(\Omega, \mathcal{F}, P)}$	Olasılık uzayı
$\boldsymbol{E(x)}$	x rasgele değişkeninin beklenen değeri
$\boldsymbol{Var(x)}$	x rasgele değişkeninin varyansı
$\boldsymbol{I_A(t) = \begin{cases} 1, t \in A \\ 0, t \notin A \end{cases}}$	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\boldsymbol{a(x) \sim b(x)}$	a(x)' in b(x)' e asimtotik denkliği
$\boldsymbol{g(x) = o(\varphi(x))}$	$\lim\limits_{x \to a}[g(x)/\varphi(x)] = 0$
$\boldsymbol{g(x) = O(\varphi(x))}$	$\lvert g(x)/\varphi(x) \rvert \le C < \infty$
$\boldsymbol{M_1(x) * M_2(x)}$	$\int_0^x M_1(x-y)dM_2(y)$ 'e eşit olan konvolüsyon çarpım
$\boldsymbol{F^{*n}(x)}$	F(x) fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı
$\boldsymbol{\widetilde{M}(s)}$	M(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$\boldsymbol{M^*(s)}$	M(s) fonksiyonunun Laplace – Stiltijes dönüşümü

1. GENELLEŞTİRİLMİŞ YANSITAN BARİYERLİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİNİN MODELLENMESİ VE İNCELENMESİ

1.1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Kuyruk teorisi, stokastik finans, güvenirlik teorisi, matematiksel sigorta, stok kontrol teorisi, fizik ve biyoloji gibi alanlarda birçok ilginç problem yenileme ve ödüllü yenileme süreçleri ile ifade edilmektedir. Yenileme ve ödüllü yenileme süreçlerinin birçok modifikasyonu bu alanlardaki bazı problemlerin çözümü için kullanılabilir. Bu modifikasyonlar çoğunlukla, yutan, tutan, yansıtan ve elastik gibi çeşitli bariyer tipleri ya da kesikli şans karışımlı müdahaleler ile verilir.

Literatürde, yansıtan bariyerli stokastik süreçlerle ilgili birçok değerli çalışmalar bulunmaktadır (örneğin Feller [13], Gihman ve Skorohod [15], Woodroofe vd.[6, 45], Borovkov [7], Kastenbaum [19], Brown ve Solomon [8], Khaniyev vd. [14, 20 – 29, 37] vs.). Bu çalışmalarda, yazarlar genellikle analitik sonuçlar elde etmeye çalışmışlardır. Elde edilen sonuçlar son derece karmaşık matematiksel yapılar içermektedir. Özellikle bariyer yansıtan olduğunda ele alınan sürecin yapısı daha da karmaşık bir hale gelmektedir. Bunun da nedeni, sürecin ergodikliğinin ispatında kullanılan gömülü Markov zincirinin ergodik olmasının ispat edilmesindeki zorluktur. Yani, diğer bariyerlerde genellikle bağımsız rasgele değişkenlerden oluşan bir gömülü Markov zinciri seçmek mümkün olmasına rağmen, yansıtan bariyerli stokastik süreçlerde bu kolaylık ortadan kalkar. Çünkü yansıtan bariyerli süreçler için bağımsız rasgele değişkenler dizisi şeklinde olan bir Markov zinciri seçmek mümkün değildir. Bu durumda, zincirin ergodik dağılımını elde etmek oldukça zorlaşır.

Analitik sonuçların karmaşık yapısından kurtulmak için 1990 yılından itibaren bazı yazarlar asimtotik yöntemleri kullanarak yüksek uyumluluğa sahip yaklaşık fakat daha sade sonuçlar almaktadırlar. Örneğin Alsmeyer [4], Janseen ve Leewarden [16, 17], Chang ve Peres [10], Lotov [35], Khaniyev ve Aliyev [3,23], Khorsunov [30] vs. Bu tezde de, ele alınan sürecin ergodik momentleri için kesin formüllerin yanı sıra, asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, açılımların ilk terimlerinin bir kalan ömrün momentleri biçiminde olduğu görülmüştür. Bu durum, hem teorik hem de pratik açıdan oldukça önemli bir durumdur.

Khaniyev ve öğrencilerinin 2000 yılından sonra elde ettiği sonuçlarda genellikle incelenen sürecin ergodik dağılımı ve ergodik momentleri ele alınmış ve asimtotik yöntemlerle araştırılmıştır. Bilindiği üzere ergodik dağılım zaman parametresinin büyük değerlerinde kullanılabilir. Hâlbuki birçok somut problemde zaman faktörünün çok büyük olması gerekmez. Dolayısıyla sonlu zaman anlarında sürecin davranışının incelenmesi bilimsel açıdan önemli ve pratik açıdan gereklidir. Bu nedenle, bu tezde sürecin bir boyutlu dağılımı da incelenmiştir.

Ayrıca bu tezde, sürecin ergodik dağılımları için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiş ve limit dağılımın açık şekli bulunmuştur. Tezin ikinci kısmında ise, bulanık parametreli Üstel, Gama ve Weibull dağılımları için sürecin ergodik dağılımının bulanık karakteristikleri incelenmiştir.

1.2. SÜRECİN FİZİKSEL MODELİ VE YORUMU

Aşağıdaki kurala göre çalışan bir depo ele alınabilir. Bu örneğe göre başlangıç anında depoda λz kadar stok vardır $(\lambda > 0,\ z > 0)$. $T_1 = \xi_1; T_2 = \xi_1 + \xi_2; \ldots; T_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n; \ldots$ rasgele anlarında, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ talepleri miktarlarında stok depodan alınmaktadır. Burada $\xi_1, \xi_2, \ldots$' ler ardışık talepler arasında geçen süreleri; $\eta_1, \eta_2, \ldots$' ler ise talep miktarlarını gösteren pozitif değerli rasgele değişkenlerdir. Bu işlem, depodaki stok seviyesi sıfırın altına düşene kadar devam eder. Stok seviyesi sıfırın altına düştüğü anda deponun stok düzeyi yenilenir. Bu yenileme stokun sıfırın altına düşen miktarının mutlak değerinin bir λ katı kadar olsun ve stokun seviyesi bu yeni başlangıç durumundan başlayarak bir önceki periyottakine benzer şekilde değişir. Her defa stokun miktarı sıfırın altına düştüğünde bu işlem tekrarlanır. Bu şekilde çalışan bir depodaki stokun t anındaki miktarı $X(t)$ ile gösterilir. $X(t)$ bir stokastik süreç olup literatürde "Genelleştirilmiş Yansıtan Bariyerli Ödüllü Yenileme Süreci" olarak bilinmektedir. $\lambda = 1$ olduğunda bu sürece sadece "Yansıtan Bariyerli Ödüllü Yenileme Süreci" denir. Benzer süreçler, stok kontrol teorisinin dışında fiziğin bazı alanlarında da ortaya çıkmaktadır. Örneğin, aynalar arasında ve seyreltilmiş ortamda yüksek enerjili partiküllerin hareketi "Yansıtan Bariyerli Rasgele Yürüyüş Süreci" ile ifade edilmekte ve incelenmektedir. Burada ele alınacak süreç, bir taraftan stok kontrol teorisindeki bazı özel durumları ifade etmekte, diğer taraftan ise sonuncu süreci incelemek için alt yapı oluşturmaktadır. Belirtmek gerekirse, yansıtan bariyerden dolayı bu süreçlerin analitik yöntemlerle incelenmesi oldukça zordur. Her ne kadar analitik yöntemlerle elde edilen bazı sonuçlar olsa da, bu sonuçlar genellikle karmaşık matematiksel yapılarından dolayı pratik öneme sahip değildir. Bunun için bu çalışmada ele alınan süreç esasen asimtotik yöntemlerle incelenmiş olup, elde edilen sonuçlar pratik öneme sahip, yeterince sade sonuçlardır.

Yukarıdaki fiziksel modeli ifade edilen $X(t)$ süreci, bundan sonraki bölümde matematiksel olarak modellenecek ve temel özellikleri asimtotik yöntemlerle incelenecektir.

1.3. SÜRECİN MATEMATİKSEL MODELİ

$\{(\xi_n, \eta_n)\}$, $n = 1,2,3,\dots$ dizisi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişken çiftleri dizisi olsun. Ayrıca ξ_n ve η_n rasgele değişkenleri de kendi aralarında bağımsız ve pozitif değerli olsun. Dağılım fonksiyonları sırasıyla, $\Phi(t)$ ve $F(x)$ ile gösterilsin. Yani $\Phi(t) \equiv P\{\xi_1 \le t\}$, $F(x) \equiv P\{\eta_1 \le x\}$ olsun. $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizisinden yararlanarak $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme dizileri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T_0 \equiv S_0 \equiv 0;\ T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,;\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\,, n = 1,2,\dots$$

$\{S_n\}$ yenileme dizisi yardımıyla aşağıdaki rasgele değişkenler dizisi kurulsun:

$$N_1 \equiv N_1(\lambda z) = \inf\{k \ge 1 : \lambda z - S_k < 0\};$$
$$\zeta_1 \equiv \zeta_1(\lambda z) = |\lambda z - S_{N_1}|;$$
$$N_2 \equiv N_2(\lambda\zeta_1) = \inf\{k \ge N_1 + 1 : \lambda\zeta_1 - (S_k - S_{N_1}) < 0\};$$
$$\zeta_2 \equiv \zeta_2(\lambda\zeta_1) = |\lambda\zeta_1 - (S_{N_2} - S_{N_1})|;$$
$$\vdots$$
$$N_n \equiv N_n(\lambda\zeta_{n-1}) = \inf\{k \ge N_{n-1} + 1 : \lambda\zeta_{n-1} - (S_k - S_{N_{n-1}}) < 0\};$$
$$\zeta_n \equiv \zeta_n(\lambda\zeta_{n-1}) = |\lambda\zeta_{n-1} - (S_{N_n} - S_{N_{n-1}})|;\quad n = 1,2,\dots$$

Burada $\lambda \ge 1$ olan keyfi bir pozitif sabit $\zeta_0 = z \ge 0$; $N_0 = 0$' dır.

$\{N_n\}$, $n = 1,2,\dots$ tam değerli rasgele değişkenler dizisinden yararlanarak, aşağıdaki $\{\tau_n\}$, $n = 1,2,\dots$ dizisi inşa edilsin:

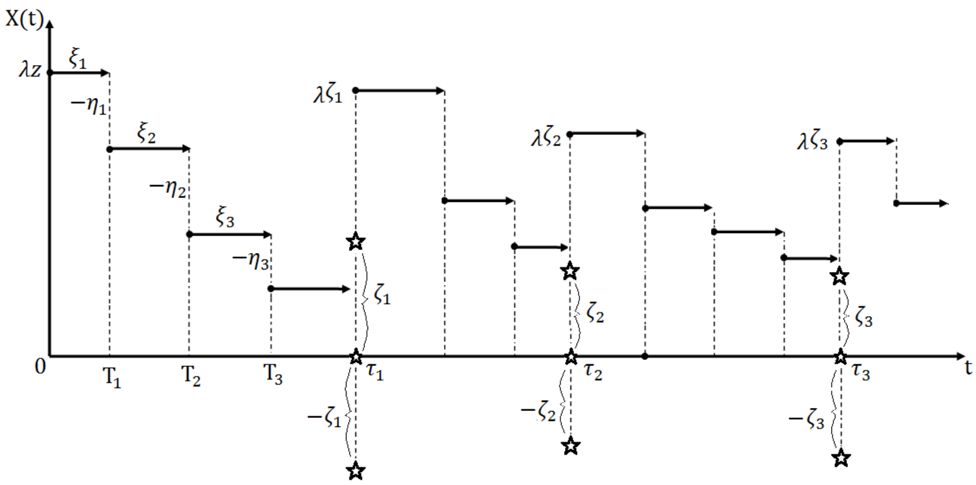
$$\tau_0 \equiv 0;\ \tau_1 \equiv \tau_1(\lambda z) = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i\,;\ \tau_2 = \sum_{i=1}^{N_2} \xi_i\,;\dots;\ \tau_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i\,, n = 1,2\dots$$

Ayrıca $\nu(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}$, $t > 0$ olsun. Şimdi de, ele alınan $X(t)$ stokastik süreci matematiksel olarak kurulsun.

Her $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$, $n = 0,1,2,\ldots$ için $X(t) \equiv \lambda\zeta_n - (S_{\nu(t)} - S_{N_n})$ olsun. $X(t)$ sürecinin tanımı aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$X(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda\zeta_n - \left(S_{\nu(t)} - S_{N_n}\right)\right) I_{[\tau_n\,;\,\tau_{n+1})}(t).$$

Aşağıda $X(t)$ sürecinin bir görünümü yer almaktadır.



Şekil 1.1. X(t) Sürecinin Bir Görünümü

$X(t)$ sürecine, "Genelleştirilmiş Yansıtan Bariyerli Ödüllü Yenileme Süreci" denir. $\lambda = 1$ olduğunda $X(t)$ süreci, literatürde "Yansıtan Bariyerli Ödüllü Yenileme Süreci" olarak bilinmektedir.

1.4. SÜRECİN SINIR FONKSİYONELLERİNİN İNCELENMESİ

Süreç inşa edilirken, sürecin yanı sıra üç önemli sınır fonksiyoneli de $\left(N_1(z), \tau_1(z), S_{N_1(z)}\right)$ tanımlanmıştı. Bu bölümdeki amaç, genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin bu fonksiyonellerinin de incelenmesidir. Ancak, öncelikle bu fonksiyoneller üzerine literatürde mevcut olan bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir:

Yardımcı Teorem 1.4.1: $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ başlangıç rasgele değişken dizileri aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $\alpha_4 \equiv E(\xi_1^4) < \infty$, ii) $m_4 \equiv E(\eta_1^4) < \infty$.

Bu durumda $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti, $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin momentleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

1) $E\left(\tau_1(x)\right) = \alpha_1 E\left(N_1(x)\right)$,
2) $E\left(\tau_1^2(x)\right) = \alpha_1^2 E\left(N_1^2(x)\right) + (\alpha_2 - \alpha_1^2) E\left(N_1(x)\right)$,
3) $E\left(\tau_1^3(x)\right) = \alpha_1^3 E\left(N_1^3(x)\right) + 3\alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1^2) E\left(N_1^2(x)\right) + (2\alpha_1^3 - 3\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_3)$ $E\left(N_1(x)\right)$,
4) $E\left(\tau_1^4(x)\right) = \alpha_1^4 E\left(N_1^4(x)\right) + 6\alpha_1^2 (\alpha_2 - \alpha_1^2) E\left(N_1^3(x)\right) + (11\alpha_1^4 - 18\alpha_1^2\alpha_2 +$ $4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2) E\left(N_1^2(x)\right) + (\alpha_4 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 - 6\alpha_1^4) E\left(N_1(x)\right)$.

Burada $\alpha_k \equiv E\left(\xi_1^k\right) < \infty,\ k = 1,2,3,4$' tür (Aliyev vd. [3]). ■

$N_1(x)$ bir yenileme sürecidir ve bu sürecin momentleri için $x \to \infty$ iken asimtotik açılımlar literatürde mevcuttur (Aliyev vd. [3]). Bu sonuç aşağıda yardımcı teorem şeklinde verilsin.

Yardımcı Teorem 1.4.2: $E(\eta_1^2) < \infty$ olsun. Bu durumda $x \to \infty$ iken $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için iki terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$1)\ E\big(N_1(x)\big) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1} + o(1),$$

$$2)\ E\big(N_1^2(x)\big) = \frac{x^2}{m_1^2} + \left(\frac{2m_2}{m_1^2} - 1\right)\frac{x}{m_1} + o(x),$$

$$3)\ E\big(N_1^3(x)\big) = \frac{x^3}{m_1^3} + \left(\frac{9m_2}{2m_1^2} - 3\right)\frac{x^2}{m_1^2} + o(x^2),$$

$$4)\ E\big(N_1^4(x)\big) = \frac{x^4}{m_1^4} + \left(\frac{8m_2}{m_1^2} - 6\right)\frac{x^3}{m_1^3} + o(x^3),$$

Burada $m_k = E\big(\eta_1^k\big),\ k = 1,2,3,4$' tür (Aliyev vd. [3]). ■

Amaç, $N_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin $\lambda \to \infty$ iken incelenmesidir. Burada ζ, $\pi_\lambda(z)$ dağılımına sahip bir rasgele değişkendir. Ayrıca, $\pi_\lambda(z) \equiv \lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n \le z\}$' dır. Yani $\pi_\lambda(z)$, $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılım fonksiyonudur. $N_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyoneli incelenmeden önce aşağıda elde edilen yardımcı teoremler verilsin.

Yardımcı Teorem 1.4.3: $g(x): R^+ \to R$ sınırlı bir fonksiyon olup, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ olsun. Ayrıca $\pi_\lambda(z)$ dağılımı $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımı olsun. Bu takdirde aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) = 0.$$

İspat: $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ olduğuna göre her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $x^*(\varepsilon) < \infty$ vardır ve her $x \ge x^*(\varepsilon)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$|g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.1}$$

Örneğin, $x^*(\varepsilon)$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$x^*(\varepsilon) \equiv x^* = \sup\{x > 0: |g(x)| \geq \varepsilon/2\}.$$

Bu takdirde, her $x \geq x^*$ için $|g(x)| \leq \varepsilon/2$ olacaktır.

$\delta > 0$ olmak üzere bir sabit tanımlanıp, $\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)$ integrali aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) = \int_0^\delta g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) + \int_\delta^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z). \qquad (1.4.2)$$

Şimdi de λ parametresi aşağıdaki gibi seçilsin:

$$\lambda \equiv \lambda_*(\varepsilon, \delta) = \frac{x^*(\varepsilon)}{\delta}.$$

Her $\lambda \geq \lambda_*(\varepsilon, \delta)$ için $\lambda\delta \geq x^*(\varepsilon)$ olacaktır. Bu sebeple gerekli hesaplamalar yapıldığında her $\lambda \geq \lambda_*(\varepsilon, \delta)$ için

$$\left|\int_\delta^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)\right| \leq \int_\delta^\infty |g(\lambda z)|\, d\pi_\lambda(z) \leq \int_\delta^\infty \frac{\varepsilon}{2} d\pi_\lambda(z) = \frac{\varepsilon}{2}\int_\delta^\infty d\pi_\lambda(z)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \pi_\lambda(\delta)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.4.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, Yardımcı Teorem 1.4.3' ün koşullarına göre $g(x)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olup $\sup_{x\in R}|g(x)| \leq M < \infty$' dır. Dolayısıyla her $z \geq 0$ için $|g(\lambda z)| \leq M$ olur. Bu takdirde,

$$\left|\int_0^\delta g(\lambda z)d\pi(z)\right| \leq \int_0^\delta |g(\lambda z)|d\pi_\lambda(z) \leq M\pi_\lambda(\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir. δ parametresi öyle seçilsin ve $\pi_\lambda(\delta) = \varepsilon/2M$ olsun. δ' nın bu değerini δ^* ile gösterilsin. Başka bir deyişle, $\delta^* \equiv \delta^*(\varepsilon)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\delta^* \equiv \delta^*(\varepsilon) = \sup\left\{\delta > 0 : \pi_\lambda(\delta) \le \frac{\varepsilon}{2M}\right\} > 0.$$

$\pi_\lambda(z)$ fonksiyonu z parametresine göre monoton azalmayan bir fonksiyon olduğundan her $\delta \le \delta^*(\varepsilon)$ için $\pi_\lambda(\delta) \le \varepsilon/2M$ olacaktır. Bu takdirde,

$$\left|\int_0^\delta g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)\right| \le M\pi_\lambda(\delta) \le M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.4.4)$$

olur. Dolayısıyla, (1.4.3) ve (1.4.4) eşitsizlikleri (1.4.2)' de göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)\right| \le \left|\int_0^{\delta(\varepsilon)} g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)\right| + \left|\int_{\delta(\varepsilon)}^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Özetle, her $\varepsilon > 0$ için $\lambda \to \infty$ iken

$$\left|\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)\right| \le \varepsilon$$

olur. Bu ise $\lambda \to \infty$ iken

$$\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) \to 0$$

olduğu anlamına gelir. Yani, $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) = 0$' dır. Bu da Yardımcı Teorem 1.4.3' ü ispatlar. ■

Yardımcı Teorem 1.4.4: $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, $\sup_x |g(x)| \leq M < \infty$ olsun. Ayrıca, $m_n \equiv E(\eta_i^n)$' ler Carleman koşulunu sağlasın, yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}}} = \infty$$

olsun. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\infty} z^n g(\lambda z)\, d\pi_\lambda(z) = 0 \tag{1.4.5}$$

olur.

İspat: (1.4.5) ifadesindeki integral aşağıdaki gibi iki kısma ayrılsın:

$$\int_0^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) = \int_0^{\delta} z^n g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) + \int_\delta^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi_\lambda(z). \tag{1.4.6}$$

Burada $\delta > 0$ olup, aşağıda özel bir kuralla seçilecektir. Amaç, (1.4.6) eşitliğinde ikinci toplananın asimtotik davranışını incelerken $\lambda z \to \infty$ olabilmesini sağlamaktır. gösterim kısalığı için,

$$J_1(\delta) \equiv \int_0^{\delta} z^n g(\lambda z) d\pi_\lambda(z), \quad J_2(\delta) \equiv \int_\delta^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$$

olsun. Birinci adım, δ' yı belirlemektir. δ aşağıdaki kurala uygun olarak belirlenecektir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta^*(\varepsilon) \equiv \inf\left\{\delta > 0 : \pi_\lambda(\delta) \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right\} \tag{1.4.7}$$

olsun. η_n' ler mutlak sürekli dağılıma sahip oldukları için onların sürekli bir fonksiyonu olan yok satma miktarı (ζ_n' ler) da pozitif değerli sürekli rasgele değişken olacaktır. Dolayısıyla, $\pi_\lambda(0) = 0$ olmalıdır. Bu takdirde, $\delta^*(\varepsilon)$ aşağıdaki denklemden de doğrudan elde edilebilir:

$$\pi_\lambda\big(\delta^*(\varepsilon)\big) = \frac{\varepsilon}{2M} \tag{1.4.8}$$

(1.4.8) denkleminin çözümü vardır ve tektir. Şimdi de $\delta(\varepsilon) \equiv \min\{1, \delta^*(\varepsilon)\}$ şeklinde seçilsin ve $J_1\big(\delta(\varepsilon)\big)$ değerlendirilsin:

$$\begin{aligned}\left|J_1\big(\delta(\varepsilon)\big)\right| &\equiv \left|\int_0^{\delta(\varepsilon)} z^n g(\lambda z)\, d\pi_\lambda(z)\right| \le \int_0^{\delta(\varepsilon)} z^n |g(\lambda z)|\, d\pi_\lambda(z)\\ &\le M \int_0^{\delta(\varepsilon)} z^n d\pi_\lambda(z) \le M[\delta(\varepsilon)]^n \pi_\lambda\big(\delta(\varepsilon)\big) \le M\pi_\lambda\big(\delta(\varepsilon)\big) \le M\pi_\lambda\big(\delta^*(\varepsilon)\big)\\ &\le \frac{M\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Özetlersek, her $\varepsilon > 0$ için $\left|J_1\big(\delta(\varepsilon)\big)\right| \le \varepsilon/2$ olur. Daha sonra $J_2\big(\delta(\varepsilon)\big)$' yi değerlendirelim:

$$\left|J_2\big(\delta(\varepsilon)\big)\right| \le \left|\int_{\delta(\varepsilon)}^{\infty} z^n g(\lambda z)\, d\pi_\lambda(z)\right| \le \int_{\delta(\varepsilon)}^{\infty} z^n |g(\lambda z)|\, d\pi_\lambda(z) \tag{1.4.10}$$

$\delta(\varepsilon)$ tanımı gereği pozitif bir sayıdır, daha doğrusu $\delta(\varepsilon) \in (0,1]$' dir. Bu durumda λ yeterince büyük seçildiğinde $\lambda z \to \infty$ koşulu sağlanabilir ve dolayısıyla, $|g(\lambda z)| \le \varepsilon/2A$ şartı yerine getirilmiş olur. Buradaki pozitif A sabiti daha sonra belirlenecektir. Yardımcı Teorem 1.4.4' ün şartlarına göre $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$' dır. Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \ge x^*$için $|g(x)| \le \varepsilon/2A$ yazılacak şekilde bir x^* sayısı vardır. $x^*(\varepsilon)$ sayısı aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$x^*(\varepsilon) \equiv \sup\left\{x > 0 : |g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2A}\right\}. \quad (1.4.11)$$

Bu takdirde, her $x \geq x^*(\varepsilon)$ için $|g(x)| \leq \varepsilon/2A$' dır. (1.4.9) ifadesinde $z \geq \delta(\varepsilon)$' dur. Bu takdirde, λ' yı $\lambda z \geq x^* \equiv x^*(\varepsilon)$ olacak şekilde seçmemiz gerekir. Bunun için en küçük λ aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\lambda_* \equiv \lambda_*(\varepsilon) = \frac{x^*(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}. \quad (1.4.12)$$

Dolayısıyla, her $\lambda \geq \lambda_*$ için $\lambda z \geq \lambda\delta(\varepsilon) \geq \lambda^*(\varepsilon)\delta(\varepsilon) \geq x^*(\varepsilon)$ olduğuna göre $|g(\lambda z)| \leq \varepsilon/2A$ olur. (1.4.10) eşitsizliğine geri dönülürse, her $\lambda \geq \lambda_*(\varepsilon)$ için

$$\left|J_2\big(\delta(\varepsilon)\big)\right| \leq \int_{\delta(\varepsilon)}^{\infty} z^n \frac{\varepsilon}{2A} d\pi_\lambda(z) = \frac{\varepsilon}{2A}\int_{\delta(\varepsilon)}^{\infty} z^n d\pi_\lambda(z) \leq \frac{\varepsilon}{2A} E_\lambda(\zeta^n) \quad (1.4.13)$$

olur. Burada $E(\zeta^n)$, $\pi_\lambda(z)$ ergodik dağılımının n. momentidir. Rogozin [41]' e göre, $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki yakınsama elde edilir:

$$\pi_\lambda(z) \to \pi_0(z) \equiv \frac{1}{m_1}\int_0^z \big(1 - F(v)\big)\, dv$$

Ayrıca Carleman koşulu sağlandığına göre, $\lambda \to \infty$

$$E(\zeta^n) \to E_0(\zeta^n) \equiv \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} \quad (1.4.14)$$

olur. Bu takdirde,

$$E(\zeta^n) \leq 2E_0(\zeta^n) = \frac{2m_{n+1}}{(n+1)m_1} \equiv A < \infty \quad (1.4.15)$$

ifadesi sağlanacak şekilde bir $\lambda_1 \gg 1$ seçmek mümkündür. Şimdi

$$\lambda^*(\varepsilon) \equiv \max\{\lambda_*(\varepsilon); \lambda_1\} \quad (1.4.16)$$

olacak şekilde yeni bir $\lambda = \lambda^*(\varepsilon)$ seçilsin. $\lambda^*(\varepsilon)$' nun tanımı gereği her $\lambda \geq \lambda^*(\varepsilon)$ için $E(\zeta^n) \leq 2m_{n+1}/(n+1)m_1 \equiv A < \infty$ ve

$$\left|J_2\big(\delta(\varepsilon)\big)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2A} E(\zeta^n) \leq \frac{\varepsilon}{2A} A = \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.4.17)$$

olur. Özetle, her $\varepsilon > 0$ için $\lambda \geq \lambda^*(\varepsilon)$ olduğunda $\left|J_2\big(\delta(\varepsilon)\big)\right| \leq \varepsilon/2$ olur. (1.4.9) ve (1.4.17) eşitsizlikleri göz önüne alınarak, her $\varepsilon > 0$ için ve her $\lambda \geq \lambda^*(\varepsilon)$ için

$$\left|\int_0^\infty z^n g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \quad (1.4.18)$$

olduğu ispatlanmış olur. Bu ise $\lambda \to \infty$ iken

$$\int_0^\infty z^n g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) \to 0$$

demektir. Böylece Yardımcı Teorem 1.4.4‘ ün ispatı tamamlanmış olur. ■

Bu sonuçlardan yararlanarak $N_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin momentleri için elde edilen aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 1.4.1: Yardımcı Teorem 1.4.2, Yardımcı Teorem 1.4.3 ve Yardımcı Teorem 1.4.4' ün koşulları sağlansın. Bu takdirde, $N_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin momentleri $\Big(E\big(N_1^n(\lambda\zeta)\big)\Big)$ için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılımlar verilebilir:

$$E\big(N_1^n(\lambda\zeta)\big) \equiv \int_0^{\infty} E\big(N_1^n(\lambda z)\big)d\pi_\lambda(z)$$
$$= \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^n A_n + \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1} B_n A_{n-1} + o(\lambda^{n-1}), n = 1,2,3,4.$$

Burada

$$A_n \equiv \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}; \quad B_n \equiv n^2 C_F - \frac{n(n-1)}{2}; \; m_n \equiv E(\eta_1^n), n = 1,2,3,4;$$

olur. C_F ise Feller katsayısı olup $C_F \equiv m_2/2m_1^2$’ dir.

İspat: Teorem 1.4.1’ de $E\big(N_1^n(x)\big)$, $n = 1,2,3,4$’ ün asimtotik açılımındaki ikinci terimlerin katsayıları B_n, $n = 12,3,4$ ile gösterilsin. Yani,

$$B_n \equiv n^2 C_F - \frac{n(n-1)}{2}, \qquad n = 1,2,3,4 \tag{1.4.19}$$

olsun. Burada $C_F \equiv m_2/2m_1^2$ Feller katsayısıdır. Bu takdirde $E\big(N^n(x)\big)$, $n = 1,2,3,4$ için aşağıdaki farklı bir gösterim yazılabilir:

$$E\big(N_1^n(x)\big) = \left(\frac{x}{m_1}\right)^n + B_n\left(\frac{x}{m_1}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{m_1}\right)^{n-1} g. \tag{1.4.20}$$

Burada $g(z)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olup $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$’ dır. (1.4.19) gösteriminin her iki tarafı $\pi_\lambda(x)$ dağılımına göre ortalandığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$E\big(N_1^n(\lambda\zeta)\big) \equiv \int_0^{\infty} E\big(N_1^n(\lambda z)\big)\, d\pi_\lambda(z)$$
$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda z}{m_1}\right)^n d\pi_\lambda(z) + B_n \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda z}{m_1}\right)^{n-1} d\pi\_\lambda(z)$$

$$+\int_0^\infty \left(\frac{\lambda z}{m_1}\right)^{n-1} g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^n \int_0^\infty z^n d\pi_\lambda(z) + B_n \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1} \int_0^\infty z^n d\pi_\lambda(z)$$

$$+\left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1} \int_0^\infty z^{n-1} g(\lambda z)\, d\pi_\lambda(z)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^n E_\lambda(\zeta^n) + B_n \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1} E_\lambda(\zeta^{n-1}) + \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1} J_n(\lambda) \qquad (1.4.21)$$

Burada $E(\zeta^n) \equiv \int_0^z z^n d\pi_\lambda(z)$, $n = 1,2, \dots$ ve $J_n(\lambda) \equiv \int_0^\infty z^n g(\lambda z)\, d\pi_\lambda(z)$ ‘ dır.

Yardımcı Teorem 1.4.4’ e göre $\lambda \to \infty$ iken $J_n(\lambda) \to 0$ olur. Dolayısıyla, $J_n(\lambda) = o(1)$’ dir.

Diğer taraftan Smith’ in Anahtar Yenileme Teoremi’ ne (Feller [13]) göre $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki yakınsama elde edilir:

$$\pi_\lambda(z) \to \pi_0(z) \equiv \frac{1}{m_1}\int_0^\infty \big(1 - F(v)\big)\, dv$$

Momentler problemine göre (Feller [13]) Carleman koşulu sağlandığında $\lambda \to \infty$ iken,

$$E(\zeta^n) \to E_0(\zeta^n) \equiv \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} \equiv A_n \qquad (1.4.22)$$

olur. Dolayısıyla (1.4.22) bağıntısı (1.4.21) eşitliğinde göz önüne alındığında, $\lambda \to \infty$ iken,

$$E\big(N_1^n(\lambda\zeta)\big) = \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^n A_n + \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1} B_n A_{n-1} + o(\lambda^{n-1}) \qquad (1.4.23)$$

asimtotik açılımı elde edilir. Özetle,

$$\int_0^{\infty} E\left(N_1^n(\lambda z)\right) d\pi_\lambda(z) \equiv E\left(N_1^n(\lambda\zeta)\right)$$
$$= \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^n A_n + \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1} B_n A_{n-1} + o(\lambda^{n-1})$$

olur. Burada A_n ve B_n aşağıdaki gibidir:

$$A_n \equiv \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}; \quad B_n \equiv n^2 C_F - \frac{n(n-1)}{2};$$
$$C_F \equiv \frac{m_2}{2m_1^2}; \quad m_n \equiv E(\eta_1^n), n = 1,2,3,4.$$

Böylece Teorem 1.4.1' in ispatı tamamlanmış olur. ■

Şimdi de $\tau_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyoneli incelensin. Bunun için öncelikle literatürde mevcut olan aşağıdaki sonuç verilsin.

Önerme 1.4.1: Yardımcı Teorem 1.4.1' in koşulları sağlansın. Bu takdirde $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti $\left(E\left(\tau_1^n(x)\right), n = 1,2,3,4\right)$ için $x \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılımlar yazılabilir (Aliyev vd.[3]):

$$1)\ E\left(\tau_1(x)\right) = \frac{\alpha_1}{m_1} x + \frac{m_2}{2m_1^2}\alpha_1 + o(1),$$
$$2)\ E\left(\tau_1^2(x)\right) = \frac{\alpha_1^2}{m_1^2} x^2 + \left[\frac{\sigma_\xi^2}{m_1} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\alpha_1^2\right] x + o(x),$$
$$3)\ E\left(\tau_1^3(x)\right) = \frac{\alpha_1^3}{m_1^3} x^3 + \left[\left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{6}{m_1^2}\right)\alpha_1^3 + \frac{3\alpha_1\alpha_2}{m_1^2}\right] x^2 + o(x^2),$$
$$4)\ E\left(\tau_1^4(x)\right) = \frac{\alpha_1^4}{m_1^4} x^4 + \left[\left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{12}{m_1^3}\right)\alpha_1^4 + \frac{6\alpha_1^2\alpha_2}{m_1^3}\right] x^3 + o(x^3). \quad ■$$

Yukarıdaki açılımların katsayılarının tekrar düzenlenmesiyle $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti $\left(E\left(\tau_1^n(x)\right),\ n = 1,2,3,4\right)$ için $x \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$E\left(\tau_1^n(x)\right) = \alpha_1^n\left(\frac{x}{m_1}\right)^n + \frac{n^2}{2}\alpha_1^n D_n\left(\frac{x}{m_1}\right)^{n-1} + o(x^{n-1}) \qquad (1.4.24)$$

Burada $D_n = C_v^2(\eta_1) + \frac{n-1}{n}C_v^2(\xi_1) + \frac{1}{n}$ olup $C_v(\eta_1)$ ve $C_v(\xi_1)$ sırasıyla, η_1 ve ξ_1 rasgele değişkenlerinin değişim katsayılarıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C_v(\eta_1) \equiv \frac{\sigma_\eta}{m_1};\ \ m_1 \equiv E(\eta_1);\ \ C_v(\xi_1) \equiv \frac{\sigma_\xi}{\alpha_1};\ \ \alpha_1 \equiv E(\xi_1).$$

Ayrıca $n \to \infty$ iken,

$$D_n \to C_v^2(\eta_1) + C_v^2(\xi_1)$$

olduğu görülmektedir. Buradaki amaç, (1.4.24) asimtotik açılımından yararlanarak $E\left(\tau_1^n(\lambda\zeta)\right)$' nın λ' ya göre asimtotik açılımını elde etmektir. Bu takdirde,

$$E\left(\tau_1^n(\lambda\zeta)\right) \equiv \int_0^\infty E\left(\tau_1^n(\lambda z)\right) d\pi_\lambda(z) \qquad (1.4.25)$$

olur. Burada, $\pi_\lambda(z)$ fonksiyonu, $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılım fonksiyonudur. Diğer yandan, (1.4.24) bağıntısına göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$E\left(\tau_1^n(x)\right) = \alpha_1^n\left(\frac{x}{m_1}\right)^n + \frac{n^2}{2}\alpha_1^n D_n\left(\frac{x}{m_1}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{m_1}\right)^{n-1} g(x). \qquad (1.4.26)$$

Burada $g(z)$ fonkisyonu sınırlı bir fonksiyon olup, $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ ve $\sup_{z\in R}|g(z)| = M < \infty$' dır. (1.4.25) eşitliğindeki tanımlanan integralde, (1.4.26) eşitliği göz önünde bulundurulursa,

$$E\left(\tau_1^n(\lambda\zeta)\right) = \alpha_1^n \frac{\lambda}{m_1^n}\int_0^\infty z^n d\pi_\lambda(z) + \frac{n^2}{2}\alpha_1^n D_n \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1}\int_0^\infty z^{n-1} d\pi_\lambda(z)$$
$$+\left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1}\int_0^\infty z^{n-1} g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) \qquad (1.4.27)$$

ifadesi elde edilir. Yardımcı Teorem 1.4.4 dikkate alındığında, $\tau_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir $(n = 1,2,3,4$:

$$E\left(\tau_1^n(\lambda\zeta)\right) = \left(\frac{\alpha_1}{m_1}\right)^n \lambda^n E_\lambda(\zeta^n) + \frac{n^2}{2}\alpha_1^n \left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1} D_n E_\lambda(\zeta^{n-1}) + o\left(\left(\frac{\lambda}{m_1}\right)^{n-1}\right)$$
$$(1.4.28)$$

Burada, $E(\zeta^n)$ gösterimiyle, $\{\zeta_k\}$ Markov zincirinin ergodik momentleri gösterilmiştir. (1.4.28) açılımı λ' nın derecelerine göre düzenlenirse aşağıdaki açılım elde edilir:

$$E\left(\tau_1^n(\lambda\zeta)\right) = \alpha_1^n \frac{E(\zeta^n)}{m_1^n}\lambda^n + \frac{n^2}{2}\alpha_1^2 D_n \frac{E(\zeta^{n-1})}{m_1^{n-1}}\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}). \qquad (1.4.29)$$

Burada $E(\zeta^n) \equiv \lim_{k\to\infty} E(\zeta_k^n)$ olup, $\lambda \to \infty$ iken (1.4.22) bağıntısına göre aşağıdaki yakınsama doğrudur:

$$E(\zeta^n) \to E_0(\zeta^n) \equiv \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} = A_n.$$

Sonuç olarak, $\tau_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin momentleri için elde edilen aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 1.4.2: $E(\xi_1^2) < \infty$ ve $E(\eta_1^{n+1}) < \infty,\ (n = 1,2,3,4)$ olduğunda $\tau_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için $\lambda \to \infty$ aşağıdaki asimtotik açılımlar yazılabilir:

$$E\big(\tau_1^n(\lambda\zeta)\big) = \alpha_1^n C_n \lambda^n + \frac{n^2}{2}\alpha_1^n C_{n-1} D_n \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}), n = 1,2,3,4. \ (1.4.30)$$

Burada $C_n \equiv m_{n+1}/(n+1)m_1^{n+1}$ ve $D_n = C_v^2(\eta_1) + \big((n+1)/n\big)C_v^2(\xi_1) + 1/n$' dir. $C_v(\eta_1)$ ve $C_v(\xi_1)$ ise sırasıyla, η_1 ve ξ_1' in değişim katsayılarıdır. ■

Örnek 1.4.1: η_1 rasgele değişkeni β parametreli Üstel dağılıma ve ξ_1 rasgele değişkeni ise μ parametreli Üstel dağılıma sahip olsun. Bu takdirde,

$$E(\xi_1) = \alpha_1 = \frac{1}{\mu};\ E(\xi_1^2) = \frac{2}{\mu^2};\ \sigma_\xi^2 = \frac{1}{\mu^2};\ \sigma_\xi = \frac{1}{\mu};$$

$$E(\eta_1) = m_1 = \frac{1}{\beta};\ E(\eta_1^2) = \frac{2}{\beta^2};\ \sigma_\eta^2 = \frac{1}{\beta^2};\ \sigma_\eta = \frac{1}{\beta}$$

olur. Bu durumda, ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenlerinin değişim katsayıları, sırasıyla,

$$C_v(\xi_1) \equiv \frac{\sigma_\xi}{\alpha_1} = \frac{1/\mu}{1/\mu} = 1;\ C_v(\eta) \equiv \frac{\sigma_\eta}{m_1} = \frac{1/\beta}{1/\beta} = 1$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığında A_n, C_n ve D_n katsayılarını hesaplayalım:

$$A_n \equiv \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} = \frac{\frac{(n+1)!}{B^{n+1}}}{\frac{(n+1)}{\beta}} = \frac{n!}{\beta^n} \equiv m_n;\ C_n \equiv \frac{A_n}{m_1^n} = \frac{n!/\beta^n}{1/\beta^n} = n!;$$

$$D_n \equiv C_v^2(\eta_1) + \left(\frac{n+1}{n}\right)C_v^2(\xi_1) + \frac{1}{n} = 1 + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 2.$$

Burada, $m_n \equiv E(\eta_1^n),\ n = 1,2,3,4$' tür. Dolayısıyla,

$$E\left(\tau_1^n(\lambda\zeta)\right) = \alpha_1^n C_n \lambda^n + \frac{n^2}{2}\alpha_1^n C_{n-1} D_n \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1})$$

$$= \frac{n!}{\mu^n}\{\lambda^n + n\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1})\} = \frac{n!}{\mu^n}\lambda^n + \frac{n!}{\mu^n} n\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1})$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.4.2: η_1 rasgele değişkeni $[0,1]$ parametreli Düzgün dağılıma ve ξ_1 rasgele değişkeni ise μ parametreli Üstel dağılıma sahip olsun. Bu takdirde,

$$E(\xi_1) \equiv \alpha_1 = \frac{1}{\mu};\ E(\xi_1^2) = \frac{2}{\mu^2}; \sigma_\xi^2 = \frac{1}{\mu^2};\ \sigma_\xi = \frac{1}{\mu};$$

$$m_n \equiv E(\eta_1^n) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, n = 1,2,\dots;$$

$$m_1 = \frac{1}{2}, \qquad m_2 = E(\eta_1^2) = \frac{1}{3};\ \sigma_\eta^2 = \frac{1}{12};\ \sigma_\eta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

olur. ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenlerinin değişim katsayıları ise sırasıyla,

$$C_v(\xi_1) \equiv \frac{\sigma_\xi}{\alpha_1} = \frac{1/\mu}{1/\mu} = 1;\ \ C_v(\eta) \equiv \frac{\sigma_\eta}{m_1} = \frac{1/2\sqrt{3}}{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

elde edilir. Şimdi de A_n, C_n ve D_n katsayıları hesaplansın:

$$A_n \equiv \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} = \frac{1/(n+1)}{(n+1)/2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)};$$

$$C_n \equiv \frac{A_n}{m_1^n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = n!;$$

$$D_n \equiv C_v^2(\eta_1) + \left(\frac{n+1}{n}\right) C_v^2(\xi_1) + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{4}{3}.$$

Bu takdirde,

$$E\left(\tau_1^n(\lambda\zeta)\right) \equiv \alpha_1^n C_n \lambda^n + \frac{n^2}{2}\alpha_1^n C_{n-1} D_n \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1})$$

$$= \frac{2^{n+1}}{\mu^n}\left\{\frac{\lambda^n}{(n+1)(n+2)} + \frac{n\lambda^{n-1}}{3(n+1)} + o(\lambda^{n-1})\right\}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)\mu^n}\lambda^n + \frac{n2^{n+1}}{3(n+1)\mu^n}\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}), \qquad n = 1,2,\ldots$$

elde edilir.

Örnek 1.4.3: η_i rasgele değişkeni $(2,\beta)$ parametreli Erlang dağılıma ve ξ_i rasgele değişkeni ise $[0,1]$ parametreli Düzgün dağılıma sahip olsun. Bu takdirde,

$$E(\xi_1) \equiv \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, n = 1,2,\ldots;$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2};\ \alpha_2 = \frac{1}{3};\ \sigma_\xi^2 = \frac{1}{12};\ \sigma_\xi = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

elde edilir. ξ rasgele değişkeninin değişim katsayısı ise,

$$C_v(\xi) \equiv \frac{\sigma_\xi}{\alpha_1} = \frac{1/2\sqrt{3}}{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

olur.

$$m_1 \equiv E(\eta_1) = \frac{2}{\beta};\ m_2 = E(\eta_1^2) = \frac{6}{\beta^2};\ \sigma_\eta^2 = \frac{2}{\beta^2};\ \sigma_\eta = \frac{\sqrt{2}}{\beta}$$

olarak hesaplanır. Bu takdirde η rasgele değişkeninin değişim katsayısı,

$$C_v(\eta) \equiv \frac{\sigma_\eta}{m_1} = \frac{\sqrt{2}/\beta}{2/\beta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olarak elde edilir.

$$D_n \equiv C_v^2(\eta_1) + \left(\frac{n+1}{n}\right) C_v^2(\xi_1) + \frac{1}{n} = \frac{5n+8}{6n}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$A_n \equiv \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} = \frac{\frac{(n+2)!}{\beta^{n+1}}}{\frac{2(n+1)}{\beta}} = \frac{(n+2)!}{2(n+1)\beta^n};$$

$$C_n \equiv \frac{A_n}{m_1^n} = \frac{(n+2)!}{(n+1)2^{n+1}};\ C_{n-1} = \frac{(n+1)!}{n2^n}$$

olur. Sonuç olarak,

$$E\left(\tau_1^n(\lambda\zeta)\right) \equiv \alpha_1^n C_n \lambda^n + \frac{n^2}{2} \alpha_1^n C_{n-1} D_n \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}) =$$
$$= \frac{(n+2)!}{(n+1)2^{2n+1}} \lambda^n + \frac{(n+1)!\,(5n+8)}{3.4^{n+1}} \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1})\,, n = 1,2,3,4$$

elde edilir. ■

Şimdi de $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli incelensin.

Bilindiği üzere, $S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{N_1(z)} \eta_i$' dir. Amaç $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin $z \to \infty$ iken asimtotik davranışının incelenmesidir. Bu amaç için aşağıdaki ikili Laplace dönüşümü tanımlansın:

$$\psi(\lambda, k) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda z} E\left(e^{-kS_{N(z)}}\right) dz\,;\ \lambda > 0, k \geq 0.$$

Şimdi de bu dönüşümle ilgili literatürde mevcut olan aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilsin.

Yardımcı Teorem 1.4.5: $\Psi(\lambda, k)$ dönüşümü η_1 rasgele değişkeninin Laplace – Stieltjes dönüşümü $(\varphi(\alpha))$ yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\psi(\lambda, k) = \frac{\varphi(k) - \varphi(\lambda + k)}{\lambda(1 - \varphi(\lambda + k))}$$

Burada $\varphi(\alpha) \equiv E(\exp(-\alpha\eta_1))$, $\alpha \geq 0$' dır (Aliyev vd. [3]). ■

Bu yardımcı teoremden $S_{N(z)}$ sınır fonskiyoneli hakkında birçok yararlı bilgi elde etmek mümkündür. Bunlardan birisi aşağıdaki yardımcı teorem şeklinde verilsin.

Yardımcı Teorem 1.4.6: Eğer η_1 rasgele değişkeninin ilk üç momenti sonlu ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

a) $$\int_0^\infty e^{-\lambda z} E(S_{N(z)}) dz = m_1 \widetilde{U}(\lambda)$$

b) $$\int_0^\infty e^{-\lambda z} E(S_{N(z)}^2) dz = m_2 \widetilde{U}(\lambda) + 2m_1 \widetilde{U}(\lambda) U^*(\lambda) D_1^*(\lambda)$$

c) $$\int_0^\infty e^{-\lambda z} E(S_{N(z)}^3) dz = 6m_1 \widetilde{U}(\lambda) U^{*2}(\lambda) D_1^*(\lambda) + 3m_1 \widetilde{U}(\lambda) U^*(\lambda) D_2^*(\lambda) + 3m_2 \widetilde{U}(\lambda) U^*(\lambda) D_1^*(\lambda) + m_3 \widetilde{U}(\lambda)$$

Burada $m_n = E(\eta_1^n)$, $D_n^*(\lambda) = E(\eta_1^n e^{-\lambda\eta_1}), n \geq 1$; $U(z) \equiv U_\eta(z)$ olup $U(z)$, $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenlerinin ürettiği yenileme fonksiyonudur. Ayrıca $\widetilde{U}(\lambda)$ ve $U^*(\lambda)$ ile $U(z)$ fonksiyonunun sırasıyla, Laplace ve Laplace – Stieltjes dönüşümleri gösterilmiştir (Aliyev vd. [3]). ■

Bu önermeden aşağıdaki sonuca ulaşılmıştır.

Sonuç 1.4.1. Yardımcı Teorem 1.4.6' nın koşulları altında $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için aşağıdaki kesin ifadeler yazılabilir:

$$1)\ E\left(S_{N(z)}\right) = m_1 U(z),$$
$$2)\ E\left(S_{N(z)}^2\right) = m_2 U(z) + 2m_1 U(z) * U(z) * D_1(z),$$
$$3)\ E\left(S_{N(z)}^3\right) = 6m_1 U^{*3}(z) * D_1^{*2}(z)$$
$$+3U^{*2}(z) * [m_1 D_2(z) + m_2 D_1(z)] + m_3 U(z).$$

Burada

$$D_1(z) = \int_0^z s dF(s),\quad D_2(z) = \int_0^z s^2 dF(s)$$

gibidir (Khaniyev [21]). ■

Yardımcı Teorem 1.4.6 ve Sonuç 1.4.1 yardımı ile aşağıdaki yardımcı teorem elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 1.4.7: Eğer $E(\eta_1^3) < \infty$ koşulu altında $z \to \infty$ iken $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti için aşağıdaki asimtotik açılımlar yazılabilir (Khaniyev [21]):

$$1)\ E\left(S_{N(z)}\right) = z + \frac{m_2}{2m_1} + o(1),$$
$$2)\ E\left(S_{N(z)}^2\right) = z^2 + \frac{m_2}{m_1} z + o(z),$$
$$3)\ E\left(S_{N(z)}^3\right) = z^3 + \frac{3m_2}{2m_1} z^2 + o(z^2).$$ ■

Tümevarım yöntemi kullanılarak Yardımcı Teorem 1.4.7' den aşağıdaki sonuca varılmıştır.

Sonuç 1.4.2: $E(\eta_1^2) < \infty$ olduğunda $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için aşağıdaki farklı bir gösterim yazılabilir:

$$E\left(S_{N(z)}^{n}\right) = z^{n} + n\frac{m_2}{2m_1}z^{n-1} + z^{n-1}g(z), \qquad n = 1,2,\ldots \tag{1.4.31}$$

Burada $g(z)$ sınırlı bir fonksiyon olup $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$' dır. ■

Şimdi de bir özel ζ rasgele değişkeni aşağıdaki gibi tanımlansın.

ζ rasgele değişkeni $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımına $\left(\pi_\lambda(z)\right)$ sahip bir rasgele değişken olsun. Yani, ζ rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F_\zeta(z) \equiv P\{\zeta \le z\} \equiv \pi_\lambda(z) \equiv \lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n \le z\}.$$

Bu tanımdan ve Sonuç 1.4.2' den yararlanarak genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin $S_{N(\lambda\zeta)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 1.4.3: Her $n = 1,2,\ldots$ için $E(\eta^{n+1}) < \infty$ olsun. Ayrıca η_1 rasgele değişkeninin momentleri Carleman koşulunu sağlasın. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $S_{N(\lambda\zeta)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$E\left(S_{N(\lambda\zeta)}^{n}\right) = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}\lambda^{n} + \frac{m_2 m_n}{2m_1^2}\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}).$$

Burada $m_n \equiv E(\eta_1^n), n = 1,2,\ldots$' dır.

İspat: ζ rasgele değişkeninin tanımı gereği

$$E\left(S_{N(\lambda\zeta)}^{n}\right) \equiv \int_0^\infty E\left(S_{N(\lambda x)}^{n}\right) d\pi_\lambda(x) \tag{1.4.32}$$

ifadesindeki gibidir. Burada $\pi_\lambda(x)$ fonksiyonu $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılım fonksiyonudur. Sonuç 1.4.22' deki (1.4.31) gösteriminde z parametresi yerine λx konularak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$E\left(S^n_{N(\lambda\zeta_1)}\right) = \int_0^\infty (\lambda x)^n d\pi_\lambda(x) + n\frac{m_2}{2m_1}\int_0^\infty (\lambda x)^{n-1} d\pi_\lambda(x)$$
$$+\int_0^\infty (\lambda x)^{n-1} g(\lambda x) d\pi_\lambda(x)$$
$$= \lambda^n E(\zeta_1^n) + n\frac{m_2}{2m_1}\lambda^{n-1}E(\zeta_1^{n-1}) + \lambda^{n-1}\int_0^\infty x^{n-1} g(\lambda x) d\pi_\lambda(x) \qquad (1.4.33)$$

Yardımcı Teorem 1.4.3 ve Yardımcı Teorem 1.4.4' e göre her $n = 1,2,\dots$ için $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty x^{n-1} g(\lambda x) d\pi_\lambda(x) = 0$' dır. Bu durumda (1.4.33) eşitliği aşağıdaki asimtotik açılım şeklinde yazılabilir:

$$E\left(S^n_{N(\lambda\zeta_1)}\right) = \lambda^n E(\zeta_1^n) + n\frac{m_2}{2m_1}\lambda^{n-1}E(\zeta_1^{n-1}) + o(\lambda^{n-1}). \qquad (1.4.34)$$

Diğer taraftan Smith' in Anahtar Yenileme Teoremi' ne göre $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki yakınsama elde edilir (Feller [13]):

$$\pi_\lambda(z) \to \pi_0(z) \equiv \frac{1}{m_1}\int_0^\infty \left(1 - F(v)\right) dv.$$

Momentler problemine göre Carleman koşulu sağlandığında $\lambda \to \infty$ iken,

$$E(\zeta^n) \to E_0(\zeta^n) \equiv \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} = A_n \qquad (1.4.35)$$

olur (Feller [13]). Dolayısıyla, (1.4.35) bağıntısı (1.4.34) asimtotik açılımında göz önünde bulundurulduğunda, her $n = 1,2,\dots$ için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$E\left(S_{N(\lambda\zeta)}^{n}\right)=\frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}\lambda^n+\frac{m_2 m_n}{2m_1^2}\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1}).$$

Bu da Teorem 1.4.3' ün ispatını tamamlar. ■

Sonuç 1.4.3: Teorem 1.4.3' ün koşulları altında, $\lambda \to \infty$ iken $S_{N(\lambda\zeta)}$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki açık katsayılı açılımlar elde edilebilir:

$$E\left(S_{N(\lambda\zeta)}\right)=\frac{m_2}{2m_1}\lambda+\frac{m_2}{2m_1}+o(1),$$
$$E\left(S_{N(\lambda\zeta)}^{2}\right)=\frac{m_3}{3m_1}\lambda^2+\frac{m_2^2}{2m_1^2}\lambda+o(\lambda),$$
$$E\left(S_{N(\lambda\zeta)}^{3}\right)=\frac{m_4}{4m_1}\lambda^3+\frac{m_2 m_3}{2m_1^2}\lambda^2+o(\lambda^2),$$
$$E\left(S_{N(\lambda\zeta)}^{4}\right)=\frac{m_5}{5m_1}\lambda^4+\frac{m_2 m_4}{2m_1^2}\lambda^3+o(\lambda^3). \quad ■$$

1.5. $X(t)$ SÜRECİNİN BİR BOYUTLU DAĞILIMI

Bu bölümde yansıtan bariyerli bir ödüllü yenileme sürecinin $(X(t))$ bir boyutlu dağılımı incelenmiştir. Daha kesin bir ifadeyle $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $\Phi_n(t)$ ve $F_n(x)$ fonksiyonları yardımı ile ifade edilmiştir. $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $Q(t,x,\lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{X(t) \le x\}$ ile gösterilsin. Bu gösterimler yardımıyla, elde edilen aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 1.5.1: $\{(\xi_n, \eta_n), n = 1,2,\dots\}$ başlangıç dizisi verilmiş olsun. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $\big(Q(t,x,\lambda z)\big)$ için aşağıdaki kesin ifade yazılabilir:

$$Q(t,x,\lambda z)=G(t,x,\lambda z)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\infty}(n-1)\overset{\infty}{\underset{0}{\int}}\cdots\int(n-1)\int_{0\le s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}\le t}\left(\prod_{i=1}^{n-1}R(ds_i,dv_i,v_{i-1})\right.$$

$$\left.G\left(t-\sum_{i=1}^{n-1}s_i;x;v_{n-1}\right)\right).$$

Burada $G(t,x,\lambda z)$ ve $R(t,x,\lambda z)$ fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$G(t,x,\lambda z)\equiv P_{\lambda z}\{\tau_1>t;X(t)\le x\}$$

$$=2(U(x)-1)D(t,x-y)-2\int_0^x D(t;\lambda z-y)dU(y);$$

$$R(t,x,\lambda z)\equiv P_{\lambda z}\{\tau_1\le t;S_{N(\lambda z)}-\lambda z\le x\}=\int_0^{\lambda z}F(x+v)d_vH(t,\lambda z-v)$$

Ayrıca $U(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)$; $D(t,v)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\Phi_n(t)F_n(v)$;
$H(t;\lambda z-v)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t)F_{n-1}(\lambda z-v)$; $\Delta\Phi_n(t)=\Phi_n(t)-\Phi_{n+1}(t)$‘ dır. ■

İspat: $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu tanımı gereği aşağıdaki gibidir (Gihman and Skorohod [15]):

$$Q(t,x,\lambda z)\equiv P_{\lambda z}\{X(t)\le x\}=\sum_{n=1}^{\infty}P_{\lambda z}\{\tau_{n-1}\le t<\tau_n;X(t)\le x\}\tag{1.5.1}$$

Gösterimi kısaltmak için $J_n\equiv P_{\lambda z}\{\tau_{n-1}\le t<\tau_n;X(t)\le x\}$ olsun $(n=1,2,\dots)$. J_n’ ler ayrı ayrı hesaplansın:

$$J_1=P_{\lambda z}\{0\le t<\tau_1;X(t)\le x\}=P_{\lambda z}\{\tau_1>t;X(t)\le x\}\equiv G(t,x,\lambda z).$$

$$J_2=P_{\lambda z}\{\tau_1\le t<\tau_2;X(t)\le x\}=\int_{s_1=0}^{t}P_z\{\tau_1\in ds_1;s_1\le t<\tau_2;X(t)\le x\}$$

$$=\int_{v=0}^{\infty}\int_{s_1=0}^{t}R(ds_1,dv_1,\lambda z)G(t-s;x;v_1)$$

Burada $R(ds, dv, \lambda z) = P_z\{\tau_1 \in ds; \zeta_1 \in dv\}$' dir. Benzer şekilde,

$$J_3 = \iint_{0 \le s_1 + s_2 \le t} \int_{v_1=0}^{\infty} \int_{v_2=0}^{\infty} R(ds_1, dv_1, \lambda z) R(ds_2, dv_2, v_1)$$
$$G(t - (s_1 + s_2); x; v_2)$$
$$\vdots$$
$$J_n = \int_{0 \le s_1 + s_2 \overset{\dots}{+} \dots + s_{n-1} \le t} \overset{(n-1)}{\dots} \int \int_{v_1=0}^{\infty} \int_{v_2=0}^{\infty} \dots \int_{v_{n-1}=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} R_{v_i-1}(ds_i, dv_i)$$
$$G\left(\left(t - \sum_{i=1}^{n-1} s_i\right); x; v_{n-1}\right)$$

olduğunu göstermek mümkündür. Bu durumda,

$$Q(t, x, \lambda z) = G(t, x, \lambda z)$$
$$+ \sum_{n=2} \int_{v_1=0}^{\infty} \int_{v_2=0}^{\infty} \dots \int_{v_{n-1}=0}^{\infty} \int_{0 \le s_1 + s_2 \overset{\dots}{+} \dots + s_{n-1} \le t} \overset{(n-1)}{\dots} \int \prod_{i=1}^{n-1} R(ds_i, dv_i, v_{i-1})$$
$$G\left(\left(t - \sum_{i-1}^{n-1} s_i\right); x; v_{n-1}\right)$$

olur. Şimdi yukarıda $G(t, x, \lambda z)$ ve $R(t, x, \lambda z)$ gösterimleri ile tanımlanan fonksiyonlar sırasıyla hesaplansın.

İlk aşamada $G(t, x, \lambda z)$ fonksiyonu hesaplansın. Bunun için $\nu(t) \equiv \max\{n \ge 0: T_n \le t\}$ olsun. Bu takdirde,

$$G(t, x, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\nu(t) = n;\ \tau_1 > t; X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\left\{T_n \le t < \tau_1;\ \sum_{i=1}^{N_1(\lambda z)} \xi_i > t; z - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \le x\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right) \sum_{m=n+1}^{\infty} P\{\lambda z - S_{m-1} > 0;\ \lambda z - S_m < 0;$$
$$\lambda z - S_n \le x\}$$

olarak hesaplanır. Burada $\Phi_n(t)$ fonksiyonu tanımından aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Phi_n(t) \equiv P\{T_n \le t\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \le t\right\} = \Phi^{*n}(t), \qquad n = 1,2,\dots;$$
$$\Phi_0(t) = \Phi^{*0}(t) = \varepsilon(t).$$

Ayrıca,

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} P\{\lambda z - S_n \le x;\ \lambda z - S_{m-1} > 0; \lambda z - S_m < 0\}$$
$$= \sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{y=0}^{x} P\{\lambda z - S_n \in dy\} P\{y - S_{m-n-1} > 0; y - S_{m-n} < 0\}$$

olduğuna göre $G(t, x, \lambda z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$G(t, x, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \Delta\Phi_n(t)$$
$$\int_{y=0}^{x} P\{\lambda z - S_n \in dy\} P\{y - S_{m-n-1} > 0; y - S_{n-m} < 0\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \int_{y=0}^{x} P\{\lambda z - S_n \in dy\} \sum_{k=1}^{\infty} P\{y - S_{k-1} > 0; y - S_k < 0\}$$

Burada $\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)'$ dir. Gösterimi kısaltmak için

$$B(y) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} P\{y - S_{k-1} > 0; y - S_k < 0\}$$

olsun. Bu takdirde,

$$G(t, x, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \int_{y=0}^{x} B(y) P\{\lambda z - S_n \in dy\}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $P\{\lambda z - S_n \leq y\} = P\{S_n \geq \lambda z - y\}$ $= 1 - F_n(\lambda z - y) \equiv \bar{F}_n(\lambda z - y)$' dir. Burada $F_n(x) \equiv P\{S_n \leq x\} = F^{*n}(x)$' dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G(t, x, \lambda z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \int_{y=0}^{x} B(y) d_y \bar{F}_n(\lambda z - y) \\ &= \int_0^x B(y) d_y \left[\sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \overline{F_n}(\lambda z - y) \right] \\ &= \int_0^x B(y)\, d_y C(t; \lambda z - y) \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

olur. Burada, $B(y)$ ve $C(t; \lambda z - y)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$B(y) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{y - S_{k-1} > 0; y - S_k < 0\};$$

$$C(t; \lambda z - y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \overline{F_n}(\lambda z - y)$$

$B(y)$ fonksiyonu hesaplanacak olursa,

$$B(y) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{y - S_{k-1} > 0; y - S_{k-1} - \eta_k < 0\}$$

$$= \int_{u=0}^{y} \bar{F}(u) \sum_{k=1}^{\infty} P\{S_{k-1} \in d_u(y-u)\}$$

$$= \int_{u=0}^{y} \bar{F}(u) d_u \left[\sum_{n=0}^{\infty} F_n(y-u) \right]$$

$$= \int_{u=0}^{y} \bar{F}(u) d_u U_\eta(y-u) \equiv \bar{F}(y) * U_\eta(y) \tag{1.5.3}$$

elde edilir.

Özetle $B(y) \equiv \bar{F}(y) * U_\eta(y)$ elde edilir. Burada, $U_\eta(y-u) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y-u)$ ve $F_n(y-u) = P\{S_n \leq y-u\}$' dur.

Yukarıdaki bilgiler toparlandığında,

$$G(t, x, \lambda z) = \int_0^x B(y) d_y C(t; \lambda z - y) \tag{1.5.2}$$

olduğu görülür. Ayrıca $B(y)$ ve $C(t; \lambda z - y)$ aşağıdaki şekildedir:

$$B(y) \equiv \bar{F}(y) * U_\eta(y) \equiv \int_{u=0}^{y} \bar{F}(u) d_u U_\eta(y-u), \tag{1.5.3}$$

$$C(t; \lambda z - y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \overline{F_n}(\lambda z - y). \tag{1.5.4}$$

Bilindiği üzere $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$' dır. $F(x) * U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*(n+1)}(x) =$ m=1∞F∗mx=Ux−1 olur. Buradan elde edilen ifadeyi yukarda elde edilen (1.5.3) eşitliğinde göz önünde tutulduğunda,

$$B(y) = \big(1 - F(y)\big) * U(y) = 1 * U(y) - F(y) * U(y)$$

$$= U(y-u)\big|_{u=0}^{y} - (U(y) - 1) = 1 - U(y) - U(y) + 1 = 2 - 2U(y)$$

$$= 2\big(1 - \mathrm{U(y)}\big) = -2(\mathrm{U(y)} - 1)$$

sonucu elde edilir. Bunun üzerine $\mathrm{B_1(y)} \equiv 2(\mathrm{U(y)} - 1)$ gösterimu tanımlansın. Aynı zamanda (1.5.2) eşitliğindeki $\mathrm{C(t;\lambda z - y)}$ fonksiyonun diferansiyeli $\mathrm{d_yC(t;\lambda z -}$ y=−n=0∞ΔΦntdyFn (λz−y) şeklinde hesaplanır. Bu gösterimler ve hesaplamalar (1.5.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mathrm{G(t,x,z)} = \int_{\mathrm{y}=0}^{\mathrm{x}} \mathrm{B_1(y)} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \Delta\Phi_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})\mathrm{d_y F_n(z-y)}$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \Delta\Phi_{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) \int_{\mathrm{y}=0}^{\mathrm{x}} \mathrm{B_1(y) d_y F_n(z-y)} \qquad (1.5.5)$$

sonucu elde edilir. (1.5.5) eşitliğindeki integral ise

$$\int_{\mathrm{y}=0}^{\mathrm{x}} \mathrm{B_1(y) d_y}\big(\mathrm{F_n(z-y)}\big)$$

$$= \mathrm{2U(x)F_n(x-y) - 2F_n(x-y)} - 2\int_{\mathrm{y}=0}^{\mathrm{x}} \mathrm{F_n(z-y)dU(y)} \qquad (1.5.6)$$

şeklinde hesaplanır.

Şimdiye kadar tanımlanan gösterimler ile elde edilen (1.5.6) ifadesi, (1.5.2) eşitliğinde tekrar yerine konup gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\mathrm{G(t,x,z)}$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \Delta\Phi_{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) \left\{ \mathrm{2U(x)F_n(x-y) - 2F_n(x-y)} - 2\int_{0}^{\mathrm{x}} \mathrm{F_n(z-y)dU(y)} \right\}$$

$$= \mathrm{2U(x)} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \Delta\Phi_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})\mathrm{F_n(x-y)} - 2\sum \Delta\Phi_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})\mathrm{F_n(x-y)}$$

$$-2\int_0^x \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t)F_n(z-y)\right\} dU(y) \tag{1.5.7}$$

(1.5.7) sonucu elde edilmiş olur. Tekrar gösterimi kısaltmak için $D(t,v) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t)F_n(v)$ ifadesi tanımlansın. Bu durumda $G(t,x,z)$ fonksiyonu,

$$G(t,x,z) = 2U(x)D(t,x-y)—2D(t,x-y) - 2\int_0^x D(t,z-y)dU(y)$$

$$= 2[U(x)-1]D(t,x-y) - 2\int_0^x D(t,z-y)dU(y)$$

olur. Burada $U(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$, $D(t,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t)F_n(v)$, $\Delta\Phi_n(t) \equiv P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)$' dır. Sonuç olarak $G(t,x,z)$ fonksiyonu,

$$G(t,x,z) = 2(U(x)-1)D(t,x-y) - 2\int_0^x D(t,z-y)dU(y) \tag{1.5.8}$$

şeklindeki bir ifadeye eşit olur.

İkinci aşama olarak, $R(t,x,z)$ fonksiyonu hesaplansın. Bunun için öncelikle $R(dt,dx,z)$ fonksiyonu ele alınsın:

$$R(dt,dx,z) \equiv P\{\tau_1 \in dt; S_{N(z)} - z \in dx\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{v=0}^{z} P\{\eta_1 - v \in dx\}P\{z - S_{n-1} \in dv\}d\Phi_n(t). \tag{1.5.9}$$

(1.5.9) eşitliğinin her iki tarafı t parametresine göre integrallendiğinde, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$R(t,dx,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{v=0}^{z} P\{\eta_1 - v \in dx\}P\{z - S_{n-1} \in dv\}\Phi_n(t) \tag{1.5.10}$$

(1.5.9) eşitliğinin her iki tarafı x parametresine göre integrallenerek, $R(t, x, z)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$R(t, x, \lambda z) = \int_0^z F(v + x)d_v \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)F_{n-1}(z - v) \right].$$

Gösterim kısalığı için $H(t, z - v) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)F_{n-1}(z - v)$ olsun. Bu takdirde, $R(t, x, z) = \int_0^z F(x + v)d_v H(t, z - v)$ olur. Bu da Teorem 1.5.1' in ispatını tamamlar.

■

1.6. SÜRECİN ERGODİKLİĞİ VE ERGODİK DAĞILIMIN KESİN İFADESİ

Bu bölümdeki amaç sürecin ergodik dağılımının incelenmesidir. Bunun için öncelikle sürecin ergodik olup olmadığının araştırılması gereklidir. Bu amaçla aşağıdaki teorem elde edilmiştir:

Teorem 1.6.1: Başlangıç rasgele değişkenler dizisi $\{(\xi_n, \eta_n)\}$, $n \geq 1$ Tanım 1.3' teki özelliklere ek olarak aşağıdaki koşulları da sağlasın:

i) $E(\xi_1) < +\infty$, ii) $E(\eta_1^2) < \infty$,

iv) η_1 aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir ve her ölçülebilir sınırlı $f(x)(f: [0, +\infty) \rightarrow R)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik, 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f\big(X(u)\big)du$$

$$= \frac{1}{E(\tau_1(\lambda\zeta))} \int_{z=0}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} f(v)P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \in dv\}dtd\pi_\lambda(z) \qquad (1.6.1)$$

Burada $\pi_\lambda(z)$ dağılımı $\{\zeta_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır. ■

Ele alınan $X(t)$ süreci literatürde "Kesikli Şans Karışımlı Yarı – Markov Süreçleri" adı ile bilinen geniş bir sınıfa aittir ve bu sınıf için yine literatürde "Smith' in Anahtar Yenileme Teoremi" tipinde genel ergodiklik teoremi ispat edilmiştir (Gihman ve Skorohod [15], s.243).

İspat: Bu teoremin uygulanabilmesi için $X(t)$ sürecinin aşağıdaki iki varsayımı sağlaması gerekmektedir.

1. Varsayım: $X(t)$ sürecinin değerleri bir ergodik Markov zinciri oluşturacak şekilde $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n < \cdots$ zaman anları mevcut olsun.

2. Varsayım: Her $n = 1,2,3,\ldots$ için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olsun.

Varsayımların sağlanması için 1.3.'te tanımlanmış τ_n' leri ele almak yeterlidir. Zira sürecin bu noktalardaki değerleri sırasıyla

$$X(0) = \lambda z;\ \ X(\tau_1) = \lambda\zeta_1;\ \ X(\tau_2) = \lambda\zeta_2;\ldots;\ \ X(\tau_n) = \lambda\zeta_n; n = 1,2,\ldots$$

dizisini oluşturmaktadır ve $\{\lambda\zeta_n,\ n = 0,1,2,\ldots\}$ dizisinin bir ergodik Markov zinciri oluşturacağını görmek kolaydır. Bu zincirin ergodik dağılımı $\pi_\lambda(z/\lambda)$' dır. $\pi_\lambda(z)$ dağılımı aşağıdaki integral denklemden bulunabilir (Feller [13]):

$$\pi_\lambda(z) = \int_0^\infty G_{\lambda x}(z) d\pi_\lambda(x).$$

Burada $G_{\lambda x}(z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Rogozin[41]):

$$G_{\lambda x}(z) = P\{\lambda\zeta_n \le \lambda z/\lambda\zeta_{n-1} = \lambda x\} = P_{\lambda x}\{\zeta_1 \le z\}$$

$$= -\int_0^z \left(1 - F_\eta(t)\right) d_t U_\eta(\lambda x + z - t)\,;\;\; U_\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_\eta^{*n}(t)$$

Ayrıca $\lambda \to \infty$ iken,

$$\pi_\lambda(z) \to \pi_0(z) \equiv \frac{1}{m_1}\int_0^z \left(1 - F_\eta(v)\right)dv$$

İfadesini ispat etmek mümkündür (Feller [13]). Belirtmek gerekirse $m_1 = E(\eta_1)$, η_1 rasgele değişkeninin beklenen değeri; $U_\eta(t)$, η_n rasgele değişkenlerinin ürettiği yenileme fonksiyonu; $\pi_0(z)$ ise η_n rasgele değişkenlerinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımıdır. Böylece Teorem 1.6.1' in 1. Varsayım' ın sağlandığı gösterilmiş olur.

2. Varsayım' ın sağlanması için $E(\tau_1) = E(\xi_1)U_\eta(\lambda z)$' in ve

$$E(\tau_{k+1} - \tau_k) = E(\xi_1)\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)d\pi_{k\lambda}(z)\,, k = 1,2,..$$

ifadesinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. Teoremin şartına göre $E(\xi_1) < \infty$' dır. Diğer taraftan her $\lambda < \infty$, $z < \infty$ için $U_\eta(\lambda z) < \infty$' dir (Feller [13], s.185). $\pi_{k\lambda}(z) \to \pi_\lambda(z) \to \pi_0(z)$, $\lambda \to \infty$ iken, kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre $m_2 = E(\eta_1^2) < \infty$ olduğunda $\lambda \to \infty$ iken her $z > 0$ için

$$U_\eta(\lambda z) = \frac{\lambda z}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g(\lambda z)$$

açılımı yazılabilir (Feller [13], s.366). Burada $g(\lambda z)$ sınırlı bir fonksiyon olup $\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda z) = 0$' dır. Bu teorem kullanılarak yukarıdaki integral aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)d\pi_{k\lambda}(z) = \int_0^\infty \left[\frac{\lambda z}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g(\lambda z)\right] d\pi_\lambda(z)$$

$$= \frac{\lambda}{m_1}\int_0^\infty zd\pi_\lambda(z) + \frac{m_2}{2m_1^2} + \int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) \le \frac{\lambda}{m_1}\int_0^\infty zd\pi_\lambda(z) + \frac{m_2}{2m_1^2} + M$$

$$= \frac{\lambda}{m_1}\int_0^\infty zd\pi_0(z) + \varepsilon + \frac{m_2}{2m_1^2} = \frac{\lambda}{m_1}\frac{m_2}{2m_1} + \varepsilon + \frac{m_2}{2m_1^2} + M$$

$$= \frac{m_2}{2m_1^2}(\lambda + 1) + M + \varepsilon.$$

Burada $M = \sup_{0\le z<\infty}|g(z)|, \varepsilon > 0$‘ dır. Böylece her sonlu λ için $\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)d\pi_{k\lambda}(z) < \infty$ olur. Bu ise 2. Varsayımın sağlandığının ispatıdır.

Dolayısıyla yukarıdaki koşullar altında ele alınan $X(t)$ süreci ergodiktir. Ayrıca, bu koşullar altında $t \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin zaman ortalaması, durum ortalamasına 1 olasılığı ile yakınsar. Dolayısıyla, (1.6.1) eşitliği doğrudur (Gihman ve Skorohod [15], s.243):

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\big(X(u)\big)du = \frac{1}{E(\tau_1)}\int_{z=0}^\infty\int_{v=0}^\infty\int_{t=0}^\infty f(v)P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \in dv\}dtd\pi_\lambda(z)$$

■

Teorem 1.6.1’ den elde edilen önemli çıkarımlardan birisi aşağıdaki teorem şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 1.6.2: Her $x > 0$ için $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_X(x) = 1 - \frac{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\right)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)} \qquad (1.6.2)$$

Burada, $Q_X(x) = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \le x\}$ fonksiyonu $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu; $U_\eta(z)$ ise $\{\eta_n, n = 1,2,\dots\}$ rasgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme fonksiyonu; $E\big(M(\lambda\zeta_1)\big) \equiv \int_0^\infty M(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$ ' dır.

İspat: Karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$I_{(0,x]}(v) = \begin{cases} 1, & v \le x \\ 0, & v > x \end{cases}.$$

Bu takdirde, Teorem 1.6.1' de $f(v)$ fonksiyonun yerine $I_{(0,x]}(v)$ karakteristik fonksiyonu yazılarak, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)} \int\limits_{z=0}^{\infty} \int\limits_{v=0}^{\infty} \int\limits_{t=0}^{\infty} f(v) P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \in dv\} dt d\pi_\lambda(z)$$

$$= \frac{1}{E(\tau_1)} \int_{t=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \le x\} dt d\pi_\lambda(z) \qquad (1.6.3)$$

olur. Dolayısıyla, her $x \ge 0$ için

$$Q_X(x) = \frac{1}{E(\tau_1)} \int_{t=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \le x\} dt d\pi_\lambda(z) \qquad (1.6.4)$$

olduğu görülür. Gösterim kısalığı için $G(t,x,z) \equiv P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \le x\}$ kabul edilsin. Önce $G(t,x,z)$ fonksiyonu hesaplansın:

$$G(t,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\nu(t) = n; \tau_1 > t; X(t) \le x\} \qquad (1.6.5)$$

Burada $\nu(t) = \max\{n \ge 0; T_n \le t\}$' dır. Ayrıca,

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,; \;\; S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\,, n \geq 1; \quad T_0 = S_0 = 0 \tag{1.6.6}$$

olduğu göz önünde bulundurularak,

$$G(t, x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \leq t < T_{n+1}; \tau_1 > t; X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\, T_n \leq t < T_{n+1}; \lambda z - S_1 > 0; \lambda z - S_2 > 0; \ldots; \lambda z - S_n > 0;$$

$$\lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\, T_n \leq t < T_{n+1}\}P\{\, \lambda z - S_n > 0; \lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \big(\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\big)\big(F_n(\lambda z) - F_n(\lambda z - x)\big) \tag{1.6.7}$$

elde edilir. Burada $\Phi_n(t) = P\{T - n \leq t\}$ ve $F_n(z) = P\{S_n \leq v\}$' dır. (1.6.7) eşitliğinin her iki tarafına t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\tilde{G}(s, x, \lambda z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} G(t, x, \lambda z) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(\lambda z) - F_n(\lambda z) - x] \frac{\varphi^n(s)\big(1 - \varphi(s)\big)}{s} \tag{1.6.8}$$

elde edilir. Burada $\varphi(s) = E(\exp(-s\xi_1)) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} d\Phi(t)$ ‘ dir.

$$\lim_{s \to 0} \frac{1 - \varphi(s)}{s} = E(\xi_1) \tag{1.6.9}$$

olduğu için,

$$\widetilde{G}(0,x,\lambda z) \equiv \lim_{s\to 0}\widetilde{G}(s,x,\lambda z) = \int_0^{\infty}\widetilde{G}(t,x,\lambda z)\,dt$$
$$= E(\xi_1)\sum_{n=0}^{\infty}[F_n(\lambda z) - F_n(\lambda z - x)] = E(\xi_1)\big[U_\eta(\lambda z) - U_\eta(\lambda z - x)\big] \quad (1.6.10)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$Q_X(x) = \frac{1}{E(\tau_1)}\int_{z=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}P_{\lambda z}\{\tau_1 \geq t; X(t) \leq x\}d\pi_\lambda(z)$$
$$= \frac{1}{E(\tau_1)}\int_{t=0}^{\infty}\widetilde{G}(0,x,\lambda z)d\pi_\lambda(z)$$
$$= \frac{1}{E(\gamma_1)}\left\{\int_{z=0}^{\infty}\left[E(\xi_1)\left(U_\eta(z) - U_\eta(z-x)\right)\right]d\pi(z)\right\}$$
$$= \frac{1}{E(\tau_1)}\left\{E(\xi_1)\int_{z=0}^{\infty}\left[\left(U_\eta(\lambda z) - U_\eta(\lambda z - x)\right)\right]d\pi_\lambda(z)\right\} \quad (1.6.11)$$

olur. Ayrıca, Wald özdeşliğine göre,

$$E(\tau_1) \equiv E\left(\sum_{i=1}^{N_1}\xi_1\right) = E(\xi_1)E(N_1) \quad (1.6.12)$$

gibidir. Burada,

$$E\big(N_1(\lambda\zeta_1)\big) \equiv \int_0^{\infty}E\big(N_1(\lambda z)\big)d\pi_\lambda(z) = \int_0^{\infty}U_\eta(\lambda z)d\pi_\lambda(z)$$
$$= E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right) \quad (1.6.13)$$

Sonuç olarak,

$$Q_X(x)=\frac{\left[E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)-E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1-x)\right)\right]}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)}=1-\frac{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1-x)\right)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)}$$

olur. Böylece, Teorem 1.6.2' nin ispatı tamamlanmış olur. ■

1.7. X(t) SÜRECİNİN ERGODİK DAĞILIMI İÇİN ZAYIF YAKINSAMA TEOREMİ

Bu bölümde, $Y_\lambda(t)\equiv X(t)/\lambda$ sürecinin ergodik dağılımı için $\lambda\to\infty$ iken zayıf yakınsama teoremi ispatlanmış ve limit dağılımının kesin ifadesi bulunmuştur. Bu temel sonucun verilmesi için aşağıdaki gösterimler tanımlansın:

$$Q_Y(x)\equiv\lim_{t\to\infty}P\{Y_\lambda(t)\le x\}\,;\ R_0(x)\equiv(2/m_2)\int_0^x\left\{\int_v^\infty\left(1-F_\eta(u)\right)du\right\}dv$$

Bu bölümün temel amacı olan zayıf yakınsama teoremi verilmeden önce elde edilen aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilsin.

Yardımcı Teorem 1.7.1: Her $x>0$ için $\lambda\to\infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1-x)\right)=\frac{\lambda}{m_1}\int_x^\infty(z-x)d\pi_\lambda(z)+\frac{m_2}{2m_1^2}\left(1-\pi_\lambda(x)\right)+o\left(\frac{1}{\lambda}\right).\quad\blacksquare$$

Yardımcı Teorem 1.7.2: Her $x>0$ için $m_3\equiv E(\eta_1^3)<\infty$ olduğunda $E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)$ için $\lambda\to\infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)=\frac{m_2}{2m_1^2}\lambda+\frac{m_2}{2m_1^2}+o(\frac{1}{\lambda})$$

Burada $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ‘dır. ■

Yardımcı Teorem 1.7.1 ve Yardımcı Teorem 1.7.2’ ten yararlanılarak $Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımı için elde edilen zayıf yakınsama teoremi ifade edilebilir.

Teorem 1.7.1: $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ başlangıç rasgele değişkenler dizisi aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $E(\xi_1) < \infty$; ii) $E(\eta_1) > 0$; iii) $E(\eta_1^2) < \infty$;
iv) η_1, aritmetik olmayan bir rasgele değişken olsun.

Bu takdirde, $Y_\lambda(t)$ süreci ergodiktir ve onun ergodik dağılım fonksiyonu $(Q_Y(x))$, $\lambda \to \infty$ iken $R_0(x)$ dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar. Yani her $x > 0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q_Y(x) = R_0(x) \equiv \frac{2}{m_2}\int_0^x \left\{\int_v^\infty \left(1 - F_\eta(u)\right) du\right\} dv$$

olur.

İspat: Teorem 1.6.2, Yardımcı Teorem 1.7.1 ve Yardımcı Teorem 1.7.2’ den yararlanarak aşağıdakiler elde edilir:

$$Q_Y(x) = Q_X(\lambda x) = 1 - \frac{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\right)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)}$$

$$= 1 - \frac{1}{\widehat{m}_1}\int_x^\infty \left(1 - \pi_\lambda(z)\right)dz + o(1) = \frac{1}{\widehat{m}_1}\int_0^x \left(1 - \pi_\lambda(z)\right)dz + o(1).$$

Burada $\widehat{m}_1 \equiv \int_0^\infty \left(1 - \pi_\lambda(z)\right)dz = m_2/2m_1 + o(1)$‘ dır. Bu takdirde

$$Q_Y(x) = \frac{2m_1}{m_2}\int_0^x \left\{\frac{1}{m_1}\int_z^\infty \left(1 - F_\eta(v)\right) dv\right\} dz + o(1)$$

$$= \frac{2}{m_2}\int_0^x \left\{\int_z^\infty \left(1 - F_\eta(v)\right) dv\right\} dz + o(1) = R_0(x) + o(1)$$

olur. $\lambda \to \infty$ iken limit alındığında, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q_Y(x) = R_0(x) \equiv \left(\frac{2}{m_2}\right)\int_0^x \left\{\int_v^\infty \left(1 - F_\eta(u)\right) du\right\} dv.$$

Bu da zayıf yakınsama teoremini ispatlar. ■

Not 1.7.1: $R_0(x)$ dağılımı $\{\eta_n\}$ rasgele değişkeninin oluşturduğu yenileme sürecinin "kalan ömrünün" limit dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yeni bir yenileme sürecinin "kalan ömrünün" limit dağılımını ifade etmektedir.

Not 1.7.2: η_n' ler $\beta > 0$ parametreli Üstel dağılıma sahip olduklarında $R_0(x)$ limit dağılımı da β parametreli üstel dağılıma dönüşür, yani $R_0(x) = 1 - e^{-\beta x}$, $x \geq 0$ olur.

Not 1.7.3: η_n' ler ikinci mertebeden β parametreli Erlang dağılımına sahip olduklarında $R_0(x)$ limit dağılımının aşikâr şekli aşağıdaki gibidir:

$$R_0(x) = 1 - \left(1 + \frac{\beta x}{3}\right) e^{-\beta x}, \quad x \geq 0.$$

1.8. X(t) SÜRECİNİN ERGODİK MOMENTLERİ İÇİN KESİN İFADELER

Teorem 1.6.2' den yararlanılarak, $X(t)$ sürecinin ergodik momentleri için kesin ifade yazılabilir. Elde edilen bu sonuç aşağıdaki teorem şeklinde ifade edilmiştir.

Teorem 1.8.1. Teorem 1.6.2’ in koşulları altında $X(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momentinin $\left(E(X^n)\right)$ kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X^n) = \frac{n}{E(U_\eta(\lambda\zeta_1))}\int_0^\infty x^{n-1}E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\right)dx, \qquad n = 1,2,3,\ldots \ (1.8.1)\blacksquare$$

Genel durumda momentlerin asimtotik davranışını incelemek için öncelikle n. ergodik momentin farklı bir bir gösterimi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 1.8.2: Teorem 1.6.1’ in koşulları altında $X(t)$ sürecinin n. ergodik momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$E(X^n) = \frac{nE\left(U_n(\lambda\zeta_1)\right)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)}, \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (1.8.2)$$

Burada $U_n(z) \equiv z^{n-1} * U_\eta(z) \equiv \int_0^z x^{n-1}U_\eta(z-x)dx$’ dır.

Örnek 1.8.1: η_n rasgele değişkenleri $\alpha > 0$ parametreli Üstel dağılıma sahip olsun. Bu takdirde, $U_\eta(x) = \alpha x + 1$ ‘dan $U_\eta(\lambda\zeta_1) = \alpha\lambda\zeta_1 + 1$ olur.

$$U_n(z) = \alpha\frac{z^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{z^n}{n} \Rightarrow U_n(\tilde{\zeta}_1) = \frac{\alpha}{n(n+1)}\lambda\zeta_1^{n+1} + \frac{1}{n}\lambda\zeta_1^n;$$

$$E(X^n) = \frac{\alpha E(\zeta_1^{n+1})}{(n+1)[\alpha\lambda E(\zeta_1) + 1]}\lambda^{n+1} + \frac{E(\zeta_1^n)}{\alpha\lambda E(\zeta_1) + 1}\lambda^n.$$

Burada aşağıdaki yakınsama ifade edilebilir (Feller [13]):

$$E(\zeta_1^k) = \int_0^\infty z^k d\pi_\lambda(z) \to \int_0^\infty z^k d\pi_0(z) \equiv m_{k+1}/(k+1)m_1$$

λ' nın büyük değerlerinde $E(\zeta_1^k) \to m_{k+1}/(k+1)m_1$ olduğu bilinmektedir (Rogozin [41]). Dolayısıyla,

$$E(X^n) \approx \frac{\frac{\alpha m_{n+2}}{(n+1)(n+2)m_1}\lambda^{n+1} + \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}\lambda^n}{\alpha\lambda\frac{m_2}{2m_1}+1} \cong \frac{n!}{\alpha^n}\lambda^n$$

olur. Özetle, η_i rasgele değişkenleri α parametreli Üstel dağılıma sahip olduklarında, $U_\eta(x) = \alpha x + 1$ olur. $E(X^n) \cong \frac{n!}{\alpha^n}\lambda^n$ olur.

1.9. SÜRECİN ERGODİK MOMENTLERİ İÇİN ASİMTOTİK AÇILIMLAR

Bu çalışmanın temel sonucunu vermek için aşağıdaki gösterimleri tanımlayalım:

$$m_n \equiv E(\eta_1^n);\ E(X^n) = \lim_{t\to\infty} E(X(t)^n);\ n = 1,2,\dots$$

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. momenti için asimtotik açılımlarının elde edilebilmesi için öncelikle, 1.4' te verilip ispatlanan Yardımcı Teorem 1.4.3 ile Yardımcı Teorem 1.4.4' ün sonuçları sırasıyla tekrar verilsin:

Yardımcı Teorem 1.9.1: $g(x): R^+ \to R$ sınırlı bir fonksiyon olup, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ olsun. Ayrıca $\pi_\lambda(z)$ dağılımı $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımı olsun. Bu takdirde aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) = 0. \tag{1.9.1}$$ ■

Yardımcı Teorem 1.9.2: $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, $\sup_{x\in[0,\infty)}|g(x)| \le M < \infty$ olsun. Ayrıca, $m_n = E(\eta_i^n)$' ler Carleman koşulunu sağlasın, yani $\sum_{n=1}^{\infty}(1/\sqrt[2n]{m_{2n}}) = \infty$ olsun. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty z^n g(\lambda z)\, d\pi_\lambda(z) = 0. \qquad (1.9.2)\blacksquare$$

Yardımcı Teorem 1.9.1 ve Yardımcı Teorem 1.9.2‘ den yararlanılarak aşağıdaki önermeler verilebilir.

Önerme 1.9.1: Her $x > 0$ için $m_3 < \infty$ olduğunda $E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)$ için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{m_2}{2m_1^2}\lambda + \frac{m_2}{2m_1^2} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Burada $m_n = E(\eta_1^n)$‘ dır.

Önerme 1.9.2: $m_3 < \infty$ olduğunda $n = 1,2,3,\ldots$ olmak üzere $U_n(z)$ fonksiyonu için $z \to \infty$ iken aşağıdaki üç terimli asimtotik açılım yazılabilir:

$$U_n(z) = \frac{z^{n+1}}{n(n+1)m_1} + \frac{A_1}{nm_1}z^n + \frac{A_2}{m_1}z^{n-1} + o(z^{n-1}).$$

Burada $A_1 = m_2/2m_1$; $A_2 = (m_2/2m_1)^2 - m_3/6m_1$’ dır.

İspat: $U_n(z) \equiv z^{n-1} * U_\eta(z) \equiv \int_0^z x^{n-1}U_\eta(z-x)dx$ eşitliğine Laplace dönüşümü uygulayarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\widetilde{U}_n(s) = \frac{(n-1)!}{s^n}\widetilde{U}_\eta(s). \qquad (1.9.3)$$

$\widetilde{U}_\eta(s)$ yenileme fonksiyonun Laplace dönüşümünün

$$\widetilde{U}_\eta(s) = \frac{1}{s\big(1-\varphi(s)\big)} \qquad (1.9.4)$$

olduğu bilinmektedir. Burada $\varphi(s) = E(e^{-s\eta_1})$ ‘ dır. $s \to 0$ iken $\varphi(s)$ için aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$\varphi(s) = 1 - sm_1 + \frac{s^2}{2} m_2 - \frac{s^3}{6} m_3 + o(s^3). \tag{1.9.5}$$

(1.9.5) açılımı (1.9.4) eşitliğinde yerine yazılıp uygun sadeleştirmeler yapıldığında

$$\widetilde{U}_\eta(s) = \frac{1}{m_1 s^2} + \frac{A_1}{m_1 s} + \frac{A_2}{m_1} + o(1) \tag{1.9.6}$$

açılımı elde edilir. (1.9.6) açılımı (1.9.3) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\widetilde{U}_n(s) = \frac{(n-1)!}{s^n} \frac{1}{m_1} \left\{ \frac{1}{s^2} + A_1 \frac{1}{s} + A_2 + o(1) \right\}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)m_1} \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} + \frac{A_1}{nm_1} \frac{n!}{s^{n+1}} + \frac{A_2}{m_1} \frac{(n-1)!}{s^n} + o\left(\frac{1}{s^n}\right), n \geq 1 \tag{1.9.7}$$

olur. (1.9.7) açılımına Tauber – Abel Teoremi uygulanarak $z \to \infty$ iken $U_n(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki üç terimli asimtotik açılım elde edilir (Abramowitch[1]):

$$U_n(z) = \frac{z^{n+1}}{n(n+1)m_1} + \frac{A_1}{nm_1} z^n + \frac{A_2}{m_1} z^{n-1} + o(z^{n-1}) \tag{1.9.8}$$

Önerme 1.9.2 böylece ispatlanmış olur. ■

Önerme 1.9.2’ den aşağıdaki önerme elde edilebilir.

Önerme 1.9.3: $E(\eta_1^{n+2}) < \infty$ koşulu sağlandığında $E\big(U_n(\lambda\zeta_1)\big)$ için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$E\left(U_n(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{d_{n+1}}{n(n+1)m_1}\lambda^{n+1} + \frac{A_1 d_n}{nm_1}\lambda^n + \frac{A_2 d_{n-1}}{m_1}\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}).$$

Burada $m_n = E(\eta_1^n)$; $d_n = m_{n+1}/(n+1)\, m_1$' dır. Elde edilen temel sonuç aşağıdaki teorem şeklinde ifade edilmiştir.

Teorem 1.9.1: $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ başlangıç rasgele değişkenler dizisi 1.3' te verilen tanıma ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $0 < E(\xi_1) < \infty$; ii) $E(\eta_1) > 0$; iii) $E(\eta_1^{n+2}) < \infty$;
iv) η_1, aritmetik olmayan bir rasgele değişken olsun.

Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. momenti ($E(X^n)$, $n = 1,2,\ldots$) için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki üç terimli asimtotik açılım yazılabilir:

$$E(X^n) = \frac{2m_{n+2}}{(n+1)(n+2)m_2}\lambda^n + B_n\lambda^{n-1} + C_n\lambda^{n-2} + o(\lambda^{n-2}).$$

Burada, B_n ve C_n katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$B_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} - \frac{2m_{n+2}}{(n+1)(n+2)m_2};$$
$$C_n = \frac{2m_{n+2}}{(n+1)(n+2)m_2} - \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} + A_2\frac{2m_n}{m_2};$$
$$A_2 = \left(\frac{m_2}{2\, m_1}\right)^2 - \frac{m_3}{6\, m_1}.$$

Sonuç 1.9.1: $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için $\lambda \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$E(X) = \frac{m_3}{3m_2}\lambda + \left[\frac{m_2}{2m_1} - \frac{m_3}{3m_2}\right] + o\left(\frac{1}{\lambda}\right);$$

$$E(X^2) = \frac{m_4}{6m_2}\lambda^2 + \left[\frac{m_3}{3m_1} - \frac{m_4}{6m_2}\right]\lambda + \left\{\frac{m_2^2}{2m_1^2} - \frac{2m_3}{3m_1} + \frac{m_4}{6m_2}\right\} + o(1);$$

$$E(X^3) = \frac{m_5}{10m_2}\lambda^3 + \left[\frac{m_4}{4m_1} - \frac{m_5}{10m_2}\right]\lambda^2$$
$$+ \left\{\frac{m_2 m_3}{2m_1^2} - \frac{m_3^2}{3m_1 m_2} - \frac{m_4}{4m_1} + \frac{m_5}{10m_2}\right\}\lambda + o(\lambda);$$

$$E(X^4) = \frac{m_6}{15m_2}\lambda^4 + \left[\frac{m_5}{5m_1} - \frac{m_6}{15m_2}\right]\lambda^3$$
$$+ \left\{\frac{m_2 m_4}{2m_1^2} - \frac{m_3 m_4}{3m_1 m_2} - \frac{m_5}{5m_1} + \frac{m_6}{15m_2}\right\}\lambda^2 + o(\lambda^2).$$

1.9.1. Özel Durumlar

Bu bölümde mühendislik alanında sıklıkla kullanılması sebebiyle Üstel, Erlang ve Rayleigh dağılımları durumunda $X(t)$ sürecinin ilk dört ergodik momenti için aşikar katsayılı asimtotik açılımlar hesaplanmıştır.

Özel durum 1.9.1.1 (Üstel Dağılım): η_n rasgele değişkenleri $\beta > 0$ parametreli Üstel dağılıma sahip olsun. Bu takdirde, η_n' nin k. başlangıç momenti

$$m_k = E\left(\eta_1^k\right) = \frac{k!}{\beta^k}, k = 1,2, \ldots$$

gibi yazılabilir. Bu durum için $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentinin $\lambda \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılımları aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$E(X) = \frac{\lambda}{\beta} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right);$$

$$E(X^2) = \frac{2}{\beta^2}\lambda^2 + o(1),$$

$$E(X^3) = \frac{6}{\beta^3}\lambda^3 + o(\lambda);$$

$$E(X^4) = \frac{24}{\beta^4}\lambda^4 + o(\lambda^2).$$

Özel durum 1.9.1.2 (Erlang Dağılımı): η_n rasgele değişkenleri $(2, \beta > 0)$ parametreli Erlang dağılıma sahip olsun. Bu takdirde, η_n' nin k. başlangıç momenti

$$m_k = E(\eta_1^k) = \frac{(k+1)!}{\beta^k}, k = 1,2, \dots$$

gibi yazılabilir. Bu durum için $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentinin $\lambda \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılımları aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$E(X) = \frac{4}{3\beta}\lambda + \frac{1}{6\beta} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$E(X^2) = \frac{10}{3\beta^2}\lambda^2 + \frac{2}{3\beta^2}\lambda - \frac{1}{6\beta^2} + o(1),$$

$$E(X^3) = \frac{12}{\beta^3}\lambda^3 + \frac{3}{\beta^3}\lambda^2 - \frac{1}{\beta^3}\lambda + o(\lambda),$$

$$E(X^4) = \frac{56}{\beta^4}\lambda^4 + \frac{16}{\beta^4}\lambda^3 - \frac{6}{\beta^4}\lambda^2 + o(\lambda^2).$$

Özel durum 1.9.1.3 (Rayleigh Dağılımı): η_n rasgele değişkenleri $\beta > 0$ parametreli Rayleigh dağılımına sahip olsun. Bu takdirde, η_n' nin k. başlangıç momenti için

$$m_k = E(\eta_1^k) = \frac{\Gamma(1 + k/2)}{\beta^{k/2}}, k = 1,2, \dots$$

ifadesi yazılabilir. Bu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentinin $\lambda \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılımları aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\beta}}\lambda + \frac{4-\pi}{4\sqrt{\pi\beta}} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3\beta}\lambda^2 + \frac{1}{6\beta}\lambda - \frac{2(\pi-3)}{3\pi\beta} + o(1),$$

$$E(X^3) = \frac{3\sqrt{\pi}}{16\beta\sqrt{\beta}}\lambda^3 + \frac{16-3\pi}{16\beta\sqrt{\beta\pi}}\lambda^2 - \frac{3\pi-8}{16\beta\sqrt{\beta\pi}}\lambda + o(\lambda),$$

$$E(X^4) = \frac{2}{5\beta^2}\lambda^4 + \frac{7}{20\beta^2}\lambda^3 - \frac{27\pi-80}{20\pi\beta^2}\lambda^2 + o(\lambda^2).$$

2. BULANIK PARAMETRELİ ERGODİK DAĞILIMIN İNCELENMESİ

Gerçek dünyanın klasik mantık ile tam anlamıyla ifade edilemediği anlaşılmaktadır. Bunun da sebebi genel olarak belirsizlik ve karar verilemeyiştir. Birçok sosyal, iktisadi ve teknik konularda insan düşüncelerinin tam anlamı ile olgunlaşmamış oluşundan dolayı belirsizlikler her zaman bulunur. Gelişmiş bilgisayarlar, bu türlü belirsizlikleri ancak dereceli olarak işleyebilirler. Bilgisayarlardan farklı olarak insanın yetersiz, eksik ve belirsizlik içeren veri ile düşünme yeteneği vardır. Genel olarak, değişik biçimlerde ortaya çıkan karmaşıklık ve belirsizlik gibi tam ve kesin olmayan bilgi kaynaklarına bulanık (fuzzy) kaynaklar adı verilir. Zadeh (1968), gerçek dünya sorunları ne kadar yakından incelenmeye alınırsa çözümün daha da bulanık hale geleceğini ifade etmiştir. Burada bilgi kaynaklarının temel ve kesin bilgilere ek olarak, sözel bilgileri de içerdiği vurgulanmalıdır. İnsan sözel düşünebildiğine ve bildiklerini başkalarına sözel ifadelerle aktarabildiğine göre bu ifadelerin her zaman kesin olması da beklenemez (Şen [43]).

Bulanıklık, mühendislikte kontrol teori başta olmak üzere çok geniş alanlarda kullanılmaktadır. Genel olarak; biyomedikal, ekoloji, tarım, coğrafya, roket bilimi, robotik ve yapay zeka alanlarında bulanık teori kullanılırken, özel olarak ise Japonya' da tüketici elektroniğinde, Almanya' da otomobil endüstrisinde ve ev aletlerinde kullanılmaktadır (Oruç [39]). Özellikle "fuzzy process controller" olarak isimlendirilen özel amaçlı bulanık mantık mikroişlemci çipinin üretilmesine başlanmıştır. Bu teknoloji, fotoğraf makineleri, çamaşır makineleri, klimalar ve otomatik iletim hatları gibi uygulamalarda kullanılmaktadır. Bundan başka uzay araştırmaları ve havacılık endüstrisinde de kullanılmaktadır. Örneğin, TAI (TUSAŞ)' de araştırma geliştirme biriminde bulanık mantık konusunda çalışmalar yapılmaktadır. Yine bir başka uygulama olarak otomatik cıvatalamaların değerlendirilmesinde bulanık mantık kullanılmaktadır. Bulanık mantık yardımıyla cıvatalama kalitesi belirlenmektedir. Bu sistemlerin çözümlerinin araştırılmasında bulanık olan girdi ve çıktı bilgilerinden, bulanık mantık kurallarının kullanılması ile anlamlı ve yararlı çözüm çıkarımlarının yapılması yoluna gidilebilir (Şen [43]).

Tezin birinci bölümünde yansıtan bariyerli ödüllü yenileme süreci $X(t)$, matematiksel olarak inşa edilmiş ve sürecin hem bir boyutlu dağılımları hem de ergodik dağılımı analitik ve asimtotik yöntemlerle incelenmiştir. Bu inceleme sırasında sürecin ergodik dağılımının bir yenileme fonksiyonuna bağlı olduğu gözlemlenmiştir. Bu yenileme fonksiyonu taleplerin dağılımının ürettiği bir yenileme fonksiyonudur. Talepleri ifade eden η_n rasgele değişkenlerinin dağılımını tahmin ederken veri azlığından, bilginin tam olmamasından ve bazı subjektif değerlendirmelerden dolayı dağılımın tamamı veya bazı parametreleri bulanık olabilir. Bu nedenle, L. A. Zadeh' in Genişleme Prensibi' nden yola çıkılarak talep miktarları Üstel, Gama, Erlang ve Weibull gibi dağılımlara sahip olduğunda ele alınan envanter modelin bulanık mantık çerçevesinde incelenmesinde yarar vardır.

2.1. BULANIK PARAMETRELİ ÜSTEL DAĞILIM

Hatırlanacak olursa, birinci bölümde ele aldığımız sürecin ergodik dağılımı için aşağıdaki kesin ifade bulunmuştu:

$$Q_X(z) = 1 - \frac{E\big(U(\lambda\zeta - z)\big)}{E\big(U(\lambda\zeta)\big)}. \qquad (2.1.1)$$

Burada

$$E\big(U(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty U_\eta(\lambda x)d\pi_\lambda(x) \qquad (2.1.2)$$

olup, $\pi_\lambda(x)$ fonksiyonu $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılım fonksiyonudur.

Bu bölümde talep miktarlarını ifade eden η_n rasgele değişkenlerinin β parametreli Üstel dağılıma sahip olduğu varsayılacaktır. Ayrıca β parametresinin yerine $\tilde{\beta}$ bulanık sayısı kullanılacaktır. Üstel dağılım durumunda, η_n rasgele değişken dizisinin ürettiği yenileme fonksiyonunun $\big(U_\eta(v)\big)$ kesin şekli bilinmektedir:

$$U_\eta(v) = \beta v + 1. \tag{2.1.3}$$

$U_\eta(v)$ yenileme fonksiyonunun (2.1.3)' deki şekli (2.1.2) eşitliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$E\big(U(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty [\lambda\beta x + 1] d\pi_\lambda(x) = \lambda\beta \int_0^\infty x d\pi_\lambda(x) + 1 = \lambda\beta E(\zeta) + 1$$
$$= \lambda\beta\frac{1}{\beta} + 1 \ = \lambda + 1. \tag{2.1.4}$$

Benzer şekilde, $E\big(U(\lambda\zeta - z)\big)$ fonksiyonu da hesaplansın :

$$E\big(U(\lambda\zeta - z)\big) = \int_0^\infty U(\lambda x - z) d\pi_\lambda(x) = \int_{z/\lambda}^\infty [\beta(\lambda x - z) + 1] d\pi_\lambda(x)$$
$$= \beta \int_{z/\lambda}^\infty (\lambda x - z)\, d\pi_\lambda(x) + \int_{z/\lambda}^\infty d\pi_\lambda(x)$$
$$= \beta \int_{z/\lambda}^\infty (\lambda x - z)\beta e^{-\beta x} dx + \big(1 - \pi_\lambda(z/\lambda)\big)$$
$$= (\lambda + 1)e^{-\beta z/\lambda}. \tag{2.1.5}$$

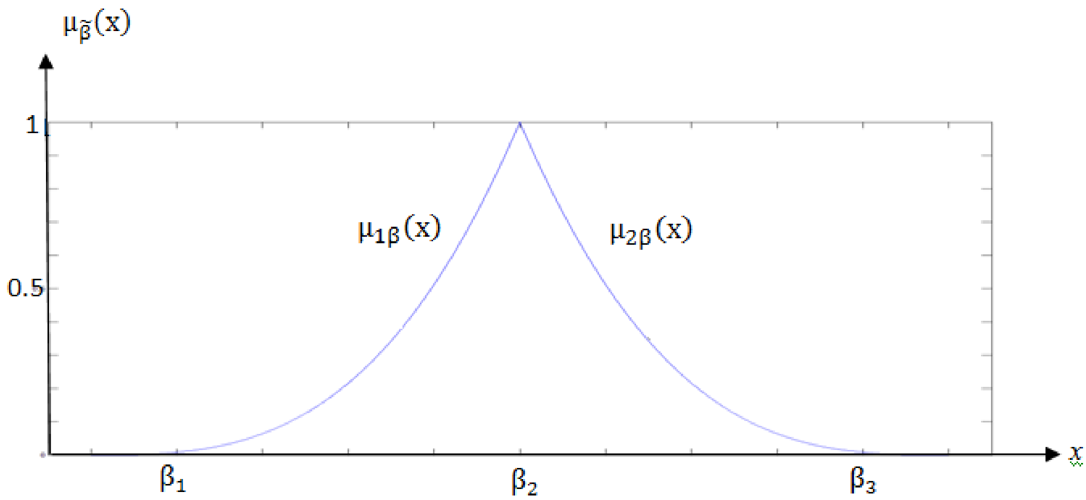
Elde ettiğimiz (2.1.4) ve (2.1.5) ifadelerini (2.1.1) eşitliğinde yerine koyarsak,

$$Q_X(z) = 1 - \frac{E\big(U(\lambda\zeta - z)\big)}{E\big(U(\lambda\zeta)\big)} = 1 - \frac{(\lambda + 1)e^{-\beta z/\lambda}}{\lambda + 1} = 1 - e^{-\beta z/\lambda} \quad \Rightarrow$$
$$Q_X(\lambda z) = 1 - e^{\beta z} \tag{2.1.6}$$

elde edilir. Yukarda elde ettiğimiz sonuç β parametresinin bulanık olmadığı bir sonuçtur. Bu sonucundan yararlanarak β parametresi bulanık bir sayı $(\tilde{\beta})$ olduğu durumda ergodik dağılım fonksiyonunun $Q_X(\lambda z)$' in üyelik fonksiyonu ve α kesitleri hesaplanacaktır. Bunun için $\tilde{\beta}$ bulanık parametresinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mu_{\tilde{\beta}}(x) = \begin{cases} \mu_{1\beta}(x), & \beta_1 \leq x < \beta_2; \\ \mu_{2\beta}(x), & \beta_2 \leq x < \beta_3; \\ 0, & \text{diğer yerlerde.} \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Burada, $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \infty$‘ dir. Ayrıca, $\mu_{1\beta}(x)$ fonksiyonu $[\beta_1; \beta_2]$ aralığında monoton artan bir fonksiyon olup, $\mu_{1\beta}(\beta_1) = 0;\ \mu_{1\beta}(\beta_2) = 1$‘ dir. $\mu_{2\beta}(x)$ fonksiyonu ise $[\beta_2; \beta_3]$ aralığında monoton azalan bir fonksiyon olup, $\mu_{2\beta}(\beta_2) = 1;\ \mu_{2\beta}(\beta_3) = 0$’ dır.



Şekil 2.1. $\mu_{\tilde{\beta}}(x)$ Üyelik Fonksiyonunun Bir Görünümü

Bu takdirde $Q_X(\lambda z)$ ergodik dağılım fonksiyonun üyelik fonksiyonu Zadeh’ in Genişleme Prensibi’ nden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu_{Q_1(\tilde{\beta}\lambda z)}(x) = \begin{cases} \mu_{1\beta}\left(\frac{1}{\lambda z}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right), & x \in [Q_1(\beta_1\lambda z); Q_1(\beta_2\lambda z)] \\ \mu_{2\beta}\left(\frac{1}{\lambda z}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right), & x \in (Q_1(\beta_2\lambda z); Q_1(\beta_3\lambda z)] \end{cases}. \tag{2.1.8}$$

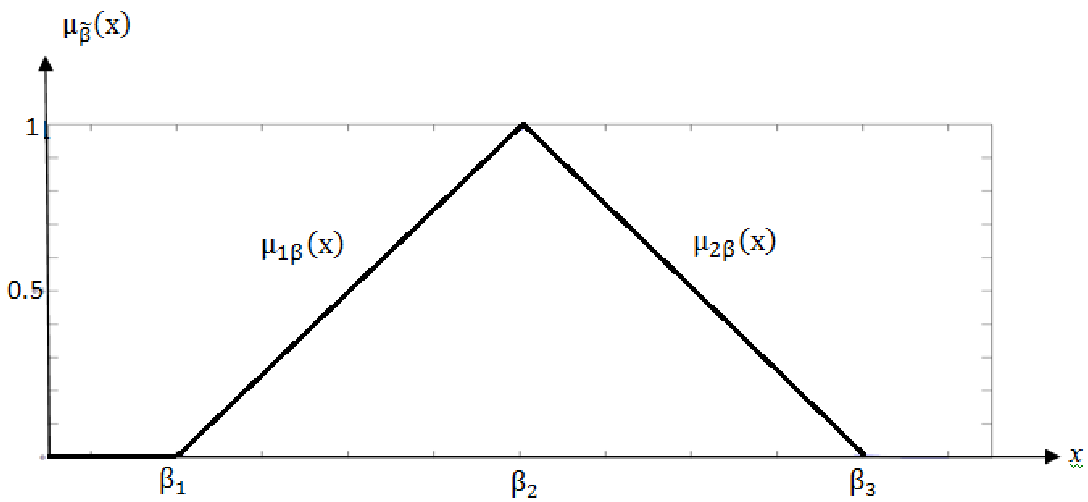
Burada $Q_1(\lambda z) = 1 - e^{-z}$' tir. (2.1.8) eşitliği $\tilde{\beta}$ bulanık parametresinin üyelik fonksiyonu keyfi olduğunda ergodik dağılımın üyelik fonksiyonunu ifade eder. Daha açık sonuçlar elde etmek için aşağıdaki iki özel durum ayrı ayrı ele alınsın.

Özel Durum 1: $\tilde{\beta}$ parametresi üçgensel bulanık sayıdır.
Özel Durum 2: $\tilde{\beta}$ parametresi ikinci dereceden bulanık sayıdır.

Özel Durum 1 (Üçgensel Durum): β parametresi $\tilde{\beta} = (\beta_1|\beta_2|\beta_3)$ şeklinde olan doğrusal üçgensel bir bulanık sayı olsun. Bu durumda $\tilde{\beta}$' nın üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{\beta}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}, & \beta_1 \le x \le \beta_2 \\ \dfrac{\beta_3 - x}{\beta_3-\beta_2}, & \beta_2 < x \le \beta_3 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \qquad (2.1.9)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.2. $\mu_{\tilde{\beta}}(x)$ Üçgensel Üyelik Fonksiyonunun Bir Görünümü

Bu takdirde,

$$\mu_{1\beta}\left(\frac{1}{\lambda z}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\beta_1\lambda z}{\lambda z(\beta_2-\beta_1)}, x\in[Q_1(\beta_1\lambda z);Q_1(\beta_2\lambda z)] \quad (2.1.10)$$

$$\mu_{2\beta}\left(\frac{1}{\lambda z}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)=\frac{\beta_3-\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\lambda z(\beta_3-\beta_2)}, x\in[Q_1(\beta_2\lambda z);Q_1(\beta_3\lambda z)] \quad (2.1.11)$$

olur. Burada $Q_1(\lambda x)=1-e^{-x}$' tir.

(2.1.10) ve (2.1.11) ifadelerini (2.1.8) eşitliğinde yerine yazılarak, bulanık parametreli ergodik dağılımın $\left(\tilde{Q}_X(\lambda z)\right)$ üyelik fonksiyonunun açık şekli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu_{\tilde{Q}(\lambda z)}(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\beta_1\lambda z}{\lambda z(\beta_2-\beta_1)}, & x\in[Q_1(\beta_1\lambda z);\ Q_1(\beta_2\lambda z)]\\ \dfrac{\beta_3-\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\lambda z(\beta_3-\beta_2)}, & x\in[Q_1(\beta_2\lambda z);\ Q_1(\beta_3\lambda z)]\\ 0, & \text{diğer yerlerde.}\end{cases} \quad (2.1.12)$$

Burada $Q_1(\lambda x)=1-e^{-x}$' tir. Dolayısıyla, talep miktarları η_n' ler üçgensel bulanık $\tilde{\beta}$ parametreli Üstel dağılıma sahip olduklarında ergodik dağılımın üyelik fonksiyonu (2.1.12) eşitliğindeki gibi tanımlanır.

(2.1.12) eşitliğinden yararlanılarak bulanık parametreli $\tilde{Q}_X(\lambda z)$ ergodik dağılımının α kesitleri yazılsın. Her $\alpha\in(0,1]$ için (2.1.9) eşitliğinden yararlanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

$$\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)=\beta_1+(\beta_2-\beta_1)\alpha; \quad (2.1.13)$$

$$\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)=\beta_3-(\beta_3-\beta_2)\alpha. \quad (2.1.14)$$

(2.1.13) ve (2.1.14) ifadelerinden yararlanılarak $\widetilde{Q}_X(\lambda z)$' in α kesitinin sol $\left(Q_{1z}(\alpha)\right)$ ve sağ $\left(Q_{3z}(\alpha)\right)$ uçları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_{1z}(\alpha) = \mu^{-1}_{1\widetilde{Q}(\lambda z)}(\alpha) = Q_1\left(\lambda z(\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)\alpha)\right); \qquad (2.1.15)$$

$$Q_{3z}(\alpha) = \mu^{-1}_{2\widetilde{Q}(\lambda z)}(\alpha) = Q_1\left(\lambda z(\beta_3 - (\beta_3 - \beta_2)\alpha)\right). \qquad (2.1.16)$$

Burada $Q_1(\lambda x) = 1 - e^{-x}$' tir. Dolayısıyla, $\widetilde{Q}_X(\lambda z)$' in α kesiti $\left(\left[\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right]^{\alpha}\right)$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\left[\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right]^{\alpha} = [Q_{1z}(\alpha);\ Q_{3z}(\alpha)]. \qquad (2.1.17)$$

$Q_{1z}(\alpha)$ ve $Q_{3z}(\alpha)$ ifadeleri sırasıyla (2.1.15) ve (2.1.16) eşitliklerinde tanımlanmıştır. (2.1.17) eşitliğinden yararlanılarak bulanık parametreli ergodik dağılımın $\left(\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right)$ destek kümesi ve çekirdeği bulanabilir:

$$\text{destek}\left(\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right) = \left(Q_1(\beta_1\lambda z); Q_1(\beta_3\lambda z)\right); \qquad (2.1.18)$$

$$\text{çek}\left(\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right) = Q_1(\beta_2\lambda z). \qquad (2.1.19)$$

Böylece bulanık parametreli ergodik dağılımın $\left(\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right)$ temel bulanık karakteristikleri elde edilmiş olur.

Özel Durum 2 (İkinci Dereceli Durum): $\widetilde{\beta}$ parametresi ikinci dereceden bir bulanık sayı olsun. Bu durumda $\widetilde{\beta}$' nın üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\widetilde{\beta}}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\right)^2, & \beta_1 \le x \le \beta_2 \\ \left(\dfrac{\beta_3 - x}{\beta_3 - \beta_2}\right)^2, & \beta_2 < x \le \beta_3 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \qquad (2.1.20)$$

şeklinde yazılabilir. Bu takdirde,

$$\mu_{1\beta}\left(\frac{1}{\lambda z}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)=\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\beta_1\lambda z}{\lambda z(\beta_2-\beta_1)}\right)^2, x\in[Q_1(\beta_1\lambda z);Q_1(\beta_2\lambda z)] \quad (2.1.21)$$

$$\mu_{2\beta}\left(\frac{1}{\lambda z}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)=\left(\frac{\beta_3-\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\lambda z(\beta_3-\beta_2)}\right)^2, x\in[Q_1(\beta_2\lambda z);Q_1(\beta_3\lambda z)] \quad (2.1.22)$$

olur. (2.1.21) ve (2.1.22) ifadeleri (2.1.8) eşitliğinde yerlerine yazılarak, bulanık parametreli ergodik dağılımın $\left(\tilde{Q}_X(\lambda z)\right)$ üyelik fonksiyonunun açık şekli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu_{\tilde{Q}(\lambda z)}(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\beta_1\lambda z}{\lambda z(\beta_2-\beta_1)}\right)^2, & x\in[Q_1(\beta_1\lambda z);\ Q_1(\beta_2\lambda z)]\\ \left(\dfrac{\beta_3-\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\lambda z(\beta_3-\beta_2)}\right)^2, & x\in[Q_1(\beta_2\lambda z);\ Q_1(\beta_3\lambda z)]\\ 0, & \text{diğer yerlerde}\end{cases}. \quad (2.1.23)$$

Burada $Q_1(\lambda x)=1-e^{-x}$' tir. Dolayısıyla, talep miktarları η_n' ler ikinci dereceden bulanık $\tilde{\beta}$ parametreli Üstel dağılıma sahip olduklarında ergodik dağılımın üyelik fonksiyonu (2.1.23) eşitliğindeki gibi tanımlanır. (2.1.23) eşitliğinden yararlanılarak bulanık parametreli $\tilde{Q}_X(\lambda z)$ ergodik dağılımının α kesitleri yazılacak olursa, her $\alpha\in(0,1]$ için (2.1.20) eşitliğinden yararlanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

$$\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)=\beta_1+(\beta_2-\beta_1)\sqrt{\alpha}; \quad (2.1.24)$$

$$\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)=\beta_3-(\beta_3-\beta_2)\sqrt{\alpha}. \quad (2.1.25)$$

(2.1.24) ve (2.1.25) ifadelerinden yararlanılarak $\widetilde{Q}_X(\lambda z)$' in α kesitinin sol $\left(Q_{1z}(\alpha)\right)$ ve sağ $\left(Q_{3z}(\alpha)\right)$ uçları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_{1z}(\alpha) = \mu^{-1}_{1\widetilde{Q}(\lambda z)}(\alpha) = Q_1\left(\lambda z\left(\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)\sqrt{\alpha}\right)\right); \tag{2.1.26}$$

$$Q_{3z}(\alpha) = \mu^{-1}_{2\widetilde{Q}(\lambda z)}(\alpha) = Q_1\left(\lambda z\left(\beta_3 - (\beta_3 - \beta_2)\sqrt{\alpha}\right)\right). \tag{2.1.27}$$

Burada $Q_1(\lambda x) = 1 - e^{-x}$' tir. Dolayısıyla, $\widetilde{Q}_X(\lambda z)$' in α kesiti $\left(\left[\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right]^\alpha\right)$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\left[\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right]^\alpha = [Q_{1z}(\alpha);\ Q_{3z}(\alpha)]. \tag{2.1.28}$$

$Q_{1z}(\alpha)$ ve $Q_{3z}(\alpha)$ ifadeleri sırasıyla (2.1.26) ve (2.1.27) eşitliklerinde tanımlanmıştır. (2.1.28) eşitliğinden yararlanarak bulanık parametreli ergodik dağılımın $\left(\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right)$ destek kümesi ve çekirdeği bulanabilir:

$$\text{destek}\left(\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right) = \left(Q_1(\beta_1\lambda z); Q_1(\beta_3\lambda z)\right); \tag{2.1.29}$$

$$\text{çek}\left(\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right) = Q_1(\beta_2\lambda z). \tag{2.1.30}$$

Böylece bulanık parametreli ergodik dağılımın $\left(\widetilde{Q}_X(\lambda z)\right)$ temel bulanık karakteristikleri elde edilmiş olur.

2.2. BULANIK PARAMETRELİ GAMA DAĞILIMI

Bu bölümde η_n talep miktarlarının (r, β) parametreli Gama dağılımına sahip olduğu varsayılacaktır. Bu varsayıma göre r parametresi bulanık olmayan, β parametresi ise bulanık bir sayıdır. Önce $(r, 1)$ parametreli Gama dağılımı tanımlansın. $G_{r,1}(x)$ ile $g_{r,1}(x)$ sırasıyla, $(r, 1)$ parametreli Gama dağılımının dağılım fonksiyonu ve olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilsin:

$$g_{r,\beta}(x) = \frac{\beta^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\beta x}, x > 0, r > 0; \;\; G_{r,\beta}(x) = \int_0^x g_{r,\beta}(v)dv, x > 0.$$

Bu bölümdeki varsayıma göre, η_n talep miktarlarının dağılım fonksiyonu $G_{r,\beta}(x)$, (r, β) parametreli Gama dağılım fonksiyonudur. Bu fonksiyon $G_{r,1}(x)$ fonksiyonunun yardımı ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$G_{r,\beta}(x) = G_{r,1}(\beta x). \tag{2.2.1}$$

$G_{r,1}(x)$ fonksiyonu bir Gama dağılım fonksiyonu olduğuna göre, $x > 0$ olduğunda $G_{r,1}(x)$ monoton artan bir fonksiyon olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan $G_{r,\beta}(x) = G_{r,1}(\beta x)$ şeklinde gösterilebildiği için $G_{r,\beta}(x)$ fonksiyonu da hem β ve hem de x parametresine göre monoton artan bir fonksiyon olacaktır. η_n rasgele değişkenlerinin oluşturduğu yenileme fonksiyonu $U_{r,\beta}(x)$ ile gösterilsin. Tanımı gereği $U_{r,\beta}(x)$ aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$U_{r,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{r,\beta}^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{r,1}^{*n}(\beta x) = U_{r,1}(\beta x). \tag{2.2.2}$$

Burada $U_{r,1}(x)$ ile $G_{r,1}(x)$ dağılım fonksiyonun ürettiği yenileme fonksiyonu gösterilmiştir. Ayrıca yenileme fonksiyonunun kendi değişkenine göre monoton artan bir fonksiyon olduğu bilinmektedir (Feller [13]). Dolayısıyla, $U_{r,\beta}(z) = U_{r,1}(\beta x)$ olduğuna göre, $U_{r,\beta}(z)$ fonksiyonu da β parametresine göre monoton artan bir fonksiyon olacaktır. Bu bilgiler Zadeh' in Genişleme Prensibi' nin uygulanmasında kullanılacaktır. Zadeh' in Genişleneme Prensibi' nin uygulanması için öncelikle bulanık bir sayı olduğu varsayılan $\tilde{\beta}$ parametresinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mu_{\tilde{\beta}}(x) = \begin{cases} \mu_{1\beta}(x), & \beta_1 \le x < \beta_2 \\ \mu_{2\beta}(x), & \beta_2 \le x < \beta_3. \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Burada, $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \infty$‘ dir. Ayrıca, $\mu_{1\beta}(x)$ fonksiyonu $[\beta_1; \beta_2]$ aralığında monoton artan bir fonksiyon olup, $\mu_{1\beta}(\beta_1) = 0$; $\mu_{1\beta}(\beta_2) = 1$‘ dir. $\mu_{2\beta}(x)$ fonksiyonu ise $[\beta_2; \beta_3]$ aralığında monoton azalan bir fonksiyon olup, $\mu_{2\beta}(\beta_2) = 1$; $\mu_{2\beta}(\beta_3) = 0$’ dır.

$U_{r,1}(\beta z)$ yenileme fonksiyonunda β parametresinin yerine $\tilde{\beta}$ bulanık sayısı yazılsın ve aşağıdaki önerme verilsin.

Önerme 2.2.1: $\tilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.2.3) eşitliğindeki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde, $U_{r,1}(\tilde{\beta} z)$ fonksiyonunun üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mu_{U_{r,1}(\tilde{\beta}z)}(x) = \begin{cases} \mu_{1\beta}\left(\dfrac{1}{z} U_{r,1}^{-1}(x)\right), & x \in \left[U_{r,1}(\beta_1 z); U_{r,1}(\beta_2 z)\right) \\ \mu_{2\beta}\left(\dfrac{1}{z} U_{r,1}^{-1}(x)\right), & x \in \left[U_{r,1}(\beta_2 z); U_{r,1}(\beta_3 z)\right] \end{cases}. \qquad (2.2.4)$$

İspat: $U_{r,1}(\beta z)$ fonksiyonu β parametresine göre monoton artan olduğu için $U_{r,1}(\tilde{\beta} z)$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu her $z > 0$ için Zadeh’ in Genişleme Prensibi’ ne göre birebir tanımlanabilir. Daha açık bir şekilde ifade edilecek olursa, her $x \in \left[U_{r,1}(\beta_1 z); U_{r,1}(\beta_2 z)\right]$ için

$$\mu_{U_{r,1}(\tilde{\beta}z)}(x) = \mu_{1\beta}\left(\frac{1}{z} U_{r,1}^{-1}(x)\right);$$

her $x \in \left[U_{r,1}(\beta_1 z); U_{r,1}(\beta_2 z)\right]$ için

$$\mu_{U_{r,1}(\tilde{\beta}z)}(x) = \mu_{2\beta}\left(\frac{1}{z} U_{r,1}^{-1}(x)\right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla $U_{r,1}(x)$ monoton artan olduğundan Zadeh' in Genişleme Prensibi uygulanarak (2.2.4) eşitliği elde edilir. ■

Not 2.2.1: Bu çalışmada kolaylık sağlayan özellik $(r, 1)$ parametreli Gama dağılımının ürettiği $U_{r,1}(x)$ yenileme fonksiyonunun monoton artan olmasıdır. Bu özellik sağlanmadığı takdirde, Zadeh' in Genişleme Prensibi yukarıdaki gibi açık bir sonuç vermez. Monotonluk özelliği ortadan kalktığı takdirde, yenileme fonksiyonunun üyelik fonksiyonunu özel bir algoritma sayesinde nümerik olarak hesaplamak mümkündür. Ancak bu durumda yukarıdaki gibi sade ve kesin bir analitik sonuç ortaya çıkmaz.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı incelenirken $U_1(\beta z)$' in α kesitleri gerekli olacaktır. Bu nedenle, aşağıdaki önermede $U_{r,1}(\beta z)$' in α kesitlerinin açık şekli verilsin.

Önerme 2.2.2: $\tilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.2.3) eşitliğindeki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde, $U_{r,1}(\tilde{\beta}z)$' in α kesitlerinin aşikar şekli aşağıdaki gibi gösterilebilir ($\alpha \in (0,1]$):

$$[U_{r,1}(\tilde{\beta}z)]^{\alpha} \equiv \left[U_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ U_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right]. \qquad (2.2.5)$$

Burada $[U_{r,1}(\tilde{\beta}z)]^{\alpha}$ ile $U_{r,1}(\tilde{\beta}z)$ bulanık sayısının α kesiti gösterilmiştir.

İspat: Her $\alpha \in (0,1]$ için $U_{r,1}(\tilde{\beta}z)$' in α kesitlerinin bulunması için aşağıdaki denklemlerin her birinden x' in bulunması gerekmektedir:

$$\mu_{1\beta}\left(\frac{1}{z}U_{r,1}^{-1}(x)\right) = \alpha; \qquad \mu_{2\beta}\left(\frac{1}{z}U_{r,1}^{-1}(x)\right) = \alpha.$$

$\mu_{1\beta}(x)$ ve $\mu_{2\beta}(x)$ fonksiyonları monoton oldukları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\frac{1}{z}U_{r,1}^{-1}(x) = \mu_{1\beta}^{-1}(\alpha); \quad \frac{1}{z}U_{r,1}^{-1}(x) = \mu_{2\beta}^{-1}(\alpha).$$

Burada $U_{r,1}^{-1}(x) = z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)$ ve $U_{r,1}^{-1}(x) = z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)$ olur. $U_{r,1}(x)$ fonksiyonu monoton artan olduğuna göre sonuç olarak, $x = U_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)$ ve $x = U_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)$ elde edilir. Böylece $U_{r,1}(\tilde{\beta}z)$ bulanık sayısının α kesitinin sol ve sağ uçları aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$x_1^*(\alpha) \equiv U_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ x_2^*(\alpha) \equiv U_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right).$$

Özetlenecek olursa, her $\alpha \in (0,1]$ için

$$\left[U_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha} \equiv [x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha)] = \left[U_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ U_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right]$$

olur. Böylece Önerme 2.2.2’ nin ispatı tamamlanmış olur. ■

Şimdi de bulanık parametreli ergodik dağılım incelenmeden önce birinci bölümde elde edilen aşağıdaki sonuç tekrar ifade edilsin.

Önerme 2.2.3: ξ_n ve η_n’ ler 1.3 ’te ki özelliklere ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $E(\xi_1) < \infty$, ii) $E\eta_1 < \infty$,
iii) η_1 aritmetik olmayan rasgele bir değişkendir.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir ve onun ergodik dağılım fonksiyonunun açık şekli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_X(\lambda x) = 1 - \frac{E\left(U_\eta(\lambda(\zeta - x))\right)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta)\right)}. \tag{2.2.6}$$

Burada

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta)\right) = \int_0^\infty U_\eta(\lambda z) d\pi_\lambda(z), \tag{2.2.7}$$

$$E\left(U_\eta\big(\lambda(\zeta - x)\big)\right) = \int_x^\infty U_\eta\big(\lambda(z - x)\big) d\pi_\lambda(z) \tag{2.2.8}$$

ve $\pi_\lambda(z)$ ise $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır. ■

$\pi_\lambda(z)$ dağılımının, $\lambda \to \infty$ iken $\pi_0(z) \equiv \frac{1}{m_1}\int_0^z \left(1 - G_{r,\beta}(v)\right) dv$ dağılımına zayıf yakınsadığı bilinmektedir (Feller [13], Rogozin [41]). Burada $m_1 = E(\eta_1) = r/\beta$ ‘dır. Bu bilgiden yola çıkılarak $Q_X(x)$ ergodik dağılım için aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Önerme 2.2.4: λ’ nın yeterince büyük değerlerinde $Q_X(\lambda x)$ ergodik dağılımı için aşağıdaki yaklaşık ifade yazılabilir:

$$Q_X(\lambda x) \approx Q_\beta(\lambda x) \equiv 1 - \frac{\int_x^\infty U_\eta\big(\lambda(z - x)\big)(1 - G_{r,\beta}(z))dz}{\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)(1 - G_{r,\beta}(z))dz}, \tag{2.2.9}$$

İspat: Öncelikle (2.2.7) ve (2.2.8)’ de $\pi_\lambda(z)$’ in yerine $\pi_0(z)$ yazılıp daha sonra $\pi_0(z)$’ in diferensiyeli alındığında

$$d\pi_0(z) = \frac{1}{m_1}\left(1 - G_{r,\beta}(z)\right) dz \tag{2.2.10}$$

elde edilir. (2.2.10)‘ nun (2.2.7) ve (2.2.8)’ de göz önünde bulundurulmasıyla (2.2.9) elde edilir. ■

Diğer taraftan η_n talep miktarları (r, β) parametreli Gama dağılımı iken (2.2.1) eşitliğinden $G_{r,\beta}(z) = G_{r,1}(\beta z)$ ve $U_\eta(z) = U_{r,1}(\beta z)$ olduğu kolayca görülebilir. Bu ifadeler (2.2.9)’ un sağ tarafında $Q_\beta(x)$’ in ifadesinde göz önünde bulundurularak aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 2.2.5: $Q_\beta(\lambda x)$ için aşağıdaki farklı bir gösterim yazılabilir:

$$Q_\beta(\lambda x) = 1 - \frac{\int_x^\infty U_1\big(\beta\lambda(z-x)\big)(1 - G_{r,1}(\beta z))dz}{\int_0^\infty U_1(\lambda\beta z)(1 - G_{r,1}(\beta z))dz}. \tag{2.2.11}$$

Burada $G_{r,1}(x)$ ve $U_{r,1}(x)$ fonksiyonları sırasıyla $(r,1)$ parametreli Gama dağılım fonksiyonu ve yenileme fonksiyonudur. Amaç β parametresi bir bulanık sayı olduğunda $Q_\beta(\lambda x)$ dağılımının α kesitlerinin bulunmasıdır. Bunun için önce Önerme 2.2.5 bulanık parametre için ifade edilsin:

$$Q_{\tilde\beta}(\lambda x) = 1 - \frac{\int_x^\infty U_1\left(\lambda\tilde\beta(z-x)\right)\left(1 - G_{r,1}(\tilde\beta z)\right)dz}{\int_0^\infty U_1(\lambda\tilde\beta z)\left(1 - G_{r,1}(\tilde\beta z)\right)dz}. \tag{2.2.12}$$

Burada $Q_{\tilde\beta}(\lambda x)$ gösterimi ile β parametresinin bulanık sayı olması durumundaki $Q_\beta(\lambda x)$ ergodik dağılımının fonksiyonu gösterilmiştir. $\tilde\beta$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.2.3) eşitliği ile tanımlanmıştır. Bu varsayım altında Önerme 2.2.2’ den aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 2.2.1. $\tilde\beta$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.2.3) eşitliğiyle tanımlanmış olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\left[U_{r,1}(\lambda\tilde\beta z)\right]^\alpha \equiv \left[U_{r,1}\left(\lambda z \mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ U_{r,1}\left(\lambda z \mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right], \tag{2.2.13}$$

$$\left[U_{r,1}\left(\lambda\tilde\beta(z-x)\right)\right]^\alpha \equiv \left[U_{r,1}\left(\lambda(z-x)\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ U_{r,1}\left(\lambda(z-x)\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right]. \tag{2.2.14}$$

■

Ayrıca, $G_{r,1}(\tilde\beta z)$ bulanık fonksiyonu için de benzer sonuçlar ifade edilebilir.

Sonuç 2.2.2: $\tilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.2.3) eşitliğiyle tanımlanmış olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\left[G_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha} \equiv \left[G_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ G_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right]. \tag{2.2.15}$$

Şimdi de $X(t)$ sürecinin bulanık parametreli ergodik dağılımının α kesitleri elde edilsin. (2.2.12) eşitliğini ve integrallerin α kesit özelliği göz önünde bulundurularak, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\left[Q_{\tilde{\beta}}(\lambda x)\right]^{\alpha} = 1 - \frac{\int_x^{\infty}\left[U_{r,1}\left(\lambda\tilde{\beta}(z-x)\right)\right]^{\alpha}\left[\left(1-G_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right)\right]^{\alpha} dz}{\int_0^{\infty}\left[U_{r,1}(\lambda\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha}\left[\left(1-G_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right)\right]^{\alpha} dz}. \tag{2.2.16}$$

(2.2.15) eşitliğinden ve α – kesitlerin temel özelliklerinden

$$\left[1-G_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha} \equiv \left[1-G_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ 1-G_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] \tag{2.2.17}$$

olur. (2.2.13), (2.2.17) eşitlikleri göz önünde bulundurularak, her $\alpha \in [0,1)$ için

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\left[U_{r,1}(\lambda\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha}\left[\left(1-G_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right)\right]^{\alpha} dz \\
&= \left[\int_0^{\infty} U_{r,1}\left(\lambda z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1-G_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz\,;\right. \\
&\qquad \left.\int_0^{\infty} U_{r,1}\left(\lambda z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1-G_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz\right]
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (2.2.14) ve (2.2.17) gösterimlerinden yararlanılarak,

$$\int_x^{\infty}\left[U_{r,1}\left(\lambda\tilde{\beta}(z-x)\right)\right]^{\alpha}\left[\left(1-G_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right)\right]^{\alpha} dz$$

$$= \left[\int_x^{\infty} U_{r,1}\left(\lambda(z-x)\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - G_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz\,; \right.$$

$$\left. \int_x^{\infty} U_{r,1}\left(\lambda(z-x)\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - G_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz \right] \qquad (2.2.19)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.2.18) ve (2.2.19) eşitlikleri (2.2.16) formülünde göz önünde bulundurulduğunda,

$$\left[Q_{\tilde{\beta}}(\lambda x)\right]^{\alpha} = [Q_1(\alpha, x);\ Q_3(\alpha, x)] \qquad (2.2.20)$$

elde edilir. Burada $Q_1(\alpha, x)$ ve $Q_3(\alpha, x)$ aşağıdaki gibidir:

$$Q_1(\alpha, \lambda x) = \left[1 - \frac{\int_x^{\infty} U_{r,1}\left(\lambda(z-x)\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - G_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz}{\int_0^{\infty} U_{r,1}\left(\lambda z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - G_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz}\right]^{+};$$

(2.2.21)

$$Q_3(\alpha, \lambda x) = 1 - \frac{\int_x^{\infty} U_{r,1}\left(\lambda(z-x)\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - G_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz}{\int_0^{\infty} U_{r,1}\left(\lambda z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - G_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz} \qquad (2.2.22)$$

Dolayısıyla, (2.2.9) bağıntısına göre, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\left(Q_X(\lambda x)\right)$ yerine λ' nın yeterince büyük değerlerinde $Q_\beta(\lambda x)$ kullanılabileceğine göre, β parametresi bulanık sayı olduğunda, her $\alpha \in [0,1)$ için

$$\left[\tilde{Q}_X(\lambda x)\right]^{\alpha} \approx \left[Q_{\tilde{\beta}}(\lambda x)\right]^{\alpha} \qquad (2.2.23)$$

yazılabilir. Burada $\tilde{Q}_X(\lambda x)$ ile bulanık parametreli ergodik dağılım gösterilmiştir. Yukarıdaki bilgiler özetlenecek olursa, aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.2.2: $\tilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.2.3) eşitliğindeki gibi tanımlanmış ve Önerme 2.2.3' ün koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her

$\alpha \in [0,1)$ için $X(t)$ sürecinin bulanık parametreli ergodik dağılımının $\left(\tilde{Q}_X(\lambda x)\right)$ α kesitleri $\left(\left[\tilde{Q}_X(\lambda x)\right]^{\alpha}\right)$ yaklaşık olarak

$$\left[\tilde{Q}_X(\lambda x)\right]^{\alpha} \approx [Q_1(\alpha, \lambda x);\ Q_3(\alpha, \lambda x)] \tag{2.2.24}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $Q_1(\alpha, \lambda x)$ ve $Q_3(\alpha, \lambda x)$ sırasıyla, (2.2.21) ve (2.2.22) eşitlikleriyle tanımlanmış alt ve üst sınırlardır. ■

Bu genel gösterimden birçok önemli sonuçlar elde edilebilir. Bu çalışmada özel bir sonuç olarak η_n' ler $\left(2, \tilde{\beta}\right)$ parametreli Erlang dağılımına sahip olduğu durum ele alınacak ve $\tilde{\beta}$' nın üçgensel ve ikinci dereceden bir bulanık sayı olduğu durumda ergodik dağılımın α kesitlerinin açık şekli ortaya konacaktır.

2.2.1. Bulanık Parametreli Erlang Dağılım

η_n rasgele değişkenleri $(2, \beta)$ parametreli Erlang dağılımına sahip olsun. Bu durumda η_n rasgele değişkenin bulanık parametreli dağılım fonksiyonu

$$\tilde{F}_{\eta}(x) = 1 - \left(1 + \tilde{\beta}x\right)\exp\left(-\tilde{\beta}x\right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\tilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$\mu_{\tilde{\beta}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \beta_1}{\beta_2 - \beta_3}, & \beta_1 \leq x \leq \beta_2 \\ \dfrac{\beta_3 - x}{\beta_3 - \beta_2}, & \beta_2 < x \leq \beta_3 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}.$$

Bu takdirde,

$$\mu_{2\beta}(x)=\frac{x-\beta_1}{\beta_2-\beta_1},\qquad \beta_1\le x\le\beta_2;$$
$$\mu_{2\beta}(x)=\frac{\beta_3-x}{\beta_3-\beta_2},\qquad \beta_2<x\le\beta_3$$

olur. Buradan, her $\alpha\in(0,1]$ için

$$\mu_{1\beta}^{-1}(x)\equiv L\equiv\beta_1+\alpha(\beta_2-\beta_1)\tag{2.2.1.1}$$
$$\mu_{2\beta}^{-1}(x)\equiv K\equiv\beta_3-\alpha(\beta_3-\beta_2)\tag{2.2.1.2}$$

elde edilir. Ayrıca, $(2,1)$ parametreli Erlang dağılımının yenileme fonksiyonunun $\left(U_{2,1}(x)\right)$ kesin şekli bilinmektedir:

$$U_{2,1}(x)=\frac{x}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\exp(-x).\tag{2.2.1.3}$$

(2.2.1.1), (2.2.1.2) ve (2.2.1.3) eşitlikleri göz önünde bulundurularak (2.2.24) formülünden bulanık parametreli ergodik dağılımın α kesiti $\left(\left[Q_{\tilde{\beta}}(\lambda x)\right]^{\alpha}\right)$ aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\left[Q_{\tilde{\beta}}(\lambda x)\right]^{\alpha}=\left[Q_{1\beta}(\alpha,\lambda x);Q_{3\beta}(\alpha,\lambda x)\right],\qquad \alpha\in(0,1].$$

Burada

$$Q_{1\beta}(\alpha,\lambda x)=1-\frac{4K^2(\lambda L+K)^2[C_1(\alpha)+\lambda xC_2(\alpha)]e^{-L\lambda x}}{6(\lambda L)^3+18K(\lambda L)^2+19K^2\lambda L+8K^3}$$
$$Q_{2\beta}(\alpha,\lambda x)=1-\frac{4L^2(\lambda K+L)^2[D_1(\alpha)+K\lambda xD_2(\alpha)]e^{-K\lambda x}}{6(\lambda K)^3+18L(\lambda K)^2+19L^2\lambda K+8L^3}$$

Burada $C_1(\alpha), C_2(\alpha), D_1(\alpha), D_2(\alpha)$, L ve K aşağıdaki gibidir:

$$C_1(\alpha) = \frac{3(\lambda K + L)}{2L^2} + \frac{2L + \lambda K}{4(L + \lambda K)^2}; \; C_2(\alpha) = \frac{2\lambda K + 3L}{4L^2} + \frac{1}{4(L + \lambda K)};$$

$$D_1(\alpha) = \frac{3(\lambda L + K)}{2K^2} + \frac{2K + \lambda L}{4(K + \lambda L)^2}; \; D_2(\alpha) = \frac{2\lambda L + 3K}{4K^2} + \frac{1}{4(K + \lambda L)};$$

$$L \equiv \mu_{1\beta}^{-1}(\alpha) = \beta_1 + \alpha(\beta_2 - \beta_1); \; K \equiv \mu_{2\beta}^{-1}(\alpha) = \beta_3 - \alpha(\beta_3 - \beta_2).$$

2.3. BULANIK PARAMETRELİ WEİBULL DAĞILIMI

Bu bölümde η_n talep miktarlarının (r, β) parametreli Weibull dağılımına sahip olduğu varsayımında r parametresi klasik, β parametresi ise bulanık bir saydır. Önce (r, β) parametreli Weibull dağılımı tanımlansın. $W_{r,1}(x)$ ile $w_{r,1}(x)$ sırasıyla, $(r, 1)$ parametreli Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu ve olasılık fonksiyonları olup, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$W_{r,1}(x) = 1 - \exp(-x^r); \; x > 0; \; w_{r,1}(x) = rx^{r-1}\exp(-x^r); \; x > 0; \; r > 0.$$

η_n talep miktarlarının dağılım fonksiyonu $F_\eta(x)$ veya $F(x)$ ile gösterilecektir. Bu bölümdeki varsayıma göre $F(x)$, (r, β) parametreli Weibull dağılım fonksiyonudur. Yani $F_\eta(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$F_\eta(x) = 1 - \exp(-(\beta x)^r), x > 0, r > 0, \beta > 0.$$

Bu fonksiyon $W_{r,1}(x)$ fonksiyonunun yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$F_\eta(x) = W_{r,1}(\beta x). \tag{2.3.1}$$

$W_{r,1}(x)$ fonksiyonu bir Weibull dağılım fonksiyonu olduğuna göre, $x > 0$ olduğunda $W_{r,1}(x)$ fonksiyonunun monoton artan bir fonksiyon olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan $F(x) = W_{r,1}(\beta x)$ şeklinde gösterilebildiği için $F(x)$ fonksiyonu da hem x hem de β parametresine göre monoton artan bir fonksiyon olacaktır. η_n rasgele değişkenlerinin oluşturduğu yenileme fonksiyonu $U_{r,\beta}(x)$ tanımı gereği,

$$U_{r,\beta}(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_{r,1}^{*n}(\beta x) \tag{2.3.2}$$

şeklinde gösterilebilir. Ayrıca yenileme fonksiyonunun kendi değişkenine göre monoton artan bir fonksiyon olduğu bilinmektedir (Feller [13]). $U_{r,\beta}(z)$ ile $W_{r,1}(x)$ dağılım fonksiyonun ürettiği yenileme fonksiyonu gösterilsin. Bu takdirde $U_{r,\beta}(z) \equiv U_{r,1}(\beta z)$ gibi yazılabilir. Dolayısıyla, $U_{r,\beta}(z)$ fonksiyonu β parametresine göre monoton artan bir fonksiyondur. Bu bilgiler Zadeh' in Genişleme Prensibi' nin uygulanmasında kullanılacaktır. Zadeh' in Genişleneme Prensibi' nin uygulanması için öncelikle bulanık bir sayı olduğunu varsayılan β parametresinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanıştır:

$$\mu_{\tilde{\beta}}(x) = \begin{cases} \mu_{1\beta}(x), & \beta_1 \leq x < \beta_2 \\ \mu_{2\beta}(x), & \beta_2 \leq x < \beta_3 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} . \tag{2.3.3}$$

Burada, $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \infty$' dir. Ayrıca, $\mu_{1\beta}(x)$ fonksiyonu $[\beta_1; \beta_2]$ aralığında monoton artan bir fonksiyon olup, $\mu_{1\beta}(\beta_1) = 0$; $\mu_{1\beta}(\beta_2) = 1$' dir. $\mu_{2\beta}(x)$ fonksiyonu ise $[\beta_2; \beta_3]$ aralığında monoton azalan bir fonksiyon olup, $\mu_{2\beta}(\beta_2) = 1$; $\mu_{2\beta}(\beta_3) = 0$' dır.

$U_{r,\beta}(z) = U_{r,1}(\beta z)$ yenileme fonksiyonunda β parametresinin yerine $\tilde{\beta}$ bulanık sayısı yazılıp, aşağıdaki önerme verilmiştir:

Önerme 2.3.1: $\tilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.2.3) eşitliğindeki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde, $U_{r,1}(\tilde{\beta}z)$ fonksiyonunun üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mu_{U_{r,1}(\tilde{\beta}z)}(x) = \begin{cases} \mu_{1\beta}\left(\frac{1}{z}U_{r,1}^{-1}(x)\right), & x \in \left[U_{r,1}(\beta_1 z); U_{r,1}(\beta_2 z)\right) \\ \mu_{2\beta}\left(\frac{1}{z}U_{r,1}^{-1}(x)\right), & x \in \left[U_{r,1}(\beta_2 z); U_{r,1}(\beta_3 z)\right] \end{cases}. \qquad (2.3.4)$$

İspat: $U_{r,1}(\beta z)$ fonksiyonu β parametresine göre monoton artan olduğu için Zadeh' in Genişleme Prensibi uygulanarak yukarıdaki sonuç Önerme 2.2.1' in ispatının bir benzeri biçiminde elde edilebilir. ■

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı incelenirken $U_{r,1}(\beta z)$' in α kesitleri gerekli olacaktır. Bu nedenle, aşağıdaki önermede $U_{r,1}(\beta z)$' in α kesitlerinin açık şekli verilmiştir:

Önerme 2.3.2: $\tilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.3.3) eşitliğindeki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde, $U_{r,1}(\beta z)$' in α kesitlerinin açık şekli aşağıdaki gibi gösterilebilir ($\alpha \in (0,1]$):

$$\left[U_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha} \equiv \left[U_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ U_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right]. \qquad (2.3.5)$$

Burada $\left[U_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha}$ ile $U_{r,1}(\tilde{\beta}z)$ bulanık sayısının α kesiti gösterilmiştir.

İspat: Weibull Dağılımının yenileme fonksiyonu da Gama dağılımının yenileme fonksiyonu gibi monoton artan olduğuna göre Önerme 2.3.3, Önerme 2.2.2‘ nin ispatına benzer şekilde ispatlanabilir. ■

Şimdi bulanık parametreli ergodik dağılım incelenmeden önce birinci bölümde elde edilen aşağıdaki sonuç tekrar ifade edilsin.

Önerme 2.3.3: ξ_n ve η_n başlangıç rasgele değişkenler dizisi 1.3' teki tanımın özelliklerine ilaveten aşağıdaki ek koşulları da sağlasın:

i) $E(\xi_1) < \infty$, ii) $E(\eta_1) < \infty$,

iii) η_1 aritmetik olmayan rasgele değişkendir.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir ve ergodik dağılım fonksiyonunun açık şekli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_X(\lambda x) = 1 - \frac{E\big(U_\eta\big(\lambda(\zeta - x)\big)\big)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta)\right)}. \tag{2.3.6}$$

Burada

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta)\right) = \int_0^\infty U_\eta(\lambda z) d\pi_\lambda(z), \tag{2.3.7}$$

$$E\left(U_\eta\big(\lambda(\zeta - x)\big)\right) = \int_x^\infty U_\eta\big(\lambda(z - x)\big) d\pi_\lambda(z) \tag{2.3.8}$$

ve $\pi_\lambda(z)$ ise $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır. ■

$\pi_\lambda(z)$ dağılımının, $\lambda \to \infty$ iken $\pi_0(z) \equiv \frac{1}{m_1}\int_0^z \left(1 - F_\eta(v)\right) dv$ dağılımına zayıf yakınsadığı bilinmektedir (Feller[13], Rogozin [41]). Burada $m_1 = E(\eta_1) = \Gamma(1 + 1/r)/\beta$ ‘ dır. Bu bilgiden yola çıkılarak $Q_X(x)$ ergodik dağılımı için aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Önerme 2.3.4: λ’ nın yeterince büyük değerlerinde $Q_X(\lambda x)$ ergodik dağılımı için aşağıdaki yaklaşık ifade yazılabilir:

$$Q_X(\lambda x) \approx Q_\beta(\lambda x) \equiv 1 - \frac{\int_x^\infty U_\eta\big(\lambda(z - x)\big)\left(1 - F_\eta(z)\right) dz}{\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)\left(1 - F_\eta(z)\right) dz}. \tag{2.3.9}$$

İspat: Öncelikle (2.3.7) ve (2.3.8)' de $\pi_\lambda(z)$' in yerine $\pi_0(z)$ yazılıp daha sonra $\pi_0(z)$' in diferensiyeli alındığında

$$d\pi_0(z) = \frac{1}{m_1}\Big(1 - F_\eta(z)\Big)dz \tag{2.3.10}$$

bulunur. (2.3.10), (2.3.7) ve (2.3.8)' de göz önünde bulundurularak (2.3.9) elde edilir. ■

Diğer taraftan η_n rasgele değişkenleri (r, β) parametreli Weibull dağılımına sahip oldukları için (2.3.1) eşitliğinden $F_\eta(z) = W_{r,1}(\beta z)$ ve $U_{r,\beta}(z) = U_{r,1}\,(\beta z)$ olduğu kolayca görülebilir. Bu ifadeler (2.3.9)' un sağ tarafında $Q_\beta(\lambda x)$' in ifadesinde göz önünde bulundurularak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.3.5: $Q_\beta(\lambda x)$ için aşağıdaki gösterim de yazılabilir:

$$Q_\beta(\lambda x) = 1 - \frac{\int_x^\infty U_{r,1}\big(\lambda\beta(z-x)\big)(1 - W_{r,1}(\beta z))dz}{\int_0^\infty U_{r,1}(\lambda\beta z)(1 - W_{r,1}(\beta z))dz}. \tag{2.3.11}$$

Burada $W_{r,1}(x)$ ve $U_{r,1}(x)$ fonksiyonları sırasıyla $(r, 1)$ parametreli Weibull dağılım fonksiyonu ve yenileme fonksiyonudur. Amaç, β parametresi bir bulanık sayı olduğunda $Q_\beta(\lambda x)$ dağılımının α kesitlerinin bulunmasıdır. Bunun için önce Önerme 2.3.5 bulanık parametre için ifade edilsin:

$$Q_{\tilde\beta}(\lambda x) = 1 - \frac{\int_x^\infty U_{r,1}\left(\lambda\tilde\beta(z-x)\right)\left(1 - W_{r,1}(\tilde\beta z)\right)dz}{\int_0^\infty U_{r,1}(\lambda\tilde\beta z)\left(1 - W_{r,1}(\tilde\beta z)\right)dz}. \tag{2.3.12}$$

Burada $Q_{\tilde\beta}(\lambda x)$ gösterim ile β parametresinin bulanık sayı olması durumundaki $Q_\beta(\lambda x)$ ergodik dağılımının fonksiyonu gösterilmiştir. $\tilde\beta$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.3.3) eşitliği ile tanımlanmıştır. Bu varsayım altında Önerme 2.3.2' den aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 2.3.1. $\tilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.3.3) eşitliğiyle tanımlanmış olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\left[U_{r,1}(\lambda\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha} \equiv \left[U_{r,1}\left(\lambda z \mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ U_{r,1}\left(\lambda z \mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right], \qquad (2.3.13)$$

$$\left[U_{r,1}\left(\lambda\tilde{\beta}(z-x)\right)\right]^{\alpha} \equiv \left[U_{r,1}\left(\lambda(z-x)\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ U_{r,1}\left(\lambda(z-x)\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right]. \qquad (2.3.14)\ \blacksquare$$

Ayrıca, $W_{r,1}(\tilde{\beta}z)$ bulanık fonksiyonu için de benzer sonuçlar ifade edilebilir.

Sonuç 2.3.2: $\tilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.3.3) eşitliğiyle tanımlanmış olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\left[W_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha} \equiv \left[W_{r,1}\left(z \mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ W_{r,1}\left(z \mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right]. \qquad (2.3.15)$$

Şimdi de $X(t)$ sürecinin bulanık parametreli ergodik dağılımının α kesitleri elde edilsin. (2.3.12) eşitliği ve integrallerin α kesit özelliği göz önünde bulundurulduğunda, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\left[Q_{\tilde{\beta}}(\lambda x)\right]^{\alpha} = 1 - \frac{\int_x^{\infty}\left[U_{r,1}\left(\lambda\tilde{\beta}(z-x)\right)\right]^{\alpha}\left[\left(1-W_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right)\right]^{\alpha} dz}{\int_0^{\infty}\left[U_{r,1}(\lambda\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha}\left[\left(1-W_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right)\right]^{\alpha} dz}. \qquad (2.3.16)$$

(2.3.15) eşitliğinden ve α kesitlerin temel özelliklerinden

$$\left[1-W_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right]^{\alpha} \equiv \left[1-W_{r,1}\left(z \mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right);\ 1-W_{r,1}\left(z \mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] \qquad (2.3.17)$$

olur. (2.3.13) ve (2.3.17) eşitlikleri göz önünde bulundurularak, her $\alpha \in [0,1)$ için

$$\int_0^\infty \left[U_{r,1}(\lambda\tilde{\beta}z)\right]^\alpha \left[\left(1 - W_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right)\right]^\alpha dz$$

$$= \left[\int_0^\infty U_{r,1}\left(\lambda z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - W_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz\,;\right.$$

$$\left.\int_0^\infty U_{r,1}\left(\lambda z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - W_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz\right] \qquad (2.3.18)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (2.3.14) ve (2.3.17) gösterimlerinden yararlanılarak,

$$\int_x^\infty \left[U_{r,1}\left(\lambda\tilde{\beta}(z - x)\right)\right]^\alpha \left[\left(1 - W_{r,1}(\tilde{\beta}z)\right)\right]^\alpha dz$$

$$= \left[\int_x^\infty U_{r,1}\left(\lambda(z - x)\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - W_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz\,;\right.$$

$$\left.\int_x^\infty U_{r,1}\left(\lambda(z - x)\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - W_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz\right] \qquad (2.3.19)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.3.18) ve (2.3.19) eşitlikleri (2.3.16) formülünde göz önünde bulundurulduğunda,

$$\left[Q_{\tilde{\beta}}(\lambda x)\right]^\alpha = [Q_1(\alpha, \lambda x);\ Q_3(\alpha, \lambda x)] \qquad (2.3.20)$$

elde edilir. Burada $Q_1(\alpha, \lambda x)$ ve $Q_3(\alpha, \lambda x)$ aşağıdaki gibidir:

$$Q_1(\alpha, \lambda x) = \left[1 - \frac{\int_x^\infty U_{r,1}\left(\lambda(z - x)\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - W_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz}{\int_0^\infty U_{r,1}\left(\lambda z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - W_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz}\right]^+ ;$$

$$(2.3.21)$$

$$Q_3(\alpha, \lambda x) = 1 - \frac{\int_x^\infty U_{r,1}\left(\lambda(z - x)\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - W_{r,1}\left(z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz}{\int_0^\infty U_{r,1}\left(\lambda z\mu_{2\beta}^{-1}(\alpha)\right)\left[1 - W_{r,1}\left(z\mu_{1\beta}^{-1}(\alpha)\right)\right] dz} \qquad (2.3.22)$$

Dolayısıyla, (2.3.9) bağıntısına göre, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\left(Q_X(\lambda x)\right)$ yerine λ' nın yeterince büyük değerlerinde $Q_\beta(\lambda x)$ kullanılabileceğine göre, β parametresi bulanık sayı olduğunda, her $\alpha \in [0,1)$ için

$$\left[\widetilde{Q}_X(\lambda x)\right]^\alpha \approx \left[Q_{\widetilde{\beta}}(\lambda x)\right]^\alpha \tag{2.3.23}$$

yazılabilir. Burada $\widetilde{Q}_X(\lambda x)$ ile bulanık parametreli ergodik dağılım gösterilmiştir. Yukarıdaki bilgiler özetlenecek olursa, aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 2.3.2: $\widetilde{\beta}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (2.3.3) eşitliğindeki gibi tanımlanmış ve Önerme 2.3.3' ün koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her $\alpha \in [0,1)$ için $X(t)$ sürecinin bulanık parametreli ergodik dağılımının $\left(\widetilde{Q}_X(\lambda x)\right)$ α kesitleri $\left(\left[\widetilde{Q}_X(\lambda x)\right]^\alpha\right)$ yaklaşık olarak

$$\left[\widetilde{Q}_X(\lambda x)\right]^\alpha \approx [Q_1(\alpha, \lambda x);\ Q_3(\alpha, \lambda x)] \tag{2.3.24}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $Q_1(\alpha, \lambda x)$ ve $Q_3(\alpha, \lambda x)$ sırasıyla, (2.3.21) ve (2.3.22) eşitlikleriyle tanımlanmış alt ve üst sınırlardır. ■

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada genelleştirilmiş yansıtan bariyerli bir ödüllü yenileme süreci matematiksel olarak modellenmiş ve aşağıdaki temel sonuçlar elde edilmiştir:

1) Sürecin bir boyutlu dağılımının kesin şekli bulunmuştur.
2) Sürecin üç önemli $\left(N_1(z), \tau_1(z), S_{N(z)}\right)$ sınır fonksiyoneli tanımlanmış ve bu fonksiyonellerin ilk dört momenti için kesin ve asimtotik sonuçlar elde edilmiştir.
3) Sürecin ergodikliği ispat edilmiş ve ergodik dağılımın kesin şekli ortaya konmuştur.
4) Sürecin ergodik dağılımının zayıf yakınsadığı ispatlanmış ve limit dağılımının bir kalan ömür dağılımı olduğu saptanmıştır.
5) Sürecin ergodik momentleri için kesin ve asimtotik sonuçlar elde edilmiştir.
6) Bulanık parametreli Üstel, Erlang, Gama ve Weibull dağılımları durumunda sürecin ergodik dağılımının üyelik fonksiyonu ve alfa kesitleri çeşitli durumlar için elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Abramowitch, M. and Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, *John Wiley*, New York, 1964.

[2] Afanasyeva, L.G. and Bulinskaya, E. V., Some asymptotic results for random walks in a strip, Theory of Probability and Its Applications, 29(4), 654 – 668, 1984.

[3] Aliyev, R., Okur Bekar, N., Khaniyev, T. and Unver, I., Asymptotic expansions for the moments of the boundary functionals of the renewal reward process with a discrete interference of chance, Mathematical and Computational Applications, 15, 117 – 126, 2010.

[4] Alsmeyer, G., Some relations between harmonic renewal measure and certain first passage times, Statistics and Probability Letters, 12(1), 19 – 27, 1991.

[5] Anisimov, V.V. and Artalejo, J.R., Analysis of Markov multi-server retrial queues with negative arrivals, Queuing Systems: Theory and Applications, 39(2 – 3), 157 – 182, 2001.

[6] Aras, G. and Woodroofe, M., Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average, Annals of Statistics, 21, 503 – 519, 1993.

[7] Borovkov, A.A., Asymptotic Methods in Queuing Theory, *John Wiley*, New York, 1984.

[8] Brown, M. and Solomon, H., A second – order approximation for the variance of a renewal-reward process, Stochastic Processes and Applications, 3, 301 – 314, 1975.

[9] Buckley, J.J., Fuzzy Probabilities, *Springer – Verlag*, Berlin, 2005.

[10] Chang, J.T. and Peres, Y., Ladder heights, Gaussian random walks and the Riemann zeta function, Annals of Probability, 25, 787 – 802, 1997.

[11] Çınlar, E., Introduction to Stochastic Processes, *Englewood Cliffs*, New Jersey, 1975.

[12] Federyuk, M. V., Asymptotics for integrals and Series, *Nauka*, Moscow, 1984.

[13] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, *John Wiley*, New York, 1971.

[14] Gever B., Khaniyev T., Mammadova Z., Genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi, 12. Uluslararası Ekonometri, İstatistik ve Yöneylem Araştırması Sempozyumu, 310 – 311, Denizli, Mayıs 2011.

[15] Gihman, I. I. and Skorohod, A.V., Theory of Stochastic Processes II, *Springer –Verlag* , Berlin, 1975.

[16] Janssen, A.J.E.M. and van Leeuwarden, J.S.H., Cumulants of the maximum of the Gaussian random walk, Stochastic Processes and Their Applications, 117, 1928–1959, 2007.

[17] Janssen, A.J.E.M. and van Leeuwarden, J.S.H., 2007, On Lerch’s transcendent and the Gaussian random walk, Annals of Applied Probability, 17, 421 – 439, 2007 .

[18] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M., Modern Actuarial Risk Theory, *Kluwer Academic Publishers*, Boston, 2001.

[19] Kastenbaum, M. A., A dialysis system with one absorbing and one semi – reflecting state, Journal of Applied Probability, 3, 363 – 371, 1966.
[20] Khaniev, T. A., Unver, İ. and Maden, S., On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, Stochastic Analysis and Applications, 19(5), 799 – 819, 2001 .
[21] Khaniyev T. A., About moments of generalized renewal process, Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Phys. Tech. and Math. Sciences, 25(1), 95 – 100, 2005.
[22] Khaniyev, T.A., Mammadova Z.I., On the stationary characteristics of the extended model of type (s, S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistical Computation and Simulation,76(10), 861 – 874, 2006.
[23] Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T., Kucuk, Z. and Okur Bekar, N., On the distributions of a renewal reward process and it's additive functional, Mathematical and Computational Applications, 13(1), 41–50, 2008.
[24] Khaniyev T., Gever B., Mammadova Z., Genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin momentleri için asimtotik açılımlar, 6. Ankara Matematik Günleri, , 114 – 115, Hacettepe Ü., Ankara, Haziran 2011.
[25] Khaniyev T., Mammadova Z., Gever B., Yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin durağan olmayan dağılımı üzerine, 10.Matematik Sempozyumu, 117, İstanbul, Eylül 2011.
[26] Khaniyev T., Gever B., Mammadova Z., Investigation of a renewal reward process with a generalized reflecting barrier, The 4th congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), 100, Baku, July 2011.
[27] Khaniyev T., Gokpinar F., Gever B., Ergodic Distribution for a Fuzzy inventory model of type (s,S) with Gamma Distributed Demands, Fuzzyss'11 The Second International Fuzzy Systems Symposium, Hacettepe University, 360 – 362, Ankara, November 2011.
[28] Khaniyev T., Mammadova Z., Gever B., Asymptotic Expansions for the moments of a Renewal Reward Process with a Generalized Reflecting Barrier, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, is submitted, 2011.
[29] Khaniyev T., Gokpinar F., Gever B., Ergodic distribution for a fuzzy inventory model of type (s,S) with Gamma distributed demands, Expert Systems and Applications, is submitted, 2011.
[30] Khorsunov D., On distributon tail of the maximum of a random walk, Stochastic Processes and Applications, 72, 97 – 103, 1997.
[31] Korolyuk, V. S. and Borovskikh, Y. V., Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, *Naukova Dumka*, Kiev,1981.
[32] Kovalenko, I. N., Kuznetchov, N. and Shurenkov, V. M., Stochastic Processes, *Naukova Dumka*, Kiev, 1983.
[33] Lee, K.H., First course on fuzzy theory and applications, *Springer*, Heilderberg, 2005.
[34] Levy, J.B., Taqqu, M.S., Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards, Bernoulli, 6(1), 23–44, 2000.
[35] Lotov V.I, Some boundary crossing problems for Gaussian random walks, The Annals of Probability, 24(4), 2154 – 2171, 1996.

[36] Mammadova Z., 2011, Normal Müdahaleli Yarı – Markov Süreçlerinin Asimtotik Yöntemlerle İncelenmesi, *Doktora Tezi, KTU,* Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
[37] Mammadova Z., Khaniyev T., Gever B., 2011, Üçgensel müdahaleli (s,S) tipli yarı - Markov modeli için asimtotik sonuçlar, 12. Uluslararası Ekonometri, İstatistik ve Yöneylem Araştırması Sempozyumu, 285, Denizli, 26 – 29 Mayıs.
[38] Nasirova, T. I., Yapar C., Khaniev, T. A., On the probability characteristics of the stock level in the model of type (s, S), Cybernetics and Systems Analysis, 5, 69 – 76, 1998.
[39] Oruç Ö., 2011, Genelleştirilmiş Hukuhara Yöntemi ile Bazı bulanık Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümlerinin araştırılması, *Yüksek Lisans Tezi,* TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
[40] Prabhu, N.U., Stochastic Storage Processes: Queues, Insurance Risk, and Dams, *Springer,* New York, 1980.
[41] Rogozin, B. A., On the distribution of the first jump, Theory of Probability and Its Applications, 9, 450 – 464, 1964.
[42] Ross T.J., Booker J.M., Parkinson W.J, Fuzzy Logic and Probability Applications, ASA – SIAM, 2002.
[43] Şen Z., Mühendislikte Bulanık Mantık ve Modelleme Prensipleri, *Su Vakfı Yayınları,* İstanbul, 2004.
[44] Weesakul, B., The random walk between a reflecting and an absorbing barrier, Ann. Math. Statist., 23, 765 – 774, 1961.
[45] Woodroofe, M., Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis, SIAM, Philadelphia, 1982.
[46] Zadeh, L.A., Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338 – 353, 1965.
[47] Zadeh, L.A., Toward a generalized theory of uncertainty (GTU) – an outline, Information Sciences 172, 1 – 40, 2005.
[48] Zadeh L.A., The concept of a linguistic variable and its applications in approximate reasoning, Information Sciences 8, 199 – 251, 1975.
[49] Zadeh L., Discussion: Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competitive, Technometrics, 37, 271 – 276, 1995.
[50] Zadeh L.A., Probability Measures of Fuzzy Events, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 23(2), 421 – 427, 1968.
[51] Zadeh L.A., Fuzzy probabilities, Inform Proc Management, 20, 363–372, 1984.

EKLER

EK A: TERİMLER SÖZLÜĞÜ

Türkçe Terim	**İngilizce Terim**
Bulanık	Fuzzy
Bulanık Küme	Fuzzy Set
Çekirdek	Core
Destek	Support
Klasik Küme	Crisp Set
Normallik	Normality
α Kesit	α Cut

EK – B: STOKASTİK SÜREÇLER

Tanım B.1 (Rasgele Fonksiyon): $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı ve T bir indeksler kümesi, (U, R) herhangi bir ölçülebilir uzay olsun. İki değişkenli f fonksiyonu

$$f: \Omega \times T \rightarrow U$$

tanımlanmış olsun. Eğer her $A \in R$ için

$$\{(\omega, t): f(\omega, t) \in A\} \in \sigma(\mathcal{F} \otimes B_T)$$

ise, bu takdirde $f(\omega, t)$ fonksiyonuna rasgele fonksiyon denir.

Burada, B_T sigma cebri T' nin alt kümeleri üzerinde tanımlanmış bir σ – cebir ve $\sigma(\mathcal{F} \otimes B_T)$ ise T ve B_T sigma cebirlerin kartezyen çarpımlarını içeren en küçük bir σ cebirdir.

Rasgele fonksiyonları en genel şekli ile incelemek bazen çok zordur. Bu nedenle, mevcut literatürde T indeksler kümesinin özel durumları ele alınmıştır. Özellikle, $T \subseteq [0, +\infty)$ ve $U = R = (-\infty, +\infty)$ olduğunda ve $t \in T$ değişkeni zaman parametresi olarak yorumlandığında, yukarıda tanımlanan $f(\omega, t)$ rasgele fonksiyonuna stokastik süreç denir.

Bu durumda $U = R$ ve $T \subseteq [0, +\infty)$ olduğu için yukarıdaki genel tanımın daha basit bir şekilde ifadesi mümkündür.

Tanım B.2 (Stokastik Süreç): Eğer $f: \Omega \times T \rightarrow R$ fonksiyonu her $A \in B_R$ için $\{(\omega, t): f(\omega, t) \in A\} \in \sigma(\mathcal{F} \otimes B_T)$ ise, bu takdirde $f(\omega, t)$ fonksiyonuna bir stokastik süreç denir.

EK- C: KESİKLİ MÜDAHALELİ YARI – MARKOV SÜREÇLERİ İÇİN GENEL ERGODİK TEOREMİ

Teorem C.1 (Genel Ergodik Teorem) (Gihman ve Skorohod [15], s. 243): $X(t)$ süreci kesikli müdahaleli bir yarı – Markov süreci olsun. Ayrıca aşağıdaki iki varsayım sağlansın:

1. **Varsayım:** $X(t)$ sürecinin $\tau_1, \tau_2, \ldots$ anlarındaki değerleri $(X(\tau_n), n = 1,2, \ldots)$ ergodik bir Markov zinciri olacak şekilde $\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots < \infty$ artan zaman anları bulunsun.

2. **Varsayım:** $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ anları arasında geçen sürelerin beklenen değeri sonlu olmuş olsun, yani her $n = 1,2, \ldots$ için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olsun.

Bu takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir.

Teorem C.2 (Gihman ve Skorohod [15], s. 243): Teorem B.1' in varsayımları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her sınırlı ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(s)\big)ds = S_f.$$

Burada S_f fonksiyoneli aşağıdaki gibidir:

$$S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(x)P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dtd\pi(z).$$

Burada, $\pi(z)$ dağılımı $\{X(\tau_n)\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır.

Not: Bu teorem, zaman ortalamalarının durum ortalamalarına 1 olasılığı ile yakınsadığını ifade eden bir önermedir ve ergodik süreçler için en temel bağıntıyı ortaya koyar.

EK – D: WALD ÖZDEŞLİĞİ

ν tam değerli rasgele değişkeni ve $\{\xi_n\}$ dizisi $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ olasılık uzayında tanımlanmış olsunlar. Ayrıca $\nu \geq 0$ ve ξ_n rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsun. $\mathfrak{I}_{k,n}$ ile $\xi_k, \dots, \xi_n$ rasgele değişkenlerinin ürettiği sigma cebir, yani $\mathfrak{I}_{k,n} = \sigma(\xi_k, \dots, \xi_n)$ gösterilsin.

Tanım D.1: Her $n = 1,2, \dots$ için $\{\nu \leq n\}$ olayı, $\mathfrak{I}_{n+1,\infty}$, sigma cebrinden bağımsız olduğunda ν rasgele değişkenine "gelecekten bağımsız" rasgele değişken denir.

Tanım D.2: Her $n = 1,2, \dots$ için $\{\nu \leq n\} \in \mathfrak{I}_{1,n}$ olduğunda ν rasgele değişkenine Markov rasgele değişkeni veya durdurma anı denir.

Başka bir deyişle, bu durumda $\xi_1, \dots, \xi_n$ rasgele değişkenlerinin değerleri bilindiğinde $\{\nu \leq n\}$ olayının gerçekleşip gerçekleşmediğini kesin olarak söylemek mümkündür. Markov rasgele değişkeni ν, ξ_k rasgele değişkenler dizisi için "gelecekten bağımsız" rasgele değişkendir (Borovkov [7], s. 86).

$S_\nu = \xi_1 + \dots + \xi_\nu$ olsun. S_ν, ν rasgele değişken sayısında rasgele değişkenlerin toplamıdır.

Teorem D.1 (Wald Özdeşliği) (Borovkov [7], s. 88): $\xi_1, \xi_2, \dots$ rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve aynı dağılıma sahip, ν rasgele değişkeni ise "gelecekten bağımsız" bir rasgele değişken olsun. Ayrıca $E(\xi_k) < \infty$ ve $E(\nu) < \infty$ sağlansın. Bu takdirde,

$$E(S_\nu) = E\left(\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k\right) = E(\xi_1)E(\nu) \qquad (D.1)$$

olur. (D.1) eşitliğine Wald Özdeşliği denir.

EK – E: KESİNLEŞTİRİLMİŞ YENİLEME TEOREMİ

$\{\eta_n\}$, $n = 1,2,\ldots$' ler bir $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız, aynı dağılıma sahip ve pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi olsun. Bu dizinin yardımı ile aşağıdaki stokastik süreç inşa edilsin:

$$N(t) = \min\left\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \eta_i > t\right\}, t > 0. \qquad (E.1)$$

$N(t)$ sürecine literatürde "Yenileme Süreci" denir. $N(t)$ yenileme sürecinin beklenen değerine "Yenileme Fonksiyonu" denir ve genellikle $U(t)$ sembolü ile, yani

$$U(t) \equiv E\big(N(t)\big) \qquad (E.2)$$

şeklinde gösterilir. η_n, $n = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(t)$, yani $F(t) = P\{\eta_1 \leq t\}$ şeklinde olsun. Bu takdirde, $U(t)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t). \qquad (E.3)$$

Burada $F^{*n}(t)$ ile $F(t)$ dağılım fonksiyonunun n. konvolüsyon çarpımı gösterilmiş olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$F^{*0}(t) = \varepsilon(t) \equiv \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}; \; F^{*1}(t) \equiv F(t);$$

$$F^{*n}(t) = F^{*(n-1)}(t) * F(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-s)\, dF(s), n = 2,3, \ldots$$

$U(t)$ fonksiyonu, monoton azalmayan, pozitif değerli bir fonksiyondur ve $U(0) = 1$' dir. Ayrıca, her sonlu t için $U(t) < \infty$' dur (Feller [13], s.185). $U(t)$ fonksiyonu aşağıdaki integral denklemini sağlamaktadır (Feller [13], s.186):

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s) dF(s), t \geq 0 \tag{E.4}$$

$U(t)$ fonksiyonunun asimtotik davranışını incelemek, olasılık teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle, $U(t)$' nin $t \to \infty$ iken asimtotik davranışı ile ilgili literatürde birçok önemli sonuçlar mevcuttur. Bu sonuçların en önemlilerinden birisi "Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi" adı ile bilinmekte olup, Feller W. [13] tarafından ispatlanmıştır. Aşağıda, bu teorem ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem E.1 (Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi): $F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, bu dağılımın beklenen değeri (μ) ve varyansı (σ^2) sonlu olsun. Bu takdirde, $t \to \infty$ iken

$$0 \leq U(t) - \left(\frac{t}{\mu}\right) \to \frac{(\mu^2 + \sigma^2)}{2\mu^2} \tag{E.5}$$

olur (Feller [13], s.366).

Not: "Birinci Yenileme Teoremi" olarak bilinen aşağıdaki Teorem E.2' den sadece $U(t) \sim (t/\mu)$ sonucuna ulaşılır. (E.5) sonucu bu sonuçtan çok daha güçlü bir sonuçtur. Tezin daha rahat anlaşılabilmesi için Birinci Yenileme Teoremi aşağıdaki Teorem E.2 şeklinde verilebilir (Feller [13], s.360).

Teorem E.2 (Birinci Yenileme Teoremi): $F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, $F(.)$ dağılımının beklenen değeri (μ) sonlu olsun. Bu takdirde, her $h > 0$ sabiti için $t \to \infty$ iken,

$$U(t) - U(t-h) \to \frac{h}{\mu} \tag{E.6}$$

olur (Feller [13], s. 360).

EK – F: TAUBER – ABEL TEOREMİ

$F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut olsun (en azından öyle bir $(-\alpha, \beta)$ aralığı mevcut olsun ki, her $\lambda \in (-\alpha, \beta)$; $\alpha, \beta > 0$ için $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut ve sonlu olsun).

Ayrıca $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olsun. Bu taktirde, $\lambda \to 0$ iken $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$ olur. Bu önermenin tersi de doğrudur, yani eğer $\lambda \to 0$ iken $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$ ise $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olur.

Burada "~" simgesi ile iki fonksiyonun asimtotik denkliği gösterilmiştir, yani "$F(t) \sim G(t)$" yazılabilmesi için $\lim_{t\to\infty} F(t)/G(t) = 1$ ve " $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$" yazılabilmesi için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\tilde{G}(\lambda)} = 1$$

olmalıdır.

Bu önerme literatürde Tauber – Abel teoremi olarak bilinmektedir (Feller [13], s. 498).

EK – G: CARLEMAN KOŞULU

Teorem G.1 (Feller [13]): $m_n = E(\eta_1^n) < \infty$ olsun ve aşağıdaki (G.1) koşulu sağlansın:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}}} = \infty\,. \tag{G.1}$$

Bu takdirde η_1 rasgele değişkeninin dağılımı m_n momentleri yardmıyla birebir tanımlanabilir. Diğer bir deyişle, bu durumda momentler probleminin çözümü mevcuttur. Yani $\lambda \to \infty$ iken,

$$E(\zeta^n) \to E_0(\zeta^n)$$

olur. Burada $E(\zeta^n)$ ve $E_0(\zeta^n)$ aşağıdaki gibidir:

$$E(\zeta^n) = \int_0^{\infty} z^n d\pi_\lambda(z)\,;\ \pi_\lambda(z) = \lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n \le z\}\,;$$

$$E_0(\zeta^n) = \int_0^{\infty} z^n d\pi_0(z)\,;\ \pi_0(z) = \frac{1}{m_1}\int_0^{z} \left(1 - F_\eta(x)\right) dx. \qquad \blacksquare$$

(G.1) koşulu literatürde Carleman Koşulu olarak bilinmektedir.

EK H: YAKINSAMA ÇEŞİTLERİ

$\{X_n, n = 1,2,\dots\}$ rasgele değişken dizisi ve X_0 rasgele dğeişkeni aynı br olasılık uzayında $\left((\Omega, \mathcal{F}, P)\right)$ tanımlanmış olsun. Bu takdirde, aşağıdaki yakınsaklık çeşitleri verilebilir.

Tanım H.1 (Olasılığa göre Yakınsama): Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega: |X_n(\omega) - X_0(\omega) \geq \varepsilon|\} = 0$$

olduğunda, "X_n rasgele değişken dizisi X_0 rasgele değişkenine olasılığa göre yakınsar" denir. Kısaca $n \to \infty$ iken $X_n \xrightarrow{P} X_0$ ile gösterilir.

Tanım H.2 (1 Olasılığı ile Yakınsama): Her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega: |X_n(\omega) - X_0(\omega) \geq \varepsilon|\} < \infty$$

olduğunda "X_n rasgele değişken dizisi X_0 rasgele değişkenine 1 olasılığına göre yakınsar" denir. Kısaca $n \to \infty$ iken $X_n \xrightarrow{1} X_0$ gösterim ile gösterilir. Bu yakınsama türüne bazen hemen hemen her yerde yakınsama da denir.

Not: 1 olasılığı ile yakınsamadan olasılığa göre yakınsama elde edilir. Fakat tersi her zaman doğru olmaya da bilir.

Tanım H.3 (Zayıf Yakınsama): Eğer

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$$

oluyor ise, "X_n rasgele değişken dizisi X_0 rasgele değişkenine zayıf yakınsar" denir. Kısaca "$F_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F_0$" veya $n \to \infty$ iken "$X_n \xrightarrow{d} X_0$" ile gösterilir. Burada $F_n(x) \equiv P\{X_n \leq x\}, n = 1,2,\dots; F_0(x) \equiv P\{X_0 \leq x\}$' dır. Ayrıca, x noktası $F_0(x)$ dağılımının süreklilik noktasıdır. Bu yakınsama çeşidine bazen "noktasal yakınsama" da denir. Ayrıca, "zayıf yakınsama" nın farklı bir tanımı da mevcuttur:

Tanım H.3.1: Her sınırlı ölçülebilir $g(x)$ fonksiyonu için

$$\int_R g(x)dF_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_R g(x)dF_0(x)$$

oluyorsa, "X_n rasgele değişken dizisi X_0 rasgele değişkenine zayıf yakınsar" denir.

Not: Hem 1 olasılığı ile, hem de olasılığa göre yakınsamadan zayıf yakınsama elde edilir. Fakat tersi doğru olmaya da bilir.

EK – I: BULANIK MANTIK KARAKTERİSTİKLERİ

H.1. Bulanık Kümeler

Klasik kümelerde, bir kümenin üyelik fonksiyonu (karakteristik fonksiyonu) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Bu tanıma göre μ_A fonksiyonu X evrensel kümesindeki her elemanı $\{0,1\}$ kümesine götürür:

$$\mu_A(x): X \to \{0,1\}.$$

Yani, klasik kümelerde bir eleman ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Ancak bulanık kümelerde bu böyle değildir. Bulanık kümelerde elemanın kümeye ait olma derecesi vardır ve bu aitlik derecesi 0 ile 1 arasındaki bir reel sayıdır. Şimdi bulanık küme tanımı verilsin.

Tanım I.1(Bulanık Küme veya Üyelik Fonksiyonu): Bulanık bir küme aslında elemanlarını $[0,1]$ aralığına götüren bir fonksiyondur (Lee [33]). Bu fonksiyona aynı zamanda bulanık kümenin üyelik fonksiyonu da denir. Üyelik fonksiyonu veya bulanık küme aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1].$$

Üyelik fonksiyonu için aynı zamanda $A(x): X \rightarrow [0,1]$ gösterimi de kullanılabilir.

Tanım I.2 (Destek): Bir A bulanık kümesinin desteği $\text{destek}(A)$ ile gösterilir ve

$$\text{destek}(A) = \overline{\{x \in X | \mu_A(x) > 0\}}$$

şeklinde tanımlanır (Lee [33]). Tanımdan anlaşılacağı üzere bulanık bir kümenin desteği klasik bir kümedir.

Tanım I.3 (Çekirdek): Bir A bulanık kümesinin çekirdeği $\text{çek}(A)$ ile gösterilir ve

$$\text{çek}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlanır (Lee [33]). Tanımdan anlaşılacağı üzere bulanık bir kümenin çekirdeği, desteği gibi klasik bir kümedir.

Tanım I.4 (α Kesit Kümesi): Bir A bulanık kümesinin α kesit kümesi A_α, üyelik derecesi α' dan küçük olmayan elemanların oluşturduğu kümedir. Yani $A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$' dir (Lee [33]).

Tanım I.5 (Bulanık Sayı): Eğer bir bulanık küme dışbükey, normal ve üyelik fonksiyonu parçalı sürekli ise bu kümeye bulanık sayı adı verilir (Lee [33]).

$A(x): X \rightarrow [0,1]$ bir bulanık küme olmak üzere, eğer $A(x)$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bulanık sayı adını alır (Lee [33]).

i) A konvekstir yani $A(\lambda r + (1-\lambda)s) \geq \min[A(r), A(s)]$, $\lambda \in [0,1]$ ve $r, s \in X$;

ii) A normaldir, yani $\exists\, x_0 \in X$ için $A(x_0) = 1$' dir,

iii) A üstten parçalı süreklidir, yani $\forall\, x_0 \in X$ için $A(x_0) \geq \lim_{x \to x_0^{\pm}} A(x)$' dır.

iv) $[A]^0 = \overline{\text{destek}(A)} = \overline{\{x \in R | A(x) > 0\}}$ kompakt bir kümedir.

Tanım I.6 (Negatif Bulanık Sayı): μ bulanık sayısının α kesit kümesi $\alpha = 0$ için $[\mu]^{\alpha} = [\mu^-, \mu^+]$ olsun. Eğer $\mu^+ < 0$ ise μ bulanık sayısı negatiftir denir (Lee [33]).

Tanım I.7 (Pozitif Bulanık Sayı): μ bulanık sayısının α kesit kümesi $\alpha = 0$ için $[\mu]^{\alpha} = [\mu^-, \mu^+]$ olsun. Eğer $\mu^- > 0$ ise μ bulanık sayısı pozitiftir denir (Lee [33]).

Aşağıda en çok bilinen bulanık sayılar ve özellikleri tanıtılmıştır.

I.1.1. Üçgensel Bulanık Sayı

Üç noktayla ifade edilebilen bir bulanık sayıdır. $A = (a_1, a_2, a_3)$ veya $A = (a_1/a_2/a_3)$ biçiminde gösterilir. Böyle bir bulanık sayının üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Lee [33]).

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases}$$

Üyelik fonksiyonu yardımıyla α – kesit kümesi aşağıdaki gibi bulunabilir ($\alpha \in$ 0,1.

$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = a \Rightarrow x = \alpha(a_2 - a_1) + a_1,$$

$$\frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} = a \Rightarrow x = a_3 - \alpha(a_3 - a_2),$$
$$[A]^\alpha = [u(\alpha), v(\alpha)], [A]^\alpha = [\alpha(a_2 - a_1) + a_1, a_3 - \alpha(a_3 - a_2)].$$

I.1.2. Yamuk Bulanık Sayı

Yamuk bulanık A sayısını $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ şeklinde ifade edilir (Lee [33]). Üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & x > a_4 \end{cases} .$$

Üyelik fonksiyonu yardımıyla α – kesit kümesini aşağıdaki gibi bulunabilir ($\alpha \in$ 0,1:

$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha \Rightarrow x = \alpha(a_2 - a_1) + a_1,$$
$$\frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} = \alpha \Rightarrow x = a_4 - \alpha(a_4 - a_3),$$
$$[A]^\alpha = [u(\alpha), v(\alpha)], \qquad [A]^\alpha = [\alpha(a_2 - a_1) + a_1, a_4 - \alpha(a_4 - a_3)].$$

I.1.3. Gauss Bulanık Sayısı

Gauss bulanık sayısının üyelik fonksiyonu

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{\sigma^2}\right)$$

şeklindedir. Burada m ortalama, σ standart sapmadır.

EK – J: ZADEH' İN GENİŞLEME PRENSİBİ

x değişkeninin f altındaki görüntüsü olan $y = f(x)$ dönüşümünü (fonksiyonunu) göz önüne alalım. Bu dönüşümdeki x değişkeni bulanık bir sayı veya bulanık bir küme olursa veya hem x hem de f dönüşümünün kendisi aynı anda bulanık olursa o zaman y' deki bulanıklık nasıl elde edilir, sorusunun üstesinden bulanık mantık teorisini ortaya atan Lütfi A. Zadeh' in Genişleme Prensibi' yle gelinir.

$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sırasıyla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ üzerinde tanımlı kümler ve $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n$ olsun.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n): X \to Y$ ise o zaman Y de B bulanık kümesi f ve $A_1, A_2, \ldots, A_n$' den Genişleme Prensibi' ne göre aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max\limits_{y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \left[\min\left(\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\ \right)\right], & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}.$$

Burada "max" operatörü, fonksiyon sürekli değerli olursa "sup" operatörü ile yer değiştirir. Eğer fonksiyon tek değişkenli ve birebir bir fonksiyon ise o zaman Genişleme Prensibi,

$$\mu_B(y) = \mu_A\left(f^{-1}(y)\right);\ f^{-1}(y) \neq \emptyset$$

şeklinde yazılabilir (Lee [33]). Eğer fonksiyonun kendisi de bulanık ise o zaman Genişleme Prensibi

$$\mu_B(y) = \left\{ \max_{x \in f^{-1}(y)} [\min(\mu_A(x), \mu_R(x,y)\ )]\right.$$

şeklinde yazılır (Lee [33]). Burada $\mu_R(x,y)$, x ile y' yi bağlayan fonksiyonun üyelik derecesidir.

Örneğin f ve g monoton artan fonksiyonlar olsun. Bu takdirde,

$$\mu_{f\left(g(\tilde{\beta})\right)}(x) = \mu_{g(\tilde{\beta})}\left(f^{-1}(x)\right) = \mu_{\tilde{\beta}}\left(g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\right)$$

olur.

EK – K: ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	:	GEVER, Başak
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	12.06.1987 / İstanbul
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0 (312) 292 50 72
Faks	:	0 (312) 292 40 91
E – mail	:	bgever@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Karadeniz Teknik Üniversitesi – İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri	2008
Yüksek Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2011

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Konum**
2005 – 2006	Karadeniz Teknik Üniversitesi, Enformatik Bölümü Proje Geliştirme Merkezi	Proje Elemanı
2007	Karadeniz Teknik Üniversitesi, Rektörlük Kariyer Planlama Birimi	Proje Elemanı
2007	Bilge Adam Yazılım Mühendisliği Grubu	Stajyer Öğrenci
2009 – 20011	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Y. L. Öğr.

Yabancı Dil

İngilizce

YAYINLAR

A) Makale:

[1] Khaniyev T., Mammadova Z., Gever B., Asymptotic Expansions for the moments of a Renewal Reward Process with a Generalized Reflecting Barrier, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, is submitted, 2011.

[2] Khaniyev T., Gokpinar F., Gever B., Ergodic Distribution for a Fuzzy Inventory Model of Type (s,S) with Gamma Distributed Demands, Expert System and Applications, is submitted, 2011.

B) Basılmış Bildiriler:

[1] Gever B., Khaniyev T., Mammadova Z., Genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi, 12th International Symposium on Econometrics, Statistics and Operations Research, 310 - 311, Pamukkale Ü., Denizli, Mayıs 2011.

[2] Khaniyev T., Gever B., Mammadova Z., Genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin momentleri için asimtotik açılımlar, 6. Ankara Matematik Günleri, 114 – 115, Hacettepe Ü., Ankara, Haziran 2011.

[3] Khaniyev T., Gokpinar F., Gever B., Ergodic Distribution for a Fuzzy Inventory Model of Type (s,S) with Gamma Distributed Demands, Fuzzyss'11 The Second International Fuzzy Systems Symposium, Hacettepe University, 360 – 362 , Ankara, November 2011.

C) Bildiriler:

[1] Mammadova Z., Khaniyev T., Gever B., Üçgensel müdahaleli (s,S) tipli yarı – Markov modeli için asimtotik sonuçlar, 12th International Symposium on Econometrics, Statistics and Operations Research, 285, Pamukkale Ü., Denizli, Mayıs 2011.

[2] Khaniyev T., Mammadova Z., Gever B., Yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin durağan olmayan dağılımı üzerine, 10.Matematik Sempozyumu, 117, İstanbul, Eylül 2011.

[3] Khaniyev T., Gever B., Mammadova Z., Investigation of a renewal reward process with a generalized reflecting barrier, The 4th congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), 100, Baku, July 2011.