BİR KOMBİNATORYAL MATRİS VE LİNEER CEBİRSEL KARAKTERİZASYONLARI

GÜLŞAH ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2013

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Necip CAMUŞCU
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

GÜLŞAH ÖZDEMİR tarafından hazırlanan BİR KOMBİNATORYAL MATRİS ve LİNEER CEBİRSEL KARAKTERİZASYONLARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Emrah KILIÇ
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Adnan TERCAN

Üye : Doç. Dr. Emrah KILIÇ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Çetin ÜRTİŞ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gülşah ÖZDEMİR

Üniversitesi	**:**	**TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Emrah KILIÇ**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans – Ağustos 2013**

Gülşah ÖZDEMİR

BİR KOMBİNATORYAL MATRİS VE LİNEER CEBİRSEL KARAKTERİZASYONLARI

ÖZET

Bu tezde, genelleştirimiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ nin çift indisli terimleri kullanılarak bir kombinatoryal matris tanımlanmıştır. Bu matrisin çeşitli lineer cebirsel özellikleri incelenmiştir. Bu özellikler; LU çarpanlaması, Cholesky çarpanlaması, tersi ve determinantıdır. Ayrıca bu matrisin çeşitli matris normları hesaplanmıştır ve bunlar yardımı ile tanımlanan matrisin spektiral yarıçapı için en iyi üst sınır verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Simetrik matris, Fibonacci ve Lucas sayıları, LU ve Cholesky çarpanlaması, determinant, spektiral yarıçap.

University	:	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	:	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	:	**Mathematics**
Supervisor	:	**Asst. Prof. Emrah KILIÇ**
Degree Awarded and Date	:	**M.Sc. – Agust 2013**

Gülşah ÖZDEMİR

A COMBINATORIOAL MATRIX AND LINEAR ALGEBRAIC CHARACTERIZATION

ABSTRACT

In this thesis, with using double-indexed terms of the generalized Fibonacci sequence $\{U_n\}$, a new combinatorial matrix is defined. Some linear algebraic properties of this matrix are investigated. These features include LU factorization, Cholesky factorization, inverse and determinant. Also various matrix norms of this matrix are calculated and with using them best upper bound for the spectral radius of this matrix is given.

Keywords: Symmetric matrix, Fibonacci and Lucas numbers, LU and Cholesky factorization, determinant, spectral radius.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca ve tez çalışmamda desteğini esirgemeyen ve her anlamda bana rehber olan danışman hocam Doç. Dr. Emrah KILIÇ'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bir çok konuda yardımlarını esirgemeyen TOBB ETÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve her zaman destekleriyle yanımda olan tüm asistan arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi anlamda en büyük destekçim olan aileme tüm destekleri için teşekkürü bir borç bilirim.

İçindekiler

TEZ BİLDİRİMİ **ii**

ÖZET **iv**

ABSTRACT **v**

TEŞEKKÜR **vi**

İÇİNDEKİLER **vii**

TABLO LİSTESİ **ix**

ŞEKİL LİSTESİ **x**

1 GİRİŞ **1**

2 GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ KOMBİNATORYAL MATRİSİ VE LİNEER CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ **13**

2.1 PROBLEM TANIMI 13

2.2 LU ÇARPANLAMASI 14

2.3 DETERMİNANT 21

2.4 CHOLESKY ÇARPANLAMASI 23

2.5 MATRİSİN TERSİ 28

3 MATRİS NORMLARI **34**

4 SONUÇ **40**

KAYNAKLAR **41**

ÖZGEÇMİŞ **42**

Tablo Listesi

1.1 Fibonacci sayı dizisi 1

1.2 Lucas sayı dizisi 2

1.3 Pell sayı dizisi 3

1.4 Pell-Lucas sayı dizisi 4

3.1 Matris normları değerleri 39

Şekil Listesi

Bu çalışmada kullanılan bazı simge ve kısaltmaların açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
$\{P_n\}$	Pell dizisi
$\{Q_n\}$	Pell-Lucas dizisi
$\{U_n\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{V_n\}$	Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$\det B$	B matrisinin determinantı
$\rho(B)$	B matrisinin spektiral yarıçapı
$\|.\|_1$	ℓ_1 matris normu
$\|.\|_2$	ℓ_2 matris normu (Öklid normu)
$\|\|.\|\|_1$	Maksimum sütun toplam matris normu
$\|\|.\|\|_\infty$	Maksimum satır toplam matris normu
$\|.\|_\infty$	ℓ_∞ normu
$\|.\|_{\max}$	Maksimum norm

1. GİRİŞ

Tanım 1.0.1 *F_n; n. Fibonacci sayısını göstermek üzere, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tamsayısı için Fibonacci sayıları*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Elemanları Fibonacci sayılarından oluşan $\{F_n\}$ dizisine Fibonacci dizisi denir.

Fibonacci sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

Tablo 1.1: Fibonacci sayı dizisi

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	$\cdots$

Tanım 1.0.2 *L_n; n. Lucas sayısını göstermek üzere, $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tamsayısı için Lucas sayıları*

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Elemanları Lucas sayılarından oluşan $\{L_n\}$ dizisine Lucas dizisi denir.

Lucas sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

Tablo 1.2: Lucas sayı dizisi

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	$\cdots$

Sabit katsayılı lineer bir rekürans ile tanımlanan Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ dir. Bu denklemin kökleri ise

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir. O halde fark denklemlerinden bu dizinin genel terimini

$$F_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n$$

olarak yazabiliriz. Şimdi A_1 ve A_2 sabitlerini bulalım:

$n = 0$ için

$$F_0 = A_1 + A_2 = 0$$

$n = 1$ için

$$F_1 = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 1$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ve} \quad A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

olarak bulunur. Böylece Fibonacci sayıları

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

şeklinde yazılabilir. Literatürde bu formül Fibonacci sayıları için **Binet formülü** olarak adlandırılır.

Benzer şekilde Lucas sayı dizisinin genel terimini

$$L_n = B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n$$

olarak yazabiliriz. Şimdi B_1 ve B_2 sabitlerini bulalım:

$n = 0$ için

$$L_0 = B_1 + B_2 = 2$$

$n=1$ için

$$L_1 = B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 = 1$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek

$$B_1 = 1 \ \text{ ve } \ B_2 = 1$$

olarak bulunur. Böylece Lucas sayıları

$$L_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n$$

şeklinde yazılabilir. Literatürde bu formül Lucas sayıları için **Binet formülü** olarak adlandırılır.

Tanım 1.0.3 *P_n; n. Pell sayısını göstermek üzere, $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tamsayısı için Pell sayıları*

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Elemanları Pell sayılarından oluşan $\{P_n\}$ dizisine Pell dizisi denir.

Pell sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

Tablo 1.3: Pell sayı dizisi

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	$\cdots$

Pell sayıları için Binet formülü

$$P_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

şeklindedir.

Tanım 1.0.4 *Q_n; n. Pell-Lucas sayısını göstermek üzere, $Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tamsayısı için Pell-Lucas sayıları*

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Elemanları Pell-Lucas sayılarından oluşan $\{Q_n\}$ dizisine Pell-Lucas dizisi denir.

Pell-Lucas sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

Tablo 1.4: Pell-Lucas sayı dizisi

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	$\cdots$

Pell-Lucas sayıları için Binet formülü

$$Q_n = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$$

şeklindedir.

Bu tez boyunca Fibonacci dizisinin bir genel durumunu göz önüne alacağız. Bu genel durum aşağıda tanımlanmaktadır.

Tanım 1.0.5 *Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$; $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ başlangıç koşulları, her $n \geq 2$ tamsayısı ve $p^2 + 4 \neq 0$ olacak şekildeki her p tamsayısı için*

$$U_n = pU_{n-1} + U_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Benzer şekilde genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_n\}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.0.6 *Genelleştirilmiş Lucas dizisi* $\{V_n\}$*;* $V_0 = 2$*,* $V_1 = p$ *başlangıç koşulları, her* $n \geq 2$ *tamsayısı ve* $p^2 + 4 \neq 0$ *olacak şekildeki her* p *tamsayısı için*

$$V_n = pV_{n-1} + V_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formülü

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4}}{2}$$

olmak üzere

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad V_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir.

Eğer $p = 1$ alınırsa, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi$\{U_n\}$ bilinen Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ e dönüşür. Benzer şekilde genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_n\}$ de bilinen Lucas dizisi $\{L_n\}$ e dönüşür.

Eğer $p = 2$ alınırsa, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi$\{U_n\}$ bilinen Pell dizisi $\{P_n\}$ e dönüşür. Benzer şekilde genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_n\}$ de bilinen Pell-Lucas dizisi $\{Q_n\}$ e dönüşür.

Şimdi matrislerle ilgili bir takım lineer cebirsel özellikleri verelim.

Tanım 1.0.7 *LU Çarpanlaması*

Her kare matris, bir birim alt üçgen L *matrisi ve bir üst üçgen* U *matrisinin çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu çarpanlamaya* LU *çarpanlaması denir.*

Tanım 1.0.8 *Cholesky Çarpanlaması*

Keyfi bir kare matris, $\mathcal{C}$ alt üçgen ve $\mathcal{C}^T$ üst üçgen matrislerinin çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu çarpanlamaya Cholesky çarpanlaması denir.

Verilen bir matrisin tersi, determinantı, karakteristik denklemi, özdeğerleri veya özvektörleri belirlenebiliyorsa, bu ifadeler için birer kapalı form bulunabiliyorsa bu tip matrislere **test matrisleri** denir.

Hilbert matrisi, Filbert matrisi, Cauchy matrisi, Lehmer matrisi ve dizisel analoğu, simetrik minimum matris literatürdeki bazı test matrislerine örnek olarak verilebilir. Bu matrislerin bazıları aşağıda tanımlanacak ve bilinen bazı özellikleri sunulacaktır.

Tanım 1.0.9 *Cauchy Matrisi*

F keyfi bir cisim ve $x_i, y_j \in F$ olsun. Genel (i, j) elemanı

$$c_{i,j} = \frac{1}{x_i - y_j};\; x_i \neq y_j,\; 1 \leq i \leq m,\; 1 \leq j \leq n$$

kuralı ile tanımlanan $m \times n$ boyutlu $C = [c_{i,j}]$ matrisine Cauchy matrisi denir.

Bu şekilde tanımlanan Cauchy matrisinin $m = n$ alınması durumunda determinantı

$$\det C = \frac{\prod\limits_{i=2}^{n} \prod\limits_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)(y_j - y_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{n} (x_i - y_j)}$$

şeklindedir.

Tanım 1.0.10 *Hilbert Matrisi*

Hilbert matrisi, $H_n = [h_{i,j}]$ *, elemanları*

$$h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

şeklinde olan n *boyutlu kare bir matristir.*

Hilbert matrisinin determinantı

$$D_n = \prod_{i=1}^{n-1} i^{n-i} = \prod_{i=1}^{n-1} i!$$

olmak üzere

$$\det H_n = \frac{D_n^4}{D_{2n}}$$

şeklindedir.

Hilbert matrisinin tersi ise

$$\left(H_n^{-1}\right)_{i,j} = (-1)^{i+j}(i+j-1)\binom{n+i-1}{n-j}\binom{n+j-1}{n-i}\binom{i+j-2}{i-1}^2$$

şeklindedir.

Tanım 1.0.11 *Filbert Matrisi*

Filbert matrisi, $\mathcal{F}_n = [f_{i,j}]$ *, elemanları*

$$f_{i,j} = \frac{1}{F_{i+j-1}}$$

şeklinde olan n *boyutlu kare bir matristir. Bu ifadedeki* F_n*,* n*. Fiboonacci sayısıdır.*

Filbert matrsinin tersi,

$$e(n,i,j) = n(i+j-1) + \binom{i}{2} + \binom{j}{2} + 1$$

ve

$$\binom{n}{k}_F = \prod_{i=1}^{k} \frac{F_{n-i+1}}{F_i}$$

Fibonomial katsayıyı göstermek üzere

$$\left(\mathcal{F}_n^{-1}\right)_{i,j} = (-1)^{e(n,i,j)} F_{i+j-1} \binom{n+i-1}{n-j}_F \binom{n+j-1}{n-i}_F \binom{i+j-2}{i-1}^2$$

şeklindedir.

Tanım 1.0.12 *Lehmer Matrisi*

Lehmer matrisi, $G_n = [g_{i,j}]$*, elemanları*

$$g_{i,j} = \frac{\min(i,j)}{\max(i,j)}$$

şeklinde tanımlı simetrik kare bir matristir.

Lehmer matrisinin determinantı

$$\det G_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^3}$$

şeklinde kapalı bir forma sahiptir.

Lehmer matrisinin tersi ise

$$\left(G_n^{-1}\right)_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{4i^3}{4i^2-1} & i=j<n \text{ ise,} \\[2ex] \dfrac{n^2}{2n-1} & i=j=n \text{ ise,} \\[2ex] -\dfrac{i(i+1)}{2i+1} & |i-j|=1 \text{ ise,} \\[2ex] 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklindedir.

Örnek 1.0.1 *Eğer $n=4$ alınırsa G_4 matrisi açıkça*

$$G_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{3}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

formunda olur. Bu durumda G_4 matrisinin determinantı

$$\det G_4 = \frac{8!}{2^4\,(4!)^3} = \frac{35}{192}$$

şeklindedir.

Tanım 1.0.13 *Lehmer Matrisinin Dizisel Analoğu*

Lehmer matrisinin dizisel analoğu, $Y_n = [y_{i,j}]$, elemanaları

$$y_{i,j} = \frac{\min(U_{i+1}, U_{j+1})}{\max(U_{i+1}, U_{j+1})} = \begin{cases} \dfrac{U_{i+1}}{U_{j+1}} & j \geq i \text{ ise,} \\ \\ \dfrac{U_{j+1}}{U_{i+1}} & i > j \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı kare bir matristir. Bu ifadede U_n, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ nin n. terimidir.

Bu şekilde tanımlanan Y_n matrisinin determinantı

$$\det Y_n = \prod_{i=2}^{n} \left(\frac{U_{i+1}^2 - U_i^2}{U_{i+1}^2} \right)$$

şeklinde kapalı bir forma sahiptir.

Y_n matrisinin tersi ise

$$\left(Y_n^{-1}\right)_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{U_{i+1}U_{i+2}}{U_{i+1}^2 - U_{i+2}^2} & 1 \leq i \leq n-1 \text{ ve } j = i+1 \text{ ise },\\ \\ \dfrac{U_{i+1}^2\left(U_{i+2}^2 - U_i^2\right)}{\left(U_{i+1}^2 - U_i^2\right)\left(U_{i+2}^2 - U_{i+1}^2\right)} & 2 \leq i \leq n-1 \text{ ve } i = j \text{ ise}, \end{cases}$$

$(Y_n^{-1})_{1,1} = \dfrac{U_3^2}{U_3^2 - U_2^2}$, $(Y_n^{-1})_{n,n} = \dfrac{U_{n+1}^2}{U_{n+1}^2 - U_n^2}$ ve diğer durumlarda $(Y_n^{-1})_{i,j} = 0$ şeklinde tanımlıdır [3].

Tanım 1.0.14 *Simetrik Minimum Matris*

$S_n = [s_{i,j}]$ *simetrik minimum matrisi, elemanları*

$$s_{i,j} = \begin{cases} i+1 & i = j \textit{ ise},\\ \min\{i,j\} & i \neq j \textit{ ise}, \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanan n boyutlu kare bir matristir.

Açıkça S_n matrisi

$$S_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4 & \cdots & 3 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n-1\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n+1 \end{bmatrix}$$

formundadır.

Her $n \geq 2$ için S_n matrisinin determinantı

$$\det S_n = F_{2n+1}$$

kapalı formu ile ifade edilir [6]. Burada F_n, n. Fibonacci sayısını göstermektedir.

Örnek 1.0.2 *Eğer $n = 5$ alınırsa S_5 matrisi açıkça*

$$S_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

formunda olur ve

$$\det S_5 = F_{11} = 89$$

şeklindedir.

Bu tez çalışmasında ayrıca tezde tanımlanacak olan kambinatoryal matrisin çeşitli norm değerleri hesapanacak ve böylece bu matrisin spektiral yarıçapına en iyi bir üst sınır verilmeye çalışılacaktır.

Şimdi ise bu tez boyunca kullanacağımız bazı matris normlarına dair tanımlar vereceğiz. Keyfi n boyutlu $B_n = [b_{i,j}]$ kare matrisini göz önüne alalım.

Tanım 1.0.15 *B_n kare matrisinin ℓ_1 matris normu $\|\cdot\|_1$ ile gösterilir ve*

$$||B_n||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{i,j}|$$

kuralı ile tanımlanır.

Tanım 1.0.16 *B_n kare matrisinin ℓ_2 matris normu (Öklid normu) $\|\cdot\|_2$ ile gösterilir ve*

$$||B_n||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |b_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

kuralı ile tanımlanır.

Tanım 1.0.17 *B_n kare matrisinin maksimum sütun toplam normu $|||\cdot|||_1$ ile gösterilir ve*

$$|||B_n|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |b_{i,j}|$$

kuralı ile tanımlanır.

Tanım 1.0.18 *B_n kare matrisinin maksimum satır toplam normu $|||\cdot|||_\infty$ ile gösterilir ve*

$$|||B_n|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|$$

kuralı ile tanımlanır.

Tanım 1.0.19 *B_n kare matrisinin ℓ_∞ normu $\|\cdot\|_\infty$ ile gösterilir ve*

$$\|B_n\|_\infty = n \max_{1\leq i,j\leq n} |b_{i,j}|$$

kuralı ile tanımlanır.

Tanım 1.0.20 *B_n kare matrisinin maksimum normu $\|\cdot\|_{\max}$ ile gösterilir ve*

$$\|B_n\|_{\max} = \max_{1\leq i,j\leq n} \{|b_{i,j}|\}$$

kuralı ile tanımlanır.

Tanım 1.0.21 *Spektiral Yarıçap*

B_n, n boyutlu karesel bir matris olsun. B_n matrisinin spektiral yarıçapı $\rho(B_n)$ ile gösterilir ve

$$\rho(B_n) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda,\ B_n \textit{ matrisinin özdeğeridir}\}$$

şeklinde tanımlanır.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ KOMBİNATORYAL MATRİSİ VE LİNEER CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

2.1 PROBLEM TANIMI

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ nin terimlerini kullanarak bir kombinatoryal matris tanımlayacağız. Daha sonra bu matrisin cebirsel özelliklerini inceleyecek ve bazı matris analizlerini yapacağız.

Tanım 2.1.1 *Her $n > 1$ tamsayısı için $B_n = [b_{i,j}]$, elemanları*

$$b_{i,j} = \begin{cases} U_{2k(i-j+1)} & i \geq j \text{ ise,} \\ \\ U_{2k(j-i+1)} & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci kombinatoryal matrisidir. Burada U_n, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ nin n. terimini göstermektedir.

Bu burumda B_n matrisi açıkça

$$B_n = \begin{bmatrix} U_{2k} & U_{4k} & U_{6k} & \dots & U_{2kn} \\ \\ U_{4k} & U_{2k} & U_{4k} & \dots & U_{2k(n-1)} \\ \\ U_{6k} & U_4 & U_{2k} & \dots & U_{2k(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{2kn} & U_{2k(n-1)} & U_{2k(n-2)} & \dots & U_{2k} \end{bmatrix}$$

formundadır.

Şimdi bu matrisin çeşitli lineer cebirsel özelliklerini inceleyeceğiz ve ilk olarak LU çarpanlaması ile başlayacağız.

2.2 LU ÇARPANLAMASI

Her $n > 1$ tamsayısı için n boyutlu birim alt üçgen $L = [l_{i,j}]$ matrisi

$$l_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{U_{2k(i+1)}}{U_{2k(j+1)}} & i \geq j \text{ ve } j \neq 1 \text{ ise,} \\ \\ \dfrac{U_{2ki}}{U_{2k}} & i \geq j \text{ ve } j = 1 \text{ ise,} \\ \\ 0 & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanır.

Açıkça L matrisi

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ \frac{U_{4k}}{U_{2k}} & 1 & & & & \\ \frac{U_{6k}}{U_{2k}} & \frac{U_{8k}}{U_{6k}} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \frac{U_{2kn}}{U_{2k}} & \frac{U_{2k(n+1)}}{U_{6k}} & \frac{U_{2k(n+1)}}{U_{8k}} & \cdots & \frac{U_{2k(n+1)}}{U_{2kn}} & 1 \end{bmatrix}$$

formundadır.

Her $n > 1$ tamsayısı için n boyutlu üst üçgen $U = [u_{i,j}]$ matrisi

$$u_{i,j} = \begin{cases} -\frac{U_{4k}U_{2k(j+1)}}{U_{2ki}} & j \geq i \text{ ve } i \neq 1 \text{ ise,} \\ U_{2kj} & j \geq i \text{ ve } i = 1 \text{ ise,} \\ 0 & i > j \text{ ise,} \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanır.

Açıkça U matrisi

$$U = \begin{bmatrix} U_{2k} & U_{4k} & U_{6k} & \cdots & U_{2k(n-1)} & U_{2kn} \\ & -U_{6k} & -U_{8k} & \cdots & -U_{2kn} & -U_{2k(n+1)} \\ & & -\frac{U_{4k}U_{8k}}{U_{6k}} & \cdots & -\frac{U_{4k}U_{2kn}}{U_{6k}} & -\frac{U_{4k}U_{2k(n+1)}}{U_{6k}} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & -\frac{U_{4k}U_{2kn}}{U_{2k(n-1)}} & -\frac{U_{4k}U_{2k(n+1)}}{U_{2k(n-1)}} \\ 0 & & & & & -\frac{U_{4k}U_{2k(n+1)}}{U_{2kn}} \end{bmatrix}$$

formundadır.

B_n matrisinin LU çarpanlamasını verebilmemiz için aşağıdaki tanım ve teoreme ihtiyacımız olacaktır.

Tanım 2.2.1 *Her $n > 1$ tamsayısı ve $PQ \neq 0$, $P^2 - 4Q \neq 0$ olacak şekildeki keyfi P ve Q tamsayıları için ikinci basamaktan indirgeme dizisi $\{W_n\}$*

$$W_n = PW_{n-1} - QW_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ve $W_0 = a$, $W_1 = b$ keyfi başlangıç koşulları ile tanımlanır.

Bu durumda $\{W_n\}$ dizisinin Binet formülü,

$$\phi = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}, \quad \psi = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

ve

$$A = b - \psi a, \;\; B = b - \phi a$$

olmak üzere

$$W_n = \frac{A\phi^n - B\psi^n}{\phi - \psi}$$

eşitliği ile verilir.

Teorem 2.2.1 *([2], Teorem 1) Her $t \geq z \geq 0$ tamsayıları için*

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=z}^{t} \frac{Q^{rn}}{W_{rn}^{l} W_{r(n+1)}^{l}} \times \\
&\quad \sum_{i=0}^{l-1} \Big\{ \left[\left(W_{r(z+1)} - W_{rz}\psi^r \right) Q^{r(n-z)}\phi^r - \left(W_{r(z+1)} - W_{rz}\phi^r \right) \psi^{2r(n-z)+r} \right]^{l-1+i} \\
&\qquad \times \left[\left(W_{r(z+1)} - W_{rz}\psi^r \right) Q^{r(n-z)}\psi^r - \left(W_{r(z+1)} - W_{rz}\phi^r \right) \psi^{2r(n-z)+r} \right]^{i} \Big\} \\
&\qquad\qquad = \frac{\left(\phi^r - \psi^r\right)^{l-1} Q^{rz}}{\left(W_{r(z+1)} - W_{rz}\psi^r \right)} \left(\frac{1}{W_{rz}^{l}} - \frac{\psi^{lr(t+1-z)}}{W_{r(t+1)}^{l}} \right)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Eğer yukarıdaki teoremde $Q = -1$, $r = 2k$, $z = 2$, $l = b = 1$ ve $a = 0$ alınır ise $\{W_n\}$ dizisi $\{U_n\}$ dizisine dönüşür ve

$$\sum_{n=2}^{t} \frac{1}{U_{2kn} U_{2k(n+1)}} = \frac{U_{2k(t-1)}}{U_{2k(t+1)} U_{4k} U_{2k}} \tag{2.2.1}$$

sonucuna sahip oluruz.

Teorem 2.2.2 *Her $n > 1$ tamsayısı için, B_n matrisinin LU çarpanlaması*

$$B_n = LU$$

şeklindedir. Burada L ve U matrisleri yukarıda tanımlandığı gibidir.

İspat: *Bu ispatı üç kısımda inceleyeceğiz.*

1. ***Durum :*** *İlk durum $i = j$ olması durumudur. Bu ilk durumu ise $i = 1$, $i = 2$ ve $i > 2$ alt durumlarına göre inceleyeceğiz.*

1.i.) $i=1$ *için*

$$b_{1,1}=\sum_{t=1}^{1} l_{1,t}u_{t,1}=l_{1,1}u_{1,1}=U_{2k}$$

olduğu görülür.

1.ii.) $i=2$ *için*

$$\begin{aligned} b_{2,2} &= \sum_{t=1}^{2} l_{2,t}u_{t,2}=l_{2,1}u_{1,2}+l_{2,2}u_{2,2} \\ &= \frac{U_{4k}}{U_{2k}}U_{4k}-U_{6k}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}\left(\frac{\alpha^{4k}-\beta^{4k}}{\alpha-\beta}\right)^2-\frac{\alpha^{6k}-\beta^{6k}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\alpha^{6k}-\alpha^{2k}\beta^{4k}+\beta^{2k}\alpha^{4k}-\beta^{6k}-\alpha^{6k}+\beta^{6k}}{\alpha-\beta} \\ &= U_{2k} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

1.iii.) $i>2$ *için*

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= b_{i,i}=\sum_{t=1}^{i} l_{i,t}u_{t,i} \\ &= \frac{U_{2ki}}{U_{2k}}U_{2ki}+\sum_{t=2}^{i} l_{i,t}u_{t,i}=\frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2ki}-\sum_{t=2}^{i}\frac{U_{2k(i+1)}U_{2k(i+1)}}{U_{2k(t+1)}U_{2kt}}U_{4k} \\ &= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2ki}-U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(i+1)}\sum_{t=2}^{i}\frac{1}{U_{2kt}U_{2k(t+1)}} \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Burada (2.2.1) ile verilen sonucu kullanarak yukarıdaki eşitliği

$$\begin{aligned} b_{i,i} &= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2ki}-U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(i+1)}\frac{U_{2k(i-1)}}{U_{2k(i+1)}U_{4k}U_{2k}} \\ &= \frac{1}{U_{2k}}\left(U_{2ki}U_{2ki}-U_{2k(i-1)}U_{2k(i+1)}\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu son eşitlikte genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ *nin*

Binet formülü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
b_{i,i} &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}} \frac{\left(\alpha^{2ki}-\beta^{2ki}\right)^2-\left(\alpha^{2k(i-1)}-\beta^{2k(i-1)}\right)\left(\alpha^{2k(i+1)}-\beta^{2k(i+1)}\right)}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}} \frac{\alpha^{4k}+\beta^{4k}-2}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}} \left(\frac{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= U_{2k}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2. ***Durum :*** $i > j$ *olması durumudur. Matris çarpımından*

$$
\begin{aligned}
b_{i,j} &= \sum_{t=1}^{j} l_{i,t}u_{t,j} = \frac{U_{2ki}}{U_{2k}}U_{2kj} + \sum_{t=2}^{j} l_{i,t}u_{t,j} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} - \sum_{t=2}^{j} \frac{U_{2k(i+1)}U_{2k(j+1)}}{U_{2k(t+1)}U_{2kt}}U_{4k} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} - U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(j+1)} \sum_{t=2}^{j} \frac{1}{U_{2kt}U_{2k(t+1)}}
\end{aligned}
$$

sonucunu elde ederiz. Burada (2.2.1) ile verilen sonucu kullanarak yukarıdaki eşitliği

$$
\begin{aligned}
b_{i,j} &= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} - U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(j+1)} \frac{U_{2k(j-1)}}{U_{2k(j+1)}U_{4k}U_{2k}} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}\left(U_{2ki}U_{2kj} - U_{2k(i+1)}U_{2k(j-1)}\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazabiliriz. Bu son eşitlikte genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ *nin*

Binet formülü ve $\alpha\beta = -1$ bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= -\frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}} \times \\
&\quad \frac{(\alpha^{2k(i+1)}-\beta^{2k(i+1)})(\alpha^{2k(j-1)}-\beta^{2k(j-1)})-(\alpha^{2ki}-\beta^{2ki})(\alpha^{2kj}-\beta^{2kj})}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= -\frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}\left(\frac{\alpha^{2ki}\beta^{2kj}\left(1-\frac{\alpha^{2k}}{\beta^{2k}}\right)+\alpha^{2kj}\beta^{2ki}\left(1-\frac{\beta^{2k}}{\alpha^{2k}}\right)}{(\alpha-\beta)^2}\right) \\
&= -\frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}\frac{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{2k(j-1)}\beta^{2ki}-\alpha^{2ki}\beta^{2k(j-1)}\right) \\
&= \frac{\alpha^{2ki}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{2k(j-1)}-\left(-\frac{1}{\beta}\right)^{2k(j-1)}\beta^{2ki}}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\alpha^{2k(i-j+1)}-\beta^{2k(i-j+1)}}{\alpha-\beta} \\
&= U_{2k(i-j+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. *Durum :* *$i < j$ olması durumudur. Matris çarpımından*

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= \sum_{t=1}^{i} l_{i,t}u_{t,j} = \frac{U_{2ki}}{U_{2k}}U_{2kj} + \sum_{t=2}^{i} l_{i,t}u_{t,j} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} - \sum_{t=2}^{i}\frac{U_{2k(i+1)}U_{2k(j+1)}}{U_{2k(t+1)}U_{2kt}}U_{4k} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} - U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(j+1)}\sum_{t=2}^{i}\frac{1}{U_{2k(t+1)}U_{2kt}}
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Burada (2.2.1) ile verilen sonucu kullanarak yukarıdaki eşitliği

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} - U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(j+1)}\frac{U_{2k(i-1)}}{U_{2k(i+1)}U_{4k}U_{2k}} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}\left(U_{2ki}U_{2kj} - U_{2k(i-1)}U_{2k(j+1)}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu son eşitlikte genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ *nin Binet formülü ve* $\alpha\beta = -1$ *bağıntısı kullanılarak*

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= -\frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}} \times \\
&\quad \frac{(\alpha^{2k(i-1)}-\beta^{2k(i-1)})(\alpha^{2k(j+1)}-\beta^{2k(j+1)})-(\alpha^{2ki}-\beta^{2ki})(\alpha^{2kj}-\beta^{2kj})}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= -\frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}\left(\frac{\alpha^{2ki}\beta^{2kj}\left(1-\dfrac{\beta^{2k}}{\alpha^{2k}}\right)+\beta^{2ki}\alpha^{2kj}\left(1-\dfrac{\alpha^{2k}}{\beta^{2k}}\right)}{(\alpha-\beta)^2}\right) \\
&= -\frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}\frac{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{2k(i-1)}\beta^{2kj}-\beta^{2k(i-1)}\alpha^{2kj}\right) \\
&= \frac{\beta^{2k(i-1)}\alpha^{2kj}-\alpha^{2k(i-1)}\beta^{2kj}}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\left(\dfrac{-1}{\alpha}\right)^{2k(i-1)}\alpha^{2kj}-\left(-\dfrac{1}{\beta}\right)^{2k(i-1)}\beta^{2kj}}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\alpha^{2k(j-i+1)}-\beta^{2k(j-i+1)}}{\alpha-\beta} \\
&= U_{2k(j-i+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

2.3 DETERMİNANT

Bu bölümde B_n matrisinin determinantını hesaplayacağız.

Teorem 2.3.1 *Her* $n > 1$ *tamsayısı için* B_n *kare matrisinin determinantı*

$$\det B_n = (-1)^{n-1}\, U_{2k} U_{4k}^{n-2} U_{2k(n+1)}$$

dir.

İspat: *Teorem* (2.2.2) *de* B_n *matrisinin* LU *çarpanlaması elde edilmiştir. Böylece*

$$\det B_n = \det(LU) = \det L \cdot \det U$$

yazabiliriz. L *matrisi, birim alt üçgen matris olduğundan* $\det L = 1$ *dir. Bu durumda* B_n *matrisinin determinantı*

$$\begin{aligned} \det B_n &= \det U = U_{2k} \prod_{t=2}^{n} (-U_{4k}) \frac{U_{2k(t+1)}}{U_{2kt}} \\ &= U_{2k}(-1)^{n-1} U_{4k}^{n-1} \frac{U_{2k(n+1)}}{U_{4k}} \\ &= (-1)^{n-1} U_{2k} U_{4k}^{n-2} U_{2k(n+1)} \end{aligned}$$

şeklinde olur ve böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek 2.3.1 *Eğer* $k = p = 1$ *alınırsa,* $p = 1$ *için genelleştirilmiş Fibonacci dizisi* $\{U_n\}$ *, bilinen Fibonacci dizisi* $\{F_n\}$ *e dönüşür. Bu durumda*

$$B_n = \begin{bmatrix} F_2 & F_4 & F_6 & \dots & F_{2n} \\ F_4 & F_2 & F_2 & \dots & F_{2(n-1)} \\ F_6 & F_4 & F_2 & \dots & F_{2(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{2n} & F_{2(n-1)} & F_{2(n-2)} & \dots & F_2 \end{bmatrix}$$

formunda olur ve B_n *matrisinin determinantı*

$$\det B_n = (-1)^{n-1} 3^{n-2} F_{2(n+1)}$$

şeklindedir.

2.4 CHOLESKY ÇARPANLAMASI

Bu bölümde B_n matrisinin Cholesky çarpanlamasını elde edeceğiz.

Bunun için n boyutlu L_1 alt üçgen matrisini tanımlayacağız. Kompleks birim $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ olmak üzere, her $n > 1$ tamsayısı için alt üçgen $L_1 = [\ell_{i,j}]$ matrisi

$$\ell_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{i}U_{2k(i+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(j+1)}}\sqrt{U_{2kj}}} & i \geq j \text{ ve } j \neq 1 \text{ ise,} \\[2em] \dfrac{U_{2ki}}{\sqrt{U_{2k}}} & i \geq j \text{ ve } j = 1 \text{ ise,} \\[2em] 0 & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanır.

Açıkça L_1 matrisi

$$L_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{U_{2k}}{\sqrt{U_{2k}}} & & & & 0 \\[1.5em] \dfrac{U_{4k}}{\sqrt{U_{2k}}} & \dfrac{\mathbf{i}U_{6k}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{6k}}\sqrt{U_{4k}}} & & & \\[1.5em] \dfrac{U_{6k}}{\sqrt{U_{2k}}} & \dfrac{\mathbf{i}U_{8k}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{6k}}\sqrt{U_{4k}}} & \dfrac{\mathbf{i}U_{8k}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{8k}}\sqrt{U_{6k}}} & & \\[1.5em] \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\[1.5em] \dfrac{U_{2kn}}{\sqrt{U_{2k}}} & \dfrac{\mathbf{i}U_{2k(n+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{6k}}\sqrt{U_{4k}}} & \dfrac{\mathbf{i}U_{2k(n+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{8k}}\sqrt{U_{6k}}} & \cdots & \dfrac{\mathbf{i}U_{2k(n+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(n+1)}}\sqrt{U_{2kn}}} \end{bmatrix}$$

formundadır.

Bu durumda üst üçgen $L_1^T = \left[\hat{\ell}_{i,j}\right]$ matrisi

$$\hat{\ell}_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{i}U_{2k(j+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(i+1)}}\sqrt{U_{2ki}}} & j \geq i \text{ ve } i \neq 1 \text{ ise,} \\[2ex] \dfrac{U_{2kj}}{\sqrt{U_{2k}}} & j \geq i \text{ ve } i = 1 \text{ ise,} \\[2ex] 0 & i > j \text{ ise,} \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanır.

Açıkça L_1^T matrisi

$$L_1^T = \begin{bmatrix} \dfrac{U_{2k}}{\sqrt{U_{2k}}} & \dfrac{U_{4k}}{\sqrt{U_{2k}}} & \dfrac{U_{6k}}{\sqrt{U_{2k}}} & \cdots & \dfrac{U_{2kn}}{\sqrt{U_{2k}}} \\[2ex] & \dfrac{\mathbf{i}U_{6k}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{6k}}\sqrt{U_{4k}}} & \dfrac{\mathbf{i}U_{8k}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{6k}}\sqrt{U_{4k}}} & \cdots & \dfrac{\mathbf{i}U_{2k(n+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{6k}}\sqrt{U_{4k}}} \\[2ex] & & \dfrac{\mathbf{i}U_{8k}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{8k}}\sqrt{U_{6k}}} & \cdots & \dfrac{\mathbf{i}U_{2k(n+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{8k}}\sqrt{U_{6k}}} \\[2ex] & & & \ddots & \vdots \\[2ex] 0 & & & & \dfrac{\mathbf{i}U_{2k(n+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(n+1)}}\sqrt{U_{2kn}}} \end{bmatrix}$$

formundadır.

Teorem 2.4.1 *Her $n > 1$ tamsayısı için, B_n kare matrisinin Cholesky çarpanlaması*

$$B_n = L_1 L_1^T$$

şeklindedir. Burada n boyutlu L_1 ve L_1^T kare matrisleri yukarıda tanımlandığı gibidir.

İspat: *Bu ispatı üç kısımda inceleyeceğiz.*

1. Durum: *Birinci durum $i = j$ olması durumudur. Matris çarpımından*

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= b_{i,i} = \sum_{t=1}^{n} \ell_{i,t}\hat{\ell}_{t,i} = \sum_{t=1}^{i} \ell_{i,t}\hat{\ell}_{t,i} \\
&= \frac{U_{2ki}}{\sqrt{U_{2k}}}\frac{U_{2ki}}{\sqrt{U_{2k}}} + \sum_{t=2}^{i} \ell_{i,t}\hat{\ell}_{t,i} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2ki} + \sum_{t=2}^{i} \frac{\mathbf{i}U_{2k(i+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(t+1)}}\sqrt{U_{2kt}}}\frac{\mathbf{i}U_{2k(i+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(t+1)}}\sqrt{U_{2kt}}} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2ki} - U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(i+1)}\sum_{t=2}^{i} \frac{1}{U_{2k(t+1)}U_{2kt}}
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Burada (2.2.1) ile verilen sonucu kullanarak yukarıdaki eşitliği

$$\begin{aligned}
b_{i,i} &= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2ki} - U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(i+1)}\frac{U_{2k(i-1)}}{U_{2k(i+1)}U_{4k}U_{2k}} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}\left(U_{2ki}U_{2ki} - U_{2k(i+1)}U_{2k(i-1)}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu son eşitlikte genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ nin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
b_{i,i} &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}\frac{\left(\alpha^{2ki}-\beta^{2ki}\right)^2 - \left(\alpha^{2k(i+1)}-\beta^{2k(i+1)}\right)\left(\alpha^{2k(i-1)}-\beta^{2k(i-1)}\right)}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}\frac{\left(\alpha^{4k}+\beta^{4k}-2\right)}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}\left(\frac{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= U_{2k}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. ***Durum:*** *İkinci durum $i > j$ olması durumudur. Matris çarpımından*

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= \sum_{t=1}^{n} \ell_{i,t}\hat{\ell}_{t,j} = \sum_{t=1}^{j} \ell_{i,t}\hat{\ell}_{t,j} \\
&= \frac{U_{2ki}}{\sqrt{U_{2k}}}\frac{U_{2kj}}{\sqrt{U_{2k}}} + \sum_{t=2}^{j} \ell_{i,t}\hat{\ell}_{t,j} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} + \sum_{t=2}^{j} \frac{\mathbf{i}U_{2k(i+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(t+1)}}\sqrt{U_{2kt}}}\frac{\mathbf{i}U_{2k(j+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(t+1)}}\sqrt{U_{2kt}}} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} - U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(j+1)}\sum_{k=2}^{j}\frac{1}{U_{2k(t+1)}U_{2kt}}
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Burada (2.2.1) ile verilen sonucu ve önceki hesaplamalarımızda uyguladığımız gibi genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ nin Binet formülünü kullanarak yukarıdaki eşitliği

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} - U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(j+1)}\frac{U_{2k(j-1)}}{U_{2k(j+1)}U_{4k}U_{2k}} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}\left(U_{2ki}U_{2kj} - U_{2k(i+1)}U_{2k(j-1)}\right) \\
&= U_{2k(i-j+1)}
\end{aligned}$$

olarak buluruz.

3. ***Durum:*** *Üçüncü durum $i < j$ olması durumudur. Matris çarpımından*

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= \sum_{t=1}^{n} \ell_{i,t}\hat{\ell}_{t,j} = \sum_{t=1}^{i} \ell_{i,t}\hat{\ell}_{t,j} \\
&= \frac{U_{2ki}}{\sqrt{U_{2k}}}\frac{U_{2kj}}{\sqrt{U_{2k}}} + \sum_{t=2}^{i} \ell_{i,t}\hat{\ell}_{t,j} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} + \sum_{t=2}^{i} \frac{\mathbf{i}U_{2k(i+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(t+1)}}\sqrt{U_{2kt}}}\frac{\mathbf{i}U_{2k(j+1)}\sqrt{U_{4k}}}{\sqrt{U_{2k(t+1)}}\sqrt{U_{2kt}}} \\
&= \frac{1}{U_{2k}}U_{2ki}U_{2kj} - U_{4k}U_{2k(i+1)}U_{2k(j+1)}\sum_{t=2}^{i}\frac{1}{U_{2k(t+1)}U_{2kt}}
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Bu son eşitlikte (2.2.1) ile verilen sonucu ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ *nin Binet formülünü kullanılarak*

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \frac{1}{U_{2k}} U_{2ki} U_{2kj} - U_{4k} U_{2k(i+1)} U_{2k(j+1)} \frac{U_{2k(i-1)}}{U_{2k(i+1)} U_{4k} U_{2k}} \\ &= \frac{1}{U_{2k}} \left(U_{2ki} U_{2kj} - U_{2k(i-1)} U_{2k(j+1)} \right) \\ &= U_{2k(j-i+1)} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek 2.4.1 *Eğer* $k = 1$ *ve* $p = 2$ *olarak ele alınırsa,* $p = 2$ *için genelleştirilmiş Fibonacci dizisi* $\{U_n\}$*, bilinen Pell dizisi* $\{P_n\}$ *e dönüşür. Bu durumda*

$$B_n = \begin{bmatrix} P_2 & P_4 & P_6 & \cdots & P_{2n} \\ P_4 & P_2 & P_4 & \cdots & P_{2(n-1)} \\ P_6 & P_4 & P_2 & \cdots & P_{2(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ P_{2n} & P_{2(n-1)} & P_{2(n-2)} & \cdots & P_2 \end{bmatrix}$$

formunda olur ve buna karşılık

$$L_1 = \begin{bmatrix} \frac{P_2}{\sqrt{P_2}} & & & & 0 \\ \frac{P_4}{\sqrt{P_2}} & \frac{\mathbf{i} P_6 \sqrt{P_4}}{\sqrt{P_6}\sqrt{P_4}} & & & \\ \frac{P_6}{\sqrt{P_2}} & \frac{\mathbf{i} P_8 \sqrt{P_4}}{\sqrt{P_6}\sqrt{P_4}} & \frac{\mathbf{i} P_8 \sqrt{P_4}}{\sqrt{P_8}\sqrt{P_6}} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{P_{2n}}{\sqrt{P_2}} & \frac{\mathbf{i} P_{2(n+1)} \sqrt{P_4}}{\sqrt{P_6}\sqrt{P_4}} & \frac{\mathbf{i} P_{2(n+1)} \sqrt{P_4}}{\sqrt{P_8}\sqrt{P_6}} & \cdots & \frac{\mathbf{i} P_{2(n+1)} \sqrt{P_4}}{\sqrt{P_{2(n+1)}}\sqrt{P_{2n}}} \end{bmatrix}$$

olmak üzere B_n matrisi için Cholesky çarpanlaması

$$B_n = L_1 L_1^T$$

şeklindedir.

2.5 MATRİSİN TERSİ

Şimdi B_n matrisinin tersi için kapalı bir form elde etmeye çalışacağız. Bunu yapmak için B_n matrisinin LU çarpanlamasından yararlanacağız. Bu çarpanlama

$$B_n = LU$$

formunda olduğundan, bu matris eşitliğinde her iki tarafın tersini alırsak

$$B_n^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafını göz önüne alırsak B_n matrisinin tersini elde etmiş oluruz. Buna göre, L ve U matrislerinin tersini hesaplamamız gerekecektir.

Lemma 2.5.1 *$L^{-1} = \left[\tilde{l}_{i,j}\right]$ matrisi ile L matrisinin tersini gösterelim. Bu durumda*

$$\tilde{l}_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{U_{2k(i+1)}}{U_{2ki}} & i = j+1 \text{ ve } j \neq 1 \text{ ise,} \\[2ex] -\dfrac{U_{2k}}{U_{2ki}} & i > 2 \text{ ve } j = 1 \text{ ise,} \\[2ex] 1 & i = j \text{ ise,} \end{cases}$$

$\tilde{l}_{2,1} = -\dfrac{U_{4k}}{U_{2k}}$ ve diğer durumlarda $\tilde{l}_{i,j} = 0$ dır.

Açıkça L^{-1} matrisi

$$L^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ -\frac{U_{4k}}{U_{2k}} & 1 & & & & & \\ -\frac{U_{2k}}{U_{6k}} & -\frac{U_{8k}}{U_{6k}} & 1 & & & & \\ -\frac{U_{2k}}{U_{8k}} & 0 & -\frac{U_{10k}}{U_{8k}} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ -\frac{U_{2k}}{U_{2k(n-1)}} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{U_{2kn}}{U_{2k(n-1)}} & 1 & \\ -\frac{U_{2k}}{U_{2kn}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{U_{2k(n+1)}}{U_{2kn}} & 1 \end{bmatrix}$$

formundadır.

İspat: *İspat L^{-1} ve L matrislerinin çarpımından kolaylıkla elde edilebilir.* ■

Lemma 2.5.2 *$U^{-1} = [\tilde{u}_{i,j}]$ matrisi ile U kare matrisinin tersini gösterelim. Bu durumda*

$$\tilde{u}_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{U_{4k}} & j = i+1 \text{ ve } i \neq 1 \text{ ise}, \\ \frac{U_{2k}}{U_{4k}U_{2k(j+1)}} & j > 2 \text{ ve } i = 1 \text{ ise}, \\ -\frac{U_{2ki}}{U_{4k}U_{2k(i+1)}} & i = j \neq 1 \text{ ise}, \end{cases}$$

$\tilde{u}_{1,1} = \frac{1}{U_{2k}}$, $\tilde{u}_{1,2} = \frac{U_{4k}}{U_{2k}U_{6k}}$ *ve diğer durumlarda* $\tilde{u}_{i,j} = 0$ *dır.*

Açıkça U^{-1} matrisi

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{U_{2k}} & \frac{U_{4k}}{U_{2k}U_{6k}} & \frac{U_{2k}}{U_{4k}U_{8k}} & \frac{U_{2k}}{U_{4k}U_{10k}} & & \cdots & \frac{U_{2k}}{U_{4k}U_{2n(k+1)}} \\ & -\frac{1}{U_{6k}} & \frac{1}{U_{4k}} & 0 & & \cdots & 0 \\ & & -\frac{U_{6k}}{U_{4k}U_{8k}} & \frac{1}{U_{4k}} & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \frac{1}{U_{4k}} & 0 \\ & & & & & -\frac{U_{2k(n-1)}}{U_{4k}U_{2kn}} & \frac{1}{U_{4k}} \\ 0 & & & & & & -\frac{U_{2kn}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}} \end{bmatrix}$$

formundadır.

İspat: *İspat U^{-1} ve U matrislerinin çarpımından kolaylıkla elde edilebilir.* ■

Bu bilgilerin ışığı altında B_n matrisinin tersini aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem 2.5.1 *Her $n > 1$ tamsayısı için, $B_n^{-1} = \left[\tilde{b}_{i,j}\right]$ olmak üzere*

$$\tilde{b}_{i,j} = \begin{cases} -\frac{1}{U_{2k}} & i = j \text{ ve } i \neq 1, i \neq n \text{ ise}, \\ \frac{1}{U_{4k}} & |i - j| = 1 \text{ ise}, \end{cases}$$

$\tilde{b}_{1,1} = \tilde{b}_{n,n} = -\frac{U_{2nk}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}}$, $\tilde{b}_{1,n} = \tilde{b}_{n,1} = \frac{U_{2k}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}}$ *ve diğer durumlarda* $\tilde{b}_{i,j} = 0$ *olarak tanımlanır.*

Açıkça B_n^{-1} *ters matrisi*

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{U_{2kn}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}} & \dfrac{1}{U_{4k}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{U_{2k}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}} \\ \dfrac{1}{U_{4k}} & -\dfrac{1}{U_{2k}} & \dfrac{1}{U_{4k}} & 0 & & & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{U_{4k}} & -\dfrac{1}{U_{2k}} & \dfrac{1}{U_{4k}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \dfrac{1}{U_{4k}} & -\dfrac{1}{U_{2k}} & \dfrac{1}{U_{4k}} & 0 \\ 0 & & & 0 & \dfrac{1}{U_{4k}} & -\dfrac{1}{U_{2k}} & \dfrac{1}{U_{4k}} \\ \dfrac{U_{2k}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{1}{U_{4k}} & -\dfrac{U_{2kn}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}} \end{bmatrix}$$

formundadır.

İspat: B_n *matrisinin* LU *çarpanlaması göz önüne alınırsa* B_n *matrisinin tersinin*

$$B_n^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

olduğunu biliyoruz. Lemma (2.5.1) - (2.5.2) , *(2.2.1) eşitliği ile verilen sonuç ve* *genelleştirilmiş Fibonacci dizisi* $\{U_n\}$ *nin Binet formülünü kullanarak*

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{1,1} &= \sum_{t=1}^{n} \tilde{u}_{1,t}\tilde{l}_{t,1} \\
&= \frac{1}{U_{2k}} + \frac{1}{U_{2k}}\frac{U_{4k}}{U_{6k}}\left(-\frac{U_{4k}}{U_{2k}}\right) + \sum_{t=3}^{n}\frac{U_{2k}}{U_{4k}}\frac{1}{U_{2k(t+1)}}\left(-\frac{U_{2k}}{U_{2kt}}\right) \\
&= \frac{1}{U_{2k}} - \frac{U_{4k}^2}{U_{2k}^2U_{6k}} - \frac{U_{2k}^2}{U_{4k}}\sum_{t=3}^{n}\frac{1}{U_{2kt}U_{2k(t+1)}} \\
&= \frac{1}{U_{2k}} - \frac{U_{4k}^2}{U_{2k}^2U_{6k}} - \frac{U_{2k}^2}{U_{4k}}\left(\frac{U_{2k(n-1)}}{U_{2k(n+1)}U_{4k}U_{2k}} - \frac{1}{U_{4k}U_{6k}}\right) \\
&= \frac{1}{U_{2k}} - \frac{U_{4k}^2}{U_{2k}^2U_{6k}} - \frac{U_{2k}U_{2k(n-1)}}{U_{4k}^2U_{2k(n+1)}} + \frac{U_{2k}^2}{U_{4k}^2U_{6k}} \\
&= -\frac{U_{2kn}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}}
\end{aligned}$$

ve

$$\tilde{b}_{n,n} = \sum_{t=1}^{n}\tilde{u}_{n,t}\tilde{l}_{t,n} = \tilde{u}_{n,n}\tilde{l}_{n,n} = -\frac{U_{2kn}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}},$$

$$\tilde{b}_{1,n} = \sum_{t=1}^{n}\tilde{u}_{1,t}\tilde{l}_{t,n} = \tilde{u}_{1,n}\tilde{l}_{n,n} = \frac{U_{2k}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}},$$

$$\tilde{b}_{n,1} = \sum_{t=1}^{n}\tilde{u}_{n,t}\tilde{l}_{t,1} = \tilde{u}_{n,n}\tilde{l}_{n,1} = \frac{U_{2k}}{U_{4k}U_{2k(n+1)}}$$

şeklinde bulunur.

$1 < i < n$ *için,*

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{i,i} &= \sum_{t=1}^{n} \tilde{u}_{i,t}\tilde{l}_{t,i} = \tilde{u}_{i,i}\tilde{l}_{i,i} + \tilde{u}_{i,i+1}\tilde{l}_{i+1,i} \\
&= -\frac{1}{U_{4k}}\frac{U_{2ki}}{U_{2k(i+1)}} + \frac{1}{U_{4k}}\left(-\frac{U_{2k(i+1)+2k}}{U_{2k(i+1)}}\right) \\
&= -\frac{1}{U_{4k}}\left(\frac{\alpha^{2ki} - \beta^{2ki} + \alpha^{2ki+4k} - \beta^{2ki+4k}}{\alpha^{2ki+2k} - \beta^{2ki+2k}}\right) \\
&= -\frac{\alpha - \beta}{\alpha^{4k} - \beta^{4k}}\left(\frac{\left(\alpha^{2ki+2k} - \beta^{2ki+2k}\right)\left(\frac{1}{\alpha^{2k}} + \frac{1}{\beta^{2k}}\right)}{\alpha^{2ki+2k} - \beta^{2ki+2k}}\right) \\
&= -\frac{(\alpha - \beta)\left(\alpha^{2k} + \beta^{2k}\right)}{\left(\alpha^{2k} - \beta^{2k}\right)\left(\alpha^{2k} + \beta^{2k}\right)} \\
&= -\frac{1}{U_{2k}}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\tilde{b}_{i,i+1} = \sum_{t=1}^{n} \tilde{u}_{i,t}\tilde{l}_{t,i+1} = \tilde{u}_{i,i+1}\tilde{l}_{i+1,i+1} = \frac{1}{U_{4k}}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{i+1,i} &= \sum_{t=1}^{n} \tilde{u}_{i+1,t}\tilde{l}_{t,i} = \tilde{u}_{i+1,i+1}\tilde{l}_{i+1,i} \\
&= \left(-\frac{1}{U_{4k}}\frac{U_{2k(i+1)}}{U_{2k(i+1)+2k}}\right)\left(-\frac{U_{2k(i+1)+2k}}{U_{2k(i+1)}}\right) = \frac{1}{U_{4k}}
\end{aligned}$$

sonuçlarını elde ederiz ve böylece ispat tamamlanır. ∎

3. MATRİS NORMLARI

Bu kısımda B_n matrisinin çeşitli matris normlarını hesaplayacağız.

İlk olarak, hesaplamalarımızda sıkça kullanacağımız ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ nin Binet formülünden elde ettiğimiz aşağıdaki toplam formüllerine ihtiyacımız olacaktır. Bu formüller

$$\sum_{r=1}^{n} U_{2kr} = \frac{U_{2k(n+1)} - U_{2kn} - U_{2k}}{V_{2k} - 2},$$

$$\sum_{r=1}^{n} rU_{2kr} = \frac{nU_{2k(n+2)} - (3n+1)\,U_{2k(n+1)} + (3n+2)\,U_{2kn} - (n+1)\,U_{2k(n-1)}}{(V_{2k} - 2)^2},$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_{2kr}^2 = \frac{V_{4k(n+1)} - V_{4kn} - (2n+1)\,V_{4k} + 4n + 2}{(V_{4k} - 2)\,(V_2 + 2)},$$

$$\sum_{r=1}^{n} rU_{2kr}^2 = \frac{nV_{4k(n+2)} - (3n+1)\,V_{4k(n+1)} + (3n+2)\,V_{4kn} - (n+1)\,V_{4k(n-1)}}{(V_{4k} - 2)^2\,(V_2 + 2)}$$

$$+\frac{2V_{4k} - 4}{(V_{4k} - 2)^2\,(V_2 + 2)}$$

şeklindedir.

Bu bilgilerin ışığı altında, bahsedilen matris normlarını hesaplamaya başlayabiliriz.

B_n kare matrisinin ℓ_1 matris normu

$$\begin{aligned}
\|B_n\|_1 &= \sum_{i,j=1}^{n} |b_{i,j}| = nU_{2k} + 2(n-1)U_{4k} + 2(n-2)U_{6k} + \cdots + 2U_{2nk} \\
&= nU_{2k} + \sum_{r=2}^{n} 2(n-r+1)U_{2kr} \\
&= nU_{2k} + (2n+2)\sum_{r=2}^{n} U_{2kr} - 2\sum_{r=2}^{n} rU_{2kr} \\
&= nU_{2k} + (2n+2)(-U_{2k}) - 2(-U_{2k}) \\
&\quad + \frac{(2n+2)\left(U_{2k(n+1)} - U_{2kn} - U_{2k}\right)}{V_{2k}-2} \\
&\quad - \frac{2\left(nU_{2k(n+2)} - (3n+1)U_{2k(n+1)} + (3n+2)U_{2kn} - (n+1)U_{2k(n-1)}\right)}{(V_{2k}-2)^2} \\
&= -nU_{2k} + \frac{(2n+2)\left(U_{2k(n+2)} - 3U_{2k(n+1)} + 3U_{2kn} - U_{2k(n-1)} - U_{4k} + 2U_{2k}\right)}{(V_{2k}-2)^2} \\
&\quad - \frac{2\left(nU_{2k(n+2)} - (3n+1)U_{2k(n+1)} + (3n+2)U_{2kn} - (n+1)U_{2k(n-1)}\right)}{(V_{2k}-2)^2} \\
&= -nU_{2k} + \frac{2U_{2k(n+2)} - 4U_{2k(n+1)} + 2U_{2kn} - (2n+2)(U_{4k} - 2U_{2k})}{(V_{2k}-2)^2}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

B_n matrisinin ℓ_2 matris normu (Öklid normu) ise $m = 4n^2 + 6n + 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|B_n\|_2 &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} |b_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{nU_{2k}^2 + 2(n-1)U_{4k}^2 + 2(n-2)U_{6k}^2 + \cdots + 2U_{2kn}^2} \\
&= \sqrt{nU_{2k}^2 + \sum_{r=2}^{n} 2(n-r+1)U_{2kr}^2} \\
&= \sqrt{nU_{2k}^2 + (2n+2)\sum_{r=2}^{n} U_{2kr}^2 - 2\sum_{r=2}^{n} rU_{2kr}^2} \\
&= \sqrt{-nU_{2k}^2 + \frac{2V_{4k(n+2)} - 4V_{4k(n+1)} + 2V_{4kn} - mV_{8k} + (4m-4)\,V_{4k} - 6m + 8}{(V_{4k}-2)^2\,(V_2+2)}}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Üzerinde çalıştığımız B_n matrisi, simetrik bir matris olduğundan bu matrisin maksimum sütun toplam matris normu ile maksimum satır toplam matris normu birbirine eşittir. Yani, maksimum sütun toplam matris normu olan

$$|||B_n|||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |b_{i,j}|$$

ve maksimum satır toplam matris normu olan

$$|||B_n|||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|$$

ifadeleri birbirine eşittir. Bu yüzden, bu matris normlarından herhangi birini hesaplamak bizim için yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}
|||B_n|||_\infty &= |||B_n|||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |b_{i,j}| \\
&= \sum_{r=1}^{n} U_{2kr} = \frac{U_{2k(n+1)} - U_{2kn} - U_{2k}}{V_{2k} - 2}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

B_n matrisinin ℓ_∞ normu

$$\|B_n\|_\infty = n \max_{1\leq i,j\leq n} |b_{i,j}| = nU_{2kn}$$

şeklinde hesaplanır.

B_n matrisinin maksimum normu ise

$$\|B_n\|_{\max} = \max_{1\leq i,j\leq n} \{|b_{i,j}|\} = U_{2kn}$$

şeklindedir.

Matris normları ile ilgili bulduğumuz değerleri özetleyecek olursak;

$$||B_n||_1 = -nU_{2k} + \frac{2U_{2k(n+2)} - 4U_{2k(n+1)} + 2U_{2kn} - (2n+2)\left(U_{4k} - 2U_{2k}\right)}{\left(V_{2k} - 2\right)^2},$$

$$||B_n||_2 = \sqrt{-nU_{2k}^2 + \frac{2V_{4k(n+2)} - 4V_{4k(n+1)} + 2V_{4kn} - mV_{8k} + (4m-4)V_{4k} - 6m + 8}{\left(V_{4k}-2\right)^2\left(V_2+2\right)}},$$

$$|||B_n|||_\infty = |||B_n|||_1 = \frac{U_{2k(n+1)} - U_{2kn} - U_{2k}}{V_{2k} - 2},$$

$$\|B_n\|_\infty = n \max_{1\leq i,j\leq n} |b_{i,j}| = nU_{2kn},$$

$$\|B_n\|_{\max} = \max_{1\leq i,j\leq n} \{|b_{i,j}|\} = U_{2kn},$$

sonuçları elde edilir.Tüm bu hesaplamalardan sonra görebiliriz ki

$$|||B_n|||_\infty = |||B_n|||_1 = \frac{U_{2k(n+1)} - U_{2kn} - U_{2k}}{V_{2k} - 2}$$

minimum matris normudur. Böylece B_n matrisinin spektiral yarıçapı için bir üst sınır bulmuş oluruz ve

$$\rho\left(B_n\right) < \frac{U_{2k(n+1)} - U_{2kn} - U_{2k}}{V_{2k} - 2}$$

eşitsitsizliğini elde ederiz.

Örnek 3.0.1 *Eğer $k = p = 1$ alınırsa, $p = 1$ için genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$, bilinen Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ e dönüşür. Bu durumda*

$$B_n = \begin{bmatrix} F_2 & F_4 & F_6 & \cdots & F_{2n} \\ F_4 & F_2 & F_4 & \cdots & F_{2(n-1)} \\ F_6 & F_4 & F_2 & \cdots & F_{2(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{2n} & F_{2(n-1)} & F_{2(n-2)} & \cdots & F_2 \end{bmatrix}$$

formunda olur.

Böylece B_n matrisi için matris normlarının tanımından aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\|B_n\|_1 = 2F_{2n+2} - 3n - 2$$

$$\|B_n\|_2 = \sqrt{\frac{2L_{4(n+2)} - 4L_{4(n+1)} + 2L_{4n} - 100n^2 - 275n - 70}{125}}$$

$$|||B_n|||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| = F_{2n+1} - 1$$

$$|||B_n|||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| = F_{2n+1} - 1$$

$$\|B_n\|_\infty = n \max_{1 \le i,j \le n} |b_{i,j}| = nF_{2n}$$

$$\|B_n\|_{\max} = \max_{1 \le i,j \le n} \{|b_{i,j}|\} = F_{2n}$$

Bu değerleri bir tabloda gösterecek olursak;

Tablo 3.1: Matris normları değerleri

n	$\|\|B_n\|\|_1$	$\|\|B_n\|\|_2$	$\|\|\|B_n\|\|\|_1 = \|\|\|B_n\|\|\|_\infty$	$\|B_n\|_\infty$	$\|B_n\|_{\max}$	$\rho(B_n)$
3	31	12.923	**12**	24	8	10,831
4	96	34.583	**33**	84	21	27, 213
5	271	90.967	**88**	275	55	68, 257
6	734	238.38	**232**	864	144	173, 67
7	1951	624.21	**609**	2639	377	443, 72
8	5142	1634.3	**1596**	7896	987	1144, 2
9	13501	4278.6	**4180**	23256	2584	2551, 2
10	35 390	11201	**10 945**	67650	6765	7330, 2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

sonuçlarını elde ederiz.

Tablodaki değerlerden de gördüğümüz üzere, B_n matrisinin spektiral yarıçapı için en uygun üst sınır $|||B_n|||_1 = |||B_n|||_\infty = F_{2n+1} - 1$ matris normudur.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, elemanları genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ nin çift indisli terimlerinden oluşan B_n kombinatoryal matrisini tanımladık. Bu matrisin LU çarpanlaması, Cholesky çarpanlaması, determinantı ve tersi hesaplandı. Böylece oluşturduğumuz B_n matrisi yeni bir test matrisidir diyebiliriz. Ayrıca B_n kombinatoryal matrisi için çeşitli matris norm değerlerini hesapladık. Hesaplanan matris normlarının değerleri yardımı ile B_n matrisinin spektiral yarıçapı için en iyi bir üst sınırı verildi.

Kaynakça

[1] Hilbert, D., Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms, *Acta Mathematica*, **18**: 155–159, 1894.

[2] Kılıc, E. and Irmak,N., Reciprocal sums of l-th power of generalized binary sequences with indices, *Ars Combintoria,* **88**: 407–413, 2008.

[3] Kılıc, E. and Stanica, P., The Lehmer matrix and its recursive analogue, *J. Combinat. Math. and Combinat. Computing*, **74**: 193–207, 2010.

[4] Newman, M. and Todd, J., The evaluation of matrix inversion program, *J. Society Industrial and Appl. Math.,* **6**: 466–476, 1958.

[5] Richardson, T., M., The Filbert Matrix, *The Fibonacci Quarterly*, **39**(3): 268–275, 2001.

[6] Seibert, J., Problem B-978, Determine the Determinant, *The Fibonacci Quarterly*, **43**(1) : 88–89, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: ÖZDEMİR, Gülşah
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 14.05.1989 Nizip
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 05054878711
e-mail	: gulsah.ozdemir@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Y. Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2013
Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2012
Lise	Rahmi Kula Anadolu Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2012-2013	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (Çok iyi)
İspanyolca (İyi)

Uluslararası Bildiriler

E. Kılıç ve G. Özdemir, An Another Symmetric Fibonacci Matrix II, $8^{ème}$ Rencontre d'Analyse Mathématique et ses Applications, 26-29 Kasım 2012, Cezayir.