

OPSİYON FİYATLAMA MODELLERİNİN KARARLILIK  
ANALİZİ

HANDE YÜCEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK BÖLÜMÜ

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2013

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

---

Prof. Dr. Ünver KAYNAK  
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

---

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR  
Anabilim Dalı Başkanı

HANDE YÜCEL tarafından hazırlanan OPSİYON FİYATLAMA MODELLE-  
RİNİN KARARLILIK ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun  
olduğunu onaylarım.

---

Doç. Dr. Hüseyin MERDAN  
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Oktay DUMAN

Üye : Doç. Dr. Nuri ÖZALP

Üye : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hande YÜCEL

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
Enstitüsü : Fen Bilimleri  
Anabilim Dalı : Matematik Bölümü  
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN  
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Temmuz 2013

Hande YÜCEL

## OPSİYON FİYATLAMA MODELLERİNİN KARARLILIK ANALİZİ

### ÖZET

Bu tez çalışmasında, tek çeşit hisse senedi ve bir grup aynı görüşteki yatırımcıdan oluşan kapalı bir sistem göz önüne alınarak hisse senetlerine fiyat tahmini veren iki farklı matematiksel model olan CB modeli [4] ve MA modeli [14] için kararlılık analizleri yapılmıştır. Analizler sırasında öncelikle sistemlerin dengede oldukları durumlar incelenmiş ve sistemlerin denge noktaları bulunmuştur. Burada ayrıca sistemlerin denge durumlarının tamamını içeren denge bölgelerinin varlığından bahsedilmiştir. Routh-Hurwitz Kriteri yardımıyla sistemler için ayrı ayrı kararlılık teoremleri inşa edilmiştir. Bu teoremlerin şartları gerçekleştiği taktirde sistemler için kararlı bölgelerin var olduğu söylenmiştir. Bu ise ekonomide, sistemdeki olumsuz hareketliliklerden etkilenmeyen "güvenli bölge" anlamına gelmektedir.

Çalışmanın devamında nümerik simülasyonlar yardımıyla her iki model için de kararlılık bölgeleri çizilmiş ve karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Kararlılık Analizi, Denge Noktası, Deterministik Yaklaşım, Opsiyon Fiyatlama, Matematiksel Modelleme.

**University** : **TOBB University of Economics and Technology**  
**Institute** : **Institute of Natural and Applied Sciences**  
**Science Programme** : **Department of Mathematics**  
**Supervisor** : **Assoc. Prof. Hüseyin MERDAN**  
**Degree Awarded and Date** : **M.Sc. – July 2013**

**Hande YÜCEL**

## **STABILITY ANALYSIS OF OPTION PRICING MODELS**

### **ABSTRACT**

In this thesis, we study stability analysis of two different option pricing models. These models are derived for a closed systems in which conserves cash and assets ([4], [14]). These systems consist of a single asset and homogeneous group of investors. First, equilibrium conditions of the systems are examined, then equilibrium points of these systems are obtained. At this point, we mentioned existing of equilibrium regions which include all of the equilibrium situations. We use Routh-Hurwitz Criteria in order to establish the stability theorems for each model. Also, we mention that there is a stable region for each model if the conditions of stability theorem come true. Finding stable region provide us to have "safe region" in the system. Market fluctuations and global crisis cannot have any effect on the safe region.

End of the thesis, we perform some numerical simulations and plot stable regions of these models. Following this, the stable regions of these system are compared.

**Keywords:** Stability Analysis, Equilibrium Point, Deterministic Approximation, Option Pricing, Mathematical Modelling.

## TEŐEKKÜR

Tez alıőmalarım boyunca destek ve katkılarıyla beni yönlendiren ok değerli hocam Do. Dr. Hüseyin MERDAN'a bana öğrettiği her őey için teőekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim sırasında benden yardımlarını esirgemeyen tüm asistan arkadaşlarıma ve engin tecrübelerinden yararlanma Őansı bulduğum değerli TOBB ETÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerine teőekkürü bir borç bilirim.

Beni her zaman destekleyip bugünlere getiren başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme manevi desteklerinden dolayı sonsuz teőekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisans eğitimimdeki maddi desteğinden dolayı TÜBİTAK'a ve TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine'ne teőekkürlerimi sunarım.

# İçindekiler

<b>İÇİNDEKİLER</b>	<b>vii</b>
<b>SİMGE LİSTESİ</b>	<b>ix</b>
<b>1 1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1 Tez Çalışmasının Amacı . . . . .	1
1.2 Deterministik Opsiyon Fiyatlama Modelleri . . . . .	3
1.2.1 Tek yatırımcı grup içeren modeller . . . . .	3
1.2.2 Çoklu yatırımcı grup içeren modeller . . . . .	7
<b>2 KARARLILIK ANALİZİ</b>	<b>10</b>
2.0.3 Kararlılık nedir? . . . . .	11
2.1 Deterministik Opsiyon Fiyatlama Modellerinin Kararlılık Analizi . . . . .	16
2.1.1 Tek yatırımcı grup içeren model için kararlılık analizi . . . . .	16
2.1.2 Çoklu yatırımcı grup içeren model için kararlılık analizi . . . . .	17
<b>3 TEZ PROBLEMİ</b>	<b>23</b>

3.1	Tek Yatırımcı Grup İçeren Sistem İçin Kararlılık Analizi . . . . .	23
3.1.1	CB modeli için kararlılık analizi . . . . .	23
3.1.2	MA modeli için kararlılık analizi . . . . .	51
<b>4</b>	<b>NÜMERİK ÇALIŞMALAR</b>	<b>66</b>
4.1	Tek Yatırımcı Grup İçeren Sistemler için Nümerik Simülasyonlar .	66
4.1.1	CB modelinin nümerik simülasyonu . . . . .	66
4.1.2	MA modelinin nümerik simülasyonu . . . . .	73
4.1.3	Karşılaştırma . . . . .	76
<b>5</b>	<b>SONUÇ</b>	<b>77</b>
	<b>KAYNAKLAR</b>	<b>80</b>
	<b>EKLER</b>	<b>83</b>
	<b>A Terim Sözlüğü</b>	<b>84</b>
	<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	<b>85</b>



## SİMGE LİSTESİ

- CB := Caginalp-Balenovich Modeli,
- MA := Merdan-Alisen Modeli,
- $P(t)$  := Hisse senedinin  $t$  anındaki fiyatı,
- $\frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$  := Hisse senedi fiyatındaki bağıl (rölatif) değişim,
- $P_a(t)$  := Yatırımcının hisse senedi için belirlediği değer (gerçek değer),
- $P_{eq}(t)$  := Sistem dengede iken hisse senedinin fiyatı,
- $M(t)$  :=  $t$  anında piyasada bulunan para miktarı,
- $N(t)$  :=  $t$  anında piyasada bulunan hisse senedi miktarı,
- $\xi_1(t)$  := Yatırımcı kararına hisse senedi fiyatının yönüne göre etki eden bileşen,
- $\xi_2(t)$  := Yatırımcı kararına hisse senedinin gerçek değerine göre etki eden bileşen,
- $L(t)$  := Likidite değeri,
- $k(t)$  :=  $t$  anında bir birim paranın hisse senedine dönüşme olasılığı,
- $B(t)$  :=  $t$  anında hisse senedinde olan yatırım tutarının toplam yatırım tutarına oranı,
- $1-B(t)$  :=  $t$  anında nakitte olan yatırım tutarının toplam yatırım tutarına oranı,

$q_1(t)$  := genlik katsayısı,

$q_2(t)$  := genlik katsayısı,

$c_1^{-1}$  := Hisse senedi fiyatındaki değişimin hafızada kalma süresi (hafıza uzunluğu),

$c_2^{-1}$  := Hisse senedi almadan önceki eylemsizlik hali (zihinsel duraęanlık),

$D$  := Talep,

$S$  := Arz.

# 1. 1. GİRİŞ

## 1.1 Tez Çalışmasının Amacı

Son yıllarda, deterministik (diferensiyel denklem) yaklaşım kullanılarak finansal sistemin temel öğelerinden biri olan hisse senedi aracının zaman içerisindeki fiyat gelişimini inceleyen modellemeler yapılmış ve bu sayede yatırımcıların, hisse senetlerinin değişen piyasa koşullarına göre oluşan fiyat hareketlerinden kazanç elde etmesi amaçlanmıştır. Böylece piyasalardaki belirsizlik ve risk durumlarına rağmen hisse senedinin fiyat tahmini yapılabilmektedir [18]. Ayrıca arz ve talep fonksiyonlarına dair daha fazla bilgi içeren piyasalar için, daha iyi hisse senedi fiyat tahmini veren modeller kurulmuştur [14]. Tüm bu modeller lineer olmayan adi diferensiyel denklemlerden oluşan denklem sistemleridir. Sistemlerde kullanılan parametre ve katsayıların herbiri hisse senedi alım-satımında yatırımcıların sahip olduğu bakış açıları (trend ya da gerçek değere verilen önem), motivasyonları, duygusal ve mantıksal durumları simgelemekte ve ayrı ayrı etkileri gözönünde bulundurulmaktadır.

Finansal piyasalarda meydana gelen dalgalanmalar ve kimi zaman da krizler, yatırımcıların 'güvenli bölge' arayışı içerisinde girmelerine sebep olmuştur. Öyle ki eğer finansal sistemde bir güvenli bölge bulunabilirse böylelikle piyasalardaki istenmeyen hareketliliklerin etkilerinden kaçınmanın ya da bu etkileri minimuma indirmenin mümkün olabileceği düşünülmektedir. Bahsettiğimiz güvenli bölge elimizdeki matematiksel modelin kararlı olduğu bölgedir. Kararlılık ise; sistemin denge durumuna ulaşması ve bu durumun muhafaza edilmesi anlamına gelmektedir.

Bu tez çalışmasında, biri diğerinden daha iyi hisse senedi fiyat tahmini veren iki opsiyon fiyatlama modelinin kararlılık analizi yapıldı. Bu analizler sırasında öncelikle sistemlerin denge noktaları bulundu. Buradan hareketle sistemlerin denge noktalarının bulunduğu bölge yani denge bölgesi tanımlandı. Ardından bir sistemin kararlı olması için ne tür şartlara ve özelliklere sahip olması gerektiği açıklanarak sistemler için bu özelliklerin analizleri yapıldı. Yapılan analizler göz önünde bulundurularak kararlılık teoremleri inşa edildi.

Sonrasında nümerik simülasyonlar yardımıyla sistemler için varlığı teorik olarak ispatlanmış olan denge ve kararlılık bölgeleri çizdirildi.

Son olarak biri diğerinden daha iyi bir yaklaşım veren modeller arasında bir karşılaştırma yapıldı.

## 1.2 Deterministik Opsiyon Fiyatlama Modelleri

### 1.2.1 Tek yatırımcı grup içeren modeller

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kararlılık analizlerini yapacağımız opsiyon fiyatlandırma modellerinden bahsedeceğiz. Klasik ekonominin "bir hisse senedinin fiyatı, ona olan arz ve talep birbirine eşit olduğunda denge noktasına ulaşır" temel prensibini başlangıç noktası kabul ederek hisse senedi fiyatlarının zamana bağlı değişimlerini ve bu değişimlere etki eden faktörleri incelemek amacıyla deterministik yaklaşımla kurulmuş hisse senedi fiyat tahmini modellerinden biri "*Asset flow and momentum: Deterministic and stochastic equations*" isimli çalışmadır [4].

Bu çalışmada piyasaya içeriden-dışarıya ve dışarıdan-içeriye para ve hisse senedinin akışının olmadığı ve yalnızca bir grup yatırımcı tarafından tek bir hisse senedinin alınıp-satıldığı bir finansal piyasa (kapalı sistem) göz önüne alınarak bir matematiksel model geliştirilmiştir. Bunu termodinamik terminolojisi içinde şu şekilde düşünmek mümkündür. Bir termosun içine sıcak su doldurulup, kapatıldıktan sonra içi dolu bir havuza bırakılması durumudur. Bu durumda içeriden dışarıya, dışarıdan içeriye ısı akışı mevcut değildir. Yani termosun içindeki enerji korunur. Kapalı finansal piyasa kabulünden dolayı piyasadaki toplam para ve hisse senedi miktarı sabit olarak belirlenmiştir. Başlangıçta, gruptaki katılımcılara rasgele olacak şekilde bir miktar para ve hisse senedi dağıtımı yapılmıştır. Sistemde toplamda  $M$  birim nakit para ve  $N$  birim hisse senedi bulunmaktadır. Likidite terimi toplam nakit paranın toplam hisse senedi miktarına oranı olarak tanımlanmış ve kapalı bir sistemde bu iki değer sabit olacağından dolayı,  $L := \frac{M}{N}$  şeklinde sabit bir değer olarak ifade edilmiştir.

$k$  fonksiyonu ise bir birim paranın bir birim hisse senedine dönüşme olasılığı, ve benzer şekilde  $1 - k$  hisse senedinden paraya dönüşme olasılığı olarak tanımlanmıştır. Bir olasılık belirten  $k$  fonksiyonu  $[0, 1]$  aralığında değer almaktadır.

$k := \frac{1}{2}(1 + \tanh \xi)$  şeklindedir fakat küçük  $t$  değerleri için  $\tanh(t) \approx t$  olan lineer

yaklaşımından faydalanarak  $k$  fonksiyonu;

$$k := \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (1.1)$$

şeklinde yeniden yazılmıştır. Yatırımcı motivasyon fonksiyonları ise

$$\xi := \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 = \frac{q_1 \tau_0}{P} \frac{dP}{dt}, \quad \xi_2 = q_2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_a(t)}\right) \quad (1.2)$$

şeklinde alınmıştır.

Buna bağlı olarak arz ve talep fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilmiştir

$$D := k(1 - B), \quad S := (1 - k)B, \quad \frac{D}{S} = \frac{k}{1 - k} \frac{1 - B}{B}. \quad (1.3)$$

Hisse senedi fiyatının bağıl değişim ise

$$\frac{\tau_0}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1 \quad (1.4)$$

şeklinde verilmiştir. Toplam mal varlığındaki nakit para ve hisse senedi oranını belirten  $B$  ve  $1 - B$  ifadeleri ise aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$B = \frac{NP}{NP + M}, \quad 1 - B = \frac{M}{NP + M}, \quad (1.5)$$

$$\frac{B}{1 - B} = \frac{N}{M} P = \frac{P}{L}. \quad (1.6)$$

Çalışmanın ilerleyen kısımlarında, yatırımcıların olası değişimlere hemen tepki vermediği gözönüne alınarak yatırımcı motivasyon ve stratejisini temsil eden  $\xi_i$  fonksiyonlarına zaman terimi eklenmiş ve şu şekilde genişletilmiştir:

$$\begin{cases} \xi_1(t) = q_1 c_1 \int_{-\infty}^t e^{-c_1(t-\tau)} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau, \\ \xi_2(t) = q_2 c_2 \int_{-\infty}^t e^{-c_2(t-\tau)} \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} d\tau. \end{cases} \quad (1.7)$$

Şimdi de (1.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_1(t) + \xi_2(t) \\ &= q_1 c_1 \int_{-\infty}^t e^{-c_1(t-\tau)} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau + q_2 c_2 \int_{-\infty}^t e^{-c_2(t-\tau)} \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (1.8)$$

tanımlanmıştır.  $\xi_1(t)$  ve  $\xi_2(t)$  fonksiyonlarının zamana bağlı türevleri alınarak aşağıdaki diferensiyel denklemler elde edilmiştir:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = c_1\left(\frac{q_1}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1\right), \quad (1.9)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = c_2\left(q_2 \frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)} - \xi_2\right). \quad (1.10)$$

Hisse senedindeki varlığın toplam mal varlığına oranının zamana bağlı değişimi ise, yatırımcının hisse senedi almasına, elindeki hisse senedini satmasına ve hisse senedi fiyatındaki değişikliğe bağlıdır. Yani

$$\frac{dB}{dt} = k(1 - B) + (k - 1)B + \text{hisse senedinin fiyatındaki değişiklik} \quad (1.11)$$

şeklinindedir. Böylece aşağıdaki diferensiyel denklem elde edilmiştir

$$\frac{dB}{dt} = k(1 - B) + (k - 1)B + B(1 - B) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt}. \quad (1.12)$$

Çalışmada (1.4), (1.9), (1.10), (1.12) denklemleriyle aşağıdaki lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi oluşturulmuş ve nümerik olarak çalışılmıştır

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau_0}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1, \\ \frac{dB}{dt} = k(1 - B) + (k - 1)B + B(1 - B) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt}, \\ \frac{d\xi_1}{dt} = c_1\left(\frac{q_1}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1\right), \\ \frac{d\xi_2}{dt} = c_2\left(q_2 \frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)} - \xi_2\right). \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Daha sonraki yıllarda, aşırı talep fonksiyonu kullanılarak elde edilen fiyat değişim denkleminin arz ve talep fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi içeren piyasalar için yetersiz kalacağı fikri hakim olmuştur. Bu fikrin çıkışı, aynı denge noktasında kesişen ve birbirinden farklı eğimlere sahip birden fazla arz ve talep fonksiyonunun bulunabilir olmasından ileri gelmektedir. Çünkü bunlardan hangisinin gerçeğe daha yakın olduğunu belirlemek zordur. O halde  $P$  fiyatına dair yalnızca değerlerin değil aynı zamanda birinci, ikinci ve yüksek mertebeden türevlerin de bilinmesi yapılan fiyat tahmini için fayda sağlayacaktır. 2005 yılında Çağınalp

tarafından yapılan "*Nonlinear Price Evolution*" başlıklı çalışma bu temeller üzerine kurulmuştur [3].

Çağınalp bu çalışmada fiyatın zamana göre değişimini veren yeni bir formül geliştirmiştir. Bu formülde ilk olarak arz ve talep fonksiyonlarının ve bunların birinci mertebeden türevlerinin bilindiği durum ele alınmıştır.  $P = P_0$  noktasında yapılan Taylor seri açılımı kullanılarak elde edilen ve fiyatın zamana göre değişimini veren formül

$$\tau \frac{dP}{dt} = - \frac{D(P(t)) - S(P(t))}{D'(P(t)) - S'(P(t))} \quad (1.14)$$

şeklindedir. Çalışmanın devamında arz ve talep fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevlerinin aynı anda bilindiği varsayılmış ve ikinci dereceden Taylor seri açılımı yardımıyla fiyata kuadratik bir yaklaşım yapılmıştır.  $E(P) = D(P) - S(P)$  olmak üzere

$$\tau \frac{dP}{dt} = - \frac{E'}{E''} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2EE''}{E'^2}}\right) \quad (1.15)$$

şeklinde bir formül elde edilmiştir. 2011 yılında Merdan ve Alişen tarafından yapılan çalışmada aşırı talep fonksiyonunun yerine (1.14) formülü kullanılarak daha iyi hisse senedi fiyat tahmini veren yeni bir model oluşturulmuştur [14]. (1.14) denklemini diferensiyel denklem sisteminde kullanılabilir şekilde yeniden düzenlenmiş ve

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 - c_2 q_2 \frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)}}{c_1 q_1 - B(1 - B) 2 \cosh^2(\xi_1 + \xi_2)} \quad (1.16)$$

şeklinde elde edilmiştir. Çalışmanın devamında (1.16), (1.9), (1.10), (1.12) diferensiyel denklemleri kullanılarak aşağıda verilen lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi elde edilmiştir



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 - c_2 q_2 \frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)}}{c_1 q_1 - B(1-B)2 \cosh^2(\xi_1 + \xi_2)}, \\ \frac{dB}{dt} = k(1-B) + (k-1)B + B(1-B) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt}, \\ \frac{d\xi_1}{dt} = c_1 \left( \frac{q_1}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1 \right), \\ \frac{d\xi_2}{dt} = c_2 \left( q_2 \frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)} - \xi_2 \right). \end{array} \right. \quad (1.17)$$

### 1.2.2 Çoklu yatırımcı grup içeren modeller

Deterministik modellerde bahsedilmesi gereken çalışmalardan bir diğeri de 2007 yılında Çağınalp ve Merdan tarafından yayınlanan "*Asset price dynamics with heterogeneous groups*" isimli makaledir [7]. Bu çalışmada, klasik ekonominin

1. Arz ve talep sadece hisse senedi fiyatına bağlıdır,
2. Piyasadaki tüm yatırımcılar tüm bilgilere sahip olduğundan hisse senedi fiyatı tek türlü belirlenir,
3. Piyasadaki para miktarı sınırsızdır

şeklindeki kabullerinde bazı ihmaller olduğu söylenmiştir; Arz ve talebin belirlenmesinde hisse senedi fiyatının yanında trendinin de etkili olduğu, farklı motivasyonlara sahip yatırımcıların hisse senedi fiyatını farklı değerlerde belirleyebileceği ve piyasadaki para miktarının sınırlı olduğu savunulmuştur. Bu fikirler ışığında ilk olarak, farklı motivasyonlara sahip iki yatırımcı grubunun olduğu kapalı bir sistem incelenmiştir.  $M_0$  ve  $N_0$  sırasıyla sistemdeki toplam nakit miktarını ve hisse senedi sayısını göstermek üzere

$$M_1(t) + M_2(t) = M_0 \quad (1.18)$$

$$N_1(t) + N_2(t) = N_0 \quad (1.19)$$

olarak alınmış ve  $M_0$  ile  $N_0$  sabit kabul edilmiştir.  $M_1(t)$  ve  $M_2(t)$  birinci ve ikinci grubun elindeki nakit miktarını, benzer şekilde  $N_1(t)$  ve  $N_2(t)$  birinci ve ikinci grubun elindeki hisse senedi sayısını temsil etmektedirler. İki farklı yatırımcı grup için arz ve talep fonksiyonları:

$$D = k_1 M_1 + k_2 M_2, \quad (1.20)$$

$$S = (1 - k_1) N_1 P + (1 - k_2) N_2 P \quad (1.21)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanımlar ışığında rölatif fiyat değişim denklemi aşağıdaki şekilde elde edilmiştir

$$\tau_0 \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{k_1 M_1 + k_2 (M_0 - M_1)}{(1 - k_1) N_1 P + (1 - k_2) (N_0 - N_1) P} - 1. \quad (1.22)$$

Her bir grubun sahip olduğu para ve hisse senedi miktarlarındaki değişimler ( $i = 1, 2$  için)

$$P \frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1 - k_i) N_i P, \quad (1.23)$$

$$\frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P \quad (1.24)$$

şeklinde verilmiştir. [4] çalışmasında yatırımcı motivasyonunu simgeleyen fonksiyonlar burada da aynı şekilde alınmıştır ( $i = 1, 2$  indisleri farklı grupları simgelemek amacıyla kullanılmaktadır):

$$\frac{d\xi_1^{(i)}}{dt} = c_1^{(i)} \left( \frac{q_1^{(i)}}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1^{(i)} \right), \quad (1.25)$$

$$\frac{d\xi_2^{(i)}}{dt} = c_2^{(i)} \left( q_2^{(i)} \frac{P_a^{(i)}(t) - P(t)}{P_a^{(i)}(t)} - \xi_2^{(i)} \right). \quad (1.26)$$

Geçiş oranı fonksiyonu olarak bilinen  $k_i$  daha önceki çalışmalarda olduğu gibi bir olasılık fonksiyonu olarak tanımlanmıştır

$$k_i := \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh(\xi_1^{(i)} + \xi_2^{(i)}) \right). \quad (1.27)$$

Çalışmada (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), (1.26) denklemleri kullanılarak dokuz adet lineer olmayan diferensiyel denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilmiştir

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_0 \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{k_1 M_1 + k_2 (M_0 - M_1)}{(1 - k_1) N_1 P + (1 - k_2) (N_0 - N_1) P} - 1, \\ P \frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1 - k_i) N_i P, \\ \frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P, \\ \frac{d\xi_1^{(i)}}{dt} = c_1^{(i)} \left( \frac{q_1^{(i)}}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1^{(i)} \right), \\ \frac{d\xi_2^{(i)}}{dt} = c_2^{(i)} \left( q_2^{(i)} \frac{P_a^{(i)}(t) - P(t)}{P_a^{(i)}(t)} - \xi_2^{(i)} \right). \end{array} \right. \quad (1.28)$$

## 2. KARARLILIK ANALİZİ

Yatırımcılar piyasada işlem gören hisse senetlerinin değişen piyasa koşullarına göre gerçekleşen fiyat hareketlerinden faydalanarak kar elde etmek isterler. Buna bağlı olarak hisse senetlerinin zamana göre fiyat değişiminin nasıl olacağına tahminler veren matematiksel modeller geliştirilmiştir. Bu modellerden 1. bölümde bahsetmiştik.

Piyasaların bir diğer gerçeği de sistemlerdeki istenmeyen hareketlilikler, dalgalanmalar ve krizlerdir. Yatırımcı bu tip durumlardan etkilenmek istemez. Çünkü bu tip hareketliliklerin sonuçları çoğunlukla öngörülemez. Kimi zaman yatırımcı karının azalmasına sebep olurken kimi zaman da yatırımdan zarar edilmesine yol açar. Bu yüzden yatırımcı sistemde bu durumlardan etkilenmeyeceği bir güvenli bölge arayışına girer.

Bu güvenli bölge, lineer olmayan diferensiyel denklemlerden oluşan sistem için kararlılık bölgesi anlamına gelmektedir. Sistemin kararlı olduğu bölgeyi bulmak için sisteme kararlılık analizi yapılmalıdır.

Burada öncelikle kararlılık tanımından bahsedelim.

### 2.0.3 Kararlılık nedir?

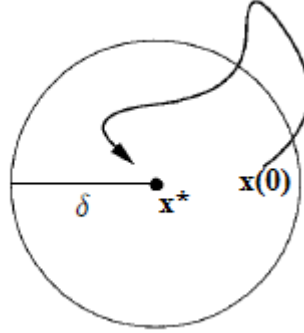
$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tanımlı vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\tilde{x}' = \tilde{f}(\tilde{x}) \quad (2.1)$$

otonom sistemini gözönüne alalım. O halde  $\tilde{f}(\tilde{x}^*) = 0$  şartını sağlayan  $\tilde{x}^*$  noktası sistem için bir denge noktasıdır. Eğer bir denge noktası, kendi komşulukları içinde başlayan herhangi bir çözümü  $t \rightarrow \infty$  iken kendine çekiyorsa, yani

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = \tilde{x}^* \quad (2.2)$$

ise bu taktirde bu denge noktasına *çekici* denir. Tersi durum sözkonusu ise, denge noktasına *itici* denir.



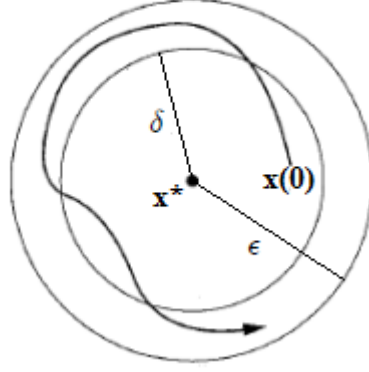
Şekil 2.1: çekici denge noktası

Eğer denge noktası, faz portresinin herhangi bir noktasından başlayan tüm çözümleri  $t \rightarrow \infty$  iken kendine çekiyorsa, bu taktirde denge noktasına global çekici denir.

Eğer bir denge noktasına yakın başlayan bir çözüm, **bütün t zamanlarında** yine bu çözüme yakın kalıyor ise, bu taktirde denge noktasına *Lyapunov anlamında kararlıdır* denir.

Yani,

$\forall \epsilon > 0$  için  $\exists \delta(\epsilon) > 0$  öyle ki,  $\|\tilde{x}(0) - \tilde{x}^*\| < \delta$  iken  $\|\tilde{x}(t) - \tilde{x}^*\| < \epsilon \forall t > 0$  ise,  $\tilde{x}^*$  denge noktası *Lyapunov anlamında kararlıdır* denir. Lyapunov anlamında



Şekil 2.2: Lyapunov anlamında kararlı denge noktası

kararlılık çekiciliği gerektirmezken, çekicilik de Lyapunov anlamında kararlılığı gerektirmez.

Bir denge noktası hem çekici hem de Lyapunov anlamında kararlı ise bu denge noktasına *asimptotik kararlı* denge noktası denir. Fakat bir denge noktası ne çekici ne de Lyapunov anlamında kararlı değilse bu denge noktasına *kararsızdır* denir.

Şimdi

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

sistemini düşünelim. Bu sistem

$$\tilde{x}' = A\tilde{x} \tag{2.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $A$  katsayı matrisi  $n \times n$  tipindedir.

Sistemin kararlılık analizinin yapılabilmesi için  $A$  matrisinin özdeğerlerinin

incelenmesi gereklidir.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

denklemi yardımıyla  $A$  matrisinin karakteristik polinomu bulunur. Bu karakteristik polinom

$$\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \quad (2.5)$$

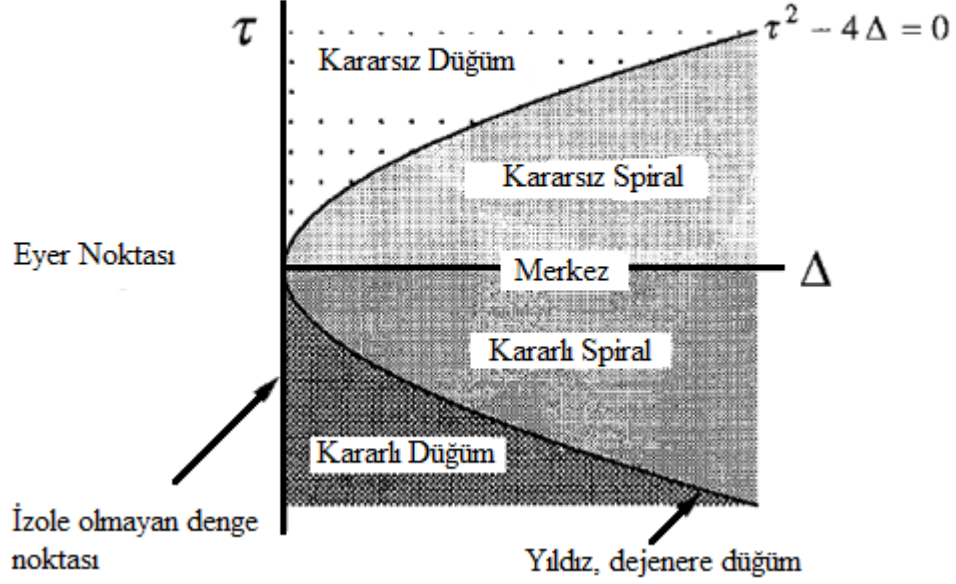
formundadır. Bu polinomun kökleri olan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 'ler ise özdeğerlerdir. Matrisin özdeğerlerinin reel kısımları incelendiğinde aşağıda verilen durumlar söz konusu olmaktadır:

1. Tüm özdeğerler negatif reel kısma sahip ise denge noktası **kararlıdır**,
2. En az bir özdeğerin reel kısmı pozitif ve diğerlerinin reel kısmı negatif ise denge noktası **kararsızdır**,
3. Tüm özdeğerler imajiner ise denge noktası **merkezdır**,
4. En az bir özdeğer sıfıra eşit ise denge noktası **izole-olmayan denge noktasıdır**.

Burada, sonraki bölümlerde inceleyeceğimiz sistemlerde kullanacağımız izole-olmayan denge noktası kavramını açalım. Kuadratik bir denklemi göz önüne alalım,  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$ . Bu tip bir denklemde özdeğerler için aşağıdaki formüller geçerlidir:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}, \quad \Delta = \lambda_1 \lambda_2, \quad \tau = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (2.6)$$

Bu formüller kullanılarak denge noktasının tipini belirlemek amacıyla aşağıda verilen grafik kullanılmaktadır.



Şekil 2.3:

Verilen bilgiler doğrultusunda, eğer özdeğerlerden biri sıfıra eşit olursa  $\Delta = 0$  olacağından izole olmayan denge noktası elde edilecektir. İzole olmayan denge noktası, denge noktalarının birbirlerinden ayrıştırılamaması yani reel sayılardan oluşan bir doğru boyunca her bir noktanın denge noktası olması anlamına gelmektedir. Daha somut bir örnek verelim:

$$x' = ax \quad (2.7)$$

$$y' = -y \quad (2.8)$$

problemi ele alalım. Bu problemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

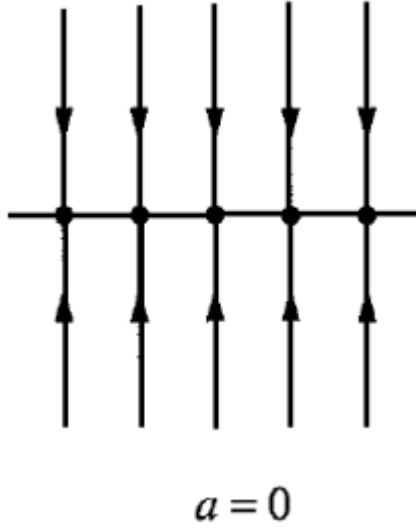
şeklinde yazalım. Katsayı matrisinden açıkça görülmektedir ki, özdeğerler  $\lambda_1 = a$  ve  $\lambda_2 = -1$  şeklindedir. Problemin çözümü ise

$$x(t) = x_0 e^{at} \quad (2.10)$$

$$y(t) = y_0 e^{-t} \quad (2.11)$$



şeklinde bulunur. Burada  $a$  parametresinin aldığı her bir farklı değer için farklı bir durum meydana gelmektedir. Eğer  $a = 0$  olarak alınacak olursa çözüm ikilisi  $(x_0, y_0 e^{-t})$  şeklinde bulunur. Aynı zamanda  $a = 0$  olarak alınması özdeğerlerden birinin sıfır olmasını gerektirir. Bu ise izole olmayan denge noktasının varlığına işaretler.  $(x_0, y_0 e^{-t})$  çözümü yardımıyla faz portresi çizildiğinde aşağıdaki şekilde elde edilir:



Şekil 2.4: İzole olmayan denge noktaları

Burada x-ekseni üzerindeki her bir reel sayı denge noktasıdır ve her bir denge noktası üzerinden bir çözüm geçmektedir. Denge noktaları birbirlerine çok yakındır ve hiçbiri yanından geçen bir çözümü çekemez veya itemez. Çünkü yanından geçen çözüm aynı zamanda başka bir denge noktasının çekim alanındadır. Çekicilikten bahsedemediğimiz için izole olmayan denge noktalarının asimptotik kararlı olamayacakları görülmektedir. Fakat denge noktasına yakın başlayan bir çözüm yine ona yakın kaldığından, bu tip denge noktaları Lyapunov anlamında kararlıdır.

Burada bahsettiğimiz sistemler lineer sistemlerdir. Lineer olmayan bir sistemin kararlılığı incelenirken ise, öncelikle bu sistem bulunan denge noktası civarında

lineerleştirilmelidir ve daha sonrasında elde edilen lineer sistem için yukarıda verilen adımlar uygulanmalıdır. Lineer olmayan bir sistemin nasıl lineerleştirildiği konusu Bölüm 3'te ayrıntılı şekilde verilecektir.

## 2.1 Deterministik Opsiyon Fiyatlama Modellerinin Kararlılık Analizi

Önceki bölümde hisse senedinin fiyatına tahmin veren matematiksel modeller incelenmişti. Bu bölümde ise bu matematiksel modellerin kararlılık analizleri incelenecektir.

### 2.1.1 Tek yatırımcı grup içeren model için kararlılık analizi

Çağınalp ve Balenovich tarafından çalışılan ve tek bir yatırımcı grup içeren sistemde hisse senedine fiyat tahmini veren matematiksel modeli 1. Bölümde incelemiştik [4]. Bu modelin kararlılık analizi 2011 yılında Duran tarafından topolojik olarak incelenmiştir [8]. Duran bu çalışmasında, "Asset Flow and Momentum" isimli [4] makalede yer alan dinamik sistemi aşağıda verilen haliyle yeniden ele almıştır

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{P} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-B(1-B)}{P} & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 q_1 \frac{1}{P} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dP}{dt} \\ \frac{dB}{dt} \\ \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{d\xi_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta h \left( \frac{k}{1-k} \frac{1-B}{B} \right) \\ k(1-B) - (1-k)B \\ -c_1 \xi_1 \\ c_2 \left( q_2 \frac{P_a - P}{P_a} - \xi_2 \right) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Burada

$$P > 0, \quad (2.13)$$

$$0 < B < 1, \quad (2.14)$$

$$-1 < \xi_1 + \xi_2 < 1, \quad (2.15)$$

$$P_a > 0 \quad (2.16)$$

dır. Denklem sisteminin denge noktası

$$\left( P, q_2 \frac{P_a - P}{2P_a} + 0.5, 0, q_2 \frac{P_a - P}{P_a} \right) \quad (2.17)$$

şeklinde bulunmuştur. Bu denge noktası  $\mathfrak{R}^4$ 'te  $P$  değişkeni ile  $P_a$  ve  $q_2$  parametrelerine bağlı bir eğridir. Bu eğri üzerinde sonsuz sayıda denge noktası vardır ve Peixoto Teoremine göre bunun, *Yapısal Kararsız* bir sistem olduğu söylenmiştir [19]. Bu çalışmada  $\frac{dP}{dt} = f_1, \frac{dB}{dt} = f_2, \frac{d\xi_1}{dt} = f_3, \frac{d\xi_2}{dt} = f_4$  alınarak

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(P, B, \xi_1, \xi_2)} \quad (2.18)$$

Jakobiyen matrisi hesaplanmış ve matrisin özdeğerlerinden birinin sıfır olması sebebiyle, bir çatallanmanın olabileceğine dikkat çekilmiştir.

### 2.1.2 Çoklu yatırımcı grup içeren model için kararlılık analizi

2011 yılında Çağınalp ve DeSantis tarafından, çoklu yatırımcı grup içeren ve hisse senedine fiyat tahmini veren matematiksel modelin [7] kararlılık analizi çalışılmış ve verilen nümerik değerlerle kararlı bölge çizimleri yapılmıştır [5]. Çağınalp ve DeSantis bu çalışmada, işlem kolaylığı ve ifade rahatlığı için bazı kabullerden bahsetmiştir. Bu kabuller şöyledir:

1. Sistemde iki farklı yatırımcı grubu vardır. 1. grup hisse senedinin trendini gözönüne alarak, 2. grup ise hisse senedinin gerçek değerini gözönüne alarak yatırımına yön vermektedir. Bu durumda klasik finans, hisse senedi fiyatının gerçek değer ( $P_a$ ) etrafında rasgele salınım yaptığını söylemektedir [23].

2. Taylor lineer yaklaşımı kullanılarak  $\tanh(x) \approx x$  alınmış ve bunun neticesinde

$$k^{(i)} \simeq \frac{1}{2}(1 + \xi^{(i)}), \quad i = 1, 2 \quad (2.19)$$

denklemleri elde edilmiştir. Burada  $\xi^{(i)}(t)$ , fonksiyonu

$$\xi^{(i)}(t) = \xi_1^{(i)}(t) + \xi_2^{(i)}(t) \quad (2.20)$$

şeklinde ve görüntü kümesi  $(-1, 1)$  aralığındadır ( $i = 1, 2$ ),

3.  $P_a^{(2)}(t) = P_a^{(2)}$  bir sabittir,

4.  $0 \leq N^{(1)} \leq N_0$  ve  $0 \leq M^{(1)} \leq M_0$  eşitsizlikleri vardır,

5.  $M_0, N_0, q_i^{(i)}, c_i^{(i)}$  ve  $P_a^{(i)}$  pozitif birer sabittir ( $i = 1, 2$ ).

Bu kabuller ve

$$M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t) = M_0, \quad (2.21)$$

$$N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t) = N_0 \quad (2.22)$$

denklemleri gözönünde tutularak (1.28) sistemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılmıştır

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN^{(1)}}{dt} = \frac{1}{2}(1 + \xi_1^{(1)})M^{(1)} \frac{(-\xi_1^{(1)} + \xi_2^{(2)})N^{(1)} + (1 - \xi_2^{(2)})N_0}{(\xi_1^{(1)} - \xi_2^{(2)})M^{(1)} + (1 + \xi_2^{(2)})M_0} - \frac{1}{2}(1 - \xi_1^{(1)})N^{(1)}, \\ \frac{dM^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{2}(1 + \xi_1^{(1)})M^{(1)} + \frac{1}{2}(1 - \xi_1^{(1)})N^{(1)} \frac{(\xi_1^{(1)} - \xi_2^{(2)})M^{(1)} + (1 + \xi_2^{(2)})M_0}{(-\xi_1^{(1)} + \xi_2^{(2)})N^{(1)} + (1 - \xi_2^{(2)})N_0}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{(\xi_1^{(1)} - \xi_2^{(2)})M^{(1)} + (1 + \xi_2^{(2)})M_0}{(-\xi_1^{(1)} + \xi_2^{(2)})N^{(1)} + (1 - \xi_2^{(2)})N_0} - P, \\ \frac{d\xi_1^{(1)}}{dt} = q_1^{(1)} c_1^{(1)} \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} - c_1^{(1)} \xi_1^{(1)}, \\ \frac{d\xi_2^{(2)}}{dt} = q_2^{(2)} c_2^{(2)} \frac{P_a^{(2)} - P}{P_a^{(2)}} - c_2^{(2)} \xi_2^{(2)}. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Sistemin denge durumu için, sistemdeki tüm türevler sıfıra eşitlenmiş ve  $P_{eq} \in \mathbb{R}^+$ ,  $P_{eq} \in (\min[P_a, L], \max[P_a, L])$  şartı altında sistemin denge noktası

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\hat{N}^{(1)}, \hat{M}^{(1)}, P_{eq}, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) \\ &= \left( \frac{[P_a - q_2(P_a - P_{eq})]N_0 P_{eq} - [P_a + q_2(P_a - P_{eq})]M_0}{2P_{eq}q_2(P_{eq} - P_a)}, P_{eq}, \hat{N}^{(1)}, P_{eq}, 0, q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada  $c_1$ ,  $c_2$  ve  $q_1$  parametreleri denge noktasında yer almamaktadır. Sonuç olarak da bu parametreler denge noktasının varlığını etkilememektedir. Bununla birlikte denge noktasının bulunuşunda etkisi olan parametrelerden faydalanarak, denge noktasının varlığına ilişkin aşağıdaki sonuçtan bahsedilmiştir.

**Sonuç 2.1.1.** *Kabuller ve (2.23) sistemi gözönünde bulundurulduğunda, sistemdeki tüm denge noktalarının aşağıdaki şartları sağlaması gerekmektedir.*

**Durum 1:**  $L < P_{eq} < P_a$  iken aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır:

$$(a) P_a > P_{eq} > 0, \quad (b) 0 < q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}},$$

$$(c) \frac{M_0}{P_{eq}} < N_0 \leq \frac{M_0[P_a + q_2(P_a - P_{eq})]}{P_{eq}[P_a - q_2(P_a - P_{eq})]}.$$

**Durum 2:**  $P_a < P_{eq} < L$  iken aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır:

$$(a) 0 < P_a < P_{eq}, \quad (b) 0 < q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}},$$

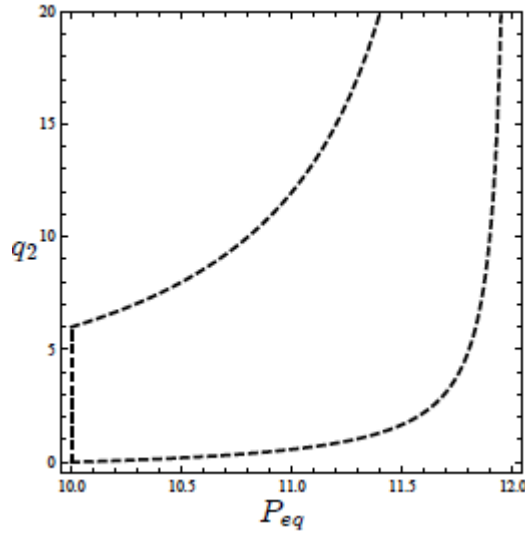
$$(c) \frac{M_0[P_a + q_2(P_a - P_{eq})]}{P_{eq}[P_a - q_2(P_a - P_{eq})]} \leq N_0 < \frac{M_0}{P_{eq}}.$$

**Durum 3:**  $P_a = P_{eq} = L$  iken aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır:

$$(a) 0 \leq \widehat{N}^{(1)} \leq N_0, \quad (b) P_a = P_{eq} = L,$$

$$(c) \widehat{\xi}_1 = \widehat{\xi}_2 = 0.$$

Verilen herbir durum için sistemdeki denge noktalarının sağlanması gereken koşullar belirtilmiş ve böylece denge noktalarının olması muhtemel olan tüm yerleri belirten bir denge bölgesi çizdirilmiştir. Bu denge bölgesi ilk durum için çizilmiş ve  $(10 = L < P_{eq} < P_a = 12)$  şeklinde alınmıştır. Diğer durumlar için de benzer çizimler yapılmıştır.



Şekil 2.5: Durum 1 için denge bölgesi

Çalışmanın devamında, elde edilen denge bölgesinin hangi kısımlarının hangi şartlar altında kararlı bölge olduğu araştırılmıştır. Bunun için lineer olmayan (2.23) sistemi  $\widehat{x}$  denge noktası etrafında lineerleştirilmiş ve elde edilen karakteristik polinoma *Routh-Hurwitz Kriterinin* uygulanmasıyla, karakteristik polinomun

kökü olan özdeğerlerin reel kısımları incelenmiş ve bu incelemeler ışığında,  $P_{eq} \in (\min[P_a, L], \max[P_a, L])$  koşulunun sağlandığı 3 farklı durum için ayrı ayrı şartlar belirten bir kararlılık teoremi verilmiştir. Bu teorem sayesinde varolan denge noktalarının hangi koşullarda kararlı olabileceği söylenebilmektedir.

**Teorem 2.1.1.** *Verilen herbir durum için aşağıdaki şartlar sağlandığında, (2.23) sisteminin  $\hat{x}$  denge noktası için bir kararlı bölge mevcuttur.*

**Durum 1:**  $L < P_{eq} < P_a$  olması halinde, aşağıdaki şartları sağlayan denge noktaları kararlıdır

$$\left(q_1 < \frac{1}{2}\right) \text{ ve } (c_1 < 1 + c_2).$$

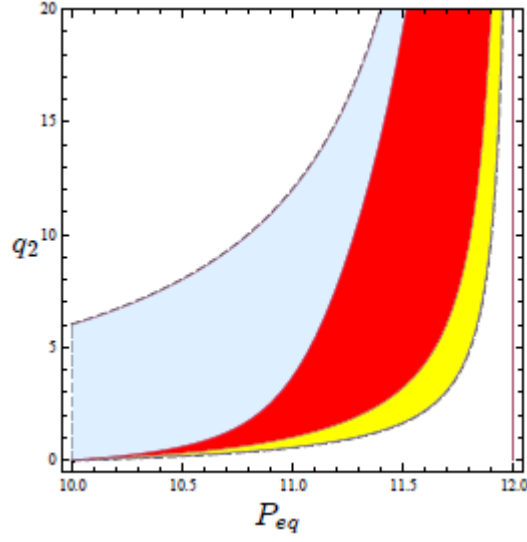
**Durum 2:**  $P_a < P_{eq} < L$  olması halinde, aşağıdaki şartları sağlayan denge noktaları kararlıdır

$$\left(q_1 < \frac{1}{2}\right) \text{ ve } (c_1 < 1 + c_2).$$

**Durum 3:**  $P_a = P_{eq} = L$  olması halinde, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan denge noktaları kararlıdır

$$q_1^{(1)} < \min \left[ \frac{1}{2} \frac{N_0}{\widehat{N}^{(1)}}, \frac{1 + c_2}{2c_1} \frac{N_0}{\widehat{N}^{(1)}} \right].$$

Verilen kararlılık teoreminde parametrelere özel değerler verilerek kararlılık bölgeleri çizdirilmiştir. Durum 1 ( $10 = L < P_{eq} < P_a = 12$ ) için çizdirilen kararlılık bölgesi aşağıda verilmiştir, diğer durumlar için de benzer çizimler yapılmıştır.



Şekil 2.6:  $(P_{\epsilon q}, q_2)$  düzleminde  $L = 10$  ve  $P_a = 12$  alınmıştır.  $q_1$  parametresine değerler verilerek sırasıyla  $q_1 = 0.447$  için (mavi, kırmızı ve sarı),  $q_1 = 10$  için (kırmızı, sarı) ve  $q_1 = 20$  için (sarı) kararlılık bölgeleri elde edilmiştir.

Dikkat edilirse denge noktasının varlığına etkisi olmayan  $q_1$  parametresi, varolan denge noktasının kararlılığını belirlemede etkin rol oynamaktadır.



## 3. TEZ PROBLEMİ

### 3.1 Tek Yatırımcı Grup İçeren Sistem İçin Kararlılık Analizi

#### 3.1.1 CB modeli için kararlılık analizi

Bu bölümde CB modeli için Routh-Hurwitz Kriteri yardımıyla yeni bir kararlılık analizi yapılacaktır. Öncelikle analizler sırasında kullanılan parametreler ve fonksiyonlar için bazı kabullerden bahsedeceğiz. Bu kabuller şöyledir:

1. Taylor lineer yaklaşımı kullanılarak  $\tanh(x) \approx x$  alınmış ve bunun neticesinde

$$k \simeq \frac{1}{2}(1 + \xi_1 + \xi_2), \quad (3.1)$$

denklemini elde edilmiştir. Burada  $\xi_i(t)$  fonksiyonunun görüntü kümesi  $(-1, 1)$  aralığındadır,  $(i = 1, 2)$ ,

2.  $\delta = \frac{1}{\tau_0}$  olarak alınmıştır,
3.  $q_1, q_2, c_1, c_2, P_a$  pozitif birer sabittir.

Kararlılık analizine, sistemin denge noktasının bulunması adımı ile başlayalım.

[4] makalesinde ele alınan (1.13) sistemi

$D = k(1 - B)$ ,  $S = (1 - k)B$  ve  $k = \frac{1}{2}(1 + \xi_1 + \xi_2)$  ifadeleri yerine yazılarak

aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilmiştir:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \frac{\delta P(1 - 2B + \xi_1 + \xi_2)}{(1 - \xi_1 - \xi_2)B}, \\ \frac{dB}{dt} = \frac{(1 - 2B + \xi_1 + \xi_2)(1 + 2\delta(1 - B) - \xi_1 - \xi_2)}{2(1 - \xi_1 - \xi_2)}, \\ \frac{d\xi_1}{dt} = c_1 \frac{q_1\delta(1 - 2B + \xi_1 + \xi_2) - (1 - \xi_1 - \xi_2)B\xi_1}{(1 - \xi_1 - \xi_2)B}, \\ \frac{d\xi_2}{dt} = c_2 \frac{q_2P_a - q_2P - P_a\xi_2}{P_a}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Verilen sistemin denge noktasını bulabilmek için sistemde yeralan her bir türevin sifira eşitlenmesi gerekmektedir. Çünkü bu, değişimin sona ermesi ve denge durumunun ortaya çıkması anlamına gelmektedir.  $P_{eq} \in \mathbb{R}^+$ ,  $P_{eq} \in (\min[P_a, L], \max[P_a, L])$  olması gerektiği biliniyor [5]. Bu şart altında her bir türev sifira eşitlendiğinde denge noktası

$$\hat{x} = (P_{eq}, \hat{B}, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) \quad (3.3)$$

$$= \left( P_{eq}, q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{2P_a} + \frac{1}{2}, 0, q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a} \right) \quad (3.4)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada,  $c_1$ ,  $c_2$  ve  $q_1$  parametrelerinin denge noktasının ifadesinde yer almadığına dikkat edilmelidir. O halde bu parametreler denge noktasının varlık durumuna etki etmemektedirler. Denge noktasının varlığı ve varolan denge noktalarının sağladığı şartları incelemek için aşağıdaki sonucu verelim.

**Sonuç 3.1.1.** (3.2) sistemi göz önünde bulundurulduğunda, tüm denge noktaları aşağıdaki şartları sağlamaktadırlar.

**Durum 1:**  $P_a > P_{eq} > L$  şartı altında aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır:

$$a) P_a > P_{eq} > 0, \quad b) 0 < q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}.$$

**Durum 2:**  $L > P_{eq} > P_a$  şartı altında aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır:

$$a) P_{eq} > P_a > 0, \quad b) 0 < q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}.$$

**Durum 3:**  $P_a = P_{eq} = L$  şartı altında aşağıdaki ifade sağlanmaktadır:

a)  $\widehat{\xi}_1 = \widehat{\xi}_2 = 0$ .

**İspat 3.1.1. Durum 1:**  $P_a > P_{eq} > L$  iken

(a)'nın doğruluğu açıktır.

(b) şıkkı için, başta bahsettiğimiz kabullerden  $-1 < \xi_2 < 1$  olduğu biliniyor. Denge durumunda  $\widehat{\xi}_2$  ifadesi,  $\widehat{\xi}_2 = q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a}$  şeklindedir ve bu ifade pozitiftir. O halde  $0 < \widehat{\xi}_2 < 1$  yazılabilir. Buradan,

$$0 < q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a} < 1 \quad (3.5)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$0 < q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}} \quad (3.6)$$

ifadesine ulaşılır.

**Durum 2:**  $L > P_{eq} > P_a$  iken

(a)'nın doğruluğu açıktır.

(b) şıkkı için, başta bahsettiğimiz kabullerden  $-1 < \xi_2 < 1$  olduğu biliniyor. Denge durumunda  $\widehat{\xi}_2$  ifadesi,  $\widehat{\xi}_2 = q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a}$  şeklindedir.  $L > P_{eq} > P_a$  durumu için bu ifade negatiftir. O halde  $-1 < \widehat{\xi}_2 < 0$  yazılabilir. Buradan,

$$-1 < q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a} < 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$0 < q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}} \quad (3.8)$$

ifadesine ulaşılır.

**Durum 3:**  $P_a = P_{eq} = L$  iken

(a)'nın doğruluğu açıktır.

(b) şıkkı için, denge durumunda  $\widehat{\xi}_1 = 0$  ve  $\widehat{\xi}_2 = q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a}$  olduğu bilinmektedir. O halde buradan

$$\widehat{\xi}_1 = \widehat{\xi}_2 = 0 \quad (3.9)$$

ifadesi kolayca görülebilir.  $\square$

Böylece denge durumunda sağlanması gereken kriterleri inşa ettik. Şimdi ise Sonuç (3.1.1)'de bahsedilen 3 farklı durum için kararlılık kriterlerini inceleyelim. (3.2) sisteminin kararlılık analizini yaparken takip edilmesi gereken adımlar şu şekildedir:

1. Sistemin denge noktası bulunmalıdır,
2. Lineer olmayan bu sistem, bulunan denge noktası civarında lineerleştirilmelidir,
3. Sistem lineerleştirildiğinde elde edilen Jakobiyen matrisi kullanılarak bir karakteristik polinom bulunmalıdır,
4. Bulunan karakteristik polinomun kökleri özdeğerlerdir, bu özdeğerlerin reel kısımlarının işaretleri incelenmelidir. Bunun için *Routh- Hurwitz Teoremi* kullanılacaktır,
5. Sistemin kararlı olabilmesi için özdeğerlerin reel kısımlarının işaretinin ne olması gerektiği yorumlanmalı ve bunu sağlayıcı şartlar konularak bir kararlılık teoremi inşa edilmelidir.

Burada, birazdan vereceğimiz teoremin ispatında kullanılmak üzere, işlem kolaylığı sağlayacak olan şu eşitliklerden bahsedelim:

$$T = \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2}{P_a} - P_a, \quad (3.10)$$

$$W = 2P_a c_1 q_1 \delta, \quad (3.11)$$

$$R = 2c_2 q_2 P \delta. \quad (3.12)$$

Şimdi ise kararlılık teoremini verelim.

**Teorem 3.1.1.** (3.2) sistemi ve başta verilen kabuller göz önünde bulundurulduğunda,  $\hat{x}$  denge noktası için bir kararlılık bölgesi mevcuttur.  $P_{eq} \in (\min[P_a, L], \max[P_a, L])$  bilgisi ile oluşan 3 farklı durum için, aşağıda verilen şartlar gerçekleştiği takdirde denge bölgesinde yer alan tüm denge noktaları kararlıdır.

**Durum 1:**  $P_a > P_{eq} > L$  şartı altında, aşağıdaki ifadeler gerçekleştiğinde sistemdeki denge noktaları kararlıdır:

1. 
$$\delta + 1 + c_1 + c_2 > -\frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a)(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)},$$
2. 
$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 - \frac{2c_2 q_2 P_{eq} \delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > -c_2 \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2},$$
3. 
$$\left( \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) \left( (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 + c_2 \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} - \frac{2c_2 q_2 P_{eq} \delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) - \left( (\delta + 1)c_1 c_2 - c_1 \frac{2c_2 q_2 P_{eq} \delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) > 0.$$

**Durum 2:**  $L > P_{eq} > P_a$  şartı altında, aşağıdaki ifadeler gerçekleştiğinde sistemdeki denge noktaları kararlıdır:

1. 
$$\delta + 1 + c_1 + c_2 > -\frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a)(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)},$$
2. 
$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 - \frac{2c_2 q_2 P_{eq} \delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > -c_2 \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2},$$

$$\begin{aligned}
& 3. \left( \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) \\
& \left( (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 + c_2 \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} - \frac{2c_2 q_2 P_{eq} \delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) \\
& - \left( (\delta + 1)c_1 c_2 - c_1 \frac{2c_2 q_2 P_{eq} \delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) > 0.
\end{aligned}$$

**Durum 3:**  $P_a = P_{eq} = L$  şartı altında, aşağıdaki ifadeler gerçekleştiğinde sistemdeki denge noktaları karardır:

$$\begin{aligned}
& 1. q_1 < \frac{\delta + 1 + c_1 + c_2}{2c_1 \delta}, \\
& 2. P_a(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 P_a + 2c_2 q_2 P_{eq} \delta > 2c_1 c_2 q_1 \delta P_a, \\
& 3. (\delta + 1 + c_1 + c_2 - 2c_1 q_1 \delta) \left( (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 - 2c_1 c_2 q_1 \delta + \frac{2c_2 q_2 P_{eq} \delta}{P_a} \right) \\
& - \left( (\delta + 1)c_1 c_2 - c_1 \frac{2c_1 c_2 q_2 P_{eq} \delta}{P_a} \right) > 0.
\end{aligned}$$

**İspat 3.1.2.** Öncelikle lineer olmayan (3.2) sistemini denge noktası etrafında lineerleştirmeliyiz. Gösterim kolaylığı amacıyla sistemdeki türevler aşağıda verilen fonksiyonlara eşitlendi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dt} = f(P, B, \xi_1, \xi_2), \\ \frac{dB}{dt} = g(P, B, \xi_1, \xi_2), \\ \frac{d\xi_1}{dt} = h(P, B, \xi_1, \xi_2), \\ \frac{d\xi_2}{dt} = k(P, B, \xi_1, \xi_2). \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Burada  $(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)$  denge noktası olmak üzere,

$$\begin{aligned}
f(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) = g(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) &= h(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) \\
&= k(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) = 0 \quad (3.14)
\end{aligned}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Verilen  $f(P, B, \xi_1, \xi_2)$ ,  $g(P, B, \xi_1, \xi_2)$ ,  $h(P, B, \xi_1, \xi_2)$ ,  $k(P, B, \xi_1, \xi_2)$  ifadelerinin  $(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)$  denge noktası civarındaki Taylor seri açılımlarının yapılmasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} = f(P, B, \xi_1, \xi_2) &= f(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) + f_P(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(P - P_{eq}) \\
&+ f_B(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(B - \widehat{B}) + f_{\xi_1}(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(\xi_1 - \widehat{\xi}_1) \\
&+ f_{\xi_2}(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(\xi_2 - \widehat{\xi}_2) + O(\dots) \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dt} = g(P, B, \xi_1, \xi_2) &= g(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) + g_P(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(P - P_{eq}) \\
&+ g_B(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(B - \widehat{B}) + g_{\xi_1}(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(\xi_1 - \widehat{\xi}_1) \\
&+ g_{\xi_2}(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(\xi_2 - \widehat{\xi}_2) + O(\dots) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} = h(P, B, \xi_1, \xi_2) &= h(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) + h_P(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(P - P_{eq}) \\
&+ h_B(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(B - \widehat{B}) + h_{\xi_1}(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(\xi_1 - \widehat{\xi}_1) \\
&+ h_{\xi_2}(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(\xi_2 - \widehat{\xi}_2) + O(\dots) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_2}{dt} = k(P, B, \xi_1, \xi_2) &= k(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) + k_P(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(P - P_{eq}) \\
&+ k_B(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(B - \widehat{B}) + k_{\xi_1}(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(\xi_1 - \widehat{\xi}_1) \\
&+ k_{\xi_2}(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)(\xi_2 - \widehat{\xi}_2) + O(\dots) \quad (3.18)
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilmiştir. Bu seri açılımları aşağıdaki şekilde matrisler yardımıyla ifade edilebilirler

$$\begin{bmatrix} \frac{dP}{dt} \\ \frac{dB}{dt} \\ \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{d\xi_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_P & f_B & f_{\xi_1} & f_{\xi_2} \\ g_P & g_B & g_{\xi_1} & g_{\xi_2} \\ h_P & h_B & h_{\xi_1} & h_{\xi_2} \\ k_P & k_B & k_{\xi_1} & k_{\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P - P_{eq} \\ B - \widehat{B} \\ \xi_1 - \widehat{\xi}_1 \\ \xi_2 - \widehat{\xi}_2 \end{bmatrix} + O(\dots). \quad (3.19)$$

Burada, katsayı matrisi olan  $J$ 'ye Jakobiyen matris adı verilir

$$J = \begin{bmatrix} f_P & f_B & f_{\xi_1} & f_{\xi_2} \\ g_P & g_B & g_{\xi_1} & g_{\xi_2} \\ h_P & h_B & h_{\xi_1} & h_{\xi_2} \\ k_P & k_B & k_{\xi_1} & k_{\xi_2} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

(3.19) denklemindeki  $O(\dots)$  ifadesi yüksek mertebeden terimleri temsil eder ve ihmal edilirse, (3.19) sistemi

$$\begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_P & f_B & f_{\xi_1} & f_{\xi_2} \\ g_P & g_B & g_{\xi_1} & g_{\xi_2} \\ h_P & h_B & h_{\xi_1} & h_{\xi_2} \\ k_P & k_B & k_{\xi_1} & k_{\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P - P_{eq} \\ B - \widehat{B} \\ \xi_1 - \widehat{\xi}_1 \\ \xi_2 - \widehat{\xi}_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

sistemine indirgenir. Buna da lineerleştirilmiş sistem denir.

Lineer bir sistemin kararlılığını incelemek için,  $J$  Jakobiyen matrisinin özdeğerleri incelenmelidir. Özdeğerlerin durumlarına göre

1. Özdeğerlerinin tümünün reel kısmı negatifse, denge noktası kararlıdır.
2. Özdeğerlerden en az birinin reel kısmı pozitif ise, denge noktası kararsızdır.
3. Özdeğerlerden en az birinin reel kısmı sifıra eşitse, marjinal durum söz konusudur. Bu ise daha önce bahsettiğimiz, merkez ve izole olmayan denge noktasının varlığına işarettir.

$$|J - \lambda I| = 0 \quad (3.22)$$

denklemini yardımıyla  $J$  matrisinin karakteristik polinomu bulunur. Bu polinomun kökleri  $J$  matrisinin özdeğerleridir. Maple 13 programı yardımıyla  $J$  matrisinin karakteristik polinomu şu şekilde bulunmuştur

$$\lambda(\alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0) = 0. \quad (3.23)$$

Özdeğerlerden birinin sifıra eşit olduğu görülmektedir, eğer diğer özdeğerler negatif reel kısma sahip ise bu durum kararlılığı bozmayacaktır. Çünkü kararlılık tanımlarında bahsettiğimiz gibi izole olmayan denge noktası söz konusudur. Bu



durum denge noktasının çekici olmadığıının dolaylı olarak asimptotik kararlılıktan bahsedilemeyeceğinin kanıtıdır. Fakat diğer özdeğerlerin reel kısımları negatif ise mevcut durum Lyapunov anlamında kararlılığa işaretir. Burada

$$\alpha_3 = 1, \quad (3.24)$$

$$\alpha_2 = \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{W}{T}, \quad (3.25)$$

$$\alpha_1 = (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2\frac{W}{T} - \frac{R}{T}, \quad (3.26)$$

$$\alpha_0 = (\delta + 1)c_1c_2 - c_1\frac{R}{T} \quad (3.27)$$

şeklindedir. İşlem kolaylığı açısından yine

$$T = \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2}{P_a} - P_a, \quad (3.28)$$

$$W = 2P_a c_1 q_1 \delta, \quad (3.29)$$

$$R = 2c_2 q_2 P_{eq} \delta \quad (3.30)$$

olarak alınmıştır.

Karakteristik polinomun kökleri özdeğerlerdir, o halde yapılması gereken bu polinomun köklerini bulmaktır. Fakat polinomun katsayıları incelenecek olursa, bu kökleri verimli şekilde elde etmenin pek kolay olmadığı görülmektedir. Bizim ihtiyacımız olan şeyin kökleri bütünüyle elde etmek değil, yalnızca reel kısımlarının işaretini incelemek olduğu düşünülürse, gereksiz işlem kalabalığına yol açmayacak olan yeni bir yöntemi kullanmak fayda sağlayacaktır.

Burada, özdeğerlerin reel kısımlarının işaretlerini bulmamızı sağlayacak olan Routh-Hurwitz Kriteri'nden bahsedelim.

**Routh-Hurwitz Kriteri:** Bu kriter Hurwitz Matrisi ve Routh Tablosu kullanılarak geliştirilmiştir.

$p(\lambda) = \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$  polinomu için kriteri uygulayacak olursak

$$\begin{array}{l|ll} \lambda^3 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ \lambda^2 & \alpha_2 & \alpha_0 \\ \lambda^1 & \frac{\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_0}{\alpha_2} & 0 \\ \lambda^0 & \alpha_0 & 0 \end{array} \quad (3.31)$$

polinomun tüm köklerinin kompleks düzlemin sol yarısında yer alması yani tüm köklerin negatif reel kısma sahip olabilmesi için

1. Tablonun orta sütununda yer alan katsayıların sıfırdan farklı olması,
2. Tablonun orta sütununda yer alan katsayıların tamamının aynı işarete sahip olması gerekmektedir. Çünkü bu sütunda gerçekleşen işaret değişimi sayısı kadar sağ yarı düzlemde yer alan kök vardır.

O halde burada şu yorum yapılmalıdır: Eğer karakteristik polinomun Routh Tablosunun orta sütununda yer alan katsayıların herbiri aynı işaretli ve sıfırdan farklı ise sistem kararlıdır.

Fakat, orta sütunda gerçekleşen herbir işaret değişimi sağ yarı düzlemde yer alan, yani reel kısmı pozitif olan bir köke işaret ettiği için sistem kararsızdır. Örneğin,  $p(\lambda) = 5\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + 8$  polinomu ele alınsın. Bu polinom için Routh Tablosu:

$$\begin{array}{c|cc}
 \lambda^3 & 5 & 6 \\
 \lambda^2 & 1 & 8 \\
 \lambda^1 & -34 & 0 \\
 \lambda^0 & 8 & 0
 \end{array} \tag{3.32}$$

şeklindedir. Dikkat edilecek olursa orta sütunda,  $1 \Rightarrow -34$  ve  $-34 \Rightarrow 8$  olmak üzere iki adet işaret değişimi söz konusudur. O halde polinomun 3 adet kökünün 2 tanesi sağ yarı düzlemdedir, yani pozitif reel kısma sahiptir. Bu ise polinomun ait olduğu sistemin kararsız olduğuna işarettir.

Bir polinoma Routh-Hurwitz Kriteri uygulandığında gerçekleşebilecek senaryolar şu şekildedir:

1. Orta sütunda sıfıra eşit hiçbir eleman yoktur; bu durumda işaret değişimi olup olmadığı kontrol edilir,
2. Orta sütunda sıfıra eşit olan eleman vardır fakat satırdaki diğer elemanlar sıfırdan farklıdır; bu durumda sıfır olan eleman yerine yeterince küçük olan  $\epsilon$  gibi bir değişken atanarak bu durum elimine edilir ve  $\epsilon$  ifadesinin işaretinin

pozitif ve negatif olduğu duruma göre ayrı ayrı analiz yapıp sonuç olarak orta sütunda bir işaret değişimine sebebiyet verip vermediği kontrol edilir,

3. Orta sütundaki bir eleman ve bununla birlikte ait olduğu tüm satır sıfıra eşitse bu durumda 'marjinal durum' söz konusudur. Burada bir önceki satırın katsayıları referans alınarak çeşitli eliminasyonlar yapılır ve bunun sonucunda 3 farklı hal söz konusu olabilir;

- (a) Kökler orjine göre simetrik ve reeldir,
- (b) Kökler orjine göre simetrik ve imajinerdir,
- (c) Kökler orjine göre simetriktir (çeyrek s-düzleminde).

Bahsettiğimiz durumlar yüksek dereceli polinomlar için de söz konusu olabilmektedir. Bizim incelediğimiz sistemin karakteristik polinomu kübik bir polinom olduğundan özel bir durum olarak bahsedecek olursak, kübik bir polinom için Routh-Hurwitz kriterinin şartları şu şekildedir (basitlik için  $\alpha_3 = 1$  alınsın):

1. **Kararlılık:** Orta sütun elemanları pozitif olmalı yani  $\alpha_3 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$  ve  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_0 > 0$  olmalıdır, dolaylı olarak  $\alpha_1 > 0$  durumu da var olmalıdır,
2. **Marjinal Kararlılık:**  $\alpha_3 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$  ve  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_0 = 0$  olma durumudur. Burada orjine göre simetrik olup sanal eksen üzerinde yer alan sanal kökler mevcuttur,
3. **Kararsızlık:** Diğer bütün ihtimallerde kararsızlık durumu ortaya çıkar.

**İspat 3.1.3.** Öncelikle 2. dereceden karakteristik bir polinom için Routh- Hurwitz kriterinin ispatından bahsedelim.

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

polinomu ele alınsın. Burada  $\lambda^2$  ifadesinin katsayısı 1 olarak alınmıştır. Yani  $\alpha_2 = 1$  olup pozitiftir. Polinomun katsayıları Routh Tablosuna yerleştirildiğinde

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^2 & \alpha_2 & \alpha_0 \\ \lambda^1 & \alpha_1 & 0 \\ \lambda^0 & \alpha_0 & 0 \end{array} \quad (3.33)$$

tüm köklerin reel kısımlarının negatif olması için orta sütundaki  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$  ve  $\alpha_0$  ifadelerinin aynı işaretli olması gerektiği görülmektedir.  $\alpha_2 = 1$  olduğundan sistemin kararlı olabilmesi için  $\alpha_1 > 0$  ve  $\alpha_0 > 0$  olmalıdır. Yani, polinomun kökleri negatif reel kısma sahiptir  $\Leftrightarrow \alpha_1 > 0$  ve  $\alpha_0 > 0$  yazılabilir. Şimdi bu çift taraflı gerektirmeyi ispatlayalım.

Verilen polinomun kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0}}{2} \quad (3.34)$$

şeklinde elde edilmektedir. Önce gerektirmenin bir tarafını gösterelim:

( $\Leftarrow$ ):  $\alpha_1 > 0$  ve  $\alpha_0 > 0$  olsun. Bu durumda açık şekilde görülmektedir ki kökler eğer reel ise her ikisi de negatif, kökler eğer kompleks eşlenik ise her ikisi de negatif reel kısma sahiptir.

( $\Rightarrow$ ): Çift taraflı gerektirmenin diğer kısmını ispatlamak için, köklerin her ikisinin de 1) reel ve negatif veya 2) negatif reel kısma sahip kompleks eşlenik çift olduğunu kabul edelim. Burada iki durum mevcuttur:

i) Kökler negatif reel kısma sahip kompleks eşlenik ise  $\alpha_1 > 0$  olması gerektiği açıkça görülmektedir. Ayrıca  $0 < \alpha_1^2 < 4\alpha_0$  durumu söz konusudur ve bu da  $\alpha_0 > 0$  olmasını gerektirir,

ii) Kökler reel ve negatif ise yine  $\alpha_1 > 0$  olması gerektiği açıkça görülmektedir. Bu ise  $\alpha_0 > 0$  olduğu anlamına gelmektedir.

Böylece 2. dereceden bir karakteristik polinom için Routh-Hurwitz Kriterince öngörülen çift taraflı gerektirme ispatlanmıştır. Benzer şekilde daha yüksek mertebeden karakteristik polinomlar için de ispat yapılabilir.  $\square$

Bizim problemimize dönecek olursak

$$T = \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2}{P_a} - P_a, \quad (3.35)$$

$$W = 2P_a c_1 q_1 \delta, \quad (3.36)$$

$$R = 2c_2 q_2 P \delta \quad (3.37)$$

olmak üzere

$$\alpha_3 = 1, \quad (3.38)$$

$$\alpha_2 = \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{W}{T}, \quad (3.39)$$

$$\alpha_1 = (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 + c_2 \frac{W}{T} - \frac{R}{T}, \quad (3.40)$$

$$\alpha_0 = (\delta + 1)c_1 c_2 - c_1 \frac{R}{T} \quad (3.41)$$

katsayılarıyla birlikte, karakteristik polinom

$$\lambda(\alpha_3 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) = 0 \quad (3.42)$$

şeklindedir. Bu polinoma Routh-Hurwitz kriteri uygulandığında,

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ \lambda^2 & \alpha_2 & \alpha_0 \\ \lambda^1 & \frac{\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_0}{\alpha_2} & 0 \\ \lambda^0 & \alpha_0 & 0 \end{array} \quad (3.43)$$

tablosu elde edilmektedir. Yukarıda Routh-Hurwitz Kriterinin tanımında ifade edildiği gibi, polinomun tüm köklerinin negatif reel kısma sahip olabilmesi yani sistemin denge noktasının kararlı olabilmesi için, orta sütündeki tüm elemanların aynı işarete sahip olması gerekmektedir.  $\alpha_3 = 1 > 0$  olduğundan, mevcut durum şu şekilde ifade edilebilir:

Verilen sistemin kararlı olabilmesi için

i)  $\alpha_2 > 0$ ,

ii)  $\alpha_0 > 0$ ,

iii)  $\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_0 > 0$

şartlarının gerçekleşmesi gerekmektedir. O halde ispatın bu kısmından itibaren bu şartlar gerçekleşmek üzere, parametreler için belli kısıtlar koyacak ve eşitsizlikler vereceğiz. Burada  $P_{eq} \in (\min[P_a, L], \max[P_a, L])$  bilgisi ile oluşan ilk durumla başlayalım.

**Durum 1:**  $P_a > P_{eq} > L$  olması hali

- $\alpha_2 > 0$  durumu için:

$$\alpha_2 = \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{W}{T} > 0 \text{ yani } \underbrace{(\delta + 1 + c_1 + c_2)}_I + \underbrace{\left( \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right)}_{II} > 0$$

olmalıdır. Bölümün başında verdiğimiz kabulleri göz önüne aldığımızda  $I > 0$  olduğu açıkça görülmektedir. O halde  $\alpha_2 > 0$  olabilmesi için 2 ihtimal vardır:

1.  $II > 0$  veya

2.  $II < 0$  ve aynı zamanda  $|I| > |II|$  olmalıdır.

Öncelikle ilk ihtimali değerlendirelim ve kabul edelim ki  $II > 0$  olsun. Başta verilen kabullerden, paydaki ifadenin  $2P_a^2 c_1 q_1 \delta > 0$  olduğu görülmektedir.

Paydadaki ifade için

$$(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2 = \underbrace{(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a)}_{> 0} (q_2(P_a - P_{eq}) - P_a) > 0$$

olması gerektiği açıktır. Buradan, paydadaki ifadenin tamamının pozitif olabilmesi için gerek ve yeter şart  $(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a) > 0$  olmasıdır. Bu ise  $q_2 > \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  olmasını gerektirir.

Fakat bu ifade Sonuç (3.1.1)'in Durum 1 (b) şıkkı ile çelişki arz etmektedir. O halde ilk ihtimal olan  $II > 0$  geçersizdir.

Şimdi diğer ihtimal olan  $II < 0$  durumunu inceleyelim.  $I + II > 0$  olması isteniyor ve  $I > 0$  olduğu biliniyor. Eğer  $II < 0$  ise aynı zamanda  $|I| > |II|$  olmalıdır. Burada,  $II$  ifadesinin payının  $2P_a^2 c_1 q_1 \delta > 0$  olduğu kabuller sayesinde biliniyor. Paydadaki ifade ise

$$(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2 = \underbrace{(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a)}_{> 0} (q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)$$

şeklindedir ve  $II < 0$  olabilmesi için paydanın negatif olması gerekmektedir. Bu ise  $(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a) < 0$  olmasını gerektirir.

Buradan  $q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesine ulaşılır ki, Sonuç (3.1.1)'in Durum 1 (b) şıkkı ile uyum göstermektedir. Son olarak  $|I| > |II|$  şartı için ise

$$\delta + 1 + c_1 + c_2 > \frac{-2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a)(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)}$$

ifadesine ulaşılmıştır. Bu ifade  $\alpha_2 > 0$  olması için gerek şarttır.

•  $\alpha_0 > 0$  durumu için:

$$\alpha_0 = (\delta + 1)c_1 c_2 - c_1 \frac{R}{T} > 0 \quad \text{yani} \quad \underbrace{(\delta + 1)c_1 c_2}_{III} - \underbrace{\left( \frac{2c_1 c_2 q_2 P_{eq} P_a \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right)}_{IV} > 0$$

olmalıdır. Bölüm başında verilen kabuller düşünüldüğünde,  $III > 0$  olduğu açıkça görülmektedir. O halde  $\alpha_0 > 0$  olabilmesi için 2 ihtimal vardır:

1.  $IV > 0$  ve aynı zamanda  $|III| > |IV|$  veya
2.  $IV < 0$  olmalıdır.

İlk ihtimali düşünürsek,  $IV > 0$  olarak alındığında,  $III > 0$  olduğu bilindiğinden  $III - IV > 0$  gerçekleştirilmesi için aynı zamanda  $|III| > |IV|$  şartı da sağlanmalıdır. Başta verilen kabuller göz önüne alındığında,  $IV$ 'ün payındaki ifadenin  $2c_1 c_2 q_2 P_{eq} P_a \delta > 0$  olduğu görülmektedir. O halde  $IV > 0$  şartının sağlanabilmesi için paydadaki ifadenin pozitif olması gerekmektedir. Yani,

$$(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2 = \underbrace{(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a)(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)}_{> 0} > 0$$

olmalıdır. Bu ise  $(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a) > 0$  olması ile mümkündür. Buradan,  $q_2 > \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesine ulaşılmaktadır ki Sonuç (3.1.1)'in Durum 1 (b) şıkkı ile çelişmektedir. O halde  $IV > 0$  olması söz konusu değildir.

Şimdi 2. ihtimal olan  $IV < 0$  durumunu analiz edelim.  $IV$  ifadesinin payının  $2c_1c_2q_2P_{eq}P_a\delta > 0$  olduğu bilinmektedir. O halde  $IV < 0$  olabilmesi için paydanın negatif olması gerekmektedir. Yani,

$$(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2 = \underbrace{(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a)}_{> 0} (q_2(P_a - P_{eq}) - P_a) < 0$$

olmalıdır. Bu ise ancak  $(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a) < 0$  olmasıyla mümkündür.

Buradan,  $q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesine ulaşılır, bu ifade Sonuç (3.1.1)'in Durum 1 (b) şıkkı ile uyum göstermektedir. O halde  $IV < 0$  durumu ekstra bir şart ilave edilmesine gerek kalmadan her denge noktası için sağlanacaktır. Yani ekstra bir şart ilave etmeden  $\alpha_0 > 0$  ifadesi gerçekleşmektedir.

- $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_0 > 0$  durumu için:

$\alpha_3 = 1$  olduğunu biliyoruz, o halde  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$  ifadesi için hangi şartların gerekli olduğunu incelemeliyiz. Yukarıda  $\alpha_2 > 0$  ve  $\alpha_0 > 0$  olacak şekilde şartlar belirledik. Buradan açıkça görülmektedir ki  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$  olması için  $\alpha_1 > 0$  ve bununla birlikte  $\alpha_2\alpha_1 > \alpha_0$  olmalıdır. Öncelikle  $\alpha_1 > 0$  olma durumunu analiz edelim.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2 \frac{W}{T} - \frac{R}{T} \\ &= [(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2] + c_2 \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} - \frac{2c_2q_2P_{eq}P_a\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

şeklindedir. Burada başta verilen kabullerin referansıyla  $(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 > 0$  olduğu kolaylıkla söylenebilir. Devamındaki ifadeler ve  $\alpha_1 > 0$  olma durumu gözönüne alındığında,  $\alpha_1 > 0$  durumunun gerçekleşebilmesi için mümkün olan 4 farklı durum söz konusudur.

Bunlar ise:

1.  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} < 0$ ,



2.  $\frac{W}{T} > 0, \frac{R}{T} > 0$  ve  $(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2\frac{W}{T} > \left|\frac{R}{T}\right|$ ,
3.  $\frac{W}{T} < 0, \frac{R}{T} > 0$  ve  $(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 > \left|c_2\frac{W}{T}\right| + \left|\frac{R}{T}\right|$ ,
4.  $\frac{W}{T} < 0, \frac{R}{T} < 0$  ve  $(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + \left|\frac{R}{T}\right| > \left|c_2\frac{W}{T}\right|$

şeklinde. Şimdi bu ihtimallerin her birini  $\alpha_1 > 0$  durumu için ayrı ayrı inceleyelim.

İlk durumu yani  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} < 0$  halini göz önüne alalım. Önceki kısımlarda ayrıntılı olarak incelediğimiz üzere

$$\frac{W}{T} = \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > 0$$

olabilmesi için

$$q_2 > \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

gerçeklenmelidir. Bu ise Sonuç (3.1.1)'in Durum 1 (b) şıkkı ile çelişmektedir ve zaten

$$\frac{R}{T} = \frac{2c_2q_2P_{eq}P_a\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} < 0$$

olabilmesi için de

$$q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

ifadesi gerçekleşmelidir ki açıkça görüldüğü üzere  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} < 0$  durumları aynı anda gerçekleşemezler. O halde ilk durum geçersizdir.

Şimdi de ikinci durumu düşünelim:  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} > 0$  olsun.  $\alpha_1 > 0$  şartını sağlamak için

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2\frac{W}{T} > \left|\frac{R}{T}\right|$$

ifadesi de dolaylı olarak gerçekleşmelidir. Buradan, öncelikle  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} > 0$  durumunun hangi şartları gerektirdiğine bakılırsa

$$\frac{W}{T} = \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > 0$$

olabilmesi için

$$q_2 > \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

eşitsizliğinin sağlanması ve

$$\frac{R}{T} = \frac{2c_2q_2P_{eq}P_a\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > 0$$

olabilmesi için ise

$$q_2 > \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

şartının sağlanması gerekmektedir. Bu iki ifadenin gerektirdiği şartlar birbiri ile uyum gösterse de  $q_2 > \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesi Sonuç (3.1.1)'in Durum 1 (b) şıkkı ile çelişmekte ve dolayısıyla bu ihtimali de geçersiz kılmaktadır.

Diğer bir ihtimal olan  $\frac{W}{T} < 0$  ve  $\frac{R}{T} > 0$  olma halini göz önüne alalım. Eğer bu durum gerçekleşirse  $\alpha_1 > 0$  olması için dolaylı olarak

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 > \left| c_2 \frac{W}{T} \right| + \left| \frac{R}{T} \right|$$

durumu da sağlanmalıdır. Buradan

$$\frac{W}{T} = \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} < 0$$

olması için

$$q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiği ve

$$\frac{R}{T} = \frac{2c_2q_2P_{eq}P_a\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > 0$$

olması için ise

$$q_2 > \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

şartının sağlanması gerektiği görülmektedir. Her iki durumun aynı anda sağlanamayacağı aşikar olup aynı zamanda  $q_2 > \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesi de Sonuç (3.1.1)'in Durum 1 (b) şıkkı ile çelişki oluşturmaktadır. O halde bu durum da geçersizdir.

Şimdi de,  $\alpha_1 > 0$  olması için incelenebilecek olan son ihtimali analiz edelim.

$\frac{W}{T} < 0$  ve  $\frac{R}{T} < 0$  olma ihtimalini göz önüne alalım.

$$\frac{W}{T} = \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} < 0$$

olabilmesi için

$$q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

şartı sağlanmalı ve

$$\frac{R}{T} = \frac{2c_2 q_2 P_{eq} P_a \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} < 0$$

olabilmesi için yine

$$q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

eşitsizliği sağlanmalıdır.

Burada  $q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesi, şu anda incelemekte olduğumuz  $P_a > P_{eq} > L$  durumunda, tüm denge noktalarının sağlanmakta olan bir koşuldur. İspatı Sonuç (3.1.1)'de verilmiştir.  $\frac{W}{T} < 0$  ve  $\frac{R}{T} < 0$  olduğunda  $\alpha_1 > 0$  gerçekleşebilmesi için aynı zamanda

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 + \left| \frac{R}{T} \right| > \left| c_2 \frac{W}{T} \right|$$

ifadesi de sağlanmalıdır. Bu ifadenin sağlanması

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 - \frac{2c_2 q_2 P_{eq} P_a \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > -c_2 \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}$$

ifadesinin gerçekleşmesiyle mümkündür. O halde  $\alpha_1 > 0$  şartı ancak

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 - \frac{2c_2 q_2 P_{eq} P_a \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > -c_2 \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}$$

koşulunun gerçekleşmesiyle elde edilebilmektedir.

Buraya kadar  $\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_0 > 0$  durumu analizinin ilk adımı olan  $\alpha_1 > 0$  olma halini inceledik ve bunun için şartlar belirledik.  $\alpha_2 > 0$  ve  $\alpha_0 > 0$  olduğu bilgisine önceki incelemeler yardımıyla sahibiz. Şimdi ise bu analiz ikinci adım olan  $\alpha_2 \alpha_1 > \alpha_0$

olma halini inceleyelim.  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$  ifadesi

$$\left( \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{W}{T} \right) \left( (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2\frac{W}{T} - \frac{R}{T} \right) - \left( (\delta + 1)c_1c_2 - c_1\frac{R}{T} \right) > 0$$

şeklinde açık yazılabilir. Bu ifade ise,  $\alpha_2\alpha_1 > \alpha_0$  durumu için

$$\left( \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) \left( (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2\frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} - \frac{2c_2q_2P\delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) - \left( (\delta + 1)c_1c_2 - c_1\frac{2c_2q_2P\delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) > 0$$

koşulunun gerçekleşmesi gerektiğini ifade etmektedir.

Böylece,  $P_a > P_{eq} > L$  durumunda Routh-Hurwitz Kriterinin kararlılık için verilen yönergelerini takip ederek,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$  ve  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_0 > 0$  durumlarının sağlanması için gerekli koşulları belirledik. Bu ise kararlılık teoreminin ilk kısmı olan  $P_a > P_{eq} > L$  olma durumunun ispatıdır. Şimdi diğer durum olan  $L > P_{eq} > P_a$  halini inceleyelim.

**Durum 2:**  $L > P_{eq} > P_a$  olması hali

Bu durumun ispatı bir öncekiyle büyük benzerlikler göstermektedir.

•  $\alpha_2 > 0$  durumu için:

$$\alpha_2 = \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{W}{T} > 0 \text{ yani } \underbrace{(\delta + 1 + c_1 + c_2)}_I + \underbrace{\left( \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right)}_{II} > 0$$

olmalıdır. Bölüm başındaki kabuller göz önüne alınırsa  $I > 0$  olduğu açıkça görülmektedir.  $\alpha_2 > 0$  olabilmesi için 2 ihtimal vardır:

1.  $II > 0$  veya

2.  $II < 0$  ve aynı zamanda  $|I| > |II|$  olmalıdır.

İlk ihtimal ile başlayalım ve kabul edelim ki  $II > 0$  olsun. Baştaki kabullerden, paydaki ifadenin pozitif olduğu yani  $2P_a^2 c_1 q_1 \delta > 0$  olduğu görülmektedir. O halde paydadaki ifade için

$$(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2 = (q_2(P_a - P_{eq}) + P_a) \underbrace{(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)}_{< 0} > 0$$

olması gerekir. Paydadaki ifadenin tamamının pozitif olabilmesi için gerek ve yeter şart  $(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a) < 0$  olmasıdır. Bu ise  $q_2 > -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  olmasını gerektirir. Bu son ifade Sonuç (3.1.1)'in Durum 2 (b) şıkkı ile çelişmektedir. Bu durumda ilk ihtimal olan  $II > 0$  geçersizdir.

Şimdi diğer ihtimal olan  $II < 0$  durumunu inceleyelim.  $I + II > 0$  olması isteniyor ve  $I > 0$  olduğu biliniyor. Eğer  $II < 0$  ise aynı zamanda  $|I| > |II|$  olmalıdır.  $II$  ifadesinin payının  $2P_a^2 c_1 q_1 \delta > 0$  olduğu kabuller sayesinde biliniyor. Diğer taraftan paydadaki ifade ise

$$(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2 = (q_2(P_a - P_{eq}) + P_a) \underbrace{(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)}_{< 0}$$

şeklindedir ve  $II < 0$  olabilmesi için paydanın negatif olması gerekmektedir. Bu ise  $(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a) > 0$  olmasını gerektirir. Buradan  $q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesine ulaşılır ki Sonuç (3.1.1)'in Durum 2 (b) şıkkındaki ifadenin aynısıdır.

Son olarak  $|I| > |II|$  şartı için ise

$$\delta + 1 + c_1 + c_2 > \frac{-2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a)(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)}$$

ifadesine ulaşılmıştır. Bu ifade  $\alpha_2 > 0$  olması için gerek şarttır.

- $\alpha_0 > 0$  durumu için:

$$\alpha_0 = (\delta + 1)c_1c_2 - c_1\frac{R}{T} > 0 \quad \text{yani} \quad \underbrace{(\delta + 1)c_1c_2}_{III} - \underbrace{\left(\frac{2c_1c_2q_2P_{eq}P_a\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}\right)}_{IV} > 0$$

olmalıdır. Bölüm başında verilen kabullerden  $III > 0$  olduğu görülmektedir. O halde  $\alpha_0 > 0$  olabilmesi için 2 ihtimal vardır:

1.  $IV > 0$  ve aynı zamanda  $|III| > |IV|$  veya
2.  $IV < 0$  olmalıdır.

İlk ihtimali düşünürsek,  $IV > 0$  şeklinde alındığında,  $III > 0$  olduğu bilindiğinden  $III - IV > 0$  ifadesinin sağlanabilmesi için aynı zamanda  $|III| > |IV|$  şartı da sağlanmalıdır. Başta verilen kabuller göz önüne alındığında,  $IV$ 'ün payındaki ifadenin  $2c_1c_2q_2P_{eq}P_a\delta > 0$  olduğu görülmektedir. O halde  $IV > 0$  şartının sağlanabilmesi için paydadaki ifadenin pozitif olması gerekmektedir. Yani

$$(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2 = (q_2(P_a - P_{eq}) + P_a) \underbrace{(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)}_{> 0} > 0$$

$< 0$

olmalıdır. Bu ise  $(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a) < 0$  olması ile mümkündür.

Buradan,  $q_2 > -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesine ulaşılmaktadır ki Sonuç (3.1.1)'in Durum 2 (b) şıkkı ile çelişmektedir. O halde  $IV > 0$  olamaz.

Şimdi 2. ihtimal olarak bahsedilen  $IV < 0$  durumunu düşünelim.  $IV$  ifadesinin payının  $2c_1c_2q_2P_{eq}P_a\delta > 0$  olduğu bilinmektedir. O halde  $IV < 0$  olabilmesi için payda negatif olmalıdır. Yani

$$(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2 = (q_2(P_a - P_{eq}) + P_a) \underbrace{(q_2(P_a - P_{eq}) - P_a)}_{< 0} < 0$$

$< 0$

olmalıdır. Bu ise ancak  $(q_2(P_a - P_{eq}) + P_a) > 0$  olmasıyla mümkündür.

Buradan,  $q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesi elde edilir, bu ifade Sonuç (3.1.1)'in Durum 2 (b) şikkında bahsedilen ifade ile aynıdır. O halde  $IV < 0$  durumu için yeni herhangi bir şart yazmaya gerek yoktur. Çünkü bu ifade  $L > P_{eq} > P_a$  şartını sağlayan her denge noktası için sağlanacaktır. Demek ki  $\alpha_0 > 0$  ifadesinin gerçekleşmesi için de yeni şarta ihtiyaç yoktur.

•  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_0 > 0$  **durumu için:**

$\alpha_3 = 1$  olduğunu biliyoruz, yani  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$  ifadesinin gerçekleşmesi için gerçekleşmesi gereken şartları incelemeliyiz. Yukarıda  $\alpha_2 > 0$  ve  $\alpha_0 > 0$  olacak şekilde şartlar belirledik. O halde,  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$  olması için  $\alpha_1 > 0$  ve bununla birlikte  $\alpha_2\alpha_1 > \alpha_0$  olmalıdır. Öncelikle  $\alpha_1 > 0$  durumunu inceleyelim.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2\frac{W}{T} - \frac{R}{T} \\ &= [(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2] + c_2\frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} - \frac{2c_2q_2P_{eq}P_a\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}\end{aligned}\quad (3.45)$$

şeklindedir. Burada başta verilen kabuller göz önünde bulundurularak

$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 > 0$  olduğu söylenebilir. Devamındaki ifadeler ve  $\alpha_1 > 0$  olma durumu gözönüne alındığında,  $\alpha_1 > 0$  durumunun gerçekleşebilmesi için mümkün olan 4 farklı ihtimal vardır

Bunlar:

1.  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} < 0$ ,
2.  $\frac{W}{T} > 0$ ,  $\frac{R}{T} > 0$  ve  $(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2\frac{W}{T} > \left|\frac{R}{T}\right|$ ,
3.  $\frac{W}{T} < 0$ ,  $\frac{R}{T} > 0$  ve  $(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 > \left|c_2\frac{W}{T}\right| + \left|\frac{R}{T}\right|$ ,
4.  $\frac{W}{T} < 0$ ,  $\frac{R}{T} < 0$  ve  $(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + \left|\frac{R}{T}\right| > \left|c_2\frac{W}{T}\right|$

şeklindedir. Bu ihtimalleri bir önceki durum için de incelemiştik. İhtiyaç olduğunu düşündüğümüzden burada yeniden bahsedeceğiz. İlk durum, yani  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} < 0$  halini göz önüne alalım.

$$\frac{W}{T} = \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > 0$$

olması için

$$q_2 > -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

şartı gerçekleşmelidir. Bu ise Sonuç (3.1.1)'in Durum 2 (b) şıkkı ile çelişmektedir ve zaten

$$\frac{R}{T} = \frac{2c_2 q_2 P_{eq} P_a \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} < 0$$

olması için de

$$q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

olması gerekmektedir ki açıkça görüldüğü üzere  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} < 0$  durumları aynı anda gerçekleşemezler. O halde ilk durum geçersizdir.

Şimdi de ikinci durumu düşünelim,  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} > 0$  olsun.  $\alpha_1 > 0$  şartının sağlamak için

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1 c_2 + c_2 \frac{W}{T} > \left| \frac{R}{T} \right|$$

ifadesi de dolaylı olarak gerçekleşmelidir. Buradan, öncelikle  $\frac{W}{T} > 0$  ve  $\frac{R}{T} > 0$  durumunun hangi şartları gerektirdiğine bakarsak

$$\frac{W}{T} = \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > 0$$

olması için

$$q_2 > -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

eşitsizliğinin sağlanması ve

$$\frac{R}{T} = \frac{2c_2 q_2 P_{eq} P_a \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > 0$$

olması için ise

$$q_2 > -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

şartının sağlanması gerekmektedir. Bu iki ifadenin gerektirdiği şartlar aynıdır fakat  $q_2 > -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesi Sonuç (3.1.1)'in Durum 2 (b) şıkkı ile çelişmekte



olup, bu ihtimalin gerçekleşemeyeceğini gösterir.

3. durum olan  $\frac{W}{T} < 0$  ve  $\frac{R}{T} > 0$  halini inceleyelim. Eğer bu durum sağlanırsa  $\alpha_1 > 0$  olması için dolaylı olarak,

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 > \left| c_2 \frac{W}{T} \right| + \left| \frac{R}{T} \right|$$

şartı da sağlanmalıdır. Buradan

$$\frac{W}{T} = \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} < 0$$

olması için

$$q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

sağlanması gerektiği ve

$$\frac{R}{T} = \frac{2c_2 q_2 P_{eq} P_a \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > 0$$

olması için ise

$$q_2 > -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiği görülmektedir. Her iki durumun aynı anda sağlanamayacağı aşikar olup, aynı zamanda  $q_2 > -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesi de Sonuç (3.1.1)'in Durum 2 (b) şıkkı ile çelişki göstermektedir. O halde bu ihtimal de geçersizdir.

Burada,  $\alpha_1 > 0$  olması için incelenebilecek olan son ihtimali inceleyelim.

$$\frac{W}{T} = \frac{2P_a^2 c_1 q_1 \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} < 0$$

olabilmesi için

$$q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

şartı sağlanmalı ve

$$\frac{R}{T} = \frac{2c_2 q_2 P_{eq} P_a \delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} < 0$$

olabilmesi için ise

$$q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

şartı sağlanmalıdır.  $q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$  ifadesi, şu anda incelemekte olduğumuz  $L > P_{eq} > P_a$  durumunda, Sonuç (3.1.1)'da bahsedildiği gibi, tüm denge noktalarınca sağlanmakta olan bir koşuldur. Burada,  $\frac{W}{T} < 0$  ve  $\frac{R}{T} < 0$  olduğunda  $\alpha_1 > 0$  gerçekleşebilmesi için aynı zamanda

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + \left| \frac{R}{T} \right| > \left| c_2 \frac{W}{T} \right|$$

ifadesi de gerçekleşmelidir. Bunun için

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 - \frac{2c_2q_2P_{eq}P_a\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > -c_2 \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}$$

ifadesi sağlanmalıdır. O halde,  $\alpha_1 > 0$  şartı ancak

$$(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 - \frac{2c_2q_2P_{eq}P_a\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} > -c_2 \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}$$

koşulunun sağlanması ile gerçekleşir.

Şimdiye kadar  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$  durumu analizinin ilk adımı olan  $\alpha_1 > 0$  olma halini inceledik ve bunun için şartlar belirledik.  $\alpha_2 > 0$  ve  $\alpha_0 > 0$  olduğu bilgisine önceki incelemeler yardımıyla sahibiz. Şimdi ise bu analizin ikinci adım olan  $\alpha_2\alpha_1 > \alpha_0$  durumunu tahlil edelim.

$\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$  ifadesi

$$\left( \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{W}{T} \right) \left( (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2 \frac{W}{T} - \frac{R}{T} \right) - \left( (\delta + 1)c_1c_2 - c_1 \frac{R}{T} \right) > 0$$

olarak yazılabilir. Bu ifade ise,  $\alpha_2\alpha_1 > \alpha_0$  durumu için

$$\left( \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) \left( (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2 \frac{2P_a^2c_1q_1\delta}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} - \frac{2c_2q_2P\delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) - \left( (\delta + 1)c_1c_2 - c_1 \frac{2c_2q_2P\delta P_a}{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2} \right) > 0$$

koşulunun gerçekleşmesi gerektiğini ifade etmektedir.

Bu ise kararlılık teoreminin ikinci kısmı olan  $L > P_{eq} > P_a$  olma durumunun ispatıdır.

**Durum 3:**  $P_a = P_{eq} = L$  olması hali

Önceki durumların ispatlarında kullanılan  $T, W$  ve  $R$  parametreleri, bu durum için aşağıdaki şekilde kullanılacaktır:

$$T = -P_a, \quad (3.46)$$

$$W = 2P_a c_1 q_1 \delta, \quad (3.47)$$

$$R = 2c_2 q_2 P_{eq} \delta. \quad (3.48)$$

Şimdi Routh-Hurwitz Kriteri gereğince sırasıyla,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$  ve  $\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_0 > 0$  durumlarını ve bu eşitsizliklerin sağlanabilmesi için ne tür şartlar belirlenmesi gerektiğini inceleyelim.

•  $\alpha_2 > 0$  durumu için:

$$\alpha_2 = \delta + 1 + c_1 + c_2 + \frac{W}{T} = \underbrace{\delta + 1 + c_1 + c_2}_I - \underbrace{2c_1 q_1 \delta}_{II} > 0$$

olması isteniyor. Burada  $I > 0$  ve  $II > 0$  olduğu bölüm başında verilen kabuller sayesinde açıkça görülmektedir. O halde  $\alpha_2 > 0$  olabilmesi için gerekli şart

$I > II$  yani

$$\delta + 1 + c_1 + c_2 > 2c_1 q_1 \delta$$

olmasıdır. Buradan ise  $q_1 < \frac{\delta + 1 + c_1 + c_2}{2c_1 \delta}$  ifadesi elde edilmiştir.

- $\alpha_0 > 0$  *durumu için:*

Burada,  $\alpha_0 = (\delta + 1)c_1c_2 - c_1\frac{R}{T} > 0$  olması isteniyor. Açıkça yazılırsa

$$\underbrace{(\delta + 1)c_1c_2}_{> 0} + \underbrace{\frac{2c_1c_2q_2P_{eq}\delta}{P_a}}_{> 0}$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla  $\alpha_0 > 0$  olduğu aşikardır bu yüzden herhangi bir şart koymaya gerek görmüyoruz.

- $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_0 > 0$  *durumu için:*

Burada,  $\alpha_3 = 1$  olduğu ve ayrıca  $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$  oldukları bilinmektedir. O halde  $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$  ifadesini gerçekleştirebilmek için, önce  $\alpha_1 > 0$  sonrasında da  $\alpha_2\alpha_1 > \alpha_0$  durumlarının gerçekleşmesini sağlayıcı şartlar koymalıyız.  $\alpha_1 > 0$  olma durumunu göz önüne alalım. Burada

$$\alpha_1 = (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 + c_2\frac{W}{T} - \frac{R}{T} > 0$$

yani

$$\underbrace{(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2}_I - \underbrace{2c_1c_2q_1\delta}_{II} + \underbrace{\frac{2c_2q_2P_{eq}\delta}{P_a}}_{III} > 0$$

olmasını istiyoruz. Burada dikkat edilirse  $I > 0$ ,  $II > 0$  ve  $III > 0$  durumu söz konusudur. O halde  $\alpha_1 > 0$  gerçekleşmesi için  $I + III > II$  olmalıdır. Bu ise ancak

$$P_a(\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2P_a + 2c_2q_2P_{eq}\delta > 2c_1c_2q_1\delta P_a$$

ifadesinin sağlanması ile mümkündür.  $\alpha_2\alpha_1 > \alpha_0$  durumunun gereklerini inceleyecek olursak

$$(\delta + 1 + c_1 + c_2 - 2c_1q_1\delta) \left( (\delta + 1)(c_1 + c_2) + c_1c_2 - 2c_1c_2q_1\delta + \frac{2c_2q_2P_{eq}\delta}{P_a} \right) > (\delta + 1)c_1c_2 + \frac{2c_1c_2q_2P_{eq}\delta}{P_a}$$

*ifadesinin gerçekleşmesi gerektiğini görürüz.*

*Bu da kararlılık teoreminin ispatını tamamlar.  $\square$*

### 3.1.2 MA modeli için kararlılık analizi

Çağınalp tarafından 2005 yılında "Nonlinear price evolution" başlıklı bir makale yayımlanmıştır [3]. Bu makale daha önceden çalışılmış olan "Asset flow and momentum" başlıklı makalede yer alan [4] ve hisse senedi fiyatlarına tahmin veren modeli yeni bir perspektif ile yorumlamıştır. Çağınalp bu çalışmada aşırı talep fonksiyonu kullanılarak elde edilen fiyat değişim denkleminin, arz ve talep fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi içeren bir piyasada yetersiz kalabileceğini belirtmiştir. Buna kanıt olarak, aynı denge noktasında kesişen birden fazla arz ve talep fonksiyonu grafiğinin bulunabileceği bilgisini öne sürmüştür. Böyle bir durumda hangi grafiğin daha doğru olduğunu belirlemek zordur. Bu yüzden arz ve talep fonksiyonlarının yalnızca bir  $P$  fiyatındaki değeri bilgisi yeterli olmamakta, birinci, ikinci ve daha yüksek mertebeden türevlerin bilinmesiyle gerçeğe daha yakın tahminler elde edilebilmektedir yorumu yapılmıştır. Çağınalp bu varsayımları göz önünde bulundurarak hisse senedi fiyatının zamana bağlı değişimini veren yeni bir formül üretmiş ve bu formülde arz-talep fonksiyonlarının birinci türevlerine yer vermiştir.

2011 yılına gelindiğinde Merdan ve Alişen tarafından, hisse senedine fiyat tahmini veren yeni bir model çalışılmıştır [14]. Aslında bu model [4] çalışmasında yer alan modelin, [3] makalesinde geliştirilmiş olan hisse senedinin zamana bağlı türev denklemleri kullanarak iyileştirilmiş halidir. Bu modelleme, bir hisse senedi fiyatının nitel ve nicel davranışının analizinde, özellikle klasik finans ve iktisat modellerinin cevap veremediği finansal piyasalarda oluşan köpüklerin nedenleri, ani hisse senedi fiyatındaki çıkış ve inişlerin sebepleri gibi soruların cevaplanmasında daha iyi sonuçlar verebilmiştir.

Biz ise bu kısımda, daha iyi fiyat tahmini yapması beklenen bu yeni hisse senedi fiyat tahmin modelinin kararlılığını inceleyeceğiz. Daha önceki kararlılık analizinde bahsettiğimiz kabuller aynı şekilde bu analiz için de geçerlidir. Bunlar:

1. Taylor lineer yaklaşımı kullanılarak  $\tanh(x) \approx x$  alınmış ve bunun neticesinde

$$k \simeq \frac{1}{2}(1 + \xi_1 + \xi_2) \quad (3.49)$$

denklemini elde edilmiştir. Burada  $\xi_i(t)$  fonksiyonunun değer kümesi  $(-1, 1)$  aralığındadır ( $i = 1, 2$ ),

2.  $\delta = \frac{1}{\tau_0}$  olarak alınmıştır,
3.  $q_1, q_2, c_1, c_2, P_a$ , pozitif birer sabittir

şeklindedir.

[14] çalışmasında elde edilen sistem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 - c_2 q_2 \frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)}}{c_1 q_1 - B(1 - B) 2 \cosh^2(\xi_1 + \xi_2)}, \\ \frac{dB}{dt} = k(1 - B) + (k - 1)B + B(1 - B) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt}, \\ \frac{d\xi_1}{dt} = c_1 \left( \frac{q_1}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1 \right), \\ \frac{d\xi_2}{dt} = c_2 \left( q_2 \frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)} - \xi_2 \right) \end{array} \right. \quad (3.50)$$

şeklindedir. Yeterince küçük  $x$  değerleri için  $\cosh(x) \approx 1$  olduğundan analizler sırasında kolaylık açısından bu yaklaşımı kullanacağız. Kararlılık analizinde ilk adım sistemin denge noktasının bulunmasıdır. Analizlerimize bu adım ile başlayalım. Verilen sistemin denge noktasını bulabilmek için sistemdeki her bir türevi sıfıra eşitliyoruz. Ancak bu şekilde değişim sona erer ve denge durumu meydana gelir.

$P_{eq} \in \mathbb{R}^+$ ,  $P_{eq} \in (\min[P_a, L], \max[P_a, L])$  şartı altında her bir türev sıfıra eşitlendiğinde  $(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)$  formatındaki denge noktası

$$\widehat{x} = \left( P_{eq}, \widehat{k}, 0, q_2 \frac{(P_a - P_{eq})}{P_a} \right) \quad (3.51)$$

şeklinde elde edilir.

Burada  $k = \frac{1}{2}(1 + \xi_1 + \xi_2)$  ve denge durumunda  $\widehat{\xi}_1 = 0$  ve  $\widehat{\xi}_2 = q_2 \frac{(P_a - P_{eq})}{P_a}$  olduğu bilindiğinden, denge durumundaki  $\widehat{k}$  fonksiyonu

$$\widehat{k} = \frac{1}{2} \left( 1 + q_2 \frac{(P_a - P_{eq})}{P_a} \right) \quad (3.52)$$

şeklindedir. Fakat işlem rahatlığı açısından denklemlerde kapalı olarak  $\widehat{k}$  şeklinde yazılacaktır.

Ayrıca,  $c_1$ ,  $c_2$  ve  $q_1$  parametrelerinin denge noktasının ifadesinde yer almadığına dikkat edilmelidir. O halde bu parametreler denge noktasının var oluşunu etkilememektedirler. Burada bir önceki kararlılık analizinde verilmiş olan sonuçlar aynı şekilde geçerli olduğundan tekrar ifade ediyoruz.

**Sonuç 3.1.2.** (3.50) sistemi için, tüm denge noktaları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlamaktadırlar.

**Durum 1:**  $P_a > P_{eq} > L$  halinde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır:

$$a) P_a > P_{eq} > 0, \quad b) 0 < q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}.$$

**Durum 2:**  $L > P_{eq} > P_a$  halinde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır:

$$a) P_{eq} > P_a > 0, \quad b) 0 < q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}.$$

**Durum 3:**  $P_a = P_{eq} = L$  halinde aşağıdaki ifade sağlanmaktadır:

$$a) \widehat{\xi}_1 = \widehat{\xi}_2 = 0.$$

Bu sonucun ispatı bir önceki kararlılık analizinde ayrıntılı şekilde verilmiş olduğundan, burada tekrar etmiyoruz.

Verilen Sonuç (3.1.2) ile birlikte sistemin denge noktalarının sağladığı ifadeler incelendi. Şimdi ise Sonuç'ta bahsedilen  $P_a > P_{eq} > L$ ,  $L > P_{eq} > P_a$  ve  $P_a = P_{eq} = L$  olmak üzere 3 farklı durum için sistemdeki denge noktalarının kararlılığını inceleyelim. (3.50) sisteminin kararlılık analizini yaparken takip edilmesi gereken adımları bir kez daha tekrar edelim:

1. Sistemin denge noktası bulunmalıdır,
2. Lineer olmayan bu sistem, bulunan denge noktası civarında lineerleştirilmelidir,
3. Sistem lineerleştirildiğinde elde edilen Jakobiyen matrisi kullanılarak bir karakteristik polinom bulunmalıdır,
4. Bulunan karakteristik polinomun kökleri özdeğerlerdir, bu özdeğerlerin reel kısımlarının işaretleri incelenmelidir. Bunun için *Routh- Hurwitz Teoremi* kullanılacaktır,
5. Sistemin kararlı olabilmesi için özdeğerlerin reel kısımlarının işaretinin ne olması gerektiği yorumlanmalı ve bunu sağlayıcı şartlar konularak bir kararlılık teoremi inşa edilmelidir.

İşlemlerimiz sırasında ifade rahatlığı açısından şu eşitlikleri yazmayı uygun buluyoruz:

$$T = 2c_2P_a\hat{k}^2 + 2c_1P_a\hat{k}^2 - 2c_2P_a\hat{k} - 2c_1P_a\hat{k} - P_{eq}c_2q_2 + c_1c_2P_aq_1, \quad (3.53)$$

$$W = P_a(c_1q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2), \quad (3.54)$$

$$J = 2P_a\hat{k}^2c_1c_2 - 2P_a\hat{k}c_1c_2 - P_{eq}q_2c_1c_2. \quad (3.55)$$

Şimdi ise kararlılık teoremini inşa edelim.

**Teorem 3.1.2.** *Verilen kabuller göz önünde bulundurularak (3.50) sistemi değerlendirildiğinde,  $\hat{x}$  denge noktası için bir kararlılık bölgesinin varlığından bahsedilebilir. Burada  $P_{eq} \in (\min[P_a, L], \max[P_a, L])$  için belirlenen 3 farklı durum için incelenmiştir. Bu durumlar için belirlenen ifadeler gerçekleştiği takdirde sistemdeki denge noktaları kararlıdır.*

**Durum 1:**  $P_a > P_{eq} > L$  olması halinde aşağıdaki şartlar gerçekleşirse sistemdeki denge noktaları kararlıdır:

$$1. \quad q_2 > \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_aP_{eq}},$$



$$2. \quad c_1 q_1 < \left(1 + q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a}\right)^2,$$

$$3. \quad q_2 > \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_a P_{eq}} \frac{c_1 + c_2}{c_2} + \frac{c_1 q_1 P_a}{P_{eq}}.$$

**Durum 2:**  $L > P_{eq} > P_a$  olması halinde aşağıdaki şartlar gerçekleşirse sistemdeki denge noktaları kararlıdır:

$$1. \quad q_2 > \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_a P_{eq}},$$

$$2. \quad c_1 q_1 < \left(1 + q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a}\right)^2,$$

$$3. \quad q_2 > \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_a P_{eq}} \frac{c_1 + c_2}{c_2} + \frac{c_1 q_1 P_a}{P_{eq}}.$$

**Durum 3:**  $P_a = P_{eq} = L$  olması halinde aşağıdaki şartlar gerçekleşirse sistemdeki denge noktaları kararlıdır:

$$1. \quad q_2 > \frac{2c_1 c_2 P_a q_1 - c_1 P_a - c_2 P_a}{2c_2 P_{eq}},$$

$$2. \quad c_1 q_1 < \frac{1}{2}.$$

**İspat 3.1.4.** Kararlılık teoreminin ispatına, lineer olmayan (3.50) sistemini lineerleştirerek başlayalım. Bunun için öncelikle sistemdeki türevleri aşağıda verilen fonksiyonlara eşit olarak alalım, bu bize gösterim kolaylığı sağlayacaktır:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = f(P, B, \xi_1, \xi_2) \\ \frac{dB}{dt} = g(P, B, \xi_1, \xi_2) \\ \frac{d\xi_1}{dt} = h(P, B, \xi_1, \xi_2) \\ \frac{d\xi_2}{dt} = k(P, B, \xi_1, \xi_2) \end{cases} \quad (3.56)$$

$(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)$  ifadesi denge noktası ise

$$\begin{aligned} f(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) = g(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) &= h(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) \\ &= k(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

eşitliklerinin varlığı oldukça açıktır. Verilen  $f(P, B, \xi_1, \xi_2)$ ,  $g(P, B, \xi_1, \xi_2)$ ,  $h(P, B, \xi_1, \xi_2)$ ,  $k(P, B, \xi_1, \xi_2)$  ifadelerinin  $(P_{eq}, \widehat{B}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)$  denge noktası civarındaki Taylor seri açılımlarının yapılmış ve bunun sonrasında sistemdeki yüksek mertebeden terimleri temsil eden  $O(\dots)$  ifadesi ihmal edilmiştir. Bu kısımlar bir önceki kararlılık analizinde daha ayrıntılı gösterilmiştir.  $J$  Jakobiyen matris olmak üzere

$$J = \begin{bmatrix} f_P & f_B & f_{\xi_1} & f_{\xi_2} \\ g_P & g_B & g_{\xi_1} & g_{\xi_2} \\ h_P & h_B & h_{\xi_1} & h_{\xi_2} \\ k_P & k_B & k_{\xi_1} & k_{\xi_2} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

şekindedir. Sonuç olarak lineer olmayan (3.50) sistemi

$$\begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_P & f_B & f_{\xi_1} & f_{\xi_2} \\ g_P & g_B & g_{\xi_1} & g_{\xi_2} \\ h_P & h_B & h_{\xi_1} & h_{\xi_2} \\ k_P & k_B & k_{\xi_1} & k_{\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P - P_{eq} \\ B - \widehat{B} \\ \xi_1 - \widehat{\xi}_1 \\ \xi_2 - \widehat{\xi}_2 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

lineer sistemine indirgenir. Buna da lineerleştirilmiş sistem adı verilir. Elde edilen bu lineer sistemin kararlılık analizi için  $J$  Jakobiyen matrisinin özdeğerleri incelenmelidir. Biliyoruz ki

1. Özdeğerlerinin tümünün reel kısmı negatifse, sistem karardır.
2. Özdeğerlerden en az birinin reel kısmı pozitif ise, sistem kararsızdır.
3. Özdeğerlerden en az birinin reel kısmı sifıra eşitse, marjinal durum söz konusudur.

Sistemin özdeğerlerini bulabilmek için

$$|J - \lambda I| = 0 \quad (3.60)$$

denklemini kullanacağız. Bu denklem yardımıyla kökleri özdeğerler olan karakteristik polinom elde edilmiştir. Maple 13 programı kullanılarak bulunan  $J$  matrisinin karakteristik polinomu şu şekilde şekildedir:

$$\begin{aligned} \lambda(1 + \lambda)[(P_a c_1 q_1 - 2P_a \hat{k} + 2P_a \hat{k}^2)\lambda^2 \\ + (2c_2 P_a \hat{k}^2 + 2c_1 P_a \hat{k}^2 - 2c_2 P_a \hat{k} - 2c_1 P_a \hat{k} - P_{eq} c_2 q_2 + c_1 c_2 P_a q_1)\lambda \\ + 2P_a \hat{k}^2 c_1 c_2 - 2P_a \hat{k} c_1 c_2 - P_{eq} q_2 c_1 c_2] = 0 \end{aligned}$$

Burada  $\lambda_1 = 0$  ve  $\lambda_2 = -1$  olduğu görülmektedir. Özdeğerlerden birinin sıfıra eşit olması burada kararlılığı bozmayacaktır. Bu yalnızca çekiciliğin ve dolaylı olarak asimptotik kararlılığın olmadığına işaretler fakat eğer diğer özdeğerlerin reel kısımlarının negatif olduğunu garanti edersek Lyapunov anlamında kararlılıktan bahsedebiliriz. O halde geriye kalan iki özdeğeri bulalım.

Bulunan karakteristik polinomda işlem kolaylığı açısından  $\lambda^2$  ifadesinin katsayısı 1 olacak şekilde polinom yeniden düzenlenmiştir.

$$\alpha_2 = 1, \quad (3.61)$$

$$\alpha_1 = \frac{2c_2 P_a \hat{k}^2 + 2c_1 P_a \hat{k}^2 - 2c_2 P_a \hat{k} - 2c_1 P_a \hat{k} - P_{eq} c_2 q_2 + c_1 c_2 P_a q_1}{P_a (c_1 q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2)}, \quad (3.62)$$

$$\alpha_0 = \frac{2P_a \hat{k}^2 c_1 c_2 - 2P_a \hat{k} c_1 c_2 - P_{eq} q_2 c_1 c_2}{P_a (c_1 q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2)} \quad (3.63)$$

olarak alınmak üzere, karakteristik polinom:

$$\lambda(1 + \lambda)(\alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) = 0 \quad (3.64)$$

yani

$$\begin{aligned} \lambda(1 + \lambda)\left[\lambda^2 + \frac{2c_2 P_a \hat{k}^2 + 2c_1 P_a \hat{k}^2 - 2c_2 P_a \hat{k} - 2c_1 P_a \hat{k} - P_{eq} c_2 q_2 + c_1 c_2 P_a q_1}{P_a (c_1 q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2)} \lambda \right. \\ \left. + \frac{2P_a \hat{k}^2 c_1 c_2 - 2P_a \hat{k} c_1 c_2 - P_{eq} q_2 c_1 c_2}{P_a (c_1 q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2)}\right] = 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Kararlılık incelemesi için bu karakteristik polinomun köklerinin yani özdeğerlerin reel kısımlarının işaretlerini analiz etmeliyiz. Fakat katsayılar göz önüne alındığında, bu karakteristik polinomun köklerinin açık şekilde bulunmasının kolay olmadığı görülmektedir. O halde burada da daha önceki kararlılık analizinde uygulamış olduğumuz Routh-Hurwitz Kriterini kullanalım. Çünkü bu kriter sayesinde özdeğerlerin tamamının bulunması gibi uzun işlemlerden kaçınarak, özdeğerlerin yalnızca reel kısımlarının işaretleri hakkında bilgi sahibi olmamız mümkündür.

$$T = 2c_2P_a\hat{k}^2 + 2c_1P_a\hat{k}^2 - 2c_2P_a\hat{k} - 2c_1P_a\hat{k} - P_{eq}c_2q_2 + c_1c_2P_aq_1, \quad (3.65)$$

$$W = P_a(c_1q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2), \quad (3.66)$$

$$J = 2P_a\hat{k}^2c_1c_2 - 2P_a\hat{k}c_1c_2 - P_{eq}q_2c_1c_2 \quad (3.67)$$

eşitliklerini işlem kolaylığı olması için tanımlamıştık. Ayrıca denge durumunda

$$\hat{k} = \frac{1}{2}\left(1 + q_2\frac{(P_a - P_{eq})}{P_a}\right) \quad (3.68)$$

olduğu bilinmektedir. Bunlar göz önünde bulundurulacak şekilde

$$\lambda(1 + \lambda)(\alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0) = 0$$

karakteristik polinomuna Routh-Hurwitz Kriterini uygulayalım. Polinomun katsayıları Routh tablosuna yerleştirildiğinde

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^2 & \alpha_2 & \alpha_0 \\ \lambda^1 & \alpha_1 & 0 \\ \lambda^0 & \alpha_0 & 0 \end{array} \quad (3.69)$$

şeklinde bir tablo elde edilmektedir. Routh-Hurwitz Kriterinin tanımında daha önce bahsettiğimiz gibi, polinomun tüm köklerinin negatif reel kısma sahip olabilmesi yani sistemin kararlı olabilmesi için, orta sütündeki elemanlar arasında işaret değişimi yaşanmamalıdır.  $\alpha_2 = 1 > 0$  olduğundan dolayı sistemin kararlı olabilmesi için

i)  $\alpha_0 > 0$ ,

ii)  $\alpha_1 > 0$

şartlarının sağlanmalıdır. Şimdi bu şartları ve hangi durumlarda gerçekleştirileceklerini inceleyelim.  $P_{eq} \in (\min[P_a, L], \max[P_a, L])$  olduğu bilindiğinden 3 farklı durum için analizler yapılacaktır.

**Durum 1:**  $P_a > P_{eq} > L$  iken

•  $\alpha_0 > 0$  durumu için:

$\alpha_0 > 0$  yani

$$\alpha_0 = \frac{J}{W} = \frac{2P_a\hat{k}^2c_1c_2 - 2P_a\hat{k}c_1c_2 - P_{eq}q_2c_1c_2}{P_a(c_1q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2)} > 0$$

olması halini inceleyelim. Bu halin gerçekleşmesi için iki ihtimal vardır. Bunlar

1.  $J > 0, W > 0$  veya

2.  $J < 0, W < 0$

şeklindedir. Öncelikle ilk ihtimali değerlendirelim.  $J > 0$  ve  $W > 0$  ifadelerini analiz edersek  $J > 0$  ise

$$2P_a\hat{k}^2 - 2P_a\hat{k} - P_{eq}q_2 > 0$$

olmalıdır. Bu ise

$$q_2 < \frac{2P_a\hat{k}(\hat{k} - 1)}{P_{eq}}$$

ifadesini gerektirir. Ve buradan

$$q_2 < \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_aP_{eq}}$$

ifadesine ulaşılır. Payda bulunan  $(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2$  ifadesi  $P_a > P_{eq} > L$  ve Sonuç (3.1.2)'in Durum 1 (b) şıkkı gereğince negatiftir. Paydada bulunan  $2P_aP_{eq}$  ifadesinin pozitif olduğunu ise başta verilen kabuller sayesinde biliyoruz. O halde ifadenin tamamı negatiftir yani

$$\frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_aP_{eq}} < 0$$

şeklindedir. Başta verilen kabullerden  $q_2 > 0$  olduğu bilinmektedir. O halde

$$q_2 < \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_a P_{eq}}$$

ifadesi çelişki arz etmektedir, yani  $J > 0$  ihtimali söz konusu olamaz. Bu durumda  $W > 0$  ihtimalini incelemenin de bir anlamı yoktur.

Şimdi ise  $\alpha_0 > 0$  durumunun mümkün olmasını sağlayacak bir diğer ihtimali inceleyelim. Bu  $J < 0$  ve  $W < 0$  olma durumudur.  $J < 0$  ise  $2P_a\hat{k}^2 - 2P_a\hat{k} - P_{eq}q_2 < 0$  yazılabilir. Bu ise

$$q_2 > \frac{2P_a\hat{k}(\hat{k} - 1)}{P_{eq}}$$

ifadesini gerektirir. Buradan ise

$$q_2 > \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_a P_{eq}}$$

ifadesine ulaşılır.  $W < 0$  durumu incelendiğinde ise bu durumun gerçekleşmesi için sırasıyla,  $P_{eq} > \frac{P_a(q_2 - 1)}{q_2}$  şartının ve

$$c_1q_1 < 1 + \left( \frac{q_2(P_a - P_{eq})}{P_a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{q_2(P_a - P_{eq})}{P_a} \right)^2$$

şartının gerçekleşmesi gerekmektedir. Bahsedilen ilk şart zaten Sonuç (3.1.2)'in Durum 1 (b) şikkında verilen ifadenin bir gereğidir. O halde burada sadece ikinci ifadeyi kararlılık şartlarına eklemeliyiz. Çünkü ilk ifadenin gerçekleştiği açıktır. Böylece  $J < 0$  ve  $W < 0$  olması suretiyle  $\alpha_0 > 0$  durumu incelendi.

- $\alpha_1 > 0$  durumu için:

$\alpha_1 > 0$  durumunu açık şekilde

$$\alpha_1 = \frac{T}{W} = \frac{2c_2P_a\hat{k}^2 + 2c_1P_a\hat{k}^2 - 2c_2P_a\hat{k} - 2c_1P_a\hat{k} - P_{eq}c_2q_2 + c_1c_2P_aq_1}{P_a(c_1q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2)} > 0$$

olarak ifade edelim.

$\alpha_1 > 0$  durumunun gerçekleşmesi için iki ihtimal vardır. Bunlar

1.  $T > 0, W > 0$  veya
2.  $T < 0, W < 0$

olma durumlarıdır. Burada ilk ihtimali incelemeye gerek duymuyoruz çünkü  $\alpha_0 > 0$  durumu incelenirken  $P_a > P_{eq} > L$  için  $J > 0$  ifadesinde çelişki elde edilmişti. Bu ise birlikte incelenmesi gereken  $J > 0, W > 0$  ihtimalinin gerçekleşemeyeceğine yani dolaylı olarak  $W > 0$  da olamayacağına işarettir. Hala incelemelerimiz  $P_a > P_{eq} > L$  koşulu altında sürmektedir. Bu koşul altında  $\alpha_0 > 0$  ve  $\alpha_1 > 0$  ifadelerinin aynı anda gerçekleşmesi istendiğinden,  $\alpha_0 > 0$  durumu için dolaylı olarak  $W > 0$  gerçekleşmemekte ise o halde  $W > 0$  ifadesi  $\alpha_1 > 0$  durumu için de gerçekleşmeyecektir. Yani ilk ihtimal olan  $T > 0, W > 0$  olma durumu geçersizdir.

Diğer ihtimali inceleyelim  $T < 0, W < 0$  ele alınsın.  $T < 0$  ifadesini açık halde

$$2c_2P_a\hat{k}^2 + 2c_1P_a\hat{k}^2 - 2c_2P_a\hat{k} - 2c_1P_a\hat{k} - P_{eq}c_2q_2 + c_1c_2P_aq_1 < 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ise

$$q_2 > \frac{2P_a\hat{k}(\hat{k} - 1)}{P_{eq}} \frac{c_1 + c_2}{c_2} + \frac{c_1q_1P_a}{P_{eq}}$$

ifadesini gerektirir. Buradan da

$$q_2 > \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_aP_{eq}} \frac{c_1 + c_2}{c_2} + \frac{c_1q_1P_a}{P_{eq}}$$

ifadesi elde edilir.  $W < 0$  ifadesi incelendiğinde ise, bu durumun gerçekleşmesi için sırasıyla

$$P_{eq} > \frac{P_a(q_2 - 1)}{q_2}$$

ve

$$c_1q_1 < 1 + \left( \frac{q_2(P_a - P_{eq})}{P_a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{q_2(P_a - P_{eq})}{P_a} \right)^2$$

şartı gerçekleşmelidir. İlk şartın doğruluğu Sonuç (3.1.2)'in Durum 1 (b) şıkkında verilen ifade dolayısıyla açıktır. O halde burada yalnızca ikinci ifade kararlılık

şartları arasına yazılmalıdır.

**Durum 2:**  $L > P_{eq} > P_a$  iken

- $\alpha_0 > 0$  durumu için:

$\alpha_0 > 0$  yani

$$\alpha_0 = \frac{J}{W} = \frac{2P_a\widehat{k}^2c_1c_2 - 2P_a\widehat{k}c_1c_2 - P_{eq}q_2c_1c_2}{P_a(c_1q_1 - 2\widehat{k} + 2\widehat{k}^2)} > 0$$

olmasını istiyoruz. Bunun gerçekleşmesi için incelenmesi gereken ihtimaller şöyledir:

1.  $J > 0, W > 0$  veya
2.  $J < 0, W < 0$

şeklindedir. Bu ihtimallerin analizleri benzer şekilde bir önceki durum için de yapıldığından burada daha kısa şekilde ifade edilecektir. Öncelikle ilk ihtimali değerlendirelim.  $J > 0$  ve  $W > 0$  ifadelerini analiz edersek  $J > 0$  ifadesinin sağlanması için

$$q_2 < \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_aP_{eq}}$$

eşitsizliği gerçekleşmelidir. Paydadaki  $(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2$  ifadesi  $L > P_{eq} > P_a$  olma hali ve Sonuç (3.1.2)'in Durum 2 (b) şıkkı gereğince negatiftir. Kabuller sayesinde  $2P_aP_{eq}$  ifadesinin pozitif olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak tamamı negatiftir yani

$$\frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_aP_{eq}} < 0$$

şeklindedir.  $q_2 > 0$  olduğu bilindiğinden

$$q_2 < \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_aP_{eq}}$$

ifadesi çelişki arz etmektedir, yani  $J > 0$  ihtimali mümkün değildir. Bu durumda  $W > 0$  ihtimalini incelemeye gerek yoktur. Şimdi ise  $\alpha_0 > 0$  için diğer ihtimali inceleyelim. Bu  $J < 0$  ve  $W < 0$  olma durumudur.  $J < 0$  ifadesi

$$q_2 > \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2}{2P_aP_{eq}}$$



eşitsizliğini gerektirmektedir.  $W < 0$  durumu incelendiğinde ise

$$c_1 q_1 < 1 + \left( \frac{q_2(P_a - P_{eq})}{P_a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{q_2(P_a - P_{eq})}{P_a} \right)^2$$

şartının gerçekleşmesi gerektiği görülür.

- $\alpha_1 > 0$  durumu için:

Bu durumun incelenmesinde bir önceki koşul olan Durum 1  $P_a > P_{eq} > L$  şartındaki  $\alpha_1 > 0$  analizi aynen geçerlidir. Yani,  $\alpha_1 > 0$  olabilmesi için sırasıyla

$$q_2 > \frac{(q_2(P_a - P_{eq}))^2 - P_a^2 c_1 + c_2}{2P_a P_{eq} c_2} + \frac{c_1 q_1 P_a}{P_{eq}}$$

ve

$$c_1 q_1 < 1 + \left( \frac{q_2(P_a - P_{eq})}{P_a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{q_2(P_a - P_{eq})}{P_a} \right)^2$$

şartlarının gerçekleşmesi gerektiği görülmektedir.

**Durum 3:**  $P_{eq} = P_a = L$  iken

Denge durumundaki  $\hat{k}$  fonksiyonununun

$$\hat{k} = \frac{1}{2} \left( 1 + q_2 \frac{(P_a - P_{eq})}{P_a} \right)$$

şeklinde ifade edildiği biliniyor. Bu şart altında ise  $\hat{k}$  fonksiyonu

$$\hat{k} = \frac{1}{2}$$

olarak işleme alınacaktır.

- $\alpha_0 > 0$  durumu için:

$\alpha_0 > 0$  şartı açık yazılacak olursa

$$\alpha_0 = \frac{J}{W} = \frac{2P_a \hat{k}^2 c_1 c_2 - 2P_a \hat{k} c_1 c_2 - P_{eq} q_2 c_1 c_2}{P_a (c_1 q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2)}$$

şeklindedir.

Bu ise ancak iki ihtimalde gerçekleşebilir:

1.  $J > 0, W > 0$  veya
2.  $J < 0, W < 0$

İlk ihtimali gözönüne alırsak,  $J > 0$  olması için

$$2P_a\hat{k}^2 - 2P_a\hat{k} - P_{eq}q_2 > 0$$

olması gerekmektedir.  $\hat{k} = \frac{1}{2}$  eşitliği göz önüne alındığında

$$\frac{1}{2}P_a + P_{eq}q_2 < 0$$

ifadesi elde edilmektedir. Fakat başta verilen kabullerde  $P_a$ ,  $P_{eq}$  ve  $q_2$  ifadeleri pozitif olup, bu bir çelişki arz etmektedir. O halde  $W > 0$  ihtimalini değerlendirmeye gerek yoktur.

Şimdi ise ikinci ihtimal olan  $J < 0, W < 0$  durumunu inceleyelim.  $J < 0$  şartı için yukarıda bahsedilen durumdan farklı olarak

$$\frac{1}{2}P_a + P_{eq}q_2 > 0$$

olması gerekmektedir. Başta verilen kabuller doğrultusunda bu ifade zaten aşikardır.  $W < 0$  şartı incelendiğinde ise

$$c_1q_1 < \frac{1}{2}$$

ifadesinin gerçekleşmesi gerektiği sonucuna ulaşılır.

- $\alpha_1 > 0$  durumu için:

$$\alpha_1 = \frac{T}{W} = \frac{2c_2P_a\hat{k}^2 + 2c_1P_a\hat{k}^2 - 2c_2P_a\hat{k} - 2c_1P_a\hat{k} - P_{eq}c_2q_2 + c_1c_2P_aq_1}{P_a(c_1q_1 - 2\hat{k} + 2\hat{k}^2)} > 0$$

olmasını istiyoruz. Bunun için 2 ihtimal olduğunu önceki kısımlarda söylemiştik.

*Bunlar*

1.  $T > 0, W > 0$  veya
2.  $T < 0, W < 0$

*şeklindedir.  $\alpha_0 > 0$  durumu incelenirken  $P_{eq} = P_a = L$  için  $J > 0$  ifadesinde çelişki elde edilmişti. Bu ise birlikte sağlanması gereken  $J > 0, W > 0$  ihtimalinin gerçekleşemeyeceğini, yani dolaylı olarak  $W > 0$  ifadesinin de mümkün olmayacağını gösteriyor.  $P_{eq} = P_a = L$  durumu için  $\alpha_0 > 0$  ve  $\alpha_1 > 0$  ifadelerinin birlikte gerçekleşmesi isteniyor. Burada  $\alpha_0 > 0$  durumu için dolaylı olarak gerçekleşemeyen  $W > 0$  koşulu  $\alpha_1 > 0$  durumu için de gerçekleşmeyecektir. Yani  $T > 0, W > 0$  şeklindeki ilk ihtimal mümkün olmayacaktır.*

*İkinci ihtimali ele alacak olursak  $T < 0$  şartı için*

$$q_2 > \frac{2c_1c_2P_aq_1 - c_1P_a - c_2P_a}{2c_2P_{eq}}$$

*ifadesi gerçekleşmelidir.  $W < 0$  şartı için ise yine*

$$c_1q_1 < \frac{1}{2}$$

*ifadesinin gerçekleşmesine ihtiyaç vardır.*

*Böylelikle kararlılık teoremi ispatlanmıştır.□*

## 4. NÜMERİK ÇALIŞMALAR

3. Bölümde (3.2) ve (3.50) sistemlerinin kararlılık analizlerini yaptık. Bu bölümde Wolfram Mathematica programı yardımıyla her bir sistem için denge ve kararlılık bölgeleri çizilecek ve yorumlanacaktır.

### 4.1 Tek Yatırımcı Grup İçeren Sistemler için Nümerik Simülasyonlar

#### 4.1.1 CB modelinin nümerik simülasyonu

3. Bölümün ilk kısmında, [4] makalesinde çalışılmış olan (3.2) sisteminin kararlılığı analiz edildi. Bu analizler sırasında, tamamı pozitif olan  $(\delta, c_1, c_2, q_1, q_2, P_a)$  parametrelerini kullanıldı. Bu parametrelerden  $c_1, c_2$  ve  $q_1$ 'in denge noktasının varlığına etkileri olmadığı gözlemlendi. Denge noktasının varlığına etkisi olmayan bu parametreler, aynı zamanda denge bölgesinin çizimi sırasında da rol oynamayacaktır. Bunu çizimler sırasında daha ayrıntılı vereceğiz.

Kararlılık analizinde verdiğimiz Sonuç (3.1.1) ile sistemde varolan tüm denge noktaları tarafından gerçekleştirilen eşitsizliklerden bahsettik. Bu eşitsizlikler sistemde bulunan tüm denge noktalarının gerçekleşiyorsa, bize sistemdeki denge noktalarının bulunma ihtimali olan bölgeyi de çizdirecektir. Biz bu bölgeyi "**Denge Bölgesi**" olarak adlandıracağız. Eğer ifadeyi tersten açıklayacak olursak; sistemde hiç bir denge noktası yoktur ki denge bölgesinin içinde yer almasın.

Denge noktalarının varlığından ve buldukları bölgeden bahsettikten sonra, bu denge noktalarının hangi şartlar altında kararlı olduğunu inceledik. Kararlılık Teoremi (3.1.1) ile, varolan denge noktalarının ne zaman kararlı olabileceğini araştırdık ve kararlılık durumunun gerçekleşebilmesi için bir takım eşitsizliklerin sağlanması gerektiğini söyledik. Bu eşitsizliklerin herbiri kararlılık için konulmuş şartlardır ve bize kararlı denge noktalarının bulunabileceği bölgenin çiziminde yardımcı olacaktır. Biz bu bölgeye "**Kararlılık Bölgesi**" diyeceğiz. Yine denilebilir ki, sistemde kararlı hiç bir denge noktası yoktur ki kararlı bölge içinde yer almasın.

Burada dikkat edilmesi gereken ayrıntılardan biri de; denge noktalarının varlığına etkisi olmayan parametrelerin, varolan denge noktalarının kararlılığını etkileyebileceği bilgisidir.

Yapacağımız nümerik analiz ve değerlendirmeler, tıpkı kararlılık teoremlerinde olduğu gibi  $P_{eq} \in (\min[P_a, L], \max[P_a, L])$  bilgisi dikkate alınarak 3 farklı durum için ele alınacaktır: (1)  $P_a > P_{eq} > L$ , (2)  $L > P_{eq} > P_a$ , (3)  $P_a = P_{eq} = L$ . Burada  $L = 10$  olarak alınacak ve  $P_a$  ise duruma göre 8, 10 ve 12 değerlerini alacaktır. Analizler sırasında  $c_1 = \frac{1}{10}$  ve  $c_2 = 1$  olarak göz önünde bulundurulacaktır.

- **Durum 1** :  $12 = P_a > P_{eq} > L = 10$  olması hali

**Denge Bölgesi Analizi:**  $P_{eq}$  değişkeni (10, 12) aralığında keyfi değerler almaktadır. (3.2) sistemi incelenmiş ve sistemin (4.1) formundaki denge noktasına ulaşılmıştır. Bu denge noktası

$$\hat{x} = (P_{eq}, \hat{B}, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) \quad (4.1)$$

$$= \left( P_{eq}, q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{2P_a} + \frac{1}{2}, 0, q_2 \frac{P_a - P_{eq}}{P_a} \right) \quad (4.2)$$

şeklinde ve  $P_{eq}$ ,  $q_2$  ve  $P_a$  ifadelerini içermektedir. Bu durum için  $P_a = 12$  olarak alınmıştır. O halde denge noktalarının bulunabileceği bölge anlamına gelen denge bölgesi,  $(P_{eq}, q_2)$  ikilisine bağlı olarak analiz edilecektir.

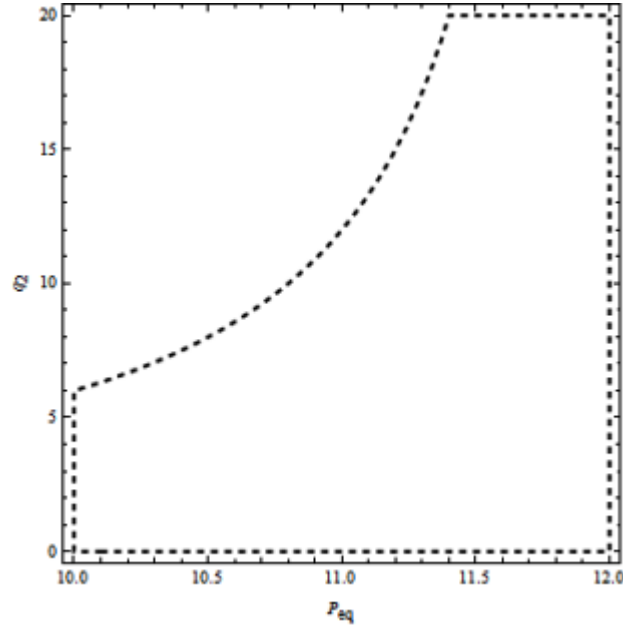
Sonuç (3.1.1)  $P_a > P_{eq} > L$  durumu (b) şıkında

$$q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

ifadesinden bahsedilmiştir. Parametreler için atadığımız özel değerler yerine yazıldığında aşağıda verilen eşitsizlik elde edilmiştir

$$q_2 < \frac{12}{12 - P_{eq}}$$

Bu eşitsizlik göz önüne alınarak,  $(P_{eq}, q_2)$  düzleminde denge bölgesi aşağıdaki şekilde bulunmuştur.



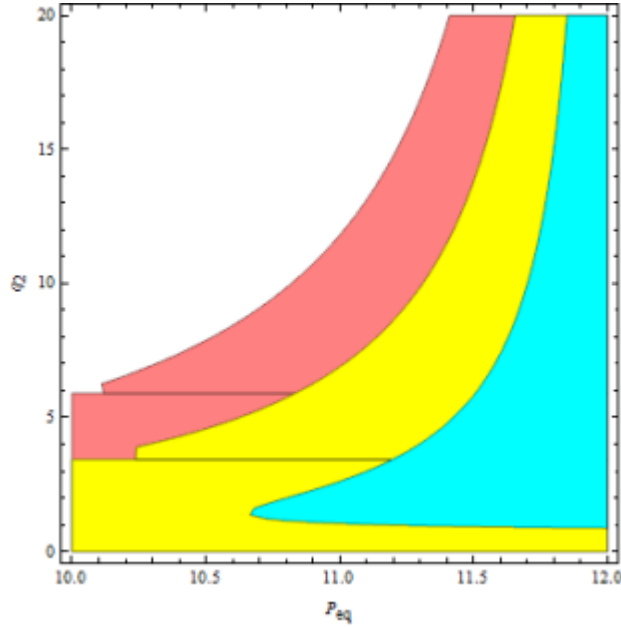
Şekil 4.1:  $L = 10$  ve  $P_a = 12$  olarak alındığında  $12 = P_a > P_{eq} > L = 10$  durumu için  $(P_{eq}, q_2)$  düzleminde elde edilen denge bölgesi

Çizilen kesik çizgili bölge denge bölgesi olup,  $12 = P_a > P_{eq} > L = 10$  durumu için elde edilen tüm denge noktalarını içerir. Yani (3.2) sisteminin hiçbir denge noktası çizilen bölgenin dışında bulunamaz.

**Kararlılık Bölgesi Analizi:** 3. Bölümde ayrıntılı olarak incelediğimiz gibi, [4] çalışmasında ele alınan (3.2) sistemi lineer olmayan bir sistem olup denge noktası civarında lineerleştirilmiştir. Daha sonra Jakobiyen matris yardımıyla karakteristik polinom şu formda bulundu:

$$\lambda(\alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0) = 0. \quad (4.3)$$

Kararlılık analizi yapabilmek için, Routh-Hurwitz Kriteri kullanıldı. Böylelikle bulunan karakteristik polinomun kökleri olan özdeğerlerin reel kısımlarının işaretleri incelendi. Kararlılık teoremi oluşturulurken, özdeğerlerin reel kısımları negatif olacak şekilde, parametrelerce sağlanması gereken eşitsizlikler yazıldı. Tüm bu incelemeler sayesinde  $(P_{eq}, q_2)$  düzleminde kararlılık bölgesi oluşturuldu. Bu bölgenin meydana gelmesi sırasında  $q_1$  parametresi etkin rol oynamaktadır. Çizimlerde  $q_1$  parametresine sırasıyla 0.447, 10 ve 14 değerleri verilmiştir.



Şekil 4.2:  $12 = P_a > P_{eq} > L = 10$  durumu için  $(P_{eq}, q_2)$  düzleminde elde edilen kararlılık bölgesidir. Denge noktalarının kararlı olduğu alanlar:  $q_1 = 0.447$  için (pembe, sarı, mavi),  $q_1 = 10$  için (sarı, mavi),  $q_1 = 14$  için (mavi) renkli bölgelerdir.

Kararlılık bölgesinin mümkün olan en geniş sınırları Şekil 4.1’de çizilen denge bölgesinin sınır koordinatları kadardır. Çünkü kararlılık, denge noktaları için söz konusu olan bir özelliktir. O halde denilebilir ki denge noktalarının var olamayacağı bir bölgede, kararlı denge noktası da var olamaz. Bu ise Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 bölgelerinin, şekil olarak benzerlik gösterme sebebidir. Her kararlı denge noktası, denge bölgesinin içinde yer almaktadır fakat denge bölgesinde yer alan her denge noktası kararlı olmak zorunda değildir.

Bilindiği gibi sistemin denge noktası (4.1)  $q_1$  parametresini içermemektedir. Yani bu parametre denge noktasının var oluşuna etki etmemektedir. Fakat, kararlılık teoremindeki (3.1.1) ifadesinde yer almaktadır. Daha önce de belirttiğimiz gibi, bu durum  $q_1$  parametresinin var olan denge noktalarının kararlılığını belirlemekte etkin rol oynadığını göstermektedir. Bu sebeple  $q_1$  parametresinin farklı değerleri için kararlılık bölgesinin durumu incelenmiş ve renklerle ayırım yapılmıştır. Örneğin,  $q_1 = 10$  olarak alındığında sarı ve mavi bölgede bulunan denge noktaları kararlı, pembe bölgede bulunan denge noktaları ise kararsızdır.

- **Durum 2:**  $10 = L > P_{eq} > P_a = 8$  olması hali

**Denge Bölgesi Analizi:**  $P_{eq}$  değişkeni bu kez (8, 10) aralığında keyfi değerler almaktadır. Denge noktalarının varlığını inceleyen Sonuç (3.1.1)’in  $L > P_{eq} > P_a$  durumunun (b) şikkında

$$q_2 < -\frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

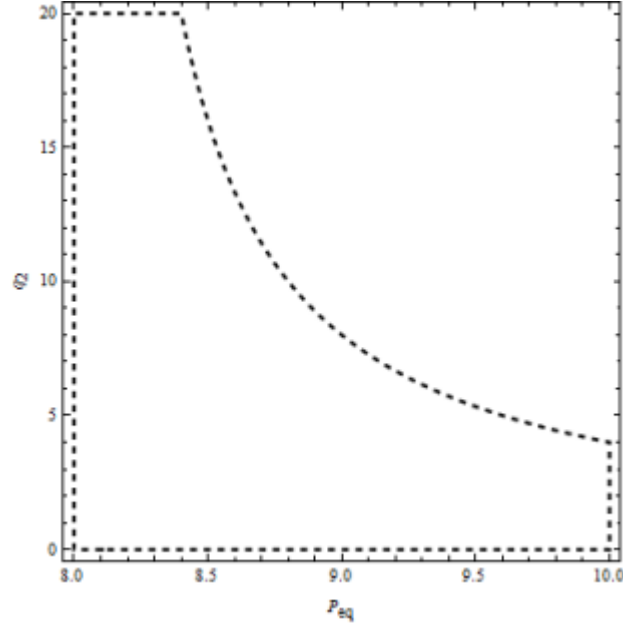
ifadesi verilmiş olup, değerler yerine yazıldığında

$$q_2 < -\frac{8}{8 - P_{eq}}$$

eşitsizliğine ulaşılmaktadır.



Bu eşitsizlik yardımıyla denge bölgesi  $(P_{eq}, q_2)$  ikilisine bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

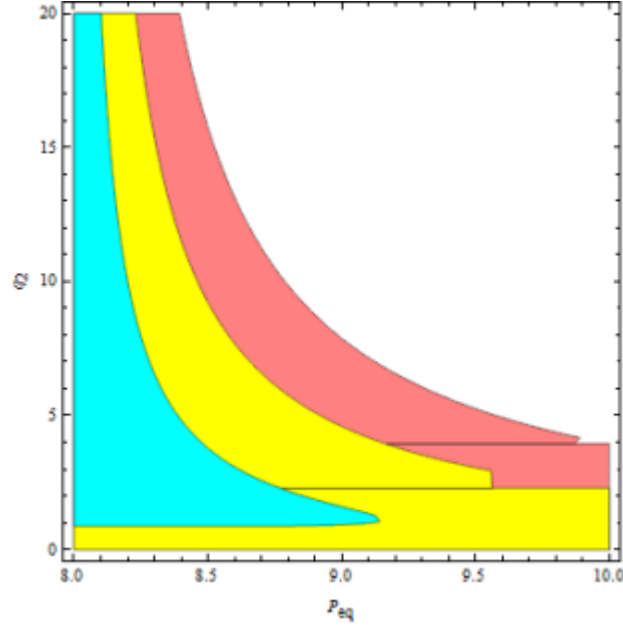


Şekil 4.3:  $L = 10$  ve  $P_a = 8$  olarak alındığında  $10 = L > P_{eq} > P_a = 8$  durumu için  $(P_{eq}, q_2)$  düzleminde elde edilen denge bölgesi

Kesik çizgili olarak çizilen sınırlar,  $10 = L > P_{eq} > P_a = 8$  durumunda denge noktalarının bulunabileceği bölgenin olabilecek en geniş sınırlarıdır.

**Kararlılık Bölgesi Analizi:** Kararlılık bölgesinin bulunmasında, bir önceki durum için bahsedilen lineerleştirme, Jakobiyen matris ve Routh-Hurwitz Kriterinin kullanımı aynı şekilde geçerlidir. Kararlılık Bölgesi  $(P_{eq}, q_2)$  düzleminde çizilmiş olup,  $q_1$  parametresinin bu bölgeye etkisini test edebilmek amacıyla sırasıyla,  $q_1 = 0.447, 10$  ve  $14$  olarak alınmıştır.

Böylelikle aşağıda verilen bölge elde edilmiştir.



Şekil 4.4:  $10 = L > P_{eq} > P_a = 8$  durumu için  $(P_{eq}, q_2)$  düzleminde elde edilen kararlılık bölgesidir. Denge noktalarının kararlı olduğu alanlar:  $q_1 = 0.447$  için (pembe, sarı, mavi),  $q_1 = 10$  için (sarı, mavi),  $q_1 = 14$  için (mavi) renkli bölgelerdir.

$q_1$  parametresi kararlılık teoreminde (3.1.1) yer almakta olduğundan kararlılığa olan etkisi verilen değerler yardımıyla incelenmiştir.  $q_1 = 0.447$  iken pembe, sarı ve mavi bölgede yer alan tüm denge noktaları kararlıdır.  $q_1 = 10$  olarak alındığında ise sarı ve mavi bölgeler kararlı fakat pembe bölge kararsız denge noktalarından oluşmaktadır.  $q_1 = 14$  durumunda ise yalnızca mavi bölgedeki denge noktaları kararlı olup geri kalan bölgelerdeki denge noktaları kararsızdır.

- **Durum 3:**  $L = P_{eq} = P_a = 10$  olması hali

Bu durum için de analizler ışığında ikili düzlemde benzer çizimler yapılabilir.

### 4.1.2 MA modelinin nümerik simülasyonu

Çağınalp tarafından yapılan "Nonlinear Price Evolution" başlıklı çalışmadan daha önce bahsetmiştik [3]. Bu çalışmada, arz ve talep fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi içeren piyasalarda, aşırı talep fonksiyonu kullanılarak elde edilen fiyat tahmin denkleminin yetersiz olduğu fikri ileri sürülmüştür. Buna kanıt olarak da aynı denge noktasında kesişen birden fazla arz ve talep fonksiyon grafiği bulunabileceği gösterilmiştir. Bu grafiklerden hangisinin daha doğru olduğunu bulabilmek için arz ve talep fonksiyonlarının birinci, ikinci ve daha yüksek mertebeden türevleri de bilinmelidir. Bu ihtiyacı karşılamak amacıyla [3] makalesinde yeni bir hisse senedi fiyat tahmin denklemi geliştirilmiştir. Daha sonraki yıllarda Merdan ve Alişen tarafından, [3] çalışmasında yer alan fiyat tahmin denklemi kullanılarak yeni bir hisse senedi fiyat tahmin modeli oluşturulmuştur [14]. Bu model [4] çalışmasında yer alan modelin iyileştirilmiş halidir.

3. bölümde bu modelin kararlılık analizini ayrıntılı şekilde incelemiştik. Burada ise özel nümerik değerler yardımıyla denge ve kararlılık bölgelerinin çizimini yapacağız.

- **Durum 1** :  $12 = P_a > P_{eq} > L = 10$  olması hali

**Denge Bölgesi Analizi:** Denge bölgesinin çizimi sırasında, denge noktalarının varlığı hakkında bilgi veren, Sonuç (3.1.2) de yer alan ifadeler kullanılacaktır. Sonuç (3.1.2) Durum 1 (b) şikkında

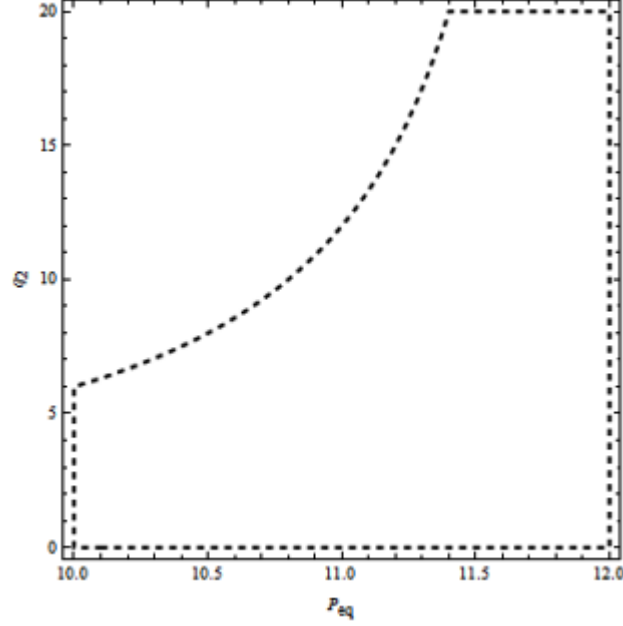
$$q_2 < \frac{P_a}{P_a - P_{eq}}$$

ifadesi yer almaktadır. Değerler yerine yazılırsa

$$q_2 < \frac{12}{12 - P_{eq}}$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitsizlik CB Modeli incelemesinin Durum 1 kısmındaki denge durumunda da aynı şekilde ifade edilmişti.

O halde çizilen denge bölgesi de aynı olacaktır.



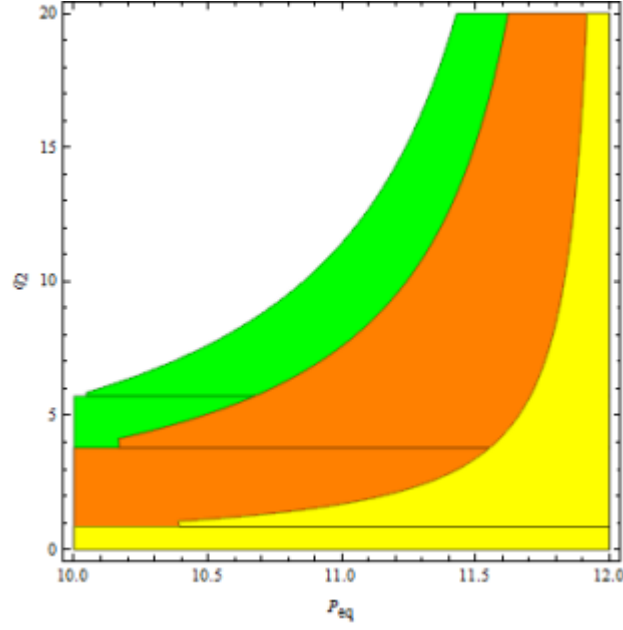
Şekil 4.5:  $12 = P_a > P_{eq} > L = 10$  durumu için  $(P_{eq}, q_2)$  ikilisi için elde edilen denge bölgesi

**Kararlılık Bölgesi Analizi:** [3] çalışmasını referans alarak elde edilen MA modeli için kararlılık analizlerini 3. bölümde ayrıntılı şekilde vermiştik. Bu analizleri yaparken öncelikle lineer olmayan (3.50) sistemi denge noktası civarında lineerleştirilmiştir. Sonrasında Jakobiyen matrisi yardımıyla karakteristik polinom aşağıdaki formuyla elde edilmiştir

$$\lambda(1 + \lambda)(\alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0) = 0. \quad (4.4)$$

Routh-Hurwitz Kriteri kullanılarak bu karakteristik polinomun kökleri olan özdeğerlerin reel kısımlarının işaretleri incelenmiştir. Sıfıra eşit olan özdeğer dışındaki özdeğerlerin reel kısımlarının negatif olabilmesi için parametrelerin bazı eşitsizlikleri sağlaması gerektiği görülmüş ve bu şekilde kararlılık teoremi (3.1.2) inşa edilmiştir.

Burada ise 3. Bölümde verilmiş olan kararlılık teoreminin şartları ve ifadeleri kullanılarak  $(P_{eq}, q_2)$  ikilisi için kararlılık bölgesi oluşturulacaktır.



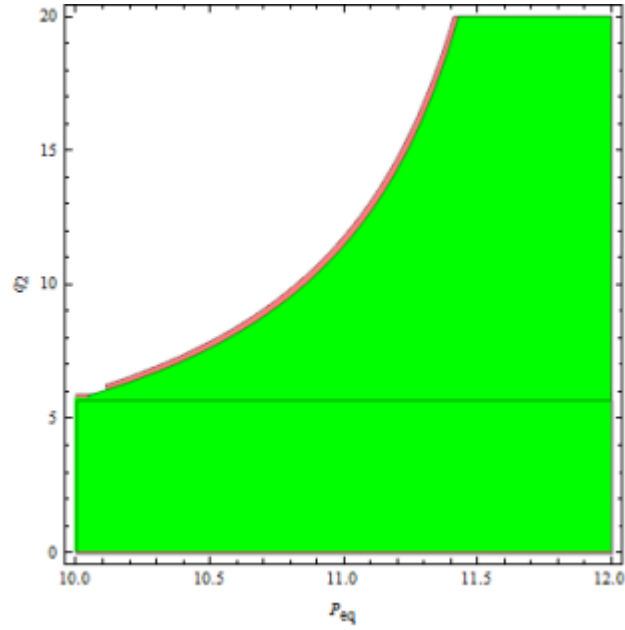
Şekil 4.6:  $12 = P_a > P_{eq} > L = 10$  durumu için  $(P_{eq}, q_2)$  düzleminde elde edilen kararlılık bölgesidir. Sistemde var olan denge noktalarının kararlı olduğu bölgeler;  $q_1 = 0.447$  için (yeşil, turuncu, sarı),  $q_1 = 3$  için (turuncu, sarı),  $q_1 = 4.9$  için (sarı) şeklindedir.

$q_1$  parametresinin denge noktalarının varlığına etkisi yokken, var olan denge noktalarının kararlılığını etkilediğini daha önceki kararlı bölge çizimlerinde söylemiştik. Burada da aynı durum söz konusudur. Çünkü denge noktalarının varlığını inceleyen Sonuç (3.1.2)'de bahsedilen ifadelerde  $q_1$  parametresi yer almamakta fakat modelin kararlılık teoremi (3.1.2) içerisindeki ifadelerde  $q_1$  parametresine rastlanmaktadır. Bu sebeple kararlılık bölgesi çizilirken  $q_1$  parametresinin etkisini ölçmek amacıyla sırasıyla  $q_1 = 0.447, 3$  ve  $4.9$  değerleri verilmiş ve her bir değer için çizilen kararlılık bölgesi yukarıda verilen şekilde oluşturulmuştur.

Kararlılık bölgesi çizimi ile ilgili yeteri kadar durum inceledik. Bu yüzden Durum 2 ( $10 = L > P_{eq} > P_a = 8$ ) ve Durum 3 ( $L = P_{eq} = P_a = 10$ ) için de benzer çizimler söz konusu olduğundan, bu çizimleri vermeye gerek duymuyoruz.

### 4.1.3 Karşılaştırma

MA modeli, CB modelinin geliştirilmiş halidir. Şayet piyasa verilerinden arz ve talebin türevleri bulunabilirse bu modelin daha iyi tahminler yaptığı düşünülmektedir. O halde bu model daha kesin bir kararlılık bölgesine sahip olmalıdır. Bu fikir ışığında modeller arasında bir karşılaştırma yapmak istiyoruz. Bu sebeple kararlılık bölgeleri çizdirilirken her iki model için de aynı parametrelere aynı değerler verildi.  $12 = P_a > P_{eq} > L = 10$  durumu için aşağıda verilen çizim elde edilmiştir.



Şekil 4.7:  $q_1 = 0.447$  değeri için iki farklı model için çizilen kararlılık bölgesidir. Altta yer alan pembe renkli bölge (CB) modeline, üstte yer alan yeşil bölge (MA) modeline aittir.

Görüldüğü üzere MA modeli, CB modeline göre daha dar bir kararlılık bölgesine sahiptir.

## 5. SONUÇ

Finansal piyasalardaki hisse senedi fiyatlarının matematiksel modellenmesi 1990'lı yıllarda yapılmaya başlanmıştır. Bu tez çalışmasının ilk bölümünde, tek bir yatırımcı grup içeren ve kapalı bir sistem için geliştirilmiş bir model olan [4] çalışmasının kararlılık analizi yapıldı. Piyasalardaki hisse senedine fiyat tahmini yapan bir matematiksel modelin kararlılık analizi yapılırken asıl amaç, sistem dengeye ulaştıktan sonra sistem içerisinde kararlı bir bölgenin varlığını araştırmaktır. Kararlı bir bölgenin varlığı ancak o bölgede bulunan denge noktalarının kararlı olmasıyla mümkündür. Bu bilgiler ışığında [4] çalışmasında yer alan matematiksel model incelendi. İncelemeler sırasındaki hesaplama kısımlarında Maple programı kullanıldı.

Öncelikle sistemin denge durumu göz önüne alındı ve denge noktası bulundu. Bu denge noktası parametre ve değişkenlerden oluşmaktadır. Parametrelere verilen her bir değer ve değişkenler için belirlenen her bir aralık için farklı bir denge noktası elde edilebilir yani sistemin sonsuz adette denge noktası vardır. Bizim elde ettiğimiz yani parametre ve değişkenlerden oluşan denge noktası genel bir formdur ve sistemde bir eğriyi temsil etmektedir. Kararlılık analizi yaparken öncelikle [4] çalışmasındaki lineer olmayan sistemi denge noktası civarında lineerleştirildi. Lineerleştirme sürecinin şartları yerine getirildikten sonra elde edilen Jakobiyen matrisinin özdeğerlerinin reel kısımları Routh-Hurwitz Kriteri yardımıyla analiz edildi. Bu analizler sonucunda ilk olarak sıfıra eşit olan bir özdeğer tespit edildi. Bu, sistemin asimptotik kararlı bir denge noktasına sahip olamayacağına kanıttır. Fakat diğer özdeğerlerin reel kısımlarının negatif olması koşuluyla, sistemdeki denge noktaları için Lyapunov anlamında kararlılık ihtimali vardır.

Bunu tespit etmek amacıyla diğer özdeğerler için ayrıntılı analizler yapıldı ve bu özdeğerlerin tümünün reel kısımlarını negatif yapacak şartlar belirlendi. Reel kısımların negatif olması için sağlanması gereken şartların tümü kararlılık teoremi olarak verildi. Böylece, teorem şartları gerçekleştiğinde sistemdeki denge noktaları Lyapunov anlamında kararlıdır denilebilir. Bu ise sistemde kararlı bir bölgenin var olduğu anlamına gelmektedir.

Kararlı bölgenin varlığı teorik olarak ispatlandıktan sonra, nümerik simülasyonlar kısmında bu bölge çizdirildi. Çizimler sırasında ilk olarak sistemdeki denge noktalarının bulunduğu denge bölgesi, ardından da parametrelere özel değerler verilerek sistemin kararlılık bölgesi çizdirildi. Bu çizimler için Wolfram Mathematica programı kullanılmıştır.

Tez çalışmasının ikinci kısmında [14] çalışmasında yer alan matematiksel modelin kararlılık analizi yapıldı. Bu model, sistemde arz ve talep fonksiyonları hakkında daha fazla bilgiye sahip olduğunda hisse senedine daha iyi fiyat tahmini yapılabilmektedir. Özellikle arz ve talebin türevinin piyasa verilerinden tahmin edilmesi durumunda hisse senedi fiyatına önceki modellerin verdiği tahminden daha iyi bir tahmin yapılabilmektedir.

Modelin kararlılık analizi sırasında bir önceki analizde uygulanan yöntemler aynı şekilde bu modele de uygulandı ve tüm bunlar neticesinde bir kararlılık teoremi elde edildi. Nümerik simülasyonlar kısmında, denge noktalarının sağladığı eşitsizlikler göz önünde bulundurularak bir denge bölgesi çizdirildi ve ardından kararlılık teoremindeki ifadeler kullanılarak ve parametrelere özel değerler verilerek bir kararlılık bölgesi çizdirildi.

Analizlerin ardından yapılan nümerik simülasyonlar kısmında bir kararlılık bölgesinin çizdirilebiliyor olması, bu sistemler için en azından bir adet kararlı bölgenin var olduğu anlamına gelmektedir.

Tezin ilk bölümünde incelenen [4] modeli için bir kararlılık bölgesi çizilebilmiş olup sistem için en azından bir tane kararlı bölge olduğu gösterilmiştir. [8] çalışmasında bu sistem topolojik olarak incelenmiş ve yapısal olarak kararsız olduğu söylenmiştir. Biz ise yaptığımız analitik incelemeler sonucunda bu sistem



için kararlı bir bölgenin var olduğunu gösterdik.

Son olarak, [14] çalışmasında yer alan model ile [4] çalışmasında incelenen model nümerik olarak karşılaştırıldı. Her iki model için de aynı nümerik değerler kullanılarak belli bir  $q_1$  değeri için kararlılık bölgeleri bölgeleri çizdirilip kıyaslandı.

# Kaynakça

- [1] Aizerman, M.A., Gantmacher, F.R., *Absolute Stability of Regulator Systems*, Holden Day, San Francisco, 1964.
- [2] Brigham, F.E., Gapenski, G.L., *Financial Management Theory and Practise*, *The Dreyden Press*, 66 , 1991.
- [3] Caginalp, G., Nonlinear price evolution, *Quarterly of Applied Mathematics*, 63 ,number 4 ,715–720, 2005.
- [4] Caginalp, G., Balenovich, D., Asset flow and momentum: Deterministic and stochastic equations, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 357 : 2119–2133, 1999.
- [5] Caginalp, G., DeSantis, M., Multi-group Asset Flow Equations and Stability, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*,16 ,number 1, 109–150, 2011.
- [6] Caginalp, G., Ermentrout, G.B., A kinetic thermodynamics approach to the psychology of fluctuations in financial markets, *Appl. Math. Lett*, 3 : 17–19, 1990.
- [7] Caginalp, G., Merdan, H., Asset price dynamics with heterogeneous groups, *Physica D*, 225 ,43–54, 2007.
- [8] Duran, A., Stability analysis of asset flow differential equations, *Applied Mathematics Letters*, 24.4: 471-477, 2011.
- [9] Edwards, R., Magee, J., *Technical Analysis of Stock Trends*, Sixth Ed, New York Institute of Finance, New York, 1992.

- [10] Gantmacher, F.R., *The Theory of Matrices*, Vol.2, Chelsea, New York, 1959.
- [11] Henderson, J.M., Quandt, R.E., *Microeconomic Theory, A Mathematical Approach*, McGraw-Hill, 1980.
- [12] Hurwitz, A., On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts. *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory* (R. Bellman and R. Kalaba, eds.), 65, 1964.
- [13] Jarrow, R., Protter, P., *A Short History of Stochastic Integration and Mathematical Finance the Early Years, 1880-1970*, Cornell University November 22, 2003.
- [14] Merdan, H., Alisen, M., A mathematical model for asset pricing, *Applied Mathematics and Computation*, 218,1449–1456, 2011.
- [15] Merdan, H., Alisen, M., Homojen Grupları İçeren Piyasalardaki Hisse Senedi Fiyatlarının Matematiksel Modellenmesi, Yüksek Lisans Tezi, 2010.
- [16] Merdan, H., Altıntaş, I., Farklı Yapıda Grupları İçeren Piyasalardaki Hisse Senedi Fiyatı Dinamiği, Yüksek Lisans Tezi, 2010.
- [17] Merdan, H., Cakmak, H., Likiditenin Hisse Senedi Fiyatlarına Etkisi, Yüksek Lisans Tezi, 2010.
- [18] Ozdil, T., Yılmaz, C., İstanbul menkul kıymetler borsası'nda sektör bazında işlem gören hisse senetlerinin alım-satım kararlarında en yüksek getirili stratejilerin belirlenmesi, *Yönetim ve Ekonomi*, 12 : 123–256, 2006.
- [19] Peixoto, M.M., Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, 1, 101–120, 1962.
- [20] Routh, E.J., *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*, London, Macmillan and co., 1877.
- [21] Strogatz, S.H., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Cambridge.
- [22] Watson, D.S., Getz, M., *Price Theory and its Uses*, 5th Edition, Univ. Press of America, 1981.

- [23] Wilmott, P., *Paul Wilmott introduces quantitative finance*, John Wiley and Sons, 2007.

# EKLER

## A. Terim Sözlüğü

### Türkçe terim

kararlılık  
opsiyon  
kapalı sistem  
aşırı talep fonksiyonu  
denge noktası  
çekici  
itici  
global çekici  
izole olmayan denge noktası  
denge bölgesi  
kararlılık bölgesi  
asimptotik kararlı  
yapısal olarak kararsız

### İngilizce Terim

stability  
option  
conserved system  
excess demand function  
equilibrium point  
attracting  
repelling  
global attracting  
non-isolated fixed point  
equilibrium region  
stability region  
asymptotic stable  
structurally unstable

# ÖZGEÇMİŞ

## Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : YÜCEL, Hande  
Uyruğu : T.C.  
Doğum tarihi ve yeri : 27.06.1989 Yozgat  
Medeni hali : Bekar  
Telefon : (0312)2924328  
Faks : (0312)2924121  
e-mail : hyucel@etu.edu.tr

## Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	ANKARA Üniversitesi	2011

## İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-2013	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

## Yabancı Dil

İngilizce (Çok iyi)