# ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KARAKTERİZASYONLARI

CEYLAN TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2012

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

CEYLAN TURAN tarafından hazırlanan ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KARAKTERİZASYONLARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Oktay DUMAN
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR

Üye : Prof. Dr. Cihan ORHAN

Üye : Prof. Dr. Oktay DUMAN

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ceylan TURAN

| | | |
|---|---|---|
| **Üniversitesi** | **:** | **TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi** |
| **Enstitüsü** | **:** | **Fen Bilimleri** |
| **Anabilim Dalı** | **:** | **Matematik** |
| **Tez Danışmanı** | **:** | **Prof. Dr. Oktay DUMAN** |
| **Tez Türü ve Tarihi** | **:** | **Yüksek Lisans – Aralık 2012** |

**Ceylan TURAN**

**ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KARAKTERİZASYONLARI**

## ÖZET

Bu tezde, zaman skalaları üzerinde tanımlanan reel değerli ve $\Delta$-ölçülebilir fonksiyonların istatistiksel yakınsaklığı kavramı incelenmiş ve bu yakınsaklık metodu için çeşitli karakterizasyonlar elde edilmiştir. Bu çalışmada elde ettiğimiz sonuçlar literatürde var olan istatistiksel yakınsaklık metotlarını içermenin yanı sıra, bir çok yeni metot için de uygulama alanı oluşturmaktadır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde zaman skalası teorisine ve istatistiksel yakınsaklığa ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Orjinal sonuçlarımızın bulunduğu üçüncü bölümde, bir zaman skalası üzerinde tanımlanan fonksiyonun istatistiksel yakınsaklığı inşa edilmiş ve hangi koşullar altında bu yakınsamanın gerçeklendiği araştırılmıştır. Son bölümde ise bu tezden elde edilen çıktılara ve gelecekte konuyla ilgili daha nelerin yapılabileceğine değinilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** İstatistiksel Yakınsaklık, Zaman Skalaları, Lebesgue $\Delta$-Ölçüsü, Lebesgue $\Delta$-İntegrali .

| | | |
|---|---|---|
| **University** | : | **TOBB University of Economics and Technology** |
| **Institute** | : | **Institute of Natural and Applied Sciences** |
| **Science Programme** | : | **Mathematics** |
| **Supervisor** | : | **Prof. Oktay DUMAN** |
| **Degree Awarded and Date** | : | **M.Sc. – December 2012** |

**Ceylan TURAN**

**STATISTICAL CONVERGENCE ON TIME SCALES**

## ABSTRACT

In this thesis, we investigate the statistical convergence of real-valued and $\Delta$-measurable functions defined on time scales and we obtain some characterizations for this convergence method. Our results obtained in this study not only include the previous statistical convergence methods in the literature but also enable some aplication areas for various new methods.

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, we recall some basic definitions and theorems regarding the theory of time scales and statistical convergence. In the third chapter that includes our original results, we construct the statistical convergence of a function defined on a time scale and investigate under which conditions this convergence holds. In the last chapter, we discuss the outputs of the thesis and the future projects improving this topic.

**Keywords:** Statistical Convergence, Time Scales, Lebesgue $\Delta$-Measure, Lebesgue $\Delta$-Integral.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimime başladığım andan itibaren benden desteğini esirgemeyen, tez çalışmalarım boyunca ilgi ve katkılarıyla her adımda bana yol gösteren çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Oktay DUMAN'a kendisiyle çalışma fırsatını bana sunduğu için en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmalarım sırasında benden yardımlarını esirgemeyen tüm asistan arkadaşlarıma ve engin tecrübelerinden yararlanma şansı bulduğum değerli TOBB ETÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerine sonsuz teşekkür ederim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca beni destekleyip bugünlere getiren sevgili annem başta olmak üzere tüm aileme ve her daim yanımda olan nişanlım Adnan YALÇIN'a tüm destekleri için teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak yüksek lisans eğitimimdeki maddi desteğinden dolayı TÜBİTAK'a ve TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

## SİMGE LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmektedir.

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\sigma$ | İleri sıçrama operatörü |
| $\rho$ | Geri sıçrama operatörü |
| $\mu$ | Sıçrama fonksiyonu |
| $f^{\Delta}$ | Bir $f$ fonksiyonunun $\Delta$-türevi (Hilger türevi) |
| $\Im_1$ | $[a,b)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b\}$ şeklindeki tüm aralıkların ailesi |
| $\mu_{\Delta}$ | $\Im_1$ ailesi üzerinde tanımlanan $m_1$ küme fonksiyonunun Carathéodary genişlemesi |
| $\chi_A$ | $A$ kümesinin karakteristik fonksiyonu |
| $\#A$ | $A$ kümesinin eleman sayısı |
| $\delta(A)$ | $A$ kümesinin doğal yoğunluğu |
| $\Omega(t)$ | $\Omega$ kümesinin belli bir $t$ sayısından küçük olan elemanlarının oluşturduğu küme |
| $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega)$ | $\Omega$ kümesinin $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki yoğunluğu |
| $C_1(q)$ | Birinci mertebeden $q$-Cesáro matrisi |
| $st_{\mathbb{T}} - \lim f$ | $f$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki istatistiksel limiti |

# 1. GİRİŞ

Zaman skalası analizi, ilk olarak 1988 yılında Stefan Hilger'in doktora tezi çalışmasıyla ortaya çıkmıştır ([16],[17]). Sürekli ve ayrık analizi birleştirmesi sebebiyle kısa zamanda oldukça popüler hale gelmiştir. Sonraki yıllarda zaman skalası analizinin özellikle de dinamik sistemler teorisinde pek çok uygulaması verilmiştir [7].

Günümüzde zaman skalası kavramı; ölçü teorisi, integral teorisi, matematiksel modelleme, istatistik gibi geniş bir yelpazede kullanılmaktadır. Fakat bu kavram henüz toplanabilme teorisi üzerinde incelenmemiştir. Bu yüksek lisans tezinde asıl amacımız, literatürdeki bu boşluğu doldurmak olacaktır. Daha kesin bir ifadeyle, toplanabilme teorisinde iyi bilinen istatistiksel yakınsaklık kavramını zaman skalaları çerçevesi içerisinde inceleyeceğiz. Bunun için ilk olarak, bir zaman skalası üzerinde tanımlanan reel değerli bir fonksiyonun istatistiksel yakınsaklığı kavramını inşa edeceğiz. Daha sonra bunun için pek çok yeni karakterizasyon elde edeceğiz. Bulduğumuz sonuçların ayrık ve sürekli durumlarda bilinen teoremlerle çakıştığını göstereceğiz. Bunun yanı sıra literatürde henüz incelenmemiş yeni yakınsaklık metotlarını ve onların çeşitli özelliklerini de araştıracağız.

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, zaman skalası analizi ve istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Orjinal sonuçlarımızın bulunduğu üçüncü bölümde, zaman skalaları üzerinde tanımlanan yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramlarını inşa edeceğiz ve bunlarla bağlantılı karakterizasyon teoremleri elde edeceğiz. Bu tezden elde edilen çıktılara ve gelecekte bu sonuçların nasıl geliştirilebileceğine ise son bölümde yer vereceğiz.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1 Zaman Skalası Analizi

Bir zaman skalası, reel sayıların boş olmayan kapalı keyfi alt kümesidir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir [16]. Buna göre $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, [0,1] \cup [2,3], [0,1] \cup \mathbb{N}$, Cantor kümesi ve $q > 1$ için $q^{\mathbb{N}}$ kümelerinin birer zaman skalası örneği olduğu kolayca görülebilir. Yine aynı düşünce ile $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ ve $(0,1)$ kümelerinin birer zaman skalası örneği olmadığı açıktır.

Şimdi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki bazı temel tanım ve notasyonları hatırlatalım.

**Tanım 2.1.1.** $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ \sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ *şeklinde tanımlanan fonksiyona "ileri sıçrama operatörü" denir* [7].

**Tanım 2.1.2.** $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T},\ \rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ *şeklinde tanımlanan fonksiyona ise "geri sıçrama operatörü" denir* [7].

Yukarıdaki tanımlarda $\inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ ve $\sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$ olarak kabul edilmektedir. Tanımlanan bu operatörler yardımıyla zaman skalasındaki noktaların cinsini belirleyebiliriz. Bu durumu aşağıdaki tablo ile özetleyebiliriz.

| | | |
|---|---|---|
| $t < \sigma(t)$ | ise | $t$ sağa saçılmış nokta |
| $t = \sigma(t)$ | ise | $t$ sağa yoğun nokta |
| $\rho(t) < t$ | ise | $t$ sola saçılmış nokta |
| $\rho(t) = t$ | ise | $t$ sola yoğun nokta |
| $\rho(t) < t < \sigma(t)$ | ise | $t$ izole nokta |
| $\rho(t) = t = \sigma(t)$ | ise | $t$ yoğun nokta |

**Tanım 2.1.3.** $\mu : \mathbb{T} \longrightarrow [0, \infty)$, $\mu(t) := \sigma(t) - t$ *şeklinde tanımlanan fonksiyona, "sıçrama fonksiyonu" adı verilir* [7].

Verilen bir $\mathbb{T}$ zaman skalasından $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesi şu şekilde elde edilir:

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & , \quad \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & , \quad \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Başka bir ifadeyle, $\mathbb{T}$ kümesinin maksimum elemanı $m$, ve $m$ sola saçılmış bir nokta ise bu durumda $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} \backslash \{m\}$ olur; eğer böyle bir $m$ sayısı yoksa, $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$ dir. Özellikle delta türev tanımında $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesine ihtiyaç duyacağız.

Şimdi bilinen özel zaman skalası örnekleri üzerindeki noktaların cinsini belirleyelim.

**Örnek 2.1.1.** $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *olsun. Bu durumda*

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf (t, +\infty) = t$$

*olduğundan her* $t \in \mathbb{R}$ *sağa yoğundur.*

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup (-\infty, t) = t$$

*olduğundan her* $t \in \mathbb{R}$ *sola yoğundur. O halde her* $t \in \mathbb{R}$ *yoğundur. Ayrıca*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$$

*olduğu görülür.*

**Örnek 2.1.2.** $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *olsun. Bu durumda*

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf \{t + 1, t + 2, ...\} = t + 1$$

*ve*

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\{t-1, t-2, ...\} = t-1$$

*olarak elde ederiz. Bu sonuçtan yola çıkarak*

$$\rho(t) < t < \sigma(t)$$

*eşitsizliğine ulaşırız. O halde her $t \in \mathbb{Z}$ izoledir. Ayrıca*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$$

*olur.*

**Örnek 2.1.3.** *Şimdi $q > 1$ için $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}}$ alalım. Buna göre*

$$\sigma(q^n) = \inf\left\{q^k \in q^{\mathbb{N}} : q^k > q^n\right\} = \inf\left\{q^{n+1}, q^{n+2}, ...\right\} = q^{n+1}$$

*ve*

$$\rho(q^n) = \sup\left\{q^k \in q^{\mathbb{N}} : q^k < q^n\right\} = \sup\left\{q^{n-1}, q^{n-2}, ...\right\} = q^{n-1}$$

*bulunur. O halde her $q^n \in q^{\mathbb{N}}$ izole noktadır. Ayrıca*

$$\mu(q^n) = \sigma(q^n) - q^n = q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$$

*olduğu da elde edilir.*

## 2.2 Zaman Skalasında Türev

Reelde bildiğimiz klasik türev tanımı ile tam sayılarda verilen ileri fark operatörü bir zaman skalası üzerinde $\Delta-$türev olarak aşağıdaki şekilde genişletilmiştir.

**Tanım 2.2.1.** *$f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $s \in U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ $(\delta > 0)$ için*

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\right| \leqslant \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

*olacak şekilde $t$ nin bir $U$ komşuluğu varsa $f^{\Delta}(t)$ sayısına $f$ in $t$ noktasındaki "delta ($\Delta$) türevi (Hilger türevi)" denir.*

*Eğer $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ sayısı mevcutsa "$f, \mathbb{T}^{\kappa}$ kümesi üzerinde türevlenebilirdir" denir [7].*

Bundan sonra karışıklık olmadığı sürece $\Delta$-türevlenebilme yerine kısaca türevlenebilme tabirini kullanacağız.

Tanım 2.2.1'den $\Delta$-türevin aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir.

- $\Delta$-türev lineerdir.
- $f$ fonksiyonu $t$ noktasında türevlenebilir ise bu noktada süreklidir.
- $f$ fonksiyonu $t$ noktasında sürekli ve $t$ sağa saçılmış nokta ise $f$ bu noktada türevlenebilirdir ve
$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$
olur.
- $t$ sağa yoğun nokta olsun. $f$ fonksiyonunun $t$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart
$$\lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$
limitinin mevcut ve sonlu olmasıdır. Bu durumda
$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$
dır.
- $f$ fonksiyonu $t$ noktasında türevlenebilir ise
$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$
dir.

**Örnek 2.2.1.** *$\Delta$-türev tanımını göz önüne alarak aşağıdaki özel halleri inceleyelim*

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *olsun. Her* $t \in \mathbb{R}$ *noktasının yoğun olduğunu Örnek 2.1.1'de görmüştük.* $\Delta$*-türevin özelliklerinden* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $t \in \mathbb{R}$ *noktasında* $\Delta$*-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart*
$$f^{\Delta}(t) = f'(t)$$
*olmasıdır.*

- $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *olsun. Her* $t \in \mathbb{Z}$ *noktasının izole (dolayısıyla sağa saçılmış) olduğunu Örnek 2.1.2'de görmüştük.* $\Delta$*-türevin tanımı gereğince* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $t \in \mathbb{Z}$ *noktasındaki* $\Delta$*-türevi*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{t+1-t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

*şeklindedir; burada* $\Delta f(t)$ *ileri fark operatörüdür.*

- $q > 1$ *olmak üzere* $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}}$ *olsun. Yine her* $t \in q^{\mathbb{N}}$ *noktasının izole (dolayısıyla sağa saçılmış) olduğunu Örnek 2.1.3'te görmüştük. O halde* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $t \in q^{\mathbb{N}}$ *noktasındaki* $\Delta$*-türevi*

$$f^{\Delta}(q^n) = \frac{f(\sigma(q^n)) - f(q^n)}{\sigma(q^n) - q^n} = \frac{f(q^{n+1}) - f(q^n)}{q^{n+1} - q^n} = \frac{f(q^{n+1}) - f(q^n)}{q^n(q-1)}$$

*şeklinde elde edilir.*

## 2.3 Zaman Skalaları Üzerinde Ölçü Teorisi

$\mathbb{T}$ bir keyfi bir zaman skalası olmak üzere $\sigma$ ileri sıçrama operatörü ve $\rho$ geri sıçrama operatörü olsun.

$$[a, b)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b\}$$

şeklinde tanımlanan tüm aralıkların ailesini $\Im_1$ ile gösterelim. Burada belirtelim ki $[a, a)_{\mathbb{T}}$ aralığı boş kümeyi ifade etmektedir.

$$\begin{aligned} m_1 \quad : \quad & \Im_1 \to [0, +\infty] \\ & [a, b)_{\mathbb{T}} \to m_1([a, b)_{\mathbb{T}}) = b - a \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $m_1$ küme fonksiyonu $\Im_1$ ailesi üzerinde sayılabilir toplamsal bir ölçüdür. $m_1$ küme fonksiyonunun Carathéodary genişlemesi $\mu_{\Delta}$ ile gösterilir ve $\mathbb{T}$ üzerinde Lebesgue-$\Delta$ ölçüsü olarak adlandırılır [15].

Şimdi $m_1$ in $\mu_{\Delta}$ Carathéodary genişlemesinin nasıl elde edildiğini kısaca ifade edelim. İlk olarak $(\Im_1, m_1)$ ikilisi yardımıyla $\mathbb{T}$ nin tüm alt kümeleri için bir $m_1^*$

dış ölçüsü tanımlanır. Burada $m_1^*$ dış ölçüsü, reel analizde bilinen $\lambda^*$ Lebesgue dış ölçüsüne benzer bir süreç ile aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$\mathbb{T}$ nin herhangi bir alt kümesi $E$ olsun. $j = 1, 2, ...$ için $V_j$'ler $\Im_1$'in elemanı olan aralıklar olmak üzere, bu aralıkların sonlu veya sayılabilir birleşimleri yardımıyla

$$E \subset \underset{j}{\cup} V_j$$

olacak şekilde $E$ kümesi örtülür. $P(\mathbb{T})$ kümesi $\mathbb{T}$ nin kuvvet kümesini göstermek üzere

$$\begin{aligned} m_1^* : P(\mathbb{T}) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\rightarrow m_1^*(E) = \inf \left\{ \sum_j m_1(V_j) : E \subset \underset{j}{\cup} V_j \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $E$ yi örten $V_j$ aralıkları yoksa bu durumda $m_1^*(E) = \infty$ olarak kabul edilir.

$\mathbb{T}$ nin herhangi bir $A$ alt kümesinin $m_1^*$-ölçülebilir olması için,

$$m_1^*(E) = m_1^*(E \cap A) + m_1^*(E \cap A^c)$$

eşitliğinin her $E \subset \mathbb{T}$ için sağlanması gerekir (Burada $A^c$ kümesi $A$ kümesinin tümleyenidir). Daha sonra $\mathbb{T}$ nin $m_1^*$-ölçülebilir tüm alt kümeleri $M(m_1^*)$ ile gösterilir. $M(m_1^*)$ ailesi bir $\sigma$-cebir olur. Son olarak $m_1^*$ dış ölçüsünün $M(m_1^*)$ kümesi üzerine kısıtlamasına Lebesgue $\Delta$-ölçüsü denir ve bu ölçü $\mu_\Delta$ ile gösterilir. Böylece $m_1$ küme fonksiyonunun Carathéodary genişlemesi elde edilmiş olur ([15], [4]).

### 2.3.1 Lebesgue $\Delta$-ölçüsü ve $\Delta$-ölçülebilir Fonksiyonlar

Bu kısımda Lebesgue $\Delta$-ölçüsünün çeşitli özelliklerine değineceğiz.

**Teorem 2.3.1.** $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ *olsun. Bu durumda* $\{t_0\}$ *kümesi* $\Delta-$ *ölçülebilirdir ve*

$$\mu_\Delta(\{t_0\}) = \sigma(t_0) - t_0 = \mu(t_0)$$

*olur* [15].

Reel analizde kullanılan Lebesgue ölçüsü için tek nokta kümelerinin Lebesgue ölçüsü sıfırdır. Ancak zaman skalaları üzerinde $\mu_{\Delta}(\{t_0\}) = \mu(t_0)$ olup daha önceki örneklerde de gördüğümüz üzere $\mu(t_0)$ sayısı her zaman sıfıra eşit olmak zorunda değildir.

**Teorem 2.3.2.** *$a, b \in \mathbb{T}$ ve $a \leq b$ olsun.*

*i)* $\mu_{\Delta}([a,b)_{\mathbb{T}}) = b - a$

*ii)* $\mu_{\Delta}((a,b)_{\mathbb{T}}) = b - \sigma(a)$

*olur. Eğer $a, b \in \mathbb{T} \backslash \{\max \mathbb{T}\}$ ve $a \leq b$ ise*

*iii)* $\mu_{\Delta}((a,b]_{\mathbb{T}}) = \sigma(b) - \sigma(a)$

*iv)* $\mu_{\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}}) = \sigma(b) - a$

*olur [15].*

**Tanım 2.3.1.** *$f : \mathbb{T} \to [-\infty, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için*

$$f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{t \in \mathbb{T} : f(t) < \alpha\}$$

*kümesi $\Delta$-ölçülebilir ise "$f$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde $\Delta$-ölçülebilirdir" denir [8].*

### 2.3.2 Lebesgue $\Delta$-İntegrali

Bu bölümde $\Delta$-ölçülebilir fonksiyonların Lebesgue $\Delta$-integraline değineceğiz. Önce basit fonksiyonların, sonra pozitif fonksiyonların daha sonra da bunlardan yararlanarak herhangi bir $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyonunun Lebesgue $\Delta$-integrali için tanımlar verilecektir.

**Tanım 2.3.2.** *$S : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $j = 1, 2, .., n$ için $\alpha_j$ ler birbirinden farklı olmak üzere $A_j = \{t \in \mathbb{T} : S(t) = \alpha_j\}$ kümeleri tanımlansın. $S = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$ olacak şekilde yazılabiliyorsa $S$ fonksiyonuna "basit fonksiyon" denir. Burada $\chi_{A_j}$ fonksiyonu $A_j$ kümelerinin karakteristik fonksiyonudur, yani*

$$\chi_{A_j}(t) = \begin{cases} 1 \ , \ t \in A_j \\ 0 \ , \ t \notin A_j \end{cases}$$

*şeklinde tanımlanır [8].*

**Tanım 2.3.3.** *$E$, $\mathbb{T}$ nin $\Delta$-ölçülebilir bir alt kümesi ve $S : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir basit fonksiyon olsun. Yani $S$ fonksiyonu Tanım 2.3.2'de ifade edilen $A_j$ kümeleri ve $\alpha_j$ sayıları ile aşağıdaki biçimde yazılsın:*

$$S = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$$

*Bu durumda $S$ fonksiyonunun $E$ üzerinden Lebesgue $\Delta$-integrali*

$$\int_E S(t)\,\Delta t = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_\Delta (A_j \cap E)$$

*biçiminde tanımlanır [8].*

**Sonuç 2.3.1.** *$f(s) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olacak şekilde $f$ sabit fonksiyonu verilsin. Bu durumda $f$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ nin $\Delta$-ölçülebilir bir $\Omega$ kümesi üzerinden integrali*

$$\int_\Omega f(s)\,\Delta s = \int_\Omega \alpha \Delta s = \alpha \mu_\Delta (\Omega)$$

*dir.*

**Tanım 2.3.4.** *$E$, $\mathbb{T}$ nin $\Delta$-ölçülebilir bir alt kümesi ve $f : \mathbb{T} \to [0, +\infty]$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonunun $E$ kümesi üzerindeki Lebesgue $\Delta$-integrali*

$$\int_E f(s)\,\Delta s = \sup \left\{ \int_E S(s)\,\Delta s : 0 \leq S \leq f \text{ ve } S \text{ basit fonksiyon} \right\} \tag{2.1}$$

*şeklinde tanımlanır [8].*

**Tanım 2.3.5.** *$E$, $\mathbb{T}$ nin $\Delta$-ölçülebilir bir alt kümesi ve $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonunun pozitif parçası $f^+ := \max\{f, 0\}$ ve negatif parçası $f^- := \max\{-f, 0\}$ şeklinde tanımlansın.*

$$\int_E f^+(s)\,\Delta s \text{ veya } \int_E f^-(s)\,\Delta s$$

*integrallerinden en az bir tanesi sonlu olmak şartıyla $f$ fonksiyonunun $E$ kümesi üzerinden Lebesgue $\Delta$-integrali*

$$\int_E f(s)\,\Delta s = \int_E f^+(s)\,\Delta s - \int_E f^-(s)\,\Delta s$$

*şeklinde tanımlanır.*

## 2.4 İstatistiksel Yakınsaklık Kavramı

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $A \subset \mathbb{N}$ verilsin. $A(n)$ kümesi

$$A(n) = \{k \leqslant n : k \in A\}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $A$ kümesinin eleman sayısını da $\#A$ ile gösterelim.

**Tanım 2.4.1.** *Bir $A \subset \mathbb{N}$ alt kümesi için*

$$\lim_n \frac{\#A(n)}{n} = \lim_n \frac{\#\{k \leq n : k \in A\}}{n}$$

*limiti mevcutsa, bu limit değerine $A$ kümesinin "doğal yoğunluğu (asimptotik yoğunluğu)" denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir [19].*

Yukarıdaki tanımdan hareketle

$$\begin{aligned} \delta(\mathbb{N}) &= 1, \\ \delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) &= \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}, \\ \delta\left(\left\{n^2 : n \in \mathbb{N}\right\}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

olduğu kolayca görülebilir. Yine sonlu elemanlı bir $B$ kümesi için $\delta(B) = 0$ olacağı gibi sonsuz elemana sahip olan $\{m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ kümesi için de $\delta(\{m^2 : m \in \mathbb{N}\}) = 0$ olur. Ayrıca asal sayılar kümesinin de sıfır yoğunluklu olduğu bilinmektedir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramını hatırlatalım.

**Tanım 2.4.2.** $x := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *bir sayı dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,*

$$\delta(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

*veya başka bir ifadeyle*

$$\lim_n \frac{1}{n} \#\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

*olacak şekilde bir $L$ sayısı varsa, bu durumda $x$ dizisi $L$ sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve $st - \lim_k x_k = L$ şeklinde gösterilir [11].*

Toplanabilme teorisinde önemli bir yer tutan istatistiksel yakınsaklık kavramı, son yıllarda yaklaşımlar teorisi içinde de sıklıkla kullanılmıştır ([14] ve [3]).

İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılacağı gibi, eğer bir $x$ dizisi bir $L$ sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda $L$ sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesi sıfır yoğunluklu olmak üzere, dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunabilir.

Burada hemen belirtelim ki bir $x$ dizisi $L$ sayısına yakınsak ise, bu durumda $L$ nin her komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken, bu komşuluğun dışında diziye ait en fazla sonlu adette terim bulunabilir. Dolayısıyla bu sonlu adetteki terimlerin indislerinin oluşturacağı küme de doğal sayıların sonlu bir alt kümesi olup yoğunluğu sıfırdır, yani $x$ dizisi $L$ sayısına istatistiksel yakınsak olur. Fakat aşağıda vereceğimiz örnek, bu önermenin karşıtının her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

**Örnek 2.4.1.** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin genel terimi*

$$x_n = \begin{cases} 1 \ ; \ n = m^2 \\ 0 \ ; n \neq m^2 \end{cases}$$

*şeklinde tanımlansın. (2.2)'den* $st - \lim\limits_{n} x_n = 0$ *bulunur. Ancak* $(x_n)$ *dizisinin yakınsak olmadığı açıktır.*

Klasik anlamda yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki bir diğer önemli fark ise bilindiği üzere yakınsak olan her dizi aynı zamanda sınırlı olmasına rağmen istatistiksel yakınsak her dizi için bu durum her zaman gerçekleşmeyebilir. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde inceleyebiliriz.

**Örnek 2.4.2.** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin genel terimi*

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{n} \ ; \ n = m^2 \\ 0 \ ; n \neq m^2 \end{cases}$$

*şeklinde tanımlansın. (2.2)'den* $st - \lim\limits_{n} x_n = 0$ *bulunur, ancak* $(x_n)$ *dizisi sınırlı değildir.*

Bu bölümde son olarak, klasik anlamda bilinen "Cauchy dizisi" kavramının istatistiksel benzerini hatırlatıp onun için bir karakterizasyona değineceğiz.

**Tanım 2.4.3.** *$x : (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir sayı dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için*

$$\delta\left(\{k : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

*olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise, bu durumda $x$ dizisine "istatistiksel Cauchy dizisi" denir [13].*

**Tanım 2.4.4.** *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir $P$ önermesini yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki her $n$ için gerçekliyorsa $(x_n)$ dizisi $P$ önermesini hemen hemen her $n$ için gerçekliyor denir ve h.h.n için $P$ doğrudur şeklinde gösterilir [13].*

O halde Tanım 2.4.3'ten $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bir istatistiksel Cauchy dizisi ise, bu durumda her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcuttur öyleki $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ gerçeklenir.

İstatistiksel yakınsaklık için bilinen bir karakterizasyon aşağıda verilmektedir:

**Teorem 2.4.1.** *Bir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için aşağıdaki önermeler denktir:*

*i)* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisi istatistiksel yakınsaktır.*

*ii)* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.*

*iii) h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [13].*

# 3. ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE İSTATATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

## 3.1 Zaman Skalaları Üzerinde İstatistiksel Yakınsaklık Kavramı

Bu bölümde zaman skalaları üzerinde istatistiksel yakınsakılık kavramını inşa edeceğiz. Bu tanımı oluşturabilmemiz için ilk olarak zaman skalaları üzerinde bir yoğunluk fonksiyonu tanımlamalıyız. Yoğunluk fonksiyonunu tanımlarken Guseinov tarafından verilen Lebesgue $\Delta$-ölçüsü $\mu_\Delta$ dan ve $\Delta$-ölçülebilir kümelerden yararlanacağız [15].

Hemen belirtelim ki bu tez boyunca kullanacağımız $\mathbb{T}$ zaman skalası örnekleri için $\inf \mathbb{T} = t_0 > 0$ ve $\sup \mathbb{T} = \infty$ olması kabul edilmektedir.

### 3.1.1 Yoğunluk Fonksiyonu ve Çeşitli Özellikleri

$\Omega$, $\mathbb{T}$ nin $\Delta$-ölçülebilir bir alt kümesi olsun. $t \in \mathbb{T}$ için, $\Omega(t)$ kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Omega(t) := \{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : s \in \Omega\}.$$

**Tanım 3.1.1.** *$\Omega$, $\mathbb{T}$ nin $\Delta$-ölçülebilir bir alt kümesi olmak üzere, eğer*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\left(\Omega\left(t\right)\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, t\right]_{\mathbb{T}}\right)} \tag{3.1}$$

*limiti mevcut ise, bu limit değerine "$\Omega$ nın $\mathbb{T}$ üzerindeki yoğunluğu" denir ve $\delta_{\mathbb{T}}\left(\Omega\right)$ şeklinde gösterilir.*

Yukarıda vermiş olduğumuz bu tanımın $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ hali daha önce verilen Tanım 2.4.1'i, $a > 0$ olmak üzere $\mathbb{T} = [a, \infty)$ hali Denjoy [10] tarafından verilen yaklaşık yoğunluk tanımını içermektedir (ayrıca bakınız [18]). Üstelik seçilen uygun zaman skalası örnekleriyle bu tanım, ayrık ve sürekli durumlar arasındaki boşluğu kapatmaktadır.

Tanım 3.1.1'den

$$\delta_{\mathbb{T}}\left(\mathbb{T}\right) = 1 \tag{3.2}$$

ve herhangi bir $\Omega \subset \mathbb{T}$ için eğer $\Omega$ nın yoğunluğu mevcutsa

$$0 \leq \delta_{\mathbb{T}}\left(\Omega\right) \leq 1 \tag{3.3}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Zaman skalaları üzerinde yoğunluk fonksiyonunu tanımladıktan sonra bu bölümde yoğunluk fonksiyonları için bilinen bazı özelliklerin Tanım 3.1.1 ile tanımladığımız yoğunluk fonksiyonu için de doğru olduğunu göstereceğiz.

**Lemma 3.1.1.** *$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $A$ ve $B$, $\mathbb{T}$ nin $\Delta-$ölçülebilir alt kümeleri ve $\delta_{\mathbb{T}}\left(A\right)$, $\delta_{\mathbb{T}}\left(B\right)$ sayıları mevcut olsun. Bu durumda*

$$\delta_{\mathbb{T}}\left(A \cup B\right) \leqslant \delta_{\mathbb{T}}\left(A\right) + \delta_{\mathbb{T}}\left(B\right) \tag{3.4}$$

*olur. Eğer $A \cap B = \varnothing$ ise,*

$$\delta_{\mathbb{T}}\left(A \cup B\right) = \delta_{\mathbb{T}}\left(A\right) + \delta_{\mathbb{T}}\left(B\right) \tag{3.5}$$

*elde edilir.*

**İspat.**

$$A\left(t\right) = \{t_0 \leqslant s \leqslant t : s \in A\} \text{ ve } B\left(t\right) = \{t_0 \leqslant s \leqslant t : s \in B\}$$

olsun.

$$(A \cup B)(t) \subset A(t) \cup B(t)$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece $\mu_\Delta$ bir ölçü olduğundan

$$\begin{aligned}\mu_\Delta((A \cup B)(t)) &\leqslant \mu_\Delta(A(t) \cup B(t)) \\ &\leqslant \mu_\Delta(A(t)) + \mu_\Delta(B(t))\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi son eşitsizliğin her iki tarafını $\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})$ sayısına bölüp $t \to \infty$ için limit alırsak,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta((A \cup B)(t))}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} + \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(B(t))}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlik ise Tanım 3.1.1'den

$$\delta_{\mathbb{T}}(A \cup B) \leqslant \delta_{\mathbb{T}}(A) + \delta_{\mathbb{T}}(B)$$

olmasını gerektirir. Son olarak eğer $A \cap B = \varnothing$ ise,

$$\mu_\Delta((A \cup B)(t)) = \mu_\Delta(A(t)) + \mu_\Delta(B(t))$$

olur. Buradan benzer yolla

$$\delta_{\mathbb{T}}(A \cup B) = \delta_{\mathbb{T}}(A) + \delta_{\mathbb{T}}(B)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

**Lemma 3.1.2.** $A \subset \mathbb{T}$ *ve* $\delta_{\mathbb{T}}(A) = 0$ *olsun. Buradan*

$$\delta_{\mathbb{T}}(\mathbb{T} \backslash A) = 1$$

*olur.*

**İspat.** $\mathbb{T} = A \cup (\mathbb{T} \backslash A)$ ve $(\mathbb{T} \backslash A) \cap A = \varnothing$ olacağı açıktır. Böylece,

$$\delta_{\mathbb{T}}(A \cup (\mathbb{T} \backslash A)) = \delta_{\mathbb{T}}(\mathbb{T}) = 1 \tag{3.6}$$

olur. (3.5) ve (3.6)'dan, aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbb{T}}(A \cup (\mathbb{T} \backslash A)) &= \delta_{\mathbb{T}}(A) + \delta_{\mathbb{T}}(\mathbb{T} \backslash A) \\ &= \delta_{\mathbb{T}}(\mathbb{T} \backslash A) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Dolayısıyla ispat tamamlanır. $\square$

**Lemma 3.1.3.** *$A$ ve $B$, $\mathbb{T}$ nin $\Delta$-ölçülebilir alt kümeleri ve $A \subset B$ olsun. Eğer $\delta_{\mathbb{T}}(A)$ and $\delta_{\mathbb{T}}(B)$ sayıları mevcutsa,*

$$\delta_{\mathbb{T}}(A) \leqslant \delta_{\mathbb{T}}(B)$$

*dır.*

**İspat.** $A \subset B$ olsun.

$$A(t) = \{t_0 \leqslant s \leqslant t : s \in A\} = \{t_0 \leqslant s \leqslant t : s \in B\}$$

ve

$$B(t) = \{t_0 \leqslant s \leqslant t : s \in B\}$$

olsun. $A \subset B$ kabulümüzü kullanarak,

$$A(t) \subset B(t)$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Şimdi $\mu_\Delta$ nın bir ölçü olduğunu bilgisini kullanarak,

$$\mu_\Delta(A(t)) \leq \mu_\Delta(B(t))$$

yazabiliriz. Son eşitliğin her iki tarafını $\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})$ sayısına bölüp daha sonra $t \to \infty$ için limit alırsak,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(B(t))}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})}$$

elde ederiz ve böylece Tanım 3.1.1'den

$$\delta_{\mathbb{T}}(A) \leqslant \delta_{\mathbb{T}}(B)$$

sonucuna ulaşırız. $\square$

**Lemma 3.1.4.** *$A$ ve $B$, $\mathbb{T}$ nin $\Delta$-ölçülebilir alt kümeleri olsun. Eğer $\delta_{\mathbb{T}}(A) = \delta_{\mathbb{T}}(B) = 1$, ise*

*(i)* $\delta_{\mathbb{T}}(A \cup B) = 1$

*(ii)* $\delta_{\mathbb{T}}(A \cap B) = 1$

*olur.*

**İspat.** *(i)* Herhangi iki $A$ ve $B$ kümeleri için $A \subset A \cup B$ olacağı açıktır. Lemma 3.1.3'ten

$$\delta_{\mathbb{T}}(A) \leqslant \delta_{\mathbb{T}}(A \cup B)$$

yazabiliriz. (3.3) eşitsizliğini ve hipotezi kullanarak,

$$1 \leqslant \delta_{\mathbb{T}}(A \cup B) \leqslant 1$$

eşitsizliğine ulaşırız. Bu son eşitsizlik ise

$$\delta_{\mathbb{T}}(A \cup B) = 1$$

olmasını gerektirir.

*(ii)* Herhangi iki $A$ ve $B$ kümeleri için $A \cup B$ kümesi,

$$A \cup B = (A \diagdown B) \cup (B \diagdown A) \cup (A \cap B)$$

olacak şekilde üç ayrık kümenin birleşimi olarak yazılabilir. Lemma 3.1.1 yardımıyla,

$$\delta_{\mathbb{T}}(A \cup B) = \delta_{\mathbb{T}}(A \diagdown B) + \delta_{\mathbb{T}}(B \diagdown A) + \delta_{\mathbb{T}}(A \cap B)$$

eşitliği yazılabilir. $A \subset \mathbb{T}$ olduğundan

$$A \diagdown B \subset \mathbb{T} \diagdown B$$

olur. Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.3'ü kullanarak,

$$\delta_{\mathbb{T}}(A \diagdown B) \leq \delta_{\mathbb{T}}(\mathbb{T} \diagdown B) = 0$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $\delta_{\mathbb{T}}(A \diagdown B) = 0$ olur. Benzer şekilde $\delta_{\mathbb{T}}(B \diagdown A) = 0$ olacağı gösterilebilir. Böylece

$$\delta_{\mathbb{T}}(A \cup B) = \delta_{\mathbb{T}}(A \cap B)$$

olur. (i)'den dolayı

$$\delta_{\mathbb{T}}(A \cap B) = 1$$

olmak zorundadır.

$\square$

### 3.1.2 Zaman Skalaları Üzerinde İstatistiksel Yakınsaklık

Artık bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı reel değerli bir $f$ fonksiyonu için istatistiksel yakınsaklık kavramını verebiliriz.

**Tanım 3.1.2.** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,*

$$\delta_{\mathbb{T}} \left( \{ t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| \geqslant \varepsilon \} \right) = 0 \tag{3.7}$$

*eşitliği sağlanıyorsa, $f$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde $L$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum*

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \to \infty} f(t) = L$$

*şeklinde gösterilir.*

Tanım 3.1.1'den yola çıkılarak (3.7) eşitliği aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mu_{\Delta} \left( \{ s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geqslant \varepsilon \} \right)}{\mu_{\Delta} \left( [t_0, t]_{\mathbb{T}} \right)} = 0.$$

**Örnek 3.1.1.** *$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda $t_0 = 1$ olup*

$$\mu_{\Delta} \left( [1, n]_{\mathbb{N}} \right) = \mu_{\Delta} \left( \{1, 2, 3, ..., n\} \right) = \sigma(n) - 1 = (n+1) - 1 = n$$

*ve*

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta} \left( \{ k \in [1, n]_{\mathbb{N}} : |f(k) - L| \geqslant \varepsilon \} \right) &= \mu_{\Delta} \left( \{ 1 \leqslant k \leqslant n : |f(k) - L| \geqslant \varepsilon \} \right) \\ &= \# \{ 1 \leqslant k \leqslant n : |f(k) - L| \geqslant \varepsilon \} \end{aligned}$$

*olur. $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ durumu için*

$$st_{\mathbb{N}} - \lim_{n \to \infty} f(n) = L$$

*ifadesi*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\# \{ 1 \leqslant k \leqslant n : |f(k) - L| \geqslant \varepsilon \}}{n} = 0 \tag{3.8}$$

*limitine eşittir. Burada (3.8) eşitliği aslında $(x_k) := (f(k))$ dizisinin $L$ sayısına istatistiksel yakınsaklığını verir. Bunu Tanım 2.4.2'de*

$$st - \lim_{k \to \infty} x_k = L$$

*şeklinde göstermiştik (bakınız [11]).*

**Örnek 3.1.2.** *Şimdi* $\mathbb{T} = [a, \infty)$ $(a > 0)$ *seçelim. Bu durumda Tanım 3.1.2, Móricz tarafından verilen tanıma indirgenir (bakınız [18]). Bu örnekte* $t_0 = a$ *olduğundan*

$$\mu_\Delta\left([a,t]_{[a,\infty)}\right) = \mu_\Delta\left([a,t]\right) = \sigma(t) - a = t - a$$

*ve yine* $\mathbb{T} = [a, \infty)$ *olduğundan,*

$$\begin{aligned}\mu_\Delta\left(s \in [a,t]_{[a,\infty)} : |f(s) - L| \geqslant \varepsilon\right) &= \mu_\Delta\left(\{a \leqslant s \leqslant t : |f(s) - L| \geqslant \varepsilon\}\right) \\ &= m\left(\{a \leqslant s \leqslant t : |f(s) - L| \geqslant \varepsilon\}\right)\end{aligned}$$

*olur; burada* $m(B)$ *ifadesi bir* $B$ *kümesinin klasik Lebesgue ölçüsünü göstermektedir. Dolayısıyla,*

$$st_{[a,\infty)} - \lim_{t\to\infty} f(t) = L$$

*ifadesi*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m\left(\{a \leqslant s \leqslant t : |f(s) - L| \geqslant \varepsilon\}\right)}{t - a} = 0 \tag{3.9}$$

*limitine denktir. (3.9) eşitliği ise ilk kez Móricz tarafından tanımlanmıştır [18].*

**Örnek 3.1.3.** *Son olarak Tanım 3.1.2'de* $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}}$ $(q > 1)$ *alalım. Bu zaman skalası örneği için* $t_0 = q$ *olup Tanım 3.1.2'de* $t$ *gördüğümüz yere* $q^n$ *yazarsak,*

$$\mu_\Delta\left([q,q^n]_{q^{\mathbb{N}}}\right) = \mu_\Delta\left(\{q, q^2, ..., q^n\}\right) = \sigma\left(q^n\right) - 1 = q(q^n - 1)$$

*olur.* $K(\varepsilon) := \left\{q^k \in [q,q^n]_{q^{\mathbb{N}}} : \left|f(q^k) - L\right| \geqslant \varepsilon\right\}$ *şeklinde tanımlayalım. Bu durumda*

$$\begin{aligned}\mu_\Delta\left(K(\varepsilon)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sigma(q^k) - q^k\right)\chi_{K(\varepsilon)}(q^k) \\ &= (q-1)\sum_{k=1}^{n} q^k \chi_{K(\varepsilon)}(q^k)\end{aligned}$$

*elde edilir. Dolayısıyla*

$$st_{q^{\mathbb{N}}} - \lim_{k\to\infty} f(q^k) = L$$

*ifadesi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^k \chi_{K(\varepsilon)}(q^k)}{q(q^n - 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \chi_{K(\varepsilon)}(q^k)}{[n]_q} = 0 \tag{3.10}$$

*limitlerine denk olur. (3.10) eşitliğindeki* $[n]_q$ *ifadesi*

$$[n]_q := 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{3.11}$$

*eşitliği ile verilen q-tamsayıları göstermektedir. Ayrıca* (3.10) *eşitliğinde verilen limit aşağıdaki matris toplanabilme metoduyla da gösterilebilir:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \chi_{K(\varepsilon)}(q^k)}{[n]_q} = \lim_{n\to\infty} C_1(q) \chi_{K(\varepsilon)}(q^n),$$

*burada* $C_1(q) := [c_{n,k}(q)]$, $k, n \in \mathbb{N}$, *ifadesi birinci mertebeden q-Cesáro matrisini göstermektedir. Bu matris Aktuğlu ve Bekar tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [2]:*

$$c_{n,k}(q) = \begin{cases} \dfrac{q^{k-1}}{[n]_q}, & \textit{if } 1 \leq k \leq n \\ 0, & \textit{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{3.12}$$

*Böylece (3.10) ve (3.12) eşitliklerinden*

$$st_{q^{\mathbb{N}}} - \lim_{k\to\infty} f(q^k) = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} C_1(q) \chi_{K(\varepsilon)}(q^n) = 0 \tag{3.13}$$

*ifadesi elde edilir. Bu son yakınsaklık methodu ise [2]'de f fonksiyonunun L sayısına q-istatistiksel yakınsaklığı olarak adlandırılmıştır [2].*

Verdiğimiz bu üç örneğin ardından belirtmeliyiz ki Tanım 3.1.2'de seçilen herhangi bir zaman skalası için yeni bir yakınsaklık methodu üretmek mümkündür.

Şimdi ise Tanım 3.1.2'de vermiş oluğumuz istatistiksel limitin tekliğini ve lineerliğini göreceğiz.

**Teorem 3.1.1.** $\mathbb{T}$ *bir zaman skalası* $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$*-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer* $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t)$ *mevcutsa, bu istatistiksel limit tektir.*

**İspat.** $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t) = L_1$ ve $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t) = L_2$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için $A$ ve $B$ kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$A = \left\{ t : |f(t) - L_1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\} \text{ ve } B = \left\{ t : |f(t) - L_2| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Zaman skalaları üzerinde istatistiksel limit tanımını göz önüne alarak,

$$\begin{aligned} st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t) &= L_1 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \delta_{\mathbb{T}}(A) = 0 \\ st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t) &= L_2 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \delta_{\mathbb{T}}(B) = 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi $L_1 = L_2$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için } 0 \leq |L_1 - L_2| < \varepsilon$$

olduğunu göstermeliyiz. Aksini kabul edelim, $\exists\varepsilon > 0$ için $|L_1 - L_2| \geqslant \varepsilon$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leqslant |L_1 - L_2| \\ &= |L_1 - f(t) + f(t) - L_2| \\ &\leq |f(t) - L_1| + |f(t) - L_2| \end{aligned}$$

olmak zorundadır. Eğer $t \notin A \cup B$ ise, $|f(t) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $|f(t) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. O halde $t \notin A \cup B$ için

$$\varepsilon \leqslant |L_1 - f(t)| + |f(t) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur ve bu çelişki ispatı tamamlar. □

**Teorem 3.1.2.** *$f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t) = L_1$ ve $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L_2$ olsun. Bu durumda*

*(i)* $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} (f(t) + g(t)) = L_1 + L_2$

*(ii)* $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} (cf(t)) = cL_1$

*olur.*

**İspat.** *(i)* Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için $A = \left\{t : |f(t) - L_1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ ve $B = \left\{t : |g(t) - L_2| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t) &= L_1 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \delta_{\mathbb{T}}(A) = 0 \\ st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} g(t) &= L_2 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \delta_{\mathbb{T}}(B) = 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi $C = \{t : |f(t) + g(t) - L_1 - L_2| \geqslant \varepsilon\}$ kümesini tanımlayalım. $\delta_{\mathbb{T}}(C) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$C \subset A \cup B$$

olduğunu iddia ediyoruz. Aksini kabul edelim, yani $C \nsubseteq A \cup B$ olsun. Bu durumda en az bir $t_0 \in C$ vardır öyle ki $t_0 \notin A \cup B$ gerçeklenir. Üstelik

$$t_0 \notin A \cup B \implies t_0 \notin A \text{ ve } t_0 \notin B$$

dir. Eğer $t_0 \notin A$ ise, $|f(t_0) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $t_0 \notin B$ ise, $|g(t_0) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Böylece

$$|f(t_0) - L_1| + |g(t_0) - L_2| < \varepsilon$$

elde edilir. Ayrıca

$$|f(t_0) + g(t_0) - L_1 - L_2| \leqslant |f(t_0) - L_1| + |g(t_0) - L_2| < \varepsilon \tag{3.14}$$

olup, (3.14)'ten $t_0 \notin C$ elde edilir. Bu bir çelişkidir, dolayısıyla $C \subset A \cup B$ olmalıdır. Lemma 3.1.3, (3.3) ve (3.4) yardımıyla

$$0 \leqslant \delta_{\mathbb{T}}(C) \leqslant \delta_{\mathbb{T}}(A \cup B) \leqslant \delta_{\mathbb{T}}(A) + \delta_{\mathbb{T}}(B) = 0$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik ise

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} (f(t) + g(t)) = L_1 + L_2$$

demektir.

*(ii)* $c = 0$ ise durum açıktır. Şimdi $c \neq 0$ olmak üzere $E = \left\{t : |f(t) - L_1| \geqslant \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}$ diyelim.

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t) = L_1 \iff \forall\varepsilon > 0 \ için\ , \delta_{\mathbb{T}}(E) = 0 \tag{3.15}$$

olacağından her $t \in E$ için,

$$|f(t) - L_1| \geqslant \frac{\varepsilon}{|c|} \implies |cf(t) - cL_1| \geqslant \varepsilon$$

yazılabilir. Bu ise (3.15) uyarınca

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} (cf(t)) = cL_1$$

olmasına denktir.

□

Bu kısmın sonunda zaman skalaları üzerinde istatistiksel Cauchy fonksiyonunu tanımlayacağız.

**Tanım 3.1.3.** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $t_1 > t_0$ sayısı vardır öyleki*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta\left(\{s \in [t_0, t]_\mathbb{T} : |f(s) - f(t_1)| \geqslant \varepsilon\}\right)}{\mu_\Delta\left([t_0, t]_\mathbb{T}\right)} = 0$$

*ise, $f$ fonksiyonuna "$\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel Cauchy'dir" denir.*

## 3.2 Zaman Skalaları Üzerinde İstatistiksel Yakınsaklık İçin Bazı Karakterizasyonlar

Bu bölümde bir zaman skalası üzerindeki istatistiksel yakınsaklık kavramı için bazı karekterizasyonlar elde edeceğiz. Bu sonuçların bazı özel halleri literatürde mevcut olmakla birlikte yeni ve geliştirilebilir pek çok yönüde bulunmaktadır.

İlk karakterizasyon teoremimize geçmeden önce, teoremin ispatında kullanacağımız bir notasyona değinmemiz gerekmektedir.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $A \subset \mathbb{T}$ ve $\delta_\mathbb{T}(A) = 0$ olsun. $f$, $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $f$ fonksiyonu bir $P$ önermesini $A$ kümesi dışındaki her $t \in \mathbb{T}$ için gerçekliyorsa $f$ fonksiyonu $P$ önermesini "hemen hemen her $t$ için gerçekliyor" denir ve $h.h.t$ için $P$ doğrudur şeklinde gösterilir. Burada belirtelim ki, vermiş olduğumuz bu tanımın $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ hali Tanım (2.4.4)'te verilen tanımdır.

**Teorem 3.2.1.** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.*

*(i) $f$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel yakınsaktır.*

*(ii) $f$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel Cauchy'dir.*

*(iii) $f$ fonksiyonu $\Delta$-ölçülebilir $g$ ve $h$ fonksiyonlarının toplamı olarak yazılabilir öyle ki*

$$\lim_{T\to\infty} g(T) = st_\mathbb{T} - \lim_{T\to\infty} f(T) \tag{3.16}$$

*ve*

$$\delta_{\mathbb{T}}\left(\{T : h(T) \neq 0\}\right) = 0 \tag{3.17}$$

*olur. Ayrıca, eğer $f$ fonksiyonu sınırlı ise, $g$ ve $h$ fonksiyonları da sınırlıdır.*

**İspat.** $(i) \implies (ii)$: Klasik analizde yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi olması ispatına benzeyen bir ispat uygulayacağız. $st_{\mathbb{T}} - \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda hemen hemen her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $|f(t) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $t_1 \in \mathbb{T}$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_1)| &\leqslant |f(t) - L| + |f(t_1) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{h.h.t} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, $f$, $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel Cauchy'dir.

$(ii) \implies (iii)$: $f$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel Cauchy olsun. Buradan,

$$|f(T) - f(t_1)| < \varepsilon \qquad \text{h.h.T için}$$

olur. Şimdi bir $t_1 > t_0$ seçelim öyle ki

$$I = \left[f(t_1) - \frac{1}{2}, f(t_1) + \frac{1}{2}\right]$$

aralığı hemen hemen her T için $f(T)$ sayısını içersin. Yine bir $t_2 > t_0$ seçelim öyleki

$$J = \left[f(t_2) - \frac{1}{4}, f(t_2) + \frac{1}{4}\right]$$

aralığı hemen hemen her T için $f(T)$ sayısını içersin. Şimdi iddia ediyoruz ki,

$$I_1 := I \cap J \qquad \text{hemen hemen her T için } f(T) \text{ sayısını içerir.}$$

Şimdi $A = \{t_0 \leq T \leq t : f(T) \notin I_1\}$ olsun. İddiamızın doğru olduğunu göstermek için $\delta_{\mathbb{T}}(A) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Kolayca görülebilir ki

$$A = \{t_0 \leqslant T \leqslant t : f(T) \notin I_1\} = \{t_0 \leqslant T \leqslant t : f(T) \notin I\} \cup \{t_0 \leqslant T \leqslant t : f(T) \notin J\}$$

ve

$$\mu_\Delta(A) \leq \mu_\Delta\left(\{t_0 \leq T \leq t : f(T) \notin I\}\right) + \mu_\Delta\left(\{t_0 \leq T \leq t : f(T) \notin J\}\right)$$

olur. Son eşitsizliğin her iki yanını $\mu_\Delta\left([t_0,t]_\mathbb{T}\right)$ sayısına bölüp, $t\to\infty$ için limit alırsak

$$\delta_\mathbb{T}(A)=0$$

olduğu görülür. Buradan, hemen hemen her T için $f(T)\in I_1$'dir. $I$ ve $J$ kümeleri kapalı olduğundan $I_1$ kümesi de kapalı olur. Hatta,

$$\begin{aligned}\mu_\Delta(I_1) &\leqslant \mu_\Delta(J)\\ &= \sigma\left(f(t_2)+\frac{1}{4}\right)-\left(f(t_2)-\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

dir. Şimdi yeniden bir $t_3>t_0$ seçelim öyleki

$$J_1=\left[f(t_3)-\frac{1}{8},f(t_3)+\frac{1}{8}\right]$$

aralığı hemen hemen her T için $f(T)$ sayısını içersin. Benzer şekilde

$$I_2:=I_1\cap J_1$$

aralığı hemen hemen her T için $f(T)$ sayısını içerir. Ve yine $I_2$ aralığı kapalı olup $\mu_\Delta(I_2)\leq\frac{1}{4}$'dir. Bu yolla devam edersek, tümevarım ilkesiyle $\{I_m\}_{m=1}^\infty$ kapalı aralıklar dizisi inşa edebiliriz. Bu dizide her bir $m$ için,

$$I_{m+1}\subset I_m,\quad \mu_\Delta\ (I_m)\leqslant 2^{-m}$$

ve hemen hemen her T için $f(T)\in I_m$ olur.

İç içe aralıklar teoreminden, en az bir $\lambda$ sayısı vardır öyleki $\cap_{m=1}^\infty I_m=\lambda$ dir.

Hemen hemen her T için $f(T)\in I_m$ olduğundan,

$$t_0<b_1<b_2<...$$

dizisini oluşturabiliriz. Burada $m\to\infty$ iken $b_m\to\infty$ ve

$$\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t])}\mu_\Delta\left(\{t_0\leq T\leq t: f(T)\notin I_m\}\right)<\frac{1}{m},\quad t>b_m \tag{3.18}$$

olur. Şimdi $g$ ve $h$ fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

- $t_0 \leq T \leqslant b_1$ ise,

$$g(T) := f(T) \text{ ve } h(T) := 0$$

- $T > b_1$ ve $b_m < T \leq b_{m+1}$ $(m \geqslant 1)$ ise,

$$g(T) := \begin{cases} f(T), & f(T) \in I_m \\ \lambda, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \text{ve} \quad h(T) := f(T) - g(T).$$

$g$ ve $h$ fonksiyonları $\Delta$-ölçülebilir fonksiyonlar olduğundan, $f = g + h$ fonksiyonu da $\Delta-$ölçülebilirdir. Şimdi iddia ediyoruz ki

$$\lim_{T\to\infty} g(T) = \lambda$$

dir. İddiamızın doğru olduğunu göstermek için herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $0 < \varepsilon < 1$ ve bir $p$ tamsayısı seçelim öyle ki $2^{-p} < \varepsilon$ olsun. Eğer $T > b_p$ ise, bazı $m \geqslant p$ sayıları için $b_m < T \leqslant b_{m+1}$ olur. Eğer $f(T) \in I_m$ ise, $f(T) = g(T)$ ve tanımdan

$$|g(T) - \lambda| = |f(T) - \lambda| \leqslant \mu_\Delta(I_m) \leqslant 2^{-m} \leqslant 2^{-p} < \varepsilon \tag{3.19}$$

olur. Eğer $f(T) \notin I_m$ ise, bu durumda da $g(T) = \lambda$ olur. (3.19) eşitliği her $T > b_p$ için doğrudur. Bu ise (3.16)'yı ispatlar.

$h$ fonksiyonunun tanımından, $h(T) \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $f(T) \neq g(T)$ olmasıdır. Eğer bazı $m \geq 1$ sayıları için, $b_m < T \leq b_{m+1}$ ise,

$$\begin{aligned} \{t_0 \leq T \leq t : h(T) \neq 0\} &= \bigcup_{k=1}^{m-1} \{b_k \leq T \leq b_{k+1} : f(T) \notin I_k\} \\ &\quad \cup \{b_m < T \leq t : f(T) \notin I_m\} \\ &\subset \{t_0 \leq T \leq t : f(T) \notin I_m\} \end{aligned}$$

bulunur. Lemma 3.1.1'den,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\Delta([t_0, t]_\mathbb{T})} \mu_\Delta(\{t_0 \leq T \leq t : h(T) \neq 0\}) &< \frac{1}{\mu_\Delta([t_0, t]_\mathbb{T})} \mu_\Delta(\{t_0 \leq T \leq t : f(T) \notin I_m\}) \\ &< \frac{1}{m} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $t \to \infty$ iken $m \to \infty$ olup,

$$\delta_\mathbb{T}(\{T : h(T) \neq 0\}) = 0$$

bulunur. Bu ise, hemen hemen her T için $h(T) = 0$ ve $f(T) = g(T)$ olması demektir. Eğer $f$ sınırlı ise, bir $M$ sayısı vardır öyleki $|f(T)| \leq M$'dir. Her $T \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} |g(T)| &\leq \max\{M, \lambda\} \\ |h(T)| &\leq M + \lambda \end{aligned}$$

elde edilir.

$(iii) \implies (i)$: $f = g + h$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} st_{\mathbb{T}} - \lim_{T\to\infty} f(T) &= st_{\mathbb{T}} - \lim_{T\to\infty} g(T) + st_{\mathbb{T}} - \lim_{T\to\infty} h(T) \\ &= \lim_{T\to\infty} g(T) + 0 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $f$ $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel yakınsaktır. □

Teorem 3.2.1'de $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alınırsa Fridy [13] tarafından ispatlanmış olan karakterizasyon ve $a > 0$ olmak üzere $\mathbb{T} = [a, \infty)$ alınırsa Móricz [18] tarafından ispatlanmış olan karakterizasyon elde edilir.

**UYARI:** Zaman skalaları üzerinde tanımlanan fonkiyonların istatistiksel yakınsaklığı ile şimdiye kadar elde ettiğimiz bazı tanım ve teoremler, bağımsız olarak [22]'deki yazarlar tarafından da incelenmiştir. Fakat şimdi literatürde tamamen yeni olan karakterizasyonlar ve onların sonuçlarını elde edeceğiz.

İlk olarak Šalát [20] tarafından $\mathbb{N}$ üzerinde istatistiksel yakınsaklık için verilmiş olan karakterizasyonun, tüm zaman skalaları için geçerli olan formunu ispatlayacağız.

**Teorem 3.2.2.** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t) = L$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{T}$ nin $\Delta$-ölçülebilir bir $\Omega$ alt kümesi vardır öyle ki $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega) = 1$ ve $\lim_{t\to\infty\ (t\in\Omega)} f(t) = L$ dir.*

**İspat.** *Gereklilik.*

$$\Omega_j = \left\{ t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| < \frac{1}{j} \right\}, \quad j = 1, 2, ...,$$

şeklinde tanımlayalım. Hipotezden her $j \in \mathbb{N}$ için, $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega_j) = 1$ yazabiliriz. Hatta $(\Omega_j)$ dizisinin azalan olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi, $j = 1$ için bir $t_1 \in \Omega_1$ seçelim. $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega_j) = 1$ olduğundan, en az bir $t_2 \in \Omega_2$, $t_2 > t_1$ vardır öyle ki her bir $t \geq t_2$, $t \in \mathbb{T}$ için, $\dfrac{\mu_\Delta(\Omega_2(t))}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} > \dfrac{1}{2}$ sağlanır. Ayrıca, yine $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega_j) = 1$ olduğundan, en az bir $t_3 \in \Omega_3$, $t_3 > t_2$ vardır öyle ki her bir $t \geq t_3$, $t \in \mathbb{T}$ için $\dfrac{\mu_\Delta(\Omega_3(t))}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} > \dfrac{2}{3}$ gerçeklenir. Aynı işleme devam ederek, artan bir $(t_j)$ dizisi oluşturabiliriz. Bu $(t_j)$ dizisinde her bir $t \geq t_j$, $t \in \mathbb{T}$ için, $\dfrac{\mu_\Delta(\Omega_j(t))}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} > \dfrac{j-1}{j}$ olur; burada $\Omega_j(t) := \{s \in [t_0,t]_{\mathbb{T}} : s \in \Omega_j\}$, $j \in \mathbb{N}$ dir. $\Omega$ kümesini aşağıdaki şekilde inşa edelim:

- Eğer $t \in [t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$ ise, $t \in \Omega$,
- Eğer $j = 1, 2, ...,$ için $t \in \Omega_j \cap [t_j, t_{j+1}]_{\mathbb{T}}$ ise, $t \in \Omega$.

Dolayısıyla,

$$\Omega := \left\{t \in \mathbb{T} : t \in [t_0,t_1]_{\mathbb{T}} \text{ veya } t \in \Omega_j \cap [t_j,t_{j+1}]_{\mathbb{T}},\ j = 1,2,...\right\}$$

şeklinde yazılabilir. $\Omega$ kümesinin tanımı gereğince her bir $t \in [t_j, t_{j+1})_{\mathbb{T}}$ $(j = 1, 2, ...)$ için,

$$\frac{\mu_\Delta(\Omega(t))}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} \geq \frac{\mu_\Delta(\Omega_j(t))}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} > \frac{j-1}{j}$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlik $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega) = 1$ anlamına gelmektedir. Şimdi ise $\lim\limits_{t\to\infty\ (t\in\Omega)} f(t) = L$ olacağını gösterelim. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için, bir $j$ sayısı seçelim öyle ki $\dfrac{1}{j} < \varepsilon$ olsun. Ayrıca $t \geqslant t_j$, $t \in \Omega$ alalım. Bu durumda en az bir $n \geq j$ vardır öyle ki $t \in [t_n, t_{n+1})_{\mathbb{T}}$ dır. $\Omega$ kümesinin tanımı gereğince $t \in \Omega_n$ ve dolayısıyla

$$|f(t) - L| < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{j} < \varepsilon$$

olur. O halde her bir $t \in \Omega$, $t \geq t_j$ için $|f(t) - L| < \varepsilon$ olur; böylece $\lim\limits_{t\to\infty\ (t\in\Omega)} f(t) = L$ dir.

*Yeterlilik.* Hipotez uyarınca, verilen bir $\varepsilon > 0$ için en az bir $t_* \in \mathbb{T}$ vardır öyle ki her $t \geq t_*$, $t \in \Omega$ için $|f(t) - L| < \varepsilon$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla

$A(\varepsilon) := \{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| \geq \varepsilon\}$ ve $B := \Omega \cap [t_*, \infty)_{\mathbb{T}}$ dersek, $A(\varepsilon) \subset \mathbb{T} \setminus B$ olacağı kolayca görülür. Ayrıca,

$$\Omega = (\Omega \cap [t_0, t_*)_{\mathbb{T}}) \cup B \quad \text{ve} \quad \delta_{\mathbb{T}}(\Omega) = 1$$

bilgilerini göz önüne alırsak, $(\Omega \cap [t_0, t_*)_{\mathbb{T}})$ kümesinin sınırlı olması sebebiyle $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega \cap [t_0, t_*)_{\mathbb{T}}) = 0$ dır. O halde Lemma 3.1.4'ten $\delta_{\mathbb{T}}(B) = 1$ ve dolayısıyla $\delta_{\mathbb{T}}(A(\varepsilon)) = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Yeni bir karakterizasyona geçmeden önce, aşağıdaki iki lemmaya ihtiyaç duyacağız.

**Lemma 3.2.1.** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $st_{\mathbb{T}} - \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$ ve $f$ bir $M$ sayısı ile üstten sınırlı ise,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} f(s)\,\Delta s = L$$

*olur; burada, zaman skalaları üzerindeki Lebesgue $\Delta$-integrali kullanılmaktadır.*

**İspat.** Genellikten bir şey kaybetmeksizin $L = 0$ alabiliriz. Şimdi $\varepsilon > 0$ ve $\Omega(t) := \{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq \varepsilon\}$ olsun. $st_{\mathbb{T}} - \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$ olduğundan

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(\Omega(t))}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0$$

elde edilir. Yeterince büyük $t$ ler için $\dfrac{\mu_\Delta(\Omega(t))}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} < \dfrac{\varepsilon}{M}$ olur. O halde

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} f(s)\,\Delta s \right| \\
\leq\ & \frac{1}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \left\{ \int_{\Omega(t)} |f(s)|\,\Delta s + \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}} \setminus \Omega(t)} |f(s)|\,\Delta s \right\} \\
\leqslant\ & \frac{1}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \left\{ M \int_{\Omega(t)} \Delta s + \varepsilon \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \Delta s \right\}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. [8]'den yararlanarak $\mathbb{T}$ nin herhangi bir $\Delta$-ölçülebilir $A$ alt kümesi için $\int_A \Delta s = \mu_\Delta(A)$ olacağı Sonuç 2.3.1'den açıktır. Bu son eşitsizlik,

$$\left| \frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})} \int\limits_{[t_0,t]_\mathbb{T}} f(s)\,\Delta s \right| \leq \frac{M\mu_\Delta(\Omega(t)) + \varepsilon\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})} \leq 2\varepsilon$$

anlamına gelmektedir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan ispat tamamlanır. □

**Lemma 3.2.2.** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon ve $st_\mathbb{T} - \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$ olsun. Eğer $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $L$ noktasında sürekli ise,*

$$st_\mathbb{T} - \lim_{t\to\infty} g(f(t)) = g(L)$$

*olur.*

**İspat.** $g$ fonksiyonu $L$ noktasında sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için, en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|y - L| < \delta$ iken $|g(y) - g(L)| < \varepsilon$ olur. Fakat $|g(y) - g(L)| \geqslant \varepsilon$ ise $|y - L| \geq \delta$ olur ve dolayısıyla

$$|g(f(t)) - g(L)| \geq \varepsilon \text{ ise } |f(t) - L| \geqslant \delta$$

dır. Böylece,

$$\{t \in \mathbb{T} : |g(f(t)) - g(L)| \geqslant \varepsilon\} \subset \{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| \geq \delta\}$$

olur. Lemma 3.1.1'den

$$\delta_\mathbb{T}(\{t \in \mathbb{T} : |g(f(t)) - g(L)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \delta_\mathbb{T}(\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - L| \geq \delta\}) = 0$$

elde edilir. □

Bu iki lemmadan sonra şimdi yeni karakterizasyonumuzu vermeye hazırız.

**Teorem 3.2.3.** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun.*

$$st_\mathbb{T} - \lim_{t\to\infty} f(t) = L$$

*olması için gerek ve yeter şart, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})} \int\limits_{[t_0,t]_\mathbb{T}} e^{i\alpha f(s)} \Delta s = e^{i\alpha L} \tag{3.20}$$

*olmasıdır.*

**İspat.** *Gereklilik.* $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} f(t) = L$ olduğunu kabul edelim. Sabit bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $e^{i\alpha t}$ fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır. Dolayısıyla, Lemma 3.2.2'den

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} e^{i\alpha f(t)} = e^{i\alpha L}$$

olur. Ayrıca, $e^{i\alpha f(t)}$ sınırlı bir fonksiyon olduğundan, Lemma 3.2.1'den

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} e^{i\alpha f(s)} \Delta s = e^{i\alpha L}.$$

olur.

*Yeterlilik.* Şimdi her $\alpha \in \mathbb{R}$ için (3.20) eşitliğinin gerçeklendiğini kabul edelim. Schoenberg'in makalesinde olduğu gibi (bakınız [21]), aşağıdaki sürekli fonksiyonu tanımlayalım:

$$M(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \text{ ise} \\ 1+x, & -1 \leqslant x < 0 \text{ ise} \\ 1-x, & 0 \leqslant x < 1 \text{ ise} \\ 0, & x \geqslant 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu durumda $M(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki integral gösterimine sahip olduğunu biliyoruz:

$$M(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2}\right)^2 e^{ix\alpha} d\alpha, (x \in \mathbb{R}).$$

Genelliği bozmaksızın (3.20) eşitliğinde $L = 0$ kabul edebiliriz. Böylece her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} e^{i\alpha f(s)} \Delta s = 1 \tag{3.21}$$

olur. Şimdi verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\Omega$ kümesini $\Omega := \{t \in \mathbb{T} : |f(t)| \geqslant \varepsilon\}$ şeklinde tanımlayalım. İspatı tamamlamamız için $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için öncelikle,

$$M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2}\right)^2 e^{i\alpha f(s)/\varepsilon} d\alpha$$

yazalım. Uygun bir değişken değiştirme işlemi yaptıktan sonra,

$$M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\alpha\varepsilon/2)}{\alpha\varepsilon/2}\right)^2 e^{if(s)\alpha} d\alpha \tag{3.22}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}\int_{t_0}^{t} M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right)\Delta s \\
= \;& \frac{\varepsilon}{2\pi}\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}\int_{[t_0,t]_\mathbb{T}}\left\{\int_\mathbb{R}\left(\frac{\sin(\alpha\varepsilon/2)}{\alpha\varepsilon/2}\right)^2 e^{if(s)\alpha}d\alpha\right\}\Delta s
\end{aligned}$$

olur. Burada belirtmeliyiz ki (3.22)'de tanımladığımız integral mutlak yakınsaktır. Zaman skalaları üzerindeki Fubini teoreminden (bakınız [1, 5, 6]),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}\int_{[t_0,t]_\mathbb{T}} M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right)\Delta s \\
= \;& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_\mathbb{R}\left(\frac{\sin(\alpha\varepsilon/2)}{\alpha\varepsilon/2}\right)^2\left\{\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}\int_{[t_0,t]_\mathbb{T}} e^{if(s)\alpha}\Delta s\right\}d\alpha.
\end{aligned}$$

elde edilir. Üstelik, her $\alpha\in\mathbb{R}$ ve $t\in\mathbb{T}$ için,

$$\left|\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}\int_{[t_0,t]_\mathbb{T}} e^{if(s)\alpha}\Delta s\right|\leqslant 1$$

dir. Dolayısıyla, (3.2) eşitliğini Lebesgue yakınsaklık teoremini göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}\int_{[t_0,t]_\mathbb{T}} M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right)\Delta s \\
= \;& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_\mathbb{R}\left(\frac{\sin(\alpha\varepsilon/2)}{\alpha\varepsilon/2}\right)^2\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}\int_{[t_0,t]_\mathbb{T}} e^{if(s)\alpha}\Delta s\right\}d\alpha \\
= \;& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_\mathbb{R}\left(\frac{\sin(\alpha\varepsilon/2)}{\alpha\varepsilon/2}\right)^2 d\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. $M$ fonksiyonunun tanımı gereğince

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}\int_{[t_0,t]_\mathbb{T}} M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right)\Delta s = M(0) = 1 \tag{3.23}$$

dir. Herhangi bir $s \in \Omega(t)$, $\Omega(t) := \{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : s \in \Omega\}$ için, $\dfrac{f(s)}{\varepsilon} \geqslant 1$ olur. Böylece

$$\int\limits_{\Omega(t)} M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right)\Delta s = 0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right)\Delta s &= \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}\setminus\ \Omega(t)} M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right)\Delta s + \int\limits_{\Omega(t)} M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right)\Delta s \\
&\leqslant \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}\setminus\ \Omega(t)} \Delta s \\
&= \mu_{\Delta}\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right) - \mu_{\Delta}\left(\Omega(t)\right)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\frac{\mu_{\Delta}\left(\Omega(t)\right)}{\mu_{\Delta}\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} \leqslant 1 - \frac{1}{\mu_{\Delta}\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} M\left(\frac{f(s)}{\varepsilon}\right)\Delta s$$

bulunur. Son eşitsizliğin her iki tarafında $t \to \infty$ için limit alıp ayrıca (3.23) eşitliğini kullanırsak,

$$\delta_{\mathbb{T}}(\Omega) = 0$$

sonucuna ulaşırız. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Bu noktada hemen belirtmeliyiz ki Teorem 3.2.3'te $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alınırsa Schoenberg'in ispatlamış olduğu teorem [21], $a > 0$ olmak üzere $\mathbb{T} = [a, \infty)$ alınırsa Fekete ve Móricz tarafından ispatlanmış olan teorem elde edilir [12]. Bu teoremin bir başka özel durumu ise $q > 1$ için, $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}}$ alınması halinde bizi aşağıdaki sonuca ulaştırır.

**Sonuç 3.2.1.** *$q > 1$ olmak üzere $f : q^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,*

$$st_{q^{\mathbb{N}}} - \lim_{t\to\infty} f(t) = L$$

*olması için gerek ve yeter şart, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{[n]_q} \sum_{k=1}^{n} e^{i\alpha f(q^k)} q^{k-1} = e^{i\alpha L}$$

*dir. Burada $[n]_q$ ifadesi (3.11) eşitliği ile verilen q-tamsayısını göstermektedir.*

Şimdi bir sonraki karakterizasyonumuzda kullanacağımız bir tanımı verelim.

**Tanım 3.2.1.** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon ve $0 < p < \infty$ olsun.*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L|^p \, \Delta s = 0$$

*olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ varsa, bu durumda $f$ fonksiyonu "$\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde kuvvetli $p$-Cesáro toplanabilirdir" denir.*

Burada vermiş olduğumuz tanım, bazı zaman skalaları üzerinde iyi bilinen kuvvetli $p$-Cesáro toplanabilme kavramını, herhangi bir zaman skalasına genişletmektedir. Örneğin, $q > 1$ için $q^{\mathbb{N}}$ zaman skalası alınırsa Tanım 3.2.1 bize bir $f$ fonksiyonunun $q^{\mathbb{N}}$ üzerinde kuvvetli $p$-Cesáro toplanabilir olması için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{[n]_q} \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \left|f\left(q^k\right) - L\right|^p = 0$$

şartını sağlayan en az bir $L$ reel sayısının mevcut olması gerektiğini gösterir. Bu tanım, toplanabilme teorisi için yeni bir çalışma alanı oluşturmaktadır.

Son karakterizasyonumuz için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç duyacağız.

**Lemma 3.2.3.** *(Zaman skalaları üzerinde Markov eşitsizliği) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ için $\Omega(t) := \{s \in [t_0,t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda*

$$\mu_\Delta(\Omega(t)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Omega(t)} |f(s) - L| \, \Delta s \leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L| \, \Delta s$$

*dir.*

**İspat.** Her $s \in [t_0,t]_{\mathbb{T}}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leqslant \varepsilon \chi_{\Omega(t)}(s) \leqslant |f(s) - L| \, \chi_{\Omega(t)}(s) \leqslant |f(s) - L|$$

yazılabilir ve buradan

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega(t)} \Delta s \leq \int\limits_{\Omega(t)} |f(s) - L| \, \Delta s \leq \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L| \, \Delta s$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla,

$$\varepsilon\mu_{\Delta}\left(\Omega(t)\right) \leq \int\limits_{\Omega(t)} \left|f\left(s\right)-L\right| \Delta s \leq \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \left|f\left(s\right)-L\right| \Delta s$$

olur ve böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi son teoremimizi verelim.

**Teorem 3.2.4.** *$f:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir bir fonksiyon, $L\in\mathbb{R}$ ve $0<p<\infty$ olsun. Bu durumda,*

(i) *Eğer $f$ fonksiyonu $L$ sayısına kuvvetli $p$-Cesáro toplanabilir ise, $st_{\mathbb{T}}-\lim\limits_{t\to\infty} f\left(t\right)=L$ dir.*

(ii) *Eğer $st_{\mathbb{T}}-\lim\limits_{t\to\infty} f\left(t\right)=L$ ve $f$ sınırlı bir fonksiyon ise, bu durumda $f$ fonksiyonu $L$ sayısına kuvvetli $p$-Cesáro toplanabilirdir.*

**İspat.** $(i)$ $f$ fonksiyonu $L$ sayısına kuvvetli $p$-Cesáro toplanabilir olsun. Verilen bir $\varepsilon>0$ için $\Omega(t):=\{s\in[t_0,t]_{\mathbb{T}}:\left|f\left(s\right)-L\right|\geqslant\varepsilon\}$ diyelim. Lemma 3.2.3'ten

$$\varepsilon^{p}\mu_{\Delta}\left(\Omega(t)\right) \leqslant \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \left|f\left(s\right)-L\right|^{p} \Delta s$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafını $\mu_{\Delta}\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)$ sayısına bölüp $t\to\infty$ için limit alırsak,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu_{\Delta}\left(\Omega(t)\right)}{\mu_{\Delta}\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{p}}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu_{\Delta}\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \left|f\left(s\right)-L\right|^{p}\Delta s=0$$

elde edilir. Bu sonuç ise $st_{\mathbb{T}}-\lim\limits_{t\to\infty} f\left(t\right)=L$ olması demektir.

$(ii)$ $f$ fonksiyonu sınırlı ve $\mathbb{T}$ üzerinde $L$ sayısına istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda pozitif bir $M$ sayısı vardır öyle ki her $s\in\mathbb{T}$ için, $\left|f\left(s\right)\right|\leqslant M$'dir. Ayrıca,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu_{\Delta}\left(\Omega(t)\right)}{\mu_{\Delta}\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)}=0 \tag{3.24}$$

olur. Buradaki $\Omega(t)$ kümesi, $(i)$ şıkkındaki gibidir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} |f(s)-L|^p \Delta s &= \int\limits_{\Omega(t)} |f(s)-L|^p \Delta s + \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}} \setminus \Omega(t)} |f(s)-L|^p \Delta s \\
&\leqslant (M+|L|)^p \int\limits_{\Omega(t)} \Delta s + \varepsilon^p \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} \Delta s \\
&= (M+|L|)^p \mu_\Delta(\Omega(t)) + \varepsilon^p \mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})
\end{aligned}$$

olur. Yine eşitsizliğin her iki tarafını $\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})$ ile bölüp $t \to \infty$ için limit alırsak,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})} \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} |f(s)-L|^p \Delta s \leqslant (M+|L|)^p \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A)}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})} + \varepsilon^p \quad (3.25)$$

elde edilir. $\varepsilon$ keyfi olduğundan, (3.24) ve (3.25)'ten ispat tamamlanır. □

Yine Teorem 3.2.4'ün $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ve $a > 0$ olmak üzere $\mathbb{T} = [a, \infty)$ halleri [9] ve [18]'de incelenmiştir. Üstelik Teorem 3.2.4'te $q > 1$ olmak üzere $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}}$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılacağı açıktır.

**Sonuç 3.2.2.** *$q > 1$ olmak üzere $f : q^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $\Delta$-ölçülebilir ve $\mathbb{T}$ üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda,*

$$st_{q^{\mathbb{N}}} - \lim_{n\to\infty} f(q^n) = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{[n]_q} \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \left| f\left(q^k\right) - L \right|^p = 0$$

*olur.*

# 4. DEĞERLENDİRME VE ELDE EDİLEN ÇIKTILAR

## 4.1 Değerlendirme

Bu yüksek lisans tezinde zaman skalaları üzerinde tanımlanan reel değerli fonksiyonların istatistiksel yakınsaklığı kavramını inşa ettik ve bunun için çeşitli karakterizasyonlar elde ettik. Buradaki sonuçlar, ayrık ve sürekli durumlar için iyi bilinen teoremleri kapsadığı gibi toplanabilme teorisinde pek çok yeni metodun tanımlanabilmesi için de imkan sağlamaktadır. Örneğin matris toplanabilme metodu, A-istatistiksel yakınsaklık kavramı gibi konuların zaman skalası üzerinde çalışılması ilk akla gelen problemlerdir. Zaman skalasını özelleştirdiğimizde, örneğin $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}}$ (q>1) aldığımızda yine düşünülmesi gereken pek çok problem bulunmaktadır. Bu yönüyle, burada elde ettiğimiz sonuçların, son yıllarda oldukça popüler olan "Kuantum Kalkülüsü" ile doğrudan bağlantılı olduğu da görülmektedir.

## 4.2 Elde Edilen Çıktılar

Bu yüksek lisans tezinden elde edilen sonuçlar aşağıdaki uluslararası bir konferansta sunulmuştur:

- International Conference on Applied Mathematics and Approximation

Theory-AMAT 2012, May 17-20, TOBB University of Economics and Technology, Ankara, Turkey.

Üstelik sonuçlarımız uluslararası yayınevi olan Springer'de aşağıdaki künye ile yayınlanmak üzere kabul edilmiştir:

- C. Turan and O. Duman, Statistical convergence on time scales and its characterizations, Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory: Contributions from AMAT 2012, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, to appear

# KAYNAKLAR


[1] C.D. Ahlbrandta and C. Morianb, Partial differential equations on time scales, *J. Comput. Appl. Math.* 141 (2002), 35–55.

[2] H. Aktuğlu and Ş. Bekar, $q$-Cesáro matrix and $q$-statistical convergence, *J. Comput. Appl. Math.* 235 (2011), 4717–4723.

[3] G.A. Anastassiou and O. Duman, *Towards Intelligent Modelling: Statistical Approximation Theory*, Intelligent Systems Reference Library Volume:14, Springer, (2011)

[4] G. Aslim and G.Sh. Guseinov, Weak semirings, $\omega$-semirings, and measures, *Bull. Allahabad Math. Soc.* 14 (1999), 1–20.

[5] M. Bohner and G.Sh. Guseinov, Multiple integration on time scales, *Dynamic Syst. Appl.* 14 (2005), 579–606.

[6] M. Bohner and G.Sh. Guseinov, Multiple Lebesgue integration on time scales, *Advances in Difference Equations,* Article ID: 26391, (2006), 1–12.

[7] M. Bohner and A. Peterson, *Dynamic equations on time scales. An introduction with applications*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2001).

[8] A. Cabada and D.R. Vivero, Expression of the Lebesgue $\Delta$-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of $\Delta$-antiderivatives, *Math. Comput. Modelling* 43 (2006), 194–207.

[9] J.S. Connor, The statistical and strong $p$-Cesáro convergence of sequences, *Analysis* 8 (1988), 47-63.

[10] A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées sommables, *Bull. Soc. Math. France* 43 (1915), 161–248.

[11] H. Fast, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.* 2 (1951), 241–244.

[12] A. Fekete and F. Móricz, A characterization of the existence of statistical limit of real-valued measurable functions, *Acta Math. Hungar.* 114 (2007), 235–246.

[13] J.A. Fridy, On Statistical Convergence, *Analysis* 5 (1985), 301–313.

[14] A.D. Gadjiev and C. Orhan, Some approximation theorems via statistical convergence, *Rocky Mountain J. Math.* 32 (2002), 129-138.

[15] G.Sh. Guseinov, Integration on time tcales, *J. Math. Anal. Appl.* 285 (2003), 107–127.

[16] S. Hilger, Ein Maâkettenkalkĺul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, Ph.D. Thesis, Universitĺat, Wĺurzburg, (1988) (in German).

[17] S. Hilger, Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results Math.* 18 (1990), 18–56.

[18] F. Móricz, Statistical limits of measurable functions, *Analysis* 24 (2004), 207–219.

[19] I. Niven, H.S. Zuckerman and H.L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers* (fifth edition), John Wiley & Sons, Inc., New York, (1991).

[20] T. Šalát, On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slovaca* 2 (1980), 139–150.

[21] I.J. Schoenberg, The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly* 66 (1959), 361–375.

[22] M.S. Seyyidoglu and N.O. Tan, A note on statistical convergence on time scales, *Journal of Inequalities and Applications* 219 (2012), 1-7.

# ÖZGEÇMİŞ

## Kişisel Bilgiler

| | | |
|---|---|---|
| Soyadı, Adı | : | TURAN, Ceylan |
| Uyruğu | : | T.C. |
| Doğum tarihi ve yeri | : | 25.02.1989 Ankara |
| Medeni hali | : | Bekar |
| Telefon | : | 0312 292 43 28 |
| Faks | : | 0312 292 40 76 |
| e-mail | : | cturan@etu.edu.tr |

## Eğitim

| **Derece** | **Eğitim Birimi** | **Mezuniyet Tarihi** |
|---|---|---|
| Lisans | Gazi Üniversitesi | 2010 |

## İş Deneyimi

| **Yıl** | **Yer** | **Görev** |
|---|---|---|
| 2010-2012 | TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi | Araştırma Görevlisi |

## Yabancı Dil

İngilizce (İyi)

## Yayınlar

C. Turan and O. Duman, “Statistical convergence on time scales and its characterizatins”, Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory: Contributions from AMAT 2012, *Springer Proceedings in Mathmatics and Statistics*, to appear.