SİMETRİK FİBONACCİ MATRİSİ

LEYLA ÇETİNKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2013

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Necip CAMUŞCU
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

LEYLA ÇETİNKAYA tarafından hazırlanan SİMETRİK FİBONACCİ MATRİSİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Emrah KILIÇ
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Adnan TERCAN

Üye : Doç. Dr. Emrah KILIÇ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Zülfükar SAYGI

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Leyla ÇETİNKAYA

Üniversitesi	**:**	**TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Emrah KILIÇ**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans – Eylül 2013**

Leyla ÇETİNKAYA

SİMETRİK FİBONACCİ MATRİSİ

ÖZET

Bu tezde, Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ nin terimleri kullanılarak bir kombinatoryal matris tanımlanmıştır. Bu matrisin çeşitli lineer cebirsel özellikleri incelenmiştir. Bu özellikler; LU çarpanlaması, Cholesky çarpanlaması, tersi ve determinantıdır. Ayrıca bu matrisin spektiral yarıçapı için çeşitli matris normları hesaplanarak bunlar yardımı ile en iyi üst sınır verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Simetrik matris, Fibonacci ve Lucas sayıları, LU ve Cholesky çarpanlaması, determinant, spektiral yarıçap.

University	**:**	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	**:**	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	**:**	**Mathematics**
Supervisor	**:**	**Asc. Prof. Emrah KILIÇ**
Degree Awarded and Date	**:**	**M.Sc. – September 2013**

Leyla ÇETİNKAYA

A SYMMETRIC FIBONACCI MATRIX

ABSTRACT

In this thesis, with using terms of the Fibonacci sequence $\{F_n\}$, a new combinatorial matrix is defined. Some linear algebraic properties of this matrix are investigated. These features include LU factorization, Cholesky factorization, inverse and determinant. Also various matrix norms are calculated for helping us to find the best upper bound for the spectral radius of this matrix.

Keywords: Symmetric matrix, Fibonacci and Lucas numbers, LU and Cholesky factorization, determinant, spectral radius.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Emrah KILIÇ'a, TOBB ETÜ Matematik Bölümü hocalarıma, asistan arkadaşlarıma maddi ve manevi manada en büyük destekçim olan ve yardımlarını esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İçindekiler

Şekil Listesi

Bu çalışmada kullanılan bazı simge ve kısaltmaların açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
$\{U_n\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{V_n\}$	Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$\det A$	A matrisinin determinantı
$\rho(A)$	A matrisinin spektiral yarıçapı
$\Vert.\Vert_1$	ℓ_1 matris normu
$\Vert.\Vert_2$	ℓ_2 matris normu (Öklid normu)
$\vert\vert\vert.\vert\vert\vert_1$	Maksimum sütun toplam matris normu
$\vert\vert\vert.\vert\vert\vert_\infty$	Maksimum satır toplam matris normu
$\Vert.\Vert_\infty$	ℓ_∞ normu
$\Vert.\Vert_{\max}$	Maksimum norm

1. GİRİŞ

1.1 Fibonacci ve Lucas Sayıları

Fibonacci sayıları her $n \geq 0$ doğal sayısı için ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanır. Burada F_n; n. Fibonacci sayısı, $\{F_n\}$ ise elemanları Fibonacci sayılarından oluşan Fibonacci dizisidir.

Lucas sayıları her $n \geq 0$ doğal sayısı için ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada L_n; n. Lucas sayısı, $\{L_n\}$ ise elemanları Lucas sayılarından oluşan Lucas dizisidir.

Her $n \geq 2$ tam sayısı ve $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ için genelleştirilmiş Fibonacci $\{u_n\}$ dizisi; p sıfırdan farklı, pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$u_n = pu_{n-1} + u_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Genelleştirilmiş Fibonacci $\{u_n\}$ dizisinin bazı özel durumlarını göz önüne alalım.

Eğer $p = 1$ alınırsa $\{u_n\}$ dizisi Fibonacci $\{F_n\}$ dizisine indirgenir.

Eğer $p = 2$ alınırsa $\{u_n\}$ dizisi Pell $\{P_n\}$ dizisine indirgenir.

Benzer şekilde; her $n \geq 2$ tam sayısı, $v_0 = 2$ ve $v_1 = p$ başlangıç koşulları için genelleştirilmiş Lucas $\{v_n\}$ dizisi; p sıfırdan farklı pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$v_n = pv_{n-1} + v_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Genelleştirilmiş Lucas $\{v_n\}$ dizisinin bazı özel durumlarını göz önüne alalım.

Eğer $p = 1$ ve alınırsa $\{v_n\}$ dizisi Lucas $\{L_n\}$ dizisine indirgenir.

Eğer $p = 2$ ve alınırsa $\{v_n\}$ dizisi Pell-Lucas $\{Q_n\}$ dizisine indirgenir.

Birçok yazar Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren çeşitli formül aileleri elde etmiştir. Bunlardan bazılarını burada verelim.

Her $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned}
L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} \\
5F_n &= L_{n-1} + L_{n+1} \\
F_{2n} &= F_n L_n \\
F_{2n+1} &= F_{n+1} L_{n+1} - F_n L_n \\
\sum_{k=1}^{n} F_{2k} &= F_{2n} - 1 \\
\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} &= F_{2n} \\
\sum_{k=1}^{n} kF_k &= nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 F_k &= (n+1)^2 F_{n+2} - (2n+3) F_{n+4} + 2F_{n+6} - 8.
\end{aligned}$$

1.2 Matris Normları ve Spektiral Yarıçap

M_n; tüm n boyutlu karesel matrislerin kümesi olsun. $A, B \in M_n$ için

1. $|||A||| \geq 0$

2. $|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

3. $|||cA||| = |c| \ |||A||| \geq 0$ ($c \in \mathbb{C}$)

4. $|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$

5. $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$

şartlarını sağlayan $|||.||| : M_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna matris normu denir. Şimdi bilinen bazı matris normlarını hatırlatalım. $A = (a_{ij})$ n boyutlu bir matris olmak üzere

- ℓ_1 normu $||A_n||_1 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$,
- Öklid normu ya da ℓ_2 normu $||A_n||_2 = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,
- Maksimum sütun normu $|||A_n|||_\infty = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,
- Maksimum satır normu $|||A_n|||_1 = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,
- ℓ_∞ normu $||A_n||_\infty = n \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$

ile tanımlanır.

Bir $A_n \in M_n$ matrisinin spektiral yarıçapı $\rho(A_n)$ ile gösterilir ve

$$\rho(A_n) = \max \{|\lambda| : \lambda, A_n\text{'nın öz değeri}\}$$

ile tanımlanır.

Şimdi matris normları ile spektiral yarıçap arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 1.2.1. $|||.|||$ *herhangi bir matris normu ve* $A \in M_n$ *olmak üzere*

$$\rho(A) \leq |||A|||$$

dır.

1.3 Lineer Cebirden Bazı Sonuçlar

1.3.1 LU Ayrışımı

A keyfi bir kare matris olsun. Bu durumda L üst üçgensel, U ise alt üçgensel bir matris olmak üzere

$$A = L \cdot U$$

şeklindeki yazılabilir. Buna A'nın LU ayrışımı denir.

Örneğin 3-boyutlu bir A matrisinin LU ayrışımı,

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -6 & -2 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{29}{50} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 0 & -50 & 33 \\ 0 & 0 & \frac{557}{50} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

1.3.2 Cholesky Ayrışımı

A keyfi kare bir matrisi, K'da üst üçgensel bir matrisi göstersin. Bu durumda

$$A = K.K^T$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazılıma A'nın Cholesky ayrışımı denir.

Örneğin 3 boyutlu bir A matrisinin Cholesky ayrışımı;

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

1.3.3 LDU Ayrışımı

A keyfi bir kare matris olsun. L ve U sırasıyla birim üst üçgensel matrisi ve birim alt üçgensel matrisi (Köşegen üzerindeki elemanlar 1'dir.), D ise köşegen bir matrisi göstermek üzere;

$$A = LDU$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazılıma A'nın LDU ayrışımı denir.

Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 11 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{17}{37} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{37}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-35}{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{37} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.4 Test Matrisleri

Eğer keyfi bir kare matrisin tersi, determinantı, öz değerleri gibi karakteristik özelliklerinin yanısıra; simetrik, ortogonal, pozitif tanımlı olma gibi özelliklerden bazılarına sahipse bu tür matrisler test matrisleri olarak adlandırılır. Literatürde sıklıkla karşılaşılan bazı test matrisleri örneklerini verelim.

1.4.1 Cauchy Matrisi

Augustin Louis Cauchy tarafından tanımlanan Cauchy matrisi $C_{m\times n} = (c_{ij})$ bir dikdörtgen matris olup, elemanları

$$c_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j}; \quad x_i - y_j \neq 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{x_i\}$ ve $\{y_j\}$ injektif dizilerdir. (Bütün elemanları birbirinden farklıdır.)

Her $n \geq 1$ için Cauchy matrisinin determinantı

$$\det(C_n) = \frac{\prod_{i=2}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}(x_i - x_j)(y_j - y_i)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i - y_j)}$$

ile verilir. ($\{x_i\}$ ve $\{y_j\}$ injektif diziler olduğundan, bu determinant hiç bir zaman sıfır olmayacaktır, dolayısıyla kare Cauchy matrislerinin her zaman tersi mevcuttur.)

1.4.2 Hilbert Matrisi

Hilbert matrisi $H_n = (h_{ij})$;

$$h_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$$

ile tanımlanır. Bu matris 1894 yılında Hilbert tarafından tanımlanmıştır. Eğer $\{x_i\}$ ve $\{y_j\}$ $x_i - y_j = i + j - 1$ olacak şekilde seçilirse, Cauchy matrisi Hilbert matrisine dönüşür.

Hilbert matrisleri simetrik ve pozitif tanımlı matrislerdir.

Örneğin;

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Her $n \geq 1$ için n-boyutlu Hilbert matrisinin determinantının değeri

$$\det(H_n) = \frac{D_n^4}{D_{2n}}$$

ile verilir. Burada

$$D_n = \prod_{t=1}^{n-1} t!$$

dir.

(H_n^{-1}); n-boyutlu Hilbert matrisinin tersini göstermek üzere

$$\left(H_n^{-1}\right)_{ij} = (-1)^{i+j}(i+j-1)\binom{n+i-1}{n-j}\binom{n+j-1}{n-i}\binom{i+j-2}{i-1}^2$$

dir.

1.4.3 Filbert Matrisi

Her $n \geq 1$ için Filbert matrisi $F_n = (f_{ij})$ ile gösterilir ve

$$f_{ij} = \frac{1}{F_{i+j-1}}$$

ile tanımlanır. Burada F_n, n. Fibonacci sayısıdır. Örneğin; $n=5$ için

$$F_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{13} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{13} & \frac{1}{21} \\ \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{13} & \frac{1}{21} & \frac{1}{34} \end{bmatrix}.$$

Filbert matrisinin tersini (F_n^{-1}) ile gösterirsek,

$$\left(F_n^{-1}\right)_{ij} = (-1)^{e(n,i,j)} \begin{Bmatrix} n+i-j \\ n-j \end{Bmatrix}_F \begin{Bmatrix} n+j-1 \\ n-i \end{Bmatrix}_F \begin{Bmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{Bmatrix}_F^2$$

şeklindedir. Burada

$$e\left(n,i,j\right) = n\left(i+j+1\right) + \binom{i}{2} + \binom{j}{2} + 1$$

ile tanımlanır. $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_F$ ise Fibonomial katsayıyı gösterir ve

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_F = \prod_{i=1}^{k} \frac{F_{n-i+1}}{F_i}$$

ile tanımlanır.

Örneğin $n = 5$ için

$$\left(F_5^{-1}\right)_{ij} = \begin{bmatrix} 25 & 600 & -7800 & -27\,300 & 61\,880 \\ 600 & 7200 & -124\,800 & -393\,120 & 928\,200 \\ -7800 & -124\,800 & 1946\,880 & 6388\,200 & -14\,851\,200 \\ -27\,300 & -393\,120 & 6388\,200 & 20\,638\,800 & -48\,266\,400 \\ 61\,880 & 928\,200 & -14\,851\,200 & -48\,266\,400 & 112\,621\,600 \end{bmatrix}.$$

1.4.4 Lehmer Matrisi

Her $n \geq 1$ için Lehmer matrisi; $G_n = (g_{ij})$ ile gösterilir ve elemanları

$$g_{ij} = \frac{\min(i,j)}{\max(i,j)}$$

şeklinde tanımlanır.

Lehmer matrisi simetrik ve pozitif tanımlıdır.

Örneğin $n = 5$ için

$$G_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{4} & 2 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Lehmer matrisinin determinantı

$$\det\left(G_n\right) = \frac{(2n)!}{2^n\left(n!\right)^3}$$

ile verilir.

G_n^{-1}; n-boyutlu Lehmer matrisinin tersini göstermek üzere

$$\left(G_n^{-1}\right)_{ij} = \begin{cases} \frac{4i^3}{4i^2-1} & i = j < n, \\ \frac{i^2}{2i-1} & i = j = n, \\ -\frac{i(i+1)}{2i+1} & |i-j| = 1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

1.4.5 Dizisel Lehmer Matrisi

Dizisel Lehmer matrisi; $Y_n = (y_{ij})$ ile gösterilir ve

$$y_{ij} = \frac{\min\left\{u_{i+1}, u_{j+1}\right\}}{\max\left\{u_{i+1}, u_{j+1}\right\}} = \begin{cases} \frac{u_{i+1}}{u_{j+1}} & j \geq i \text{ ise,} \\ \frac{u_{j+1}}{u_{i+1}} & i > j \text{ ise,} \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanır. Burada $\{u_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisidir.

Örneğin,

$$Y_5=\begin{bmatrix} 1 & \frac{u_2}{u_3} & \frac{u_2}{u_4} & \frac{u_2}{u_5} & \frac{u_2}{u_6} \\ \frac{u_2}{u_3} & 1 & \frac{u_3}{u_4} & \frac{u_3}{u_5} & \frac{u_3}{u_6} \\ \frac{u_2}{u_4} & \frac{u_3}{u_4} & 1 & \frac{u_4}{u_5} & \frac{u_4}{u_6} \\ \frac{u_2}{u_5} & \frac{u_3}{u_5} & \frac{u_4}{u_5} & 1 & \frac{u_5}{u_6} \\ \frac{u_2}{u_6} & \frac{u_3}{u_6} & \frac{u_4}{u_6} & \frac{u_5}{u_6} & 1 \end{bmatrix}.$$

Her $n \geq 1$ için n-boyutlu dizisel Lehmer matrisinin determinantı

$$\det\left(Y_n\right)=\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{u_{i+1}^2-u_i^2}{u_{i+1}^2}\right)$$

formülü ile verilir.

Her $n \geq 1$ için Y_n^{-1} ile dizisel Lehmer matrisinin tersini gösterelim. Bu durumda;

$(Y_n^{-1})_{11}=\frac{u_3^2}{u_3^2-u_2^2}$, $(Y_n^{-1})_{nn}=\frac{u_{n+1}^2}{u_{n+1}^2-u_n^2}$ ve

$$\left(Y_n^{-1}\right)_{ij}=\begin{cases} \frac{u_{i+1}u_{i+2}}{u_{i+1}^2-u_{i+2}^2} & j=i+1 \text{ ve } 1\leq i\leq n-1, \\ \frac{u_{i+1}^2\left(u_{i+2}^2-u_i^2\right)}{\left(u_{i+1}^2-u_i^2\right)\left(u_{i+2}^2-u_{i+1}^2\right)} & i=j \text{ ve } 2\leq i\leq n-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

ile belirlidir.

Literatürde n boyutlu simetrik bir $M_n=(m_{ij})$ matrisi ;

$$m_{ij}=\begin{cases} j-i+1 & j>i \text{ ise}, \\ i-j+1 & i\geq j \text{ ise}, \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Örneğin,

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Görüldüğü üzere M_n matrisinin bütün elemanları doğal sayılardan oluşmaktadır. Biz bu tezdeki çalışmamızda M_n matrisine benzer şekilde, Fibonacci sayılarını kullanarak simetrik bir A_n matrisi inşa ettik. İlk olarak bu simetrik matrisin tanımını vereceğiz. Daha sonra ise bu matrisin cebirsel özelliklerini inceleyecek ve matris analizlerini yapacağız.

2. SİMETRİK FİBONACCİ MATRİSİ ve CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Her $n \geq 1$ için $A_n = (a_{ij})$; elemanları

$$a_{ij} = \begin{cases} F_{j-i+2} & j \geq i \text{ ise}, \\ F_{i-j+2} & i > j \text{ ise}, \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanan simetrik Fibonacci matrisidir. Burada F_n, n. Fibonacci sayısını göstermektedir.

Bu durumda açıkca A_n matrisi

$$A_n = \begin{bmatrix} F_2 & F_3 & F_4 & \ldots & F_{n+1} \\ F_3 & F_2 & F_3 & \ldots & F_n \\ F_4 & F_3 & F_2 & \cdots & F_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n+1} & F_n & F_{n-1} & \cdots & F_2 \end{bmatrix}$$

formundadır.

Örneğin;

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1 LU Çarpanlaması

İlk olarak A_n matrisinin **LU** çarpanlamasını elde etmeye çalışacağız.

Bunun için n boyutlu **L** ve **U** matrislerini tanımlayacağız. Her $n \geq 1$ için n boyutlu birim alt üçgen $\mathbf{L} = (l_{ij})$ kare matrisi

$$l_{ij} = \begin{cases} F_{i+1} & j = 1 \text{ ise}, \\ \frac{F_{i-j}L_{2j-1}+F_{2j}F_{i-j-1}}{F_{2j}} & i \geq j \text{ ise}, \\ 0 & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada F_n; n. Fibonacci sayısını, L_n ise n. Lucas sayısını göstermektedir.

Açıkca $\mathbf{L}$ matrisi;

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ F_3 & 1 & & & & & \\ F_4 & \frac{L_3}{F_4} & 1 & & & & \\ F_5 & \frac{L_3+F_4}{F_4} & \frac{L_5}{F_6} & 1 & & & \\ F_6 & \frac{2L_3+F_4}{F_4} & \frac{L_5+F_6}{F_6} & \frac{L_7}{F_8} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ F_{n+1} & \frac{F_{n-2}L_3+F_{n-3}F_4}{F_4} & \frac{F_{n-3}L_5+F_{n-4}F_6}{F_6} & \frac{F_{n-4}L_7+F_{n-5}F_8}{F_8} & \cdots & \frac{L_{2n-3}}{F_{2n-2}} & 1 \end{bmatrix}$$

formundadır.

Her $n \geq 1$ için n boyutlu üst üçgen $\mathbf{U} = (u_{ij})$ kare matrisi

$$u_{ij} = \begin{cases} F_{j+1} & i = 1 \text{ ise}, \\ -\dfrac{F_{j-i-1}F_{2i} + F_{j-i}L_{2i-1}}{F_{2i-2}} & j \geq i \text{ ise}, \\ 0 & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Açıkca **U** matrisi;

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & \dots & F_{n+1} \\ & -\frac{F_4}{F_2} & -\frac{L_3}{F_2} & -\frac{F_4+L_3}{F_2} & \dots & -\frac{F_{n-3}F_{2n}+F_{n-2}L_{2n-1}}{F_{2n-2}} \\ & & -\frac{F_6}{F_4} & -\frac{L_5}{F_4} & \dots & -\frac{F_{n-4}F_{2n}+F_{n-3}L_{2n-1}}{F_{2n-2}} \\ & & & -\frac{F_8}{F_6} & \dots & -\frac{F_{n-5}F_{2n}+F_{n-4}L_{2n-1}}{F_{2n-2}} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & -\frac{F_{2n}}{F_{2n-2}} \end{bmatrix}$$

formundadır.

Örneğin $n = 5$ için **L** ve **U** matrisleri

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \frac{7}{3} & \frac{11}{8} & 1 & 0 \\ 8 & \frac{11}{3} & \frac{19}{8} & \frac{29}{21} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{8} & -\frac{29}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{55}{21} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi A_n matrisi için elde ettiğimiz ilk sonucu vereceğiz.

Teorem 2.1.1. *Her $n \geq 1$ için, A_n matrisinin $\boldsymbol{LU}$ çarpanlaması*

$$A_n = \boldsymbol{LU}$$

şeklindedir. Burada $\boldsymbol{L}$ ve $\boldsymbol{U}$ matrisleri yukarda tanımlandığı gibidir.

Kanıt. Bu ispatı üç kısımda inceleyeceğiz.

1. Durum: Birinci durum $j \geq i$ olması durumudur.

Matris çarpımından,

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{n} l_{im} u_{mj}$$

olduğunu göstermeliyiz.

L ve **U** matrislerinin tanımından, $j \geq i$ için bu toplam

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{i} l_{im} u_{mj}$$

olur. Diğer yandan A_n matrisi;

$$a_{ij} = \begin{cases} F_{j-i+2} & j \geq i \text{ ise,} \\ F_{i-j+2} & i > j \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olduğundan,

$j \geq i$ için

$$\sum_{m=1}^{i} l_{im} u_{mj} = F_{j-i+2}$$

olduğunu göstermeliyiz.

L ve **U** matrislerinin tanımından $\sum\limits_{m=1}^{i} l_{im} u_{mj}$ toplamını

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{i} l_{im} u_{mj} &= F_{i+1} F_{j+1} \\ &\quad - \sum_{m=2}^{i} \left(\frac{F_{i-m} L_{2m-1} + F_{2m} F_{i-m-1}}{F_{2m}} \right) \left(\frac{F_{j-m-1} F_{2m} + F_{j-m} L_{2m-1}}{F_{2m-2}} \right) \end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Daha sonra $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ özdeşliğini kullanırsak,

$$\sum_{m=1}^{i} l_{im} u_{mj} = F_{i+1} F_{j+1} - \sum_{m=2}^{i} \left(F_{i-m+1} F_{2m} + F_{i-m} F_{2m-2} \right) B\left(j, m\right)$$

olup, burada $B\left(j,m\right)=\frac{F_{j-m+1}F_{2m}+F_{j-m}F_{2m-2}}{F_{2m}F_{2m-2}}$.

İddiamızı ispatlamak için i üzerinden tümevarım yöntemi kullanacağız.

$i=1$ için, $\sum\limits_{m=1}^{1}l_{1m}u_{m1}=l_{11}u_{11}=F_2F_2=1$ olup iddiamız gerçeklenir.

Şimdi iddiamızın i için gerçeklendiğini kabül edelim. İddiamızın $i+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{i+1}l_{im}u_{mj}\\
=\;& F_{i+2}F_{j+1}-\sum_{m=2}^{i+1}\left(F_{i-m+2}F_{2m}+F_{i-m+1}F_{2m-2}\right)B\left(j,m\right)\\
=\;& F_{i+2}F_{j+1}-\sum_{m=2}^{i}\left(F_{i-m+2}F_{2m}+F_{i-m+1}F_{2m-2}\right)B\left(j,m\right)\\
& -F_{2i+2}B\left(j,i+1\right)\\
=\;& F_{i+2}F_{j+1}-\sum_{m=2}^{i}\left(\left(F_{i-m+1}+F_{i-m}\right)F_{2m}+\left(F_{i-m}+F_{i-m-1}\right)F_{2m-2}\right)B\left(j,m\right)\\
& -F_{2i+2}B\left(j,i+1\right)\\
=\;& F_{i+2}F_{j+1}-\sum_{m=2}^{i}\left(F_{i-m+1}F_{2m}+F_{i-m}F_{2m-2}\right)B\left(j,m\right)\\
& -\sum_{m=2}^{i}\left(F_{i-m}F_{2m}+F_{i-m-1}F_{2m-2}\right)B\left(j,m\right)-F_{2i+2}B\left(j,i+1\right)\\
=\;& F_{i+2}F_{j+1}-\sum_{m=2}^{i}A\left(i,m\right)B\left(j,m\right)-\sum_{m=2}^{i}A\left(i-1,m\right)B\left(j,m\right)-F_{2i+2}B\left(j,i+1\right)
\end{aligned}$$

olup, burada $A\left(i,m\right)=F_{i-m+1}F_{2m}+F_{i-m}F_{2m-2}$ ve $B\left(i,j\right)$ daha önce tanımlandığı gibidir.

Elde ettiğimiz son eşitlikte, ikinci toplamın son terimini ayırıp, tümevarım hipotezinin i ve $i-1$ için gerçeklendiğini göz önünde bulundurursak, eşitliğimiz

$$
\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{i+1} l_{im} u_{mj} \\
= \;& F_{i+2}F_{j+1} - \sum_{m=2}^{i} A(i,m)\,B(j,m) - \sum_{m=2}^{i-1} A(i-1,m)\,B(j,m) \\
& -A(i-1,i)\,B(j,i) - F_{2i+2}B(j,i+1) \\
= \;& F_{i+2}F_{j+1} - F_{i+1}F_{j+1} + F_{j-i+2} - F_iF_{j+1} + F_{j-i+3} \\
& -F_{2i-2}B(j,i) - F_{2i+2}B(j,i+1) \\
= \;& F_{i+2}F_{j+1} - F_{i+2}F_{j+1} + F_{j-i+4} - F_{2i-2}B(j,i) - F_{2i+2}B(j,i+1) \\
= \;& F_{j-i+4} - F_{2i-2}B(j,i) - F_{2i+2}B(j,i+1)
\end{aligned}
$$

halini alır.

$B(j,i)$'nin tanımını kullanarak $B(j,i+1)$ yerine yazdıktan sonra, Fibonacci dizisinin indirgeme bağıntısınıdan yararlanarak bazı düzenlemeler yaptığımızda yukarıdaki son eşitlik

$$
\begin{aligned}
= \;& F_{j-i+4} - F_{2i-2}\frac{F_{j-i+1}F_{2i} + F_{j-i}F_{2i-2}}{F_{2i}F_{2i-2}} - F_{2i+2}\frac{F_{j-i}F_{2i+2} + F_{j-i-1}F_{2i}}{F_{2i}F_{2i+2}} \\
= \;& F_{j-i+4} - \frac{F_{j-i+1}F_{2i} + F_{j-i}F_{2i-2} + F_{j-i}F_{2i+2} + F_{j-i-1}F_{2i}}{F_{2i}} \\
= \;& F_{j-i+4} - \frac{\left(F_{j-i} + F_{j-i-1}\right)F_{2i} + F_{j-i}F_{2i-2} + F_{j-i}F_{2i+2} + F_{j-i-1}F_{2i}}{F_{2i}} \\
= \;& F_{j-i+4} - \frac{2F_{j-i-1}F_{2i} + F_{j-i}\left(F_{2i} + F_{2i-2} + F_{2i+2}\right)}{F_{2i}} \\
= \;& F_{j-i+4} - \frac{2F_{j-i-1}F_{2i} + F_{j-i}\left(F_{2i} + \left(F_{2i} - F_{2i-1}\right) + \left(F_{2i+1} + F_{2i}\right)\right)}{F_{2i}} \\
= \;& F_{j-i+4} - \frac{2F_{j-i-1}F_{2i} + 4F_{j-i}F_{2i}}{F_{2i}} \\
= \;& F_{j-i+4} - 2F_{j-i-1}F_{2i} - 4F_{j-i}
\end{aligned}
$$

şeklini alır.

Son olarak,

$$\begin{aligned}
F_{j-i+4} - 2F_{j-i-1}F_{2i} - 4F_{j-i} &= (F_{j-i+3} + F_{j-i+2}) - 2F_{j-i-1}F_{2i} - 4F_{j-i} \\
&= (F_{j-i+2} + 2F_{j-i+1} + F_{j-i}) - 2F_{j-i-1}F_{2i} - 4F_{j-i} \\
&= (F_{j-i+1} + 2F_{j-i-1} + +F_{j-i}) - 2F_{j-i-1}F_{2i} - 4F_{j-i} \\
&= F_{j-i+1}
\end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir ve bu da ispatı tamamlar. □

2. **Durum:** İkinci durum $i > j$ olması durumudur. Bu durumun ispatı, $j \geq i$ haline benzer bir şekilde yapılabilir.

2.2 Cholesky Çarpanlaması

Şimdi A_n matrisinin Cholesky çarpanlamasını elde edeceğiz.

Bunun için n boyutlu bir $\mathbf{K}$ alt üçgen matrisini tanımlayacağız. Kompleks birim $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ olmak üzere, her $n \geq 1$ için alt üçgen $\mathbf{K} = (k_{ij})$ matrisi

$$k_{ij} = \begin{cases} F_{i+1} & j = 1 \text{ ise}, \\ \frac{\mathbf{i}(F_{i-j-1}F_{2j} + F_{i-j}L_{2j-1})}{\sqrt{F_{2j-2}F_{2j}}} & i \geq j \text{ ise}, \\ 0 & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanır.

Açıkça $\mathbf{K}$ matrisi,

$$\begin{bmatrix} F_2 & & & & & 0 \\ & & & & & \\ F_3 & \mathbf{i}\frac{F_{-1}F_4+F_0L_3}{\sqrt{F_2}\sqrt{F_4}} & & & & \\ & & & & & \\ F_4 & \mathbf{i}\frac{F_0F_4+F_1L_3}{\sqrt{F_2}\sqrt{F_4}} & \mathbf{i}\frac{F_{-1}F_6+F_0L_5}{\sqrt{F_4}\sqrt{F_6}} & & & \\ & & & & & \\ F_5 & \mathbf{i}\frac{F_1F_4+F_2L_3}{\sqrt{F_2}\sqrt{F_4}} & \mathbf{i}\frac{F_0F_6+F_1L_5}{\sqrt{F_4}\sqrt{F_6}} & \mathbf{i}\frac{F_{-1}F_8+F_0L_7}{\sqrt{F_6}\sqrt{F_8}} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ F_{n+1} & \mathbf{i}\frac{F_{n-3}F_4+F_{n-2}L_3}{\sqrt{F_2}\sqrt{F_4}} & \mathbf{i}\frac{F_{n-4}F_6+F_{n-3}L_5}{\sqrt{F_4}\sqrt{F_6}} & \mathbf{i}\frac{F_{n-5}F_8+F_{n-4}L_7}{\sqrt{F_6}\sqrt{F_8}} & \dots & \mathbf{i}\frac{F_{-1}F_{2n}+F_0L_{2n-1}}{\sqrt{F_{2n-2}}\sqrt{F_{2n}}} \end{bmatrix}$$

formundadır.

Teorem 2.2.1. *Her $n \geq 1$ için, A_n matrisinin Cholesky çarpanlaması*

$$A_n = \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^T$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{K}^T = (\hat{k}_{ij})$ yukarda tanımlanan $\boldsymbol{K}$ matrisinin transpozunu göstermektedir.

Kanıt. Bu ispatı iki kısımda inceleyeceğiz.

1. **Durum:** Birinci durum $i \geq j$ olması durumudur.

Matris çarpımından,

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{n} k_{im}\hat{k}_{mj}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\mathbf{K}$ ve $\mathbf{K}^T$ matrislerinin tanımından, $i \geq j$ için bu toplam

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{j} k_{im}\hat{k}_{mj}$$

şeklini alır. Diğer yandan A_n matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} F_{j-i+2} & j \geq i \text{ ise,} \\ F_{i-j+2} & i > j \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olduğundan,

$i \geq j$ için

$$\sum_{m=1}^{j} k_{im}\hat{k}_{mj} = F_{i-j+2}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\mathbf{K}$ ve $\mathbf{K}^T$ matrislerinin tanımından

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{j} k_{im}k_{jm} &= F_{i+1}F_{j+1} \\ &\quad + \sum_{m=2}^{j} \frac{\mathbf{i}\left(F_{i-m-1}F_{2m} + F_{i-m}L_{2m-1}\right)}{\sqrt{F_{2m-2}F_{2m}}} \frac{\mathbf{i}\left(F_{j-m-1}F_{2m} + F_{j-m}L_{2m-1}\right)}{\sqrt{F_{2m-2}F_{2m}}} \end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Burada $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ özdeşliğini kullanırsak

$$\sum_{m=1}^{j} k_{im}k_{jm} = F_{i+1}F_{j+1} - \sum_{m=2}^{j} \left(F_{j-m+1}F_{2m} + F_{j-m}F_{2m-2}\right) C\left(i,m\right)$$

olup, burada $C\left(i,m\right) = \frac{F_{i-m+1}F_{2m}+F_{i-m}F_{2m-2}}{F_{2m-2}F_{2m}}$.

İddiamızı ispatlamak için j üzerinden tümevarım yöntemini kullanacağız.

$j = 1$ için $\sum\limits_{m=1}^{1} k_{im}k_{1m} = k_{i1}k_{11} = F_{i+1}F_2 = F_{i+1}$ olup iddiamız gerçeklenir.

Şimdi iddiamızın j için gerçeklendiğini kabül edelim. İddiamızın $j+1$ içinde doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{j+1} k_{im}k_{jm}\\
= \;& F_{i+1}F_{j+2}-\sum_{m=2}^{j} D(j,m)\,C(i,m)-\sum_{m=2}^{j-1} D(j-1,m)\,C(i,m)-F_{2j-2}C(i,j)\\
& -F_{2j+2}C(i,j+1)\\
= \;& F_{i+1}F_{j+2}-(F_{i+1}F_{j+1}-F_{i-j+2})-(F_{i+1}F_{j}-F_{i-j+3})-F_{2j-2}C(i,j)\\
& -F_{2j+2}C(i,j+1)\\
= \;& F_{i+1}F_{j+2}+F_{i-j+4}-F_{i+1}F_{j+2}-F_{2j-2}C(i,j)-F_{2j+2}C(i,j+1)\\
= \;& F_{i-j+4}-F_{2j-2}C(i,j)-F_{2j+2}C(i,j+1)\,.
\end{aligned}$$

Burada $D(j,m)=F_{j-m+1}F_{2m}+F_{j-m}F_{2m-2}$ ve $C(i,m)$ daha önce tanımlandığı gibidir.

Elde ettiğimiz son eşitlikte ikinci toplamın son terimini ayırıp, tümevarım hipotezinin j ve $j-1$ için gerçeklendiğini göz önünde bulundurursak, eşitliğimiz

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{j+1} k_{im}k_{jm}\\
= \;& F_{i+1}F_{j+2}-\sum_{m=2}^{j} D(j,m)\,C(i,m)-\sum_{m=2}^{j-1} D(j-1,m)\,C(i,m)-F_{2j-2}C(i,j)\\
& -F_{2j+2}C(i,j+1)\\
= \;& F_{i+1}F_{j+2}-(F_{i+1}F_{j+1}-F_{i-j+2})-(F_{i+1}F_{j}-F_{i-j+3})-F_{2j-2}C(i,j)\\
& -F_{2j+2}C(i,j+1)\\
= \;& F_{i+1}F_{j+2}+F_{i-j+4}-F_{i+1}F_{j+2}-F_{2j-2}C(i,j)-F_{2j+2}C(i,j+1)\\
= \;& F_{i-j+4}-F_{2j-2}C(i,j)-F_{2j+2}C(i,j+1)
\end{aligned}$$

halini alır.

Son eşitlikte, $C(i,j)$'nin tanımını kullanıp $C(i,j+1)$'i yerine yazdıktan sonra, Fibonacci dizisinin indirgeme bağıntısından yararlanarak bazı düzenlemeler yaptığımızda

$$\begin{aligned}
&= F_{i-j+4} - F_{2j-2}\frac{F_{i-j+1}F_{2j} + F_{i-j}F_{2j-2}}{F_{2j}F_{2j-2}} - F_{2j+2}\frac{F_{i-j}F_{2j+2} + F_{i-j-1}F_{2j}}{F_{2j}F_{2j+2}} \\
&= F_{i-j+4} - \frac{F_{i-j+1}F_{2j} + F_{i-j}F_{2j-2} + F_{i-j}F_{2j+2} + F_{i-j-1}F_{2j}}{F_{2j}} \\
&= F_{i-j+4} - \frac{\left(F_{i-j} + F_{i-j-1}\right)F_{2j} + F_{i-j}F_{2j-2} + F_{i-j}F_{2j+2} + F_{i-j-1}F_{2j}}{F_{2j}} \\
&= F_{i-j+4} - \frac{2F_{i-j-1}F_{2j} + F_{i-j}\left(F_{2j} + F_{2j-2} + F_{2j+2}\right)}{F_{2j}} \\
&= F_{i-j+4} - \frac{2F_{i-j-1}F_{2j} + F_{i-j}\left(F_{2j} + \left(F_{2j} - F_{2j-1}\right) + \left(F_{2j+1} + F_{2j}\right)\right)}{F_{2j}} \\
&= F_{i-j+4} - \frac{2F_{i-j-1}F_{2j} + 4F_{i-j}F_{2j}}{F_{2j}} \\
&= F_{i-j+4} - 2F_{i-j-1}F_{2j} - 4F_{i-j}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Son olarak

$$\begin{aligned}
F_{i-j+4} - 2F_{i-j-1}F_{2j} - 4F_{i-j} &= \left(F_{i-j+3} + F_{i-j+2}\right) - 2F_{i-j-1}F_{2j} - 4F_{i-j} \\
&= \left(F_{i-j+2} + 2F_{i-j+1} + F_{i-j}\right) - 2F_{i-j-1}F_{2j} - 4F_{i-j} \\
&= \left(F_{i-j+1} + 2F_{i-j-1} + F_{i-j}\right) - 2F_{i-j-1}F_{2j} - 4F_{i-j} \\
&= F_{i-j+1}
\end{aligned}$$

□

eşitliği gerçeklenir ve bu da ispatı tamamlar.

2. **Durum:** İkinci durum $j > i$ olması durumudur. Bu durumun ispatı, $i \geq j$ durumuna benzer bir şekilde yapılabilir.

Örnek olarak $n = 4$ için matrisimizin Cholesky çarpanlaması

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \\ 2 & \mathbf{i}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \\ 3 & \frac{4}{3}\mathbf{i}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\mathbf{i}\sqrt{6} & 0 \\ \\ 5 & \frac{7}{3}\mathbf{i}\sqrt{3} & \frac{11}{12}\mathbf{i}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\mathbf{i}\sqrt{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \\ 0 & \mathbf{i}\sqrt{3} & \frac{4}{3}\mathbf{i}\sqrt{3} & \frac{7}{3}\mathbf{i}\sqrt{3} \\ \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\mathbf{i}\sqrt{6} & \frac{11}{12}\mathbf{i}\sqrt{6} \\ \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\mathbf{i}\sqrt{42} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

2.3 A_n Matrisinin Tersi

Şimdi A_n matrisinin tersi için kapalı bir form elde etmeye çalışacağız. Bunu yapmak için A_n matrisnin **LU** çarpanlamasından yararlanacağız. Bu çarpanlama

$$A_n = \mathbf{LU}$$

formunda olduğundan, bu matris eşitliğinde her iki tarafın tersini alırsak, A^{-1} matrisini

$$A_n^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

eşitliği ile elde ediliriz. Buna göre **L** ve **U** matrislerinin tersini hesaplamamız gerekecektir.

Teorem 2.3.1. $\mathbf{L}^{-1} = \left(\hat{l}_{ij}\right)$ *matrisi ile* **L** *kare matrisinin tersini gösterelim . Bu durumda*

$$\hat{l}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^i}{F_{2i-2}} & j = 1 \text{ ve } i > 2 \text{ ise}, \\ \\ -\dfrac{L_{2j-1}}{F_{2j}} & j = i-1 \text{ ve } i > 2 \text{ ise}, \\ \\ \dfrac{2\,(-1)^{i+j+1}\,F_{2j-1}}{F_{2i-2}} & j < i-1 \text{ ve } i > 1 \text{ ise}, \end{cases}$$

$\hat{l}_{21} = -2$, $\hat{l}_{ii} = 1$ ve diğer durumlarda sıfır olarak tanımlanır.

Açıkca $\mathbf{L}^{-1}$ matrisi;

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ -2 & 1 & & & & & & \\ -\frac{1}{F_4} & -\frac{L_3}{F_4} & 1 & & & & & \\ \frac{1}{F_6} & -\frac{2F_3}{F_6} & -\frac{L_5}{F_6} & 1 & & & & \\ -\frac{1}{F_8} & \frac{2F_3}{F_8} & -\frac{2F_5}{F_8} & -\frac{L_7}{F_8} & 1 & & & \\ \frac{1}{F_{10}} & -\frac{2F_3}{F_{10}} & \frac{2F_5}{F_{10}} & -\frac{2F_7}{F_{10}} & -\frac{L_9}{F_{10}} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{(-1)^n}{F_{2n-2}} & \frac{(-1)^{n+1}2F_3}{F_{2n-2}} & \frac{(-1)^{n+2}2F_5}{F_{2n-2}} & \frac{(-1)^{n+3}2F_7}{F_{2n-2}} & \cdots & \frac{(-1)^{2n-1}2F_{2n-5}}{F_{2n-2}} & -\frac{L_{2n-3}}{F_{2n-2}} & 1 \end{bmatrix}$$

formundadır.

Kanıt. İspatımız için $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^{-1} = I_n$ olduğunu göstermeliyiz. Burada I_n , n boyutlu birim matristir. İspatımızı dört duruma ayıracağız.

1. Durum: $j = i - 1$ olması durumudur.

$\mathbf{L}$ ve $\mathbf{L}^{-1}$ matrislerinin tanımından ve matris çarpımından,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n} l_{im}\hat{l}_{m,i-1} &= l_{i,i-1}\hat{l}_{i-1,i-1} + l_{ii}\hat{l}_{i,i-1} \\ &= \frac{F_{i-(i-1)}L_{2(i-1)-1} + F_{2(i-1)}F_{i-(i-1+1)}}{F_{2i-2}} - \frac{L_{2(i-1)-1}}{F_{2i-2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup bu durumda $j = i - 1$ durumu ispatlanmış olur.

2. Durum: $i = j$ olması durumudur.

$$\sum_{m=1}^{n} l_{im}\hat{l}_{mi} = l_{ii}\hat{l}_{ii} = \frac{F_{i-i}L_{2i-1} + F_{2i}F_{i-i-1}}{F_{2i}} = 1$$

olup $i = j$ durumu için ispat biter.

3. **Durum:** $j = 1$ ve $i > 2$ olması durumudur. $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{L}^{-1}$ matrislerinin tanımı, matris çarpımı ve $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ özdeşliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n} l_{im}\hat{l}_{m1} &= l_{i1}\hat{l}_{11} + l_{i2}\hat{l}_{21} + \sum_{m=3}^{i} l_{im}\hat{l}_{m1} \\
&= F_{i+1} - 2F_{i-3} - \frac{8}{3}F_{i-2} + \sum_{m=3}^{i} \frac{(-1)^m \left(F_{2m}L_{2m-1} + F_{2m}F_{i-m-1}\right)}{F_{2m-2}F_{2m}} \\
&= F_{i+1} - 2F_{i-3} - \frac{8}{3}F_{i-2} + \sum_{m=3}^{i} \frac{(-1)^m \left(F_{2m}F_{i-m+1} + F_{i-m}F_{2m-2}\right)}{F_{2m-2}F_{2m}}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. İspatı tamamlamak için bu son eşitliğin değerinin sıfıra eşit olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $i > 2$ olmak üzere, i üzerinden tümevarım yöntemini kullanacağız.

İddiamız $i = 3$ için açıktır.

Şimdi iddiamızın i için gerçeklendiğini kabül edelim. İddiamızın $i + 1$ için gerçeklendiğini göstermeliyiz. Fibonacci dizisinin indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n} l_{i+1,m}\hat{l}_{m1} \\
= \;& F_{i+2}-2F_{i-2}-\frac{8}{3}F_{i-1}+\sum_{m=3}^{i+1}\frac{(-1)^{m}\left(F_{2m}F_{i-m+2}+F_{i-m+1}F_{2m-2}\right)}{F_{2m-2}F_{2m}} \\
= \;& F_{i+2}-2F_{i-2}-\frac{8}{3}F_{i-1}+\sum_{m=3}^{i}\frac{(-1)^{m}\left(F_{2m}F_{i-m+2}+F_{i-m+1}F_{2m-2}\right)}{F_{2m-2}F_{2m}}+\frac{(-1)^{i+1}}{F_{2i}} \\
= \;& F_{i+2}-2F_{i-2}-\frac{8}{3}F_{i-1} \\
& +\sum_{m=3}^{i}\frac{\left(F_{2m}\left(F_{i-m+1}+F_{i-m}\right)+\left(F_{i-m}+F_{i-m-1}\right)F_{2m-2}\right)(-1)^{m}}{F_{2m-2}F_{2m}}+\frac{(-1)^{i+1}}{F_{2i}} \\
= \;& F_{i+2}-2F_{i-2}-\frac{8}{3}F_{i-1}+\sum_{m=3}^{i}\left(\frac{F_{2m}F_{i-m+1}+F_{i-m}F_{2m-2}}{F_{2m-2}F_{2m}}\right)(-1)^{m} \\
& +\sum_{m=3}^{i}\left(\frac{F_{2m}F_{i-m}+F_{i-m-1}F_{2m-2}}{F_{2m-2}F_{2m}}\right)(-1)^{m}+\frac{(-1)^{i+1}}{F_{2i}} \\
= \;& F_{i+2}-2F_{i-2}-\frac{8}{3}F_{i-1}+\sum_{m=3}^{i}T(i,m)+\sum_{m=3}^{i}T(i-1,m)+\frac{(-1)^{i+1}}{F_{2i}} \\
= \;& F_{i+2}-2F_{i-2}-\frac{8}{3}F_{i-1}+\sum_{m=3}^{i}T(i,m)+\sum_{m=3}^{i-1}T(i-1,m)+\frac{(-1)^{i}}{F_{2i}}+\frac{(-1)^{i+1}}{F_{2i}}
\end{aligned}$$

olup, burada $T(i,m)=\frac{\left(F_{2m}F_{i-m+1}+F_{i-m}F_{2m-2}\right)(-1)^{m}}{F_{2m-2}F_{2m}}$. Tümevarım hipotezinin i ve $i-1$ gerçeklendiğini göz önünde bulundurursak,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n} l_{i+1,m}\hat{l}_{m1} \\
= \;& F_{i+2}-2F_{i-2}-\frac{8}{3}F_{i-1}+\left(-F_{i+1}+2F_{i-3}+\frac{8}{3}F_{i-2}\right)+\left(-F_{i}+2F_{i-4}+\frac{8}{3}F_{i-3}\right) \\
& +\frac{(-1)^{i}}{F_{2i}}+\frac{(-1)^{i+1}}{F_{2i}} \\
= \;& F_{i+2}-2F_{i-2}-\frac{8}{3}F_{i-1}-F_{i+2}+2F_{i-2}+\frac{8}{3}F_{i-1}+0 \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve bu da iddiamızı doğrular.

4. **Durum:** $i > j+1$ olması durumudur.

$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ eşitliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} l_{im}\hat{l}_{mj} &= l_{ij}\hat{l}_{jj} + l_{i,\ j+1}\hat{l}_{j+1,\ j} + \sum_{m=2}^{i-j} l_{i,\ j+m}\hat{l}_{j+m,\ j} \\ &= \frac{F_{i-j}L_{2j-1} + F_{2j}F_{i-j-1}}{F_{2j}} - \frac{F_{i-j-1}L_{2j+1} + F_{2j+2}F_{i-j-2}}{F_{2j+2}}\frac{L_{2j-1}}{F_{2j}} \\ &\quad +2\sum_{m=2}^{i-j}\frac{(-1)^{m+1}\left(F_{i-j-m}L_{2j+2m-1} + F_{2j+2m}F_{i-j-m-1}\right)}{F_{2j+2m}}\frac{F_{2j-1}}{F_{2j+2m-2}} \\ &= \frac{2F_{i-j-1}F_{2j-1}}{F_{2j+2}} + 2\sum_{m=2}^{i-j}\left(F_{i-j-m+1}F_{2j+2m} + F_{i-j-m}F_{2j+2m-2}\right)E\left(j,m\right)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Burada $E\left(j,m\right) = \frac{(-1)^{m+1}F_{2j-1}}{F_{2j+2m}F_{2j+2m-2}}$.

Şimdi bu ifadenin sıfıra eşit olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $i \geq 3$ olmak üzere i üzerinden tümevarım yöntemi kullanacağız.

$i = 3$ için, kabülümüz $i > j+1$ durumu olduğundan dolayı $j = 1$ olmalıdır. Bu durum ise açıktır.

İddiamız i için gerçeklensin. İddiamızın $i+1$ içinde gerçeklendiğini göstermeliyiz.

O halde,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n} l_{i+1,\,m}\hat{l}_{mj} \\
=\;& \frac{2F_{i-j+1}F_{2j-1}}{F_{2j+2}} + 2\sum_{m=2}^{i-j+1}\left(F_{i-j-m+2}F_{2j+2m} + F_{i-j-m+1}F_{2j+2m-2}\right)E\left(j,m\right) \\
=\;& \frac{2F_{i-j}F_{2j-1}}{F_{2j+2}} + 2\sum_{m=2}^{i-j}\left(F_{i-j-m+2}F_{2j+2m} + F_{i-j-m+1}F_{2j+2m-2}\right)E\left(j,m\right) \\
&+2F_{2i+2}E\left(j,i-j+1\right) \\
=\;& \frac{2F_{i-j}F_{2j-1}}{F_{2j+2}} + 2\sum_{m=2}^{i-j}\left(F_{i-j-m+1}F_{2j+2m} + F_{i-j-m}F_{2j+2m-2}\right)E\left(j,m\right) \\
&+2\sum_{m=2}^{i-j}\left(F_{i-j-m}F_{2j+2m} + F_{i-j-m-1}F_{2j+2m-2}\right)E\left(j,m\right) + 2F_{2i+2}E\left(j,i-j+1\right) \\
=\;& \frac{2F_{i-j}F_{2j-1}}{F_{2j+2}} + 2\sum_{m=2}^{i-j}P\left(i,j,m\right)E\left(j,m\right) \\
&+2\sum_{m=2}^{i-j-1}P\left(i-1,j,m\right)E\left(j,m\right) + 2F_{2i-2}E\left(j,i-j\right) + 2F_{2i+2}E\left(j,i-j+1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $P\left(i,j,m\right) = F_{i-j-m}F_{2j+2m} + F_{i-j-m-1}F_{2j+2m-2}$ olup, $E\left(i,j\right)$ daha önce tanımlandığı gibidir.

Tümevarım hipotezi gereği ve bazı düzenlemeler yaparak

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n} l_{i+1,\,m}\hat{l}_{mj} \\
=\;& \frac{2F_{i-j}F_{2j-1}}{F_{2j+2}} + 2\sum_{m=2}^{i-j}P\left(i,j,m\right)D\left(j,m\right) + 2\sum_{m=2}^{i-j-1}P\left(i-1,j,m\right)D\left(j,m\right) \\
=\;& \frac{2F_{i-j}F_{2j-1}}{F_{2j+2}} + \left(-\frac{2F_{i-j}F_{2j-1}}{F_{2j+2}}\right) + \left(-\frac{2F_{i-j-1}F_{2j-1}}{F_{2j+2}}\right) \\
=\;& \frac{2F_{i-j+1}F_{2j-1}}{F_{2j+2}} - \frac{2F_{i-j+1}F_{2j-1}}{F_{2j+2}} \\
=\;& 0
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Bu da ispatımızı tamamlar. $\square$

Teorem 2.3.2. $\mathbf{U}^{-1} = (\hat{u}_{ij})$, **U** *matrisinin tersini göstermek üzere*

$$\hat{u}_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j+1}}{F_{2j}} & i = 1 \ ve \ j > 2 \ ise, \\ \\ \frac{-F_{2i-2}}{F_{2i}} & i = j \ ve \ \ j > 1 \ ise, \\ \\ \frac{L_{2i-1}}{F_{2i+2}} & i = j-1 \ ve \ \ j > 2 \ ise, \\ \\ \frac{2(-1)^{i+j}F_{2i-1}}{F_{2j}} & i < j-1 \ , \ i > 1 \ ve \ j > 3 \ ise, \end{cases}$$

şeklindedir. Açıkça $\boldsymbol{U}^{-1}$ *matrisi,*

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{F_4} & \frac{1}{F_6} & -\frac{1}{F_8} & \frac{1}{F_{10}} & \cdots & -\frac{1}{F_{2n}} \\ & -\frac{F_2}{F_4} & \frac{L_3}{F_6} & \frac{2F_3}{F_8} & -\frac{2F_3}{F_{10}} & \cdots & \frac{2F_3}{F_{2n}} \\ & & -\frac{F_4}{F_6} & \frac{L_5}{F_8} & \frac{2F_5}{F_{10}} & \cdots & -\frac{2F_5}{F_{2n}} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & -\frac{F_6}{F_8} & \frac{L_7}{F_{10}} & & \frac{(-1)^n 2F_{2n-1}}{F_{2n}} \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & -\frac{F_8}{F_{10}} & & \frac{L_{2n-3}}{F_{2n}} \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & -\frac{F_{2n-2}}{F_{2n}} \end{bmatrix}$$

formundadır.

Kanıt. Bu teoremin ispatı, bir önceki teoremin ispatına benzer bir şekilde yapılabilir. □

3. MATRİS NORMLARI

Bu bölümde A_n matrisinin çeşitli matris normlarını hesaplayacağız ve bunlar arasında bir sıralama elde edeceğiz.

Bunlardan önce, norm hesaplamalarında kullanacağımız Fibonacci dizisini içeren aşağıdaki üç adet toplam formülüne ihtiyacımız olacaktır.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_i &= F_{n+2} - 1 \\
\sum_{m=1}^{n} (n-m+1) F_m &= F_{n+4} - n - 3 \\
\sum_{k=1}^{n} k F_k^2 &= \begin{cases} (n+1) F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2 + 1 & n \text{ çift ise,} \\ \\ (n+1) F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2 & n \text{ tek ise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Bu bilgilerin ışığı altında, matris normlarını hesaplamaya başlayabiliriz.

A_n matrisinin ℓ_1 normu

$$\begin{aligned}
||A_n||_1 &= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = n + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) F_{m+2} \\
&= n + 2 \sum_{m=3}^{n+1} (n-m+2) F_{m+2} \\
&= n + 2 \left(\sum_{m=1}^{n+1} (n-m+2) F_{m+2} - 2n - 1 \right)
\end{aligned}$$

olup, $\sum\limits_{m=1}^{n} (n-m+1)\, F_m = F_{n+4} - n - 3$ özdeşliğini kullandığımızda

$$||A_n||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = 2F_{n+5} - 5n - 10$$

şeklinde bulunur.

Üzerinde çalıştığımız A_n matrisi simetrik bir matris olduğundan bu matrisin maksimum sütun toplam normu ile maksimum satır toplam normu birbirine eşittir. Yani

$$|||A_n|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = |||A_n|||_\infty$$

dir. Bu yüzden, bu matris normlarından herhangi birini hesaplamak yeterli olacaktır.

A_n matrisinin tanımından,

$$\begin{aligned} |||A_n|||_1 &= \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=2}^{n+1} F_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} F_i - 1 \end{aligned}$$

olup, $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ özdeşliğini kullandığımızda

$$|||A_n|||_1 = F_{n+3} - 2$$

sonucunu elde ederiz.

A_n matrisinin ℓ_2 matris normu (Öklid normu) ise

$$\begin{aligned}
||A_n||_2 &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(n + 2\sum_{m=1}^{n-1} (n-m) F_{m+2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(n + 2n\sum_{m=1}^{n-1} F_{m+2}^2 - 2\sum_{m=1}^{n-1} mF_{m+2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(-3n - 2 + 2n\sum_{m=1}^{n+1} F_m^2 - 2\sum_{m=1}^{n+1} mF_m^2 + 4\sum_{m=1}^{n+1} F_m^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olup,

$$\sum_{k=1}^{n} kF_k^2 = \begin{cases} (n+1) F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2 + 1 & n \text{ çift ise,} \\ \\ (n+1) F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2 & n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

özdeşliğini kullandığımızda

$$||A||_2 = \begin{cases} \sqrt{-3n - 2 + 2F_{n+2}^2} + 1 & n \text{ çift ise,} \\ \\ \sqrt{-3n - 4 + 2F_{n+2}^2} & n \ \text{ tek ise,} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

A_n matrisinin ℓ_∞ normu

$$||A_n||_\infty = \max_{1 \le i,j \le n} \{|a_{ij}|\} = nF_{n+1}$$

şeklindedir.

Matris normları ile ilgili bulduğumuz değerleri özetleyecek olursak

$$\begin{aligned}
||A_n||_1 &= 2F_{n+5} - 5n - 10 \\
|||A_n|||_1 &= \sum_{i=1}^{n+1} F_i - 1 \\
||A_n||_\infty &= nF_{n+1} \\
||A_n||_2 &= \begin{cases} \sqrt{-3n - 2 + 2F_{n+2}^2} + 1 & n \text{ çift ise,} \\ \\ \sqrt{-3n - 4 + 2F_{n+2}^2} & n \text{ tek ise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Bu normları n'nin bazı değerleri için hesaplayıp bir tabloda gösterecek olursak;

n	$\|\|A_n\|\|_2$	$\|\|\|A_n\|\|\|_1$	$\|\|A_n\|\|_1 = \|\|\|A_n\|\|\|_\infty$	$\|\|A_n\|\|_\infty$
1	1.7	**1**	**1**	**1**
2	3.1	**3**	6	4
3	6.2	**6**	17	9
4	**10.6**	11	38	20
5	**17.9**	19	75	40
14	**1395.8**	1595	8282	8540
15	**2258.5**	2582	13445	14805
16	**3654.3**	4179	21802	25552
20	**25047.6**	28 655	149 940	218 920
30	$\mathbf{3.0806 \times 10^6}$	3524 576	18 454 770	40 388 070

Tablodaki değerlerden de gördüğümüz üzere, yeterince büyük n'ler için bu normlar

$$||A_n||_2 \leq |||A_n|||_1 \leq ||A_n||_1 \leq ||A_n||_\infty$$

şeklinde sıralıdır. Böylece A_n matrisinin spektiral yarıçapı için bir üst sınır bulmuş oluruz ve

$$\rho(A_n) \leq ||A_n||_2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, elemanları Fibonacci dizisinin terimlerinden oluşan A_n kombinatoriyal matrisini tanımladık. Bu matrisin **LU** çarpanlaması, Cholesky çarpanlaması, determinantı ve tersini inceledik ve bu ifadeler için birer kapalı form bulduk. Böylece oluşturduğumuz A_n matrisi yeni bir test matrisidir diyebiliriz. Ayrıca A_n kombinatoriyal matrisi için farklı matris norm değerlerini hesapladık. Hesaplanan matris norm değerleri yardımı ile A_n matrisinin spektiral yarıçapı için en iyi üst sınırı verdik.

Kaynakça

[1] D. Hilbert. Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms. *Acta Mathematica*, 18: 155–159, 1894.

[2] E. Kilic and P. Stanica. The Lehmer matrix and its recursive analogue. *J. Combinat. Math. and Combinat. Computing*, 74: 193-207, 2010.

[3] M. Newman and J. Todd. The evaluation of matrix inversion programs. *J. Society Industrial and Appl. Math.,* 6: 466-476, 1958.

[4] T. M. Richardson. The Filbert Matrix. *Fibonacci Quart.*, 39(3): 268–275, 2001.

[5] Seibert, J, "Problem B-978, Determine the Determinant", Fibonacci Quart, 43(1) : 88-89, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: ÇETİNKAYA, Leyla
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 07.05.1988 Ankara
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 05068307407
e-mail	: lcetinkaya@.etu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Y. Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2013
Lisans	AnkaraÜniversitesi	2011
Lise	Fatih Sultan Mehmet Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2012-2013	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (iyi)

Yayınlar