

**HİSSE SENETLERİNDE OLABİLECEK EN BÜYÜK KAYBIN
ASİMPOTİK DAĞILIMI UYGULAMALARI**

ZABİT İSLAMOV

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ**

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2013

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

ZABİT İSLAMOV tarafından hazırlanan HİSSE SENETLERİNDE OLABİLECEK EN BÜYÜK KAYBIN ASİMPOTİK DAĞILIMI UYGULAMALARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Harun KÜRKCÜ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yeliz YOLCU OKUR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Zabit İSLAMOV

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Matematik Bölümü
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Temmuz 2013

Zabit İSLAMOV

HİSSE SENETLERİNDE OLABİLECEK EN BÜYÜK KAYBIN ASİMPTOTİK DAĞILIMI UYGULAMALARI

ÖZET

Bir finansal varlığın fiyatındaki en büyük düşüş, risk ölçüsü olarak finansal piyasalarda yaygın kullanılmaktadır. Brown hareketi için maksimum kayıp değişkeni üzerine literatürde bazı analitik sonuçlar vardır, fakat süreç kesirli Brown hareketi olduğu zaman benzer sonuçlar henüz mevcut değildir. Maksimum kayıp değişkeni üzerine olan çalışmalar büyük çoğunlukla deneysel çalışmalar olduğundan, bu stokastik değişkenle ilgili olarak sınırlar bulunması veya var olan sınırların geliştirilmesi, üzerinde çok çalışılan konulardandır. Bu tez çalışmasında, Brown hareketi maksimum kayıp değişkeni dağılımı ve beklenen değeri, bunların finansta uygulanmasına dair literatür taraması yapılmış ve 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketi maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için teorik olarak ispatlanmış yeni bir alt sınır bulunmuştur. Daha sonra bu, herhangi bir t zamanına kadar genelleştirilmiştir. Son olarak gerçek piyasadaki alınmış veriler kullanılarak kesirli Brown hareketi maksimum kayıp değişkeni sınırlarını test etme amaçlı uygulama çalışması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Brown Hareketi, Kesirli Brown hareketi, Maksimum Kayıp, İlk Geçiş Zamanı, Risk Ölçüsü, Sudakov-Fernique Eşitsizliği.

University : TOBB University of Economics and Technology
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Department of Mathematics
Supervisor : Asst. Prof. Ceren VARDAR ACAR
Degree Awarded and Date : M.Sc. – July 2013

Zabit İSLAMOV

**APPLICATION OF ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF DISTRIBUTION
OF MAXIMUM LOSS IN STOCK PRICES**

ABSTRACT

Maximum loss in the price of an asset is widely used as a measure of risk in financial markets. There are some analytical results on maximum loss of a Brownian motion, but for now such results do not exist for fractional Brownian motion. Since most work on maximum loss is empirical, it is relevant to work on finding and to improve new bounds related to this stochastic variable. In this thesis, we give some pre-existed results on the distribution and expected value of Brownian motion with application to finance and present a new improved theoretically proven lower bound to the expected value of maximum loss of fractional Brownian motion up to time 1. Later we generalize it up to any time t . Finally we perform a real data test to verify the results on the bounds of maximum loss of fractional Brownian motion.

Keywords: Brownian motion, Fractional Brownian Motion, Maximum Loss, First Passage Time, Risk Measure, Sudakov-Fernique Inequality.

TEŐEKKÜR

Tez alıőmalarım boyunca destek ve katkılarıyla beni yönlendiren ok değerli hocam Yrd. Do. Dr. Ceren VARDAR ACAR'a, yardımlarımı esirgemeyen değerli asistan arkadaşlarıma, beni her zaman destekleyip bugünlere getiren sevgili anne ve babama, kardeşlerime teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1	GİRİŞ	1
2	TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1	Standart Brown Hareketi	3
2.2	Kesirli Brown Hareketi	4
2.2.1	İki Artış Arasındaki Kovaryans	5
2.2.2	Özbenzerlik	5
2.2.3	Uzun Süreli Bağımlılık	5
2.3	Yutan Engel ve Yansıtıcı Engel	6
2.4	Isı Denklemi	7
2.5	Driftli Wiener Süreci için Fokker-Planck Denklemi	8
2.6	Finansal Portföyler	9
3	İLK GEÇİŞ ZAMANI DAĞILIM VE YOĞUNLUĞU	10
3.1	İlk Geçiş Zamanı	10
3.1.1	Dağılım ve Yoğunluk	10
3.1.2	İki Esnek Engelle Verilen Süreç İçin İlk Geçiş Zamanı	11
3.2	İki Esnek Engelle Verilen Süreç İçin Fokker-Planck Denklemi	11

3.2.1	Sınır Değer Probleminin Çözümü	12
3.2.2	Genel Çözüm	27
3.2.3	Başlangıç Şart Kullanılarak En Genel Çözümde Sabitlerin Bulunması	29
3.3	İlk geçiş Zamanı İçin Dağılım ve Yoğunluğun Elde Edilmesi	35
3.3.1	Özel Bir Durum İçin Dağılım ve Yoğunluk	39
4	BROWN HAREKETİ İÇİN MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİNİN DAĞILIM VE BEKLENEN DEĞERİ	42
4.1	Bir Sürecin İnfemum, Supremum, Menzil ve Maksimum Kayıp Değişkeni	42
4.2	Maksimum Kayıp Değişkeninin Dağılımı ve Beklenen Değeri	43
4.2.1	İnfemum, Supremum ve Menzil için Beklenen Değer	45
4.2.2	Maksimum Kayıp Değişkeninin Beklenen Değeri Hesaplanması ve Asimptotik Davranışı	48
5	MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİNİN FİNANSDA UYGULANMASI	58
5.1	Finansda Risk Ölçümü	58
5.1.1	Calmar Oranı	58
5.2	Maksimum Kayıp Değişkeni Beklenen Değerinin Uygulanması	59
5.2.1	Beklenen Değerin Asimptotik Davranışı	59
5.2.2	Normalleştirilmiş Calmar Oranı	60
5.2.3	Portföylerin Karşılaştırılması	61
6	KESİRLİ BROWN HAREKETİNİN MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİ ÜZERİNE UYGULAMA VE SONUCUMUZ	64

6.1	Maksimum Kayıp Değişkeni Beklenen Değeri İçin Literatürde Var Olan Sınırlar	64
6.2	Maksimum Kayıp Değişkeni Beklenen Değeri Alt Sınırı Üzerine Sonucumuz	65
6.3	Gerçek Veriler Üzerindeki Çalışmamız	72
	KAYNAKLAR	75
	EKLER	77
	A Terim Sözlüğü	78
	ÖZGEÇMİŞ	79

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

3.1	$c < 0$ iken olabilecek durumlar	17
3.2	$c > 0$ durumu	17
3.3	$c = 0$ durumu	17
3.4	$c > 0$ durumu	21
3.5	$c = 0$ durumu	21
3.6	$c < 0$ iken olabilecek durumlar	21
3.7	$m > 0$ iken olabilecek durumlar	24
3.8	$m < 0$ durumu	25
4.1	maksimum kayıp, menzil, supremum ve infimum değişkenleri	43
6.1	Fenerbahçe SK, Z	74
6.2	Ülker, Z	74

1. GİRİŞ

Finansal olayları ifade etmek için stokastik süreç kavramının kullanılması son zamanların önemli konularından biri haline gelmiştir. Fiyatlardaki dalgalanmaları modellemede stokastik diferansiyel denklemlerin kullanımı veya hisse senetlerinin değerleri için modellerin oluşturulmasında Markov sürecinden yararlanması gibi durumlar buna birer örnek olabilir, [26]. Bu tez çalışmasında geniş yer verdiğimiz Brown hareketi ve kesirli Brown hareketi de birer stokastik süreçlerdir ve hisse senedinin getirisi için kurulan modellerde kullanılırlar. Kesirli Brown hareketi kullanılarak elde edilen Black-Scholes modeli

$$Y_t = Y_0 e^{(r+\mu)t + \sigma B_t^H}, \quad 0 \leq t \leq \tau$$

şeklinde veriliyor. Burada Y_0 başlangıç değeri, r sabit faiz oranını, $\mu \in \mathbb{R}_+$ genel fiyat artış veya düşüş eğilimini, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ oynaklık katsayısını, B_t^H ise ($H > 1/2$) kesirli Brown hareketini gösterir.

Yatırımlar için finansal piyasalarda en önemli unsurlardan biri de risk ölçümüdür, yani bir değere yatırım yapmadan önce yatırım amacına bağlı olarak kısa veya uzun vadede bu değerın fiyatının ileride nasıl davranacağı hakkında kaba da olsa bir bilgi sahibi olmak çok önemlidir. Geçmişten bu yana risk ölçümü olarak en çok standart sapmadan yararlanılmıştır, fakat son zamanlar maksimum kayıp değişkenin kullanımı bu alanda daha yaygın hale gelmiştir. Özellikle bu değişkenin beklenen değeri ve beklenen değerin asimptotik davranışı ile finansal portföylerin verimliliği arasında olan direkt bir ilişki söz konusu olabilir, [4]. Dahası, kazanç tamamen riskli olduğu durumlarda aşırı nakit akışı belirsizliği de söz konusu ise yatırımcının faydası sadece maksimum kayıp değişkeninin beklenen faydasına bağlıdır, [25].

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde, Brown hareketi için maksimum kayıp değişkeni dağılım ve beklenen değerinin bulunması ve beklenen değerin asimptotik davranışına geniş yer verilmiştir, [3]. Bunun için ilk geçiş zamanı dağılım ve yoğunluk fonksiyonu kullanıldığından, üçüncü bölümde Fokker-Planck denklemi (veya Kolmogorow forward denklemi) kullanılarak ilk geçiş zamanı dağılım ve yoğunluk fonksiyonlarının çıkarılması detaylı bir şekilde ele alınmıştır, [2]. Beşinci bölümde, maksimum kayıp değişkeninin finasta risk ölçümü olarak uygulanması ve bu değişkenin beklenen değerinin finansal portföylerin oluşturulması ve karşılaştırılması açısından da nasıl bir etkiye sahip olduğundan bahsedilmiştir, [4]. Brown hareketi için yukarıda bahsettiğimiz analitik sonuçların bulunmasındaki en büyük etken bu sürecin Markov özelliğine sahip olmasıdır, fakat kesirli Brown hareketi bu özelliğe sahip olmadığından aynı yöntemleri kullanarak bu tür analitik sonuçların bulunması mümkün değildir. Yeni metodların da henüz bulunamamasından dolayı kesirli Brown hareketi maksimum kayıp

değişkeni üzerine olan sonuçların büyük çoğunluğu deneysel ve nümerik sonuçlardır. Bu değişken ve süreç üzerinde tanımlanmış diğer değişkenler için sınırlar oluşturulması ve geliştirilmesi bu çalışmalara bir örnek olarak gösterilebilir. Son bölüm olan altıncı bölümde kesirli Brown hareketi maksimum kayıp değişkeni üzerine literatürde var olan sınırlardan ve elde ettiğimiz yeni alt sınırdan bahsedilmiştir. Kesirli Brown hareketi maksimum kayıp değişkeni beklenen değeri sınırları üzerine olan sonuçları test etmek için gerçek piyasadan alınmış veriler üzerinde çalışmalar yapılarak maksimum kayıp değişkeni beklenen değeri hesaplanmıştır. Nihayet, ikinci bölümde, bütün bölümlerde kullanılmış olan temel kavramlar hakkınada gereken bilgilere ve İto stokastik sistemleri için Fokker-Plank denkleminin çıkarılışına yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ileride sıkça kullanılacak olan bazı temel kavram ve tanımlardan bahsedilecek.

Tanım 2.0.1. (Ω, \mathcal{F}, P) olasılık uzayı ve $\tau \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $f : \Omega \times \tau \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(\omega, t)$ fonksiyonuna rastgele fonksiyon denir. Eğer $\tau = [0, \infty]$ ve $t \in \tau$ zaman olarak yorumlanırsa $f(\omega, t)$ 'ye stokastik süreç denir.

Tanım 2.0.2. $\{X_t; t \geq 0\}$ stokastik süreci $0 \leq t_1 < \dots < t_N$ rastgele zamanları için

$$P(X_{t_N} = x_N | X_{t_{N-1}} = x_{N-1}, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_{t_N} = x_N | X_{t_{N-1}} = x_{N-1})$$

şartını sağlarsa bu sürece Markov süreci adı verilir. Herhangi $t > s$ için

$$P(t, y; s, x) := P(X_t = y | X_s = x)$$

olasılığına ise geçiş olasılığı denilir. Geçiş olasılığı yoğunluğu $p(t, y; s, x)$ ise aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\int_A p(t, y; s, x) dy = P(X_{t+s} \in A | X_s = x) = P(X_t \in A | X_0 = x)$$

Tanım 2.0.3. X_t , $dX = \mu(t, X)dt + \sigma(t, X)dW$ stokastik diferensiyel denklemini sağlayan bir süreç ve $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olsun.

$$Y = f(t, X_t)$$

şeklinde tanımlanan Y fonksiyonu için İto formülü aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\begin{aligned} dY &= \left[\frac{\partial f(t, X)}{\partial t} + \mu(t, X) \frac{\partial f(t, X)}{\partial X} + \frac{\sigma^2(t, X)}{2} \frac{\partial^2 f(t, X)}{\partial X^2} \right] dt \\ &\quad + \sigma(t, X) \frac{\partial f(t, X)}{\partial X} dW \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.1 Standart Brown Hareketi

Tanım 2.1.1. (Ω, \mathcal{F}, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış x noktasından başlayan standart Brown hareketi,

1. $W_0 = 0$
2. $s \rightarrow W_s$ süreklidir

3. Bütün $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ için $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}$ artışları normal dağılıma sahiptir, yani $E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = 0$ ve $E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = t_i - t_{i-1}$

şartlarını sağlayan bir stokastik süreçtir.

Standart Brown hareketi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $Cov(W_s, W_t) = \min(s, t)$
- τ , W tarafından üretilen filtirasyona bağlı durma zamanı ve \mathcal{F}_τ , τ zamanından önce olan olayların oluşturduğu σ -cebiri olsun. Buna göre her $t \geq 0$ için $A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$ ve $\{A \cap \{\tau \leq t\}\} \in \mathcal{F}_t$ 'dir. Brown hareketi için Markov özelliği sağlanır:

$$E(f(W_{t+\tau})|\mathcal{F}_\tau) = E_{W_\tau}(f(W_t))$$

burada f ölçülebilir ve sınırlı bir fonksiyondur.

- $t \geq 0$ olmak üzere, $\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ ve $\{W_t - W_{t-s} : 0 \leq s \leq t\}$ değişkenlerinin dağılımları özdeşdir. Bu özelliğe durağan aralıklar özelliği denir
- Her $c > 0$ için $\{\sqrt{c}W_{t/c} : t \geq 0\}$ süreci de bir Brown hareketidir. Bu özelliğe yeniden ölçeklendirme özelliği denir.
- $-W$ süreci de bir Brown hareketidir. Bu özelliğe simetri özelliği denir.
- $\{|W_t| : t \geq 0\}$ sürecine yansıtılmış Brown hareketi denir.

2.2 Kesirli Brown Hareketi

Tanım 2.2.1. Hurst parametresi $H \in (0, 1)$ olsun. Kesirli Brown hareketi $(B_t^H)_{t \geq 0}$, $\forall s, t \geq 0$ için kovaryans fonksiyonu

$$E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (2.2)$$

olan, 0'da ortalanmış, sürekli bir Gauss sürecidir [6]

Standart kesirli Brown hareketi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $B_0^H = 0$ ve $E[B_t^H] = 0$, $\forall t \geq 0$

- B^H homojen artış aralıklarına sahiptir; yani, $\forall s, t \geq 0$ için $B_{t+s}^H - B_s^H$ ile B_t^H aynı dağılıma sahiptir
- B^H Gauss sürecidir ve $\forall H \in (0, 1)$ için $E[(B_t^H)^2] = t^{2H}$, $t \geq 0$
- B^H sürekli yörüngelere sahiptir

2.2.1 İki Artış Arasındaki Kovaryans

$H = 1/2$ için B^H standart Brown hareketidir ve sürecin artışları bağımsızdır. Fakat, $H \neq 1/2$ için artışlar bağımlıdır. Kesirli Brown hareketinin tanımından, $s + h \leq t$ ve $t - s = nh$ olmak üzere $B_{t+h}^H - B_t^H$ ve $B_{s+h}^H - B_s^H$ arasındaki kovaryans fonksiyonu

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}h^{2H}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}] \quad (2.3)$$

ile verilir. $B_{t+h}^H - B_t^H$ ve $B_{t+2h}^H - B_{t+h}^H$ formundaki iki artışın arasındaki ilişki $H > 1/2$ iken pozitif, $H < 1/2$ iken negatiftir.

2.2.2 Özbenzerlik

Kesirli Brown hareketi aşağıdaki özbenzerlik özelliğine sahiptir

$$\stackrel{\text{law}}{(B_{ct}^H)_{t \geq 0}} = (c^H B_t^H)_{t \geq 0}$$

burada $c > 0$ herhangi bir sabittir.

Standart Brown hareketi için de özbenzerlikden söz edilebilir, sadece $H = 1/2$ seçilmesi yeterlidir.

$$\stackrel{\text{law}}{(W_{ct})_{t \geq 0}} = (c^{\frac{1}{2}} W_t)_{t \geq 0}$$

2.2.3 Uzun Süreli Bağımlılık

Tanım 2.2.2. Sabit bir $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sürecinin kovaryans fonksiyonu

$\rho(n) := \text{cov}(X_k, X_{k+n})$, c sabit ve $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(n)}{cn^{-\alpha}} = 1$$

eşitliği sağlanıyorsa X_n uzun süreli bağımlılık özelliği gösterir denir, [6].

Kovaryans fonksiyonu kullanılarak kesirli Brown hareketinin uzun süreli bağımlılık özelliğini sağladığı gösterilebilir. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $|x| > |y|$ için

$$(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k \quad (2.4)$$

bu açılımı (reel kuvvetten Binomial açılım) kullanılarak (2.3) yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} \rho_H(n) &= 1 + 2H \frac{1}{n} + \frac{2H(2H-1)}{2} \frac{1}{n^2} + 1 - 2H \frac{1}{n} + \frac{2H(2H-1)}{2} \frac{1}{n^2} + \dots \\ &\approx \frac{n^{2H}}{2} (2H(2H-1)) \frac{1}{n^2} = H(2H-1)n^{2H-2} \end{aligned}$$

Uzun süreli bağımlılık özelliğinin tanımında, $c = H(2H-1)$ ve $\alpha = 2 - 2H$ olmak üzere $H > 1/2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(n)}{H(2H-1)n^{2-2H}} = 1$$

elde edilir. Başka bir deyişle, $H > 1/2$ için kesirli Brown hareketinin artışları uzun süreli bağımlılık özelliği gösterir, [14]

2.3 Yutan Engel ve Yansıtan Engel

Karşılaştığımız bir çok problemde olduğu gibi Brown hareketinin de bazen belli sınırlar veya kısıtlamalar içinde incelenmesine gerek duyulur. Brown hareketi için bu kısıtlamalar engel olarak adlandırılır ve en sık rastlananları ve kullanılanları yutan engel ve yansıtan engeldir. Kısaca tanımlarını verelim, [23]

Tanım 2.3.1. X_t aşağıdaki gibi tanımlanan bir süreç olsun

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \begin{cases} \Delta h, & p \text{ olasılığı ile} \\ -\Delta h, & 1-p \text{ olasılığı ile} \end{cases}$$

Süreç $X_t = \bar{X}$ yutan engel seviyesine ulaştığı zaman

$$X_{t+\Delta t} = X_t, \quad 1 \text{ olasılığı ile}$$

Bir başka deyişle, sürecin değeri \bar{X} değerine (sınırına) ulaştığında, bütün sonraki t 'ler için de bu değerde kalmaya devam eder.

Bazen süreç öyle bir alt sınır değere ulaşıyor ki artık bu değerden aşağıya inemiyor. Bu seviyeye ulaştığı zaman ya burada kalmaya devam eder ya da yeniden artmaya devam eder. Aynısı üst sınır için de geçerlidir, yani süreç belli bir üst değere ulaştığı zaman ya orda kalmaya devam eder ya da aşağı doğru hareket eder.

Tanım 2.3.2. X_t aşağıdaki gibi tanımlanan bir süreç olsun

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \begin{cases} \Delta h, & p \text{ olasılığı ile} \\ -\Delta h, & 1 - p \text{ olasılığı ile} \end{cases}$$

Süreç $X_t = \bar{X}$ yansıtın engel seviyesine ulaştığı zaman

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \begin{cases} 0, & p \text{ olasılığı ile} \\ -\Delta h, & 1 - p \text{ olasılığı ile} \end{cases}$$

Gerçek hayatta, örneğin ekonomide yutan engelin ortaya çıkması neredeyse gerçekleşmesi hiç olmayacak kadar zor olan bir olay. Fakat yansıtın engelin olması çok doğal, örneğin çoğu merkez bankalarının döviz piyasasını kontrol altında tutabilmesi gibi, [23].

2.4 Isı Denklemi

Isı deklemleri, ısının zamanla belli bir alana yayılmasını matematiksel olarak ifade eden bir parabolik kısmi türevli denklemdir. $U(x, t)$, x konumunun t anındaki sıcaklığını gösteren bir fonksiyon ise o zaman bir boyutlu ısı denkleminin örnek olarak başlangıç ve sınır şartları ile beraber aşağıdaki gösterilebilir, [10].

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

başlangıç şart

$$U(x, 0) = f(x)$$

sınır koşulları

$$U(0, t) = 0 \quad \text{ve} \quad U(L, t) = 0$$

Bu şekilde verilen bir denklemi çözmek için genel olarak değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılır. Yöntemin mantığı, çözümü $U(x, t) = X(x)T(t)$ şeklinde aramaktır, yani çözümün, bağımsız değişkenlerin ayrılıkta oluşturduğu fonksiyonların çarpımı şeklinde olabileceği farz edilmektedir. Bu denklemde dikkate alınırsa

$$\frac{T'}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$$

Eşitlikten dolayı herhangi bir k ayırıcı sabiti için

$$\frac{T'}{c^2 T} = k \quad \text{ve} \quad \frac{X''}{X} = k$$

yazılabilir. Buradan da aşağıdaki şekilde iki tane adi diferensiyel denklem elde edilir

$$X'' - kX = 0 \quad \text{ve} \quad T' - kc^2 T = 0$$

Daha sonra bu iki adi diferansiyel denklem ayrılıkta çözülerek $X(x)$ ve $T(t)$ bulunur ve en son başlangıç ve sınır şartları uygulanarak gereken çözüm elde edilir.

2.5 Driftli Wiener Süreci için Fokker-Planck Denklemi

Fokker-Planck denklemi daha genel bir bakış açısından bakılırsa, farklı sistemlerde farklı olayları ifade eden bir parabolik tip kısmi türevli denklemdir. İto stokastik diferensiyel sisteminde bu denklem verilen başlangıç şartı altında koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunun gelişimini açıklar. Bu sistem için denklemin çıkarılışına bakalım, [1]:

X_t stokastik süreci ve $f(t, y) = f(t, X_t)$ türevlenebilir fonksiyonunu **Tanım 2.0.3**'teki gibi tanımlandığını kabul edelim ve $t \notin (0, T)$ için $f(t, X_t) = 0$ olsun. Yukarıda, (2.1) ile verilen İto formülünde her iki tarafın $[0, T]$ aralığında integrali alınırsa

$$f(T, X_T) - f(0, X_0) = \int_0^T \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] dt + \int_0^T \sigma \frac{\partial f}{\partial y} dW_t$$

Burada $\mu = \mu(X_t)$, $\sigma = \sigma(X_t)$. Her iki tarafın beklenen değeri alınıp ve bu beklenen değer $X_0 = x$ şartı altında geçiş olasılığı yoğunluk fonksiyonu cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} E[f(T, X_T) - f(0, X_0)] &= E \left\{ \int_0^T \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] dt \right\} \\ &\quad + E \left\{ \int_0^T \sigma \frac{\partial f}{\partial y} dW_t \right\} \\ &= \int_R \left\{ \int_0^T \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] dt \right\} p(t, y; 0, x) dy \end{aligned} \quad (2.5)$$

$E \left\{ \int_0^T \sigma \frac{\partial f}{\partial y} dW_t \right\} = 0$ çünkü $E[dW_t] = 0$. Denkleme ulaşabilmek için eşitliğin sağ tarafındaki integralde f 'in türevlerinden kurtulmak lazım, bunun için ise kısmi integrasyon yöntemi kullanılabilir. Son integral üç ayrı integralin toplamı şeklinde yazılıp hesaplanırsa daha kolay olur. Kısmi integrasyon y değişkeni üzerinden de uygulanacağı için gerektiğinde integral alma sırası da değiştirilecek. Ayrıca $p(t, y | t_0, x)$ yerine kısa olsun diye sadece p yazalım

$$\begin{aligned} &\int_R \int_0^T p \frac{\partial f}{\partial t} dt dy + \int_R \int_0^T p \mu \frac{\partial f}{\partial y} dt dy + \frac{1}{2} \int_R \int_0^T p \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dt dy \\ &= \int_R \left[p f \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial p}{\partial t} f dt \right] dy + \int_0^T \left[p \mu f \Big|_R - \int_R \frac{\partial(p\mu)}{\partial y} f dy \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \left[p \sigma^2 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_R - \int_R \frac{\partial(p\sigma^2)}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right] dt \end{aligned}$$

$t \notin (0, T)$ için $f(t, X_t) = 0$ olduğu dikkate alınırsa (2.5)'den geriye sadece

$$- \int_R \int_0^T \frac{\partial p}{\partial t} f(t, y) dt dy - \int_R \int_0^T \frac{\partial p \mu}{\partial y} f(t, y) dt dy - \frac{1}{2} \int_0^T \int_R \frac{\partial(p\sigma^2)}{\partial y} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} dy dt$$

ifadesi kalır. Burada da yine son integralde bir daha kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
& - \int_R \int_0^T \frac{\partial p}{\partial t} f(t, y) dt dy - \int_R \int_0^T \frac{\partial(p\mu)}{\partial y} f(t, y) dt dy \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{\partial(p\sigma^2)}{\partial y} f(t, y) \Big|_R - \int_R \frac{\partial^2(p\sigma^2)}{\partial y^2} f(t, y) dy \right] dt \\
& = - \int_R \int_0^T \frac{\partial p}{\partial t} f(t, y) dt dy - \int_R \int_0^T \frac{\partial(p\mu)}{\partial y} f(t, y) dt dy \\
& + \frac{1}{2} \int_R \int_0^T \frac{\partial^2(p\sigma^2)}{\partial y^2} f(t, y) dt dy
\end{aligned}$$

Nihayet,

$$E[f(T, X_T) - f(0, X_0)] = \int_R \int_0^T f(t, y) \left[-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial(p\mu)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(p\sigma^2)}{\partial y^2} \right] dt dy$$

eşitliği elde edilmiş olunur. $t \notin (0, T)$ için $f(t, X_t) = 0$ olduğundan $f(T, X_T) = f(0, X_0) = 0$ ve dolayısıyla $E[f(T, X_T) - f(0, X_0)] = 0$. O zaman

$$\int_R \int_0^T f(t, y) \left[-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial(p\mu)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(p\sigma^2)}{\partial y^2} \right] dt dy = 0$$

$(0, T)$ 'de $f(t, y) \neq 0$ olduğundan

$$-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial(p\mu)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(p\sigma^2)}{\partial y^2} = 0$$

Buradan da

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, y) = -\mu \frac{\partial}{\partial y} p(t, y) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p(t, y)$$

Fokker-Planck denkleminde ulaşılmış oluruz.

2.6 Finansal Portföyler

Portföy, menkul kıymetler açısından bir yatırımcının sahip olduğu tüm menkul kıymetlere verilen isimdir. Daha detaylı şekilde söylenilirse, finasta bu kavram riski azaltmak ve üstlenilen riskten en yüksek getiriyi sağlamak amacıyla, aynı veya farklı özelliklere sahip en az iki yatırım aracının bir araya gelmesiyle oluşan toplam değeri ifade etmektedir. Bu yatırım araçlarına örnek olarak hisse senedi, tahvil, hazine bonosu, hatta nakit para da gösterilebilir. Teknik açıdan portföy, yatırımcının risk ve getiri tercihlerini yansıtan tüm reel ve finansal varlıkları kapsamaktadır. Portföy teorisine göre yatırımcılar genelde tek bir menkul kıymete yatırım yapmazlar. İçeriğinin hangi yatırım araç veya araçlarından oluşması açısından portföylerin farklı çeşitleri vardır, [15].

3. İLK GEÇİŞ ZAMANI DAĞILIM VE YOĞUNLUĞU

Bu bölümde, Fokker-Planck denklemi kullanılarak beklenen değeri sıfır olmayan Brown hareketi için ilk geçiş zamanı dağılım ve yoğunluk fonksiyonlarının bulunmasından bahsedilecek, [2]. Bulunan bu fonksiyonlar bir sonraki bölümde beklenen değeri sıfırdan farklı Brown hareketi için maksimum kayıp değişkeni beklenen değerinin bulunmasında kullanılacak.

3.1 İlk Geçiş Zamanı

$\{X_t; t \geq 0\}$ beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olan bir Brown hareketi olsun. İlk geçiş zamanı, X_t 'nin verilen değere ilk ulaştığı τ rastgele zamanı olarak tanımlanır. Eğer bu verilen değer olarak herhangi bir $G \subset \mathbb{R}$ gümesinin sınırı olan ∂G kabul edilirse, matematiksel olarak ilk geçiş zamanı aşağıdaki verilen şekilde gösterebilir

$$\tau = \inf_{t \geq t_0} (t : X_t \in \partial G \mid X_{t_0} = x; x \in G \setminus \partial G) \quad (3.1)$$

burada $x \in G \setminus \partial G$, t_0 anında sürecin başlangıç değeridir.

3.1.1 Dağılım ve Yoğunluk

İlk geçiş zamanı yoğunluk fonksiyonunun bulunması için önce τ değişkeninin dağılım fonksiyonu bulunur. Bunun için ise X_t 'nin $(0, t)$ aralığında ∂G sınırı tarafından yutulmama olasılığı kullanılır, [2]

$$Pr(X_t \notin \partial G; X_s \in G \setminus \partial G, t_0 < s < t \mid x \in G \setminus \partial G) = 1 - Pr(\tau < t)$$

O zaman

$$Pr(\tau < t) = 1 - Pr(X_t \notin \partial G; X_s \in G \setminus \partial G, t_0 < s < t \mid x \in G \setminus \partial G)$$

Şimdi dağılımın zamana göre türevi alınırsa olasılık yoğunluk fonksiyonuna ulaşılır

$$f_\tau(t) = -\frac{\partial Pr(X_t \notin \partial G; X_s \in G \setminus \partial G, t_0 < s < t \mid x \in G \setminus \partial G)}{\partial t} \quad (3.2)$$

X_t 'nin $(0, t)$ aralığında ∂G sınırı tarafından yutulmama olasılığı aşağıdaki şekilde de yazılabilir, [2].

$$Pr(X_t \notin \partial G; X_s \in G \setminus \partial G, t_0 < s < t \mid x \in G \setminus \partial G) = \int_{G \setminus \partial G} p(t, y \mid t_0, x) dy$$

burada $p(t, y|t_0, x)$ sürecin $G \setminus \partial G$ bölgesindeki geçiş olasılığı yoğunluk fonksiyonudur. O zaman $f_\tau(t)$ için aşağıdaki sonuç yazılabilir.

$$f_\tau(t) = -\frac{\partial \left(\int_{G \setminus \partial G} p(t, y | t_0, x) dy \right)}{\partial t} \quad (3.3)$$

3.1.2 İki Esnek Engelle Verilen Süreç İçin İlk Geçiş Zamanı

G kümesi olarak $[h_1, h_2]$ kapalı aralığı alınırsa bu durumda $\partial G = \{h_1\} \cup \{h_2\}$ olur, yani iki tane h_1 ve h_2 engelleri ortaya çıkar. Bu engeller sabit seçilerek (yutan veya yansıtan) ilk geçiş zamanı olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_\tau(t)$ 'nin bulunmasına ait sonuçlar var. Fakat, [2]'de yapılan, engelleri esnek engeller seçerek daha genel bir sonuç elde etmektir. Örneğin h_2 engeli β olasılığı ile yutan, $(1 - \beta)$ olasılığı ile de yansıtan engel seçilebilir. Aynı şekilde h_1 engeli γ olasılığı ile yutan $(1 - \gamma)$ olasılığı ile de yansıtan engel seçilebilir.

3.2 İki Esnek Engelle Verilen Süreç İçin Fokker-Planck Denklemi

İlk geçiş zamanı yoğunluk fonksiyonu $f_\tau(t)$ 'nin bulunabilmesi için (3.3) ile verilen ifadede $p(t, y | t_0, x)$ geçiş olasılığı yoğunluk fonksiyonunun bulunmasına ihtiyaç vardır. Bunun için ise driftli Brown hareketi için Fokker-Planck denklemi (veya Kolmogorov forward denklemi) kullanılır, çünkü X_t 'nin $G \setminus \partial G$ bölgesindeki geçiş olasılığı yoğunluk fonksiyonu Fokker-Planck denklemini sağlar, [1],[16].

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, y) = -\mu \frac{\partial}{\partial y} p(t, y) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p(t, y) \quad (3.4)$$

Burada kısa olsun diye $p(t, y | t_0, x)$ yerine sadece $p(t, y)$ yazıyoruz. Fokker-Planck denklemi bazen

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, y) = -\frac{\partial}{\partial x} j(t, y)$$

şeklinde de yazılıyor. Burada

$$j(t, y) = \mu p(t, y) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial p(t, y)}{\partial x}$$

ifadesine olasılık akını denilir.

Denklemin

$$p(0, y) = \delta(y - x) \quad (3.5)$$

başlangıç şartı ile çözümüne temel çözüm denilir(bazen bu başlangıç şarta rastgele olmayan başlangıç şart da denilir). Burada $\delta(y-x)$ Dirac delta fonksiyonudur. Problem iki esnek engelle ele alındığından (3.4) denklemi için sınır şartları belirlerken sınırların kısmen veya tamamen yutan veya yansıtan engel olabileceği göz önüne alınmalıdır. Ayrıca, eğer sınır yutan engel ise $p(t, y)$ bu sınır tarafından yutulmama olasılık yoğunluğu olduğu için sınıra ulaşıldığında değeri sifıra eşit olur, eğer sınır yansıtan engel ise sınıra ulaşıldığı zaman yansıma olacağı için bölgenin içerisinden dışarıya ve ya dışarıdan içeriye olasılık akını sifıra eşit olacak, yani sınıra ulaşıldığında $j(t, y)$ sifıra eşit olur. Bizim durumumuza geri dönersek, $G = [h_1, h_2] \Rightarrow \partial G = \{h_1\} \cup \{h_2\}$. Eğer h_2 sınırının β olasılığı ile yutan, $(1 - \beta)$ olasılığı ile de yansıtan engel olduğu farz edilirse

$$\beta p(t, h_2) - (1 - \beta)j(t, h_2) = 0$$

Aynı mantıkla, h_1 sınırının γ olasılığı ile yutan, $(1 - \gamma)$ olasılığı ile de yansıtan engel olduğu farz edilirse

$$\gamma p(t, h_1) + (1 - \gamma)j(t, h_1) = 0$$

aradaki tek fark $h_1 < h_2$ olduğu için h_2 'deki akınla h_1 'deki akının ters işaretli olmalarıdır. Sonuç olarak daha açık bir şekilde yazılırsa iki esnek engel için (3.4) denkleminin iki tane aşağıdaki gibi sınır şartları olur, [2].

$$\beta p(t, h_2) - (1 - \beta) \left(\mu p(t, h_2) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial p(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=h_2} \right) = 0 \quad (3.6)$$

$$\gamma p(t, h_1) + (1 - \gamma) \left(\mu p(t, h_1) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial p(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=h_1} \right) = 0 \quad (3.7)$$

3.2.1 Sınır Değer Probleminin Çözümü

Elde edilen (3.4)-(3.7) sınır ve başlangıç değer probleminin çözümüne ulaşmak için (3.4) denkleminin çözümünden başlayalım. Bu denkelem daha önce de bahsedildiği gibi bir parabolik tip denklemdir, gereken değişken değişimleri yapılarak daha da sade şekle dönüştürülebilir. Önce kolaylık için $u = y - h_1$ değişken değişimi, sonra da birinci mertebe türevden kurtulabilmek için

$$p(t, u) = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) z(t, u) \quad (3.8)$$

değişimi yapılır. Bu iki değişim dikkate alınırsa

$$u = y - h_1 \quad \Rightarrow \quad dy = du$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) z(t, u) \right] = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \frac{\partial}{\partial t} z(t, u)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} p(t, y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \left[\exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) z(t, u) \right] = \frac{\mu}{\sigma^2} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) z(t, u) + \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \frac{\partial}{\partial u} z(t, u)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p(t, y) &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[\exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) z(t, u) \right] = \frac{\mu^2}{\sigma^4} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) z(t, u) \\ &+ \frac{\mu}{\sigma^2} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \frac{\partial}{\partial u} z(t, u) + \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \frac{\partial^2}{\partial u^2} z(t, u) \end{aligned}$$

bulunur. Bunlar (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \frac{\partial}{\partial t} z(t, u) &= -\frac{\mu^2}{\sigma^2} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) z(t, u) \\ &- \mu \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \frac{\partial}{\partial u} z(t, u) + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) z(t, u) \\ &+ \mu \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \frac{\partial}{\partial u} z(t, u) + \frac{\sigma^2}{2} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \frac{\partial^2}{\partial u^2} z(t, u) \\ &= \frac{-\mu^2}{2\sigma^2} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) z(t, u) + \frac{\sigma^2}{2} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \frac{\partial^2}{\partial u^2} z(t, u) \end{aligned}$$

Her iki taraf $\frac{2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) \neq 0$ ile çarpılırsa (3.4) denklemini aşağıdaki hale gelir

$$\frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial t} z(t, u) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} z(t, u) - \frac{\mu^2}{\sigma^4} z(t, u) \quad (3.9)$$

Artık (3.9) denklemini değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözebiliriz. Yöntemi uygulamak için denklemin çözümünün $z(t, u) = T(t)U(u)$ şeklinde olduğu kabul edilir. O zaman

$$\frac{\partial}{\partial t} z(t, u) = U(u) \frac{d}{dt} T(t) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} z(t, u) = T(t) \frac{d^2}{du^2} U(u)$$

elde edilir. Bunlar (3.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{2}{\sigma^2} U(u) T'(t) = T(t) U''(u) - \frac{\mu^2}{\sigma^4} T(t) U(u)$$

$$\frac{2}{\sigma^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{U''(u)}{U(u)} - \frac{\mu^2}{\sigma^4}$$

Şimdi son eşitliğin her iki tarafının bir ayırıcı parametreye eşit olduğu kabul edilerek değişkenler iki ayrı denklem şeklinde ayrılır. Bu keyfi parametre $-\nu$ olarak seçilirse aşağıdaki şekilde iki tane adi diferensiyel denklem elde edilmiş olunur.

$$\frac{2}{\sigma^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\nu \quad \text{ve} \quad \frac{U''(u)}{U(u)} - \frac{\mu^2}{\sigma^4} = -\nu$$

Birinci denklem kolay şekilde aşağıdaki gibi çözülür

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sigma^2} \frac{dT(t)}{T(t)} &= -\nu \\ \frac{1}{T(t)} dT(t) &= -\frac{\nu\sigma^2}{2} dt \\ \ln T(t) &= -\frac{\nu\sigma^2}{2} t + \ln C \quad (\text{C herhangi bir sabittir}) \\ T(t) &= C \exp\left(-\frac{\nu\sigma^2 t}{2}\right) \end{aligned}$$

İkinci denklemi çözmeden önce $\lambda = \nu - \frac{\mu^2}{\sigma^4}$ denilirse denklem aşağıdaki hale dönüşür.

$$U''(u) + \lambda U(u) = 0 \quad (3.10)$$

Aslında $p(t, u) = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) T(t)U(u)$ olduğu dikkate alınır (3.6) ve (3.7) sınır şartları da (3.10) denkleminde odaklı hale getirebilir. $u = y - h_1$ olduğundan $y = h_2$ için $u = h_2 - h_1$ olduğunu da dikkate alarak (3.6) için yaparsak

$$\begin{aligned} &\beta \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}(h_2 - h_1)\right) T(t)U(h_2 - h_1) - (1 - \beta)\mu \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}(h_2 - h_1)\right) T(t)U(h_2 - h_1) \\ &+ (1 - \beta)\frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{\mu}{\sigma^2} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) T(t)U(u) + \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} u\right) T(t) \frac{d}{du} U(u) \right] \Big|_{u=h_2-h_1} = 0 \end{aligned}$$

Her iki taraf $\exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}(h_2 - h_1)\right) T(t) \neq 0$ ile bölünürse

$$\beta U(h_2 - h_1) - (1 - \beta)\mu U(h_2 - h_1) + \frac{(1 - \beta)\mu}{2} U(h_2 - h_1) + (1 - \beta)\frac{\sigma^2}{2} \frac{d}{du} U(u) \Big|_{u=h_2-h_1} = 0$$

ve en son olarak

$$\left[\beta - \frac{\mu}{2}(1 - \beta) \right] U(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 \frac{d}{du} U(u) \Big|_{u=h_2-h_1} = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir, yani gereksiz t 'ye bağılı kısımdan kurtulmuş oluyoruz. Aynı mantıkla ve $y = h_1$ için $u = h_2 - h_1 = 0$ olduğu da dikkate alınır (3.7) de aşağıdaki hale dönüşür

$$\left[\gamma + \frac{\mu}{2}(1 - \gamma) \right] U(0) - \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{d}{du} U(u) \Big|_{u=0} = 0 \quad (3.12)$$

(3.10) denklemi, karakteristik denklemi yazılarak aşağıdaki gibi çözlür

$$r^2 + \lambda = 0 \quad (\text{karakteristik denklem})$$

$$r^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{-\lambda}, \quad r_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

O zaman λ 'nın değeri ve işaretine bağılı olarak (3.10)'un genel çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$U(u) = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{\lambda}u) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}u) & , \quad \lambda > 0 \\ C_3 u + C_4 & , \quad \lambda = 0 \\ C_5 \cosh(\sqrt{-\lambda}u) + C_6 \sinh(\sqrt{-\lambda}u) & , \quad \lambda < 0 \end{cases}$$

λ 'nın üç farklı durumu için sınır değeri şartları kullanılarak yukarıdaki katsayılar bulunabilir.

3.2.1.1 $\lambda > 0$ durumu

Bu durumda

$$U(u) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}u) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}u)$$

$$U'(u) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}u) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}u)$$

Kolaylık için

$$k = \beta - \frac{\mu}{2}(1 - \beta) \quad (3.13)$$

$$\omega = \gamma + \frac{\mu}{2}(1 - \gamma) \quad (3.14)$$

$$\theta = \sqrt{\lambda}(h_2 - h_1) \quad \text{ve} \quad \eta = \sqrt{-\lambda}(h_2 - h_1)$$

kısaltmaları yapılırsa ve (3.11) ve (3.12) sınır değeri şartları kullanılırsa

$$\begin{cases} k [C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta] + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 [-C_1 \sqrt{\lambda} \sin \theta + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \theta] = 0 \\ \omega C_1 - \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \sqrt{\lambda} C_2 = 0 \end{cases}$$

İkinci denklemden $C_1 = \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2\frac{\sqrt{\lambda}}{\omega}C_2$ bulunur, bu birinci denklemden yerine yazılırsa

$$C_2 \left[\frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2\frac{\sqrt{\lambda}}{\omega}(k \cos \theta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2\sqrt{\lambda}\sin\theta) + k \sin \theta + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2\sqrt{\lambda}\cos\theta \right] = 0$$

$$C_2 \left[\cos \theta \left(\frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2\frac{\sqrt{\lambda}}{\omega}k + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2\sqrt{\lambda} \right) + \sin \theta \left(k - \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4\frac{\lambda}{\omega} \right) \right] = 0$$

Burada $C_2 = 0$ alınırsa o zaman $C_1 = 0$ bulunur ki bununla da $U(u) = 0$ aşikar çözümüne ulaşılır. Ancak aranan sonuç bu olmadığı için en son eşitlikteki parantezin içindeki ifadenin sifıra eşitliğine bakılır.

$$\cos \theta \left(\frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2\frac{\sqrt{\lambda}}{\omega}k + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2\sqrt{\lambda} \right) + \sin \theta \left(k - \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4\frac{\lambda}{\omega} \right) = 0$$

$$\cos \theta \left(\frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2\frac{\sqrt{\lambda}}{\omega}k + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2\sqrt{\lambda} \right) = -\sin \theta \left(k - \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4\frac{\lambda}{\omega} \right)$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2\frac{\sqrt{\lambda}}{\omega}k + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2\sqrt{\lambda}}{\frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4\frac{\lambda}{\omega} - k}$$

(3.13), (3.14) ve $\sqrt{\lambda} = \frac{\theta}{h_2 - h_1}$ olduğu dikkate alınarak kesirde sadeleştirme yapılırsa en son olarak

$$\tan \theta = \frac{2\sigma^2(h_2 - h_1)[\beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \beta)]\theta}{(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4\theta^2 - 4(h_2 - h_1)^2k\omega} \quad (3.15)$$

elde edilir. Elde edilen (3.15) eşitliğinin çözümü olan θ değerlerine özdeğerler denilir ve $\tan \theta$ fonksiyonu periyodik olduğu için bu özdeğerler sonsuz sayıdadır. Bunun için de ileride θ yerine θ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) yazacağız. Özdeğer şartı olan (3.15) eşitliğinin çözümleri ve onların sayısını analitik olarak görmek çok zor. Ancak geometrik olarak bir yorum yapılabilir, yani (3.15)'in çözümü (çözümleri) aslında

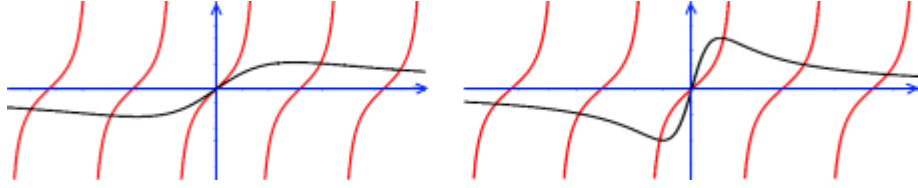
$$\tan \theta \quad \text{ve} \quad \frac{a\theta}{b\theta^2 - c}$$

fonksiyonlarının grafiklerinin kesişim noktalarıdır. Burada

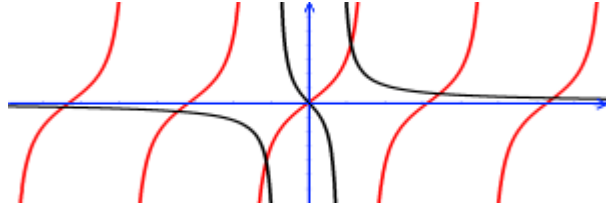
$$a = 2\sigma^2(h_2 - h_1)[\beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \beta)]$$

$$b = (1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4 \quad \text{ve} \quad c = 4(h_2 - h_1)^2k\omega$$

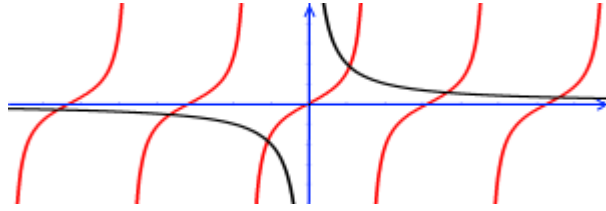
$a > 0, b > 0$ olduğu açık, çünkü $\beta \leq 1$, $\gamma \leq 1$ ve $h_2 > h_1$. Ancak c 'nin işareti değişebilir, çünkü c, k ve ω 'ya bağlı bunlar da μ 'ye bağlı (ileride c 'nin bu μ 'ye bağlı olma özelliği (3.10) denkleminin genel çözümü yazılırken λ 'ya gerek kalmaksızın sınıflandırma yapıldığı zaman kullanılacak). Bunlar dikkate alınarak bu iki fonksiyonun grafiklerinin bir birine göre durumu sadece Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'deki durumlardan birine denk gelebilir.



Şekil 3.1: $c < 0$ iken olabilecek durumlar



Şekil 3.2: $c > 0$ durumu



Şekil 3.3: $c = 0$ durumu

Kırmızı grafik $\tan \theta$ ve siyah grafikler de $\frac{a\theta}{b\theta^2 - c}$ fonksiyonunun farklı c 'lere uygun gelen grafiklerdir. Grafiklerden de görüldüğü üzere c 'den bağımsız olarak (3.15)'in her zaman sonsuz sayıda çözümü vardır.

Artık gereken θ değerleri bulunabildiğine göre keyfi olarak $C_2 = \omega$ seçilebilir. O zaman

$$C_1 = \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega} C_2 = \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\theta}{h_2 - h_1}$$

olur. Nihayet, çözüm

$$U_n(u) = \frac{(1 - \gamma)\sigma^2 \theta_n}{2(h_2 - h_1)} \cos\left(\theta_n \frac{u}{h_2 - h_1}\right) + \omega \sin\left(\theta_n \frac{u}{h_2 - h_1}\right) \quad (3.16)$$

şeklinde bulunur. (3.16) aslında bir çözüm dizisidir, yani her farklı n pozitif tamsayısı için her bir $U_n(u)$ (3.10) denkleminin (3.11) ve (3.12) sınır şartlarını sağlayan bir çözümdür.

3.2.1.2 $\lambda = 0$ durumu

Bu durumda (3.10) denklemini $U''(u) = 0$ haline geldiğinden çözümü de $U(u) = C_3u + C_4$ olur. C_3 ve C_4 sabitlerini bulmak için yeniden sınır şartları uygulanır.

$$\begin{cases} k[C_3(h_2 - h_1) + C_4] + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 C_3 = 0 \\ \omega C_4 - \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 C_3 = 0 \end{cases}$$

İkinci denklemden $C_4 = \frac{1}{2\omega}(1 - \gamma)\sigma^2 C_3$ bulunur, bu birinci denklemde yerine yazılırsa

$$k \left[C_3(h_2 - h_1) + \frac{1}{2\omega}(1 - \gamma)\sigma^2 C_3 \right] + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 C_3 = 0$$

$$C_3 \left[k(h_2 - h_1) + \frac{k}{2\omega}(1 - \gamma)\sigma^2 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 \right] = 0$$

Burada da eğer $C_3 = 0$ seçilirse yine $U(u) = 0$ aşikar çözümüne ulaşılır, o yüzden parantezin içindeki ifadenin sıfıra eşitliğine bakılır.

$$k(h_2 - h_1) + \frac{k}{2\omega}(1 - \gamma)\sigma^2 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 = 0$$

$$(h_2 - h_1) + \frac{1}{2\omega}(1 - \gamma)\sigma^2 + \frac{1}{2k}(1 - \beta)\sigma^2 = 0$$

$$\frac{(1 - \gamma)\sigma^2}{2(\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\mu)} + \frac{(1 - \beta)\sigma^2}{2(\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu)} = -(h_2 - h_1)$$

$$\frac{(1 - \gamma)[\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu] + (1 - \beta)[\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\mu]}{(\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\mu)(\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu)} = \frac{-2(h_2 - h_1)}{\sigma^2}$$

$$\frac{\beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \beta)}{\gamma\beta - [\frac{1}{2}\gamma(1 - \beta) - \frac{1}{2}\beta(1 - \gamma)]\mu - \frac{1}{4}(1 - \gamma)(1 - \beta)\mu^2} = \frac{-2(h_2 - h_1)}{\sigma^2}$$

$$\frac{1}{4}(1-\gamma)(1-\beta)\mu^2 + \frac{1}{2}[\gamma(1-\beta) - \beta(1-\gamma)]\mu = \frac{\sigma^2[\beta(1-\gamma) + \gamma(1-\beta)]}{2(h_2 - h_1)} + \gamma\beta$$

$$\frac{1}{2}\mu^2 + \left[\frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{\beta}{1-\beta} \right] \mu - \frac{2\gamma\beta}{(1-\beta)(1-\gamma)} - \frac{\sigma^2}{h_2 - h_1} \left[\frac{\beta}{1-\beta} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right] = 0$$

Gelen bu denklemin μ 'ye göre çözülürse

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[\frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{\beta}{1-\beta} \right]^2 + \frac{4\gamma\beta}{(1-\beta)(1-\gamma)} + \frac{2\sigma^2}{h_2 - h_1} \left[\frac{\beta}{1-\beta} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right] \\ &= \left[\frac{\gamma}{1-\gamma} + \frac{\beta}{1-\beta} \right]^2 + \frac{2\sigma^2}{h_2 - h_1} \left[\frac{\beta}{1-\beta} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right] > 0 \end{aligned}$$

$$\mu_1 = -\frac{\gamma}{1-\gamma} + \frac{\beta}{1-\beta} - \sqrt{\Delta} \quad (3.17)$$

$$\mu_2 = -\frac{\gamma}{1-\gamma} + \frac{\beta}{1-\beta} + \sqrt{\Delta} \quad (3.18)$$

Yani $\mu = \mu_1$ veya $\mu = \mu_2$ seçilirse denklemin sıfırdan farklı çözümü var (fakat $\mu \neq \mu_1$ ve $\mu \neq \mu_2$ seçilirse $C_2 = 0$ olmak zorunda ve dolayısıyla aşikar çözüme ulaşılır). Bu çözümü bulmak için keyfi olarak $C_3 = 1$ seçilebilir ve buna uygun olarak da (3.11) sınır şartı kullanılarak C_4 sabiti belirlenebilir.

$$U(u) = u + C_4 \quad \Rightarrow \quad U'(u) = 1$$

bunları (3.11)'de dikkate alırsak

$$k[(h_2 - h_1) + C_4] + \frac{1}{2}(1-\beta)\sigma^2 = 0$$

$$(h_2 - h_1) + C_4 = -\frac{1}{2k}(1-\beta)\sigma^2$$

$$C_4 = -(h_2 - h_1) - \frac{\sigma^2(1-\beta)}{2k}$$

bulunur. O zaman çözüm

$$U_1 = u - (h_2 - h_1) - \frac{\sigma^2(1-\beta)}{2k}$$

olarak bulunur.

3.2.1.3 $\lambda < 0$ durumu

Bu durumda

$$U(u) = C_5 \cosh(\sqrt{-\lambda}u) + C_6 \sinh(\sqrt{-\lambda}u)$$

$$U'(u) = C_5 \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda}u) + C_6 \sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda}u)$$

(3.11) ve (3.12) sınır değer şartları kullanılırsa

$$\begin{cases} k [C_5 \cosh \eta + C_6 \sinh \eta] + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 [C_5 \sqrt{-\lambda} \sinh \eta + C_6 \sqrt{-\lambda} \cosh \eta] = 0 \\ \omega C_5 - \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \sqrt{-\lambda} C_6 = 0 \end{cases}$$

İkinci denklemden $C_5 = \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{\omega} C_6$ bulunur, bu birinci denklemde yerine yazılırsa

$$C_6 \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{\omega} (k \cosh \eta + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 \sqrt{-\lambda} \sinh \eta)$$

$$+ C_6 (k \sinh \eta + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 \sqrt{-\lambda} \cosh \eta) = 0$$

$$C_6 \left[\cosh \eta \left(\frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{\omega} k + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 \sqrt{-\lambda} \right) + \sinh \eta \left(k + \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4 \frac{-\lambda}{\omega} \right) \right] = 0$$

Burada da $C_6 = 0$ almırsa o zaman $C_1 = 0$ bulunur ki bununla da $U(u) = 0$ aşıkâr çözümüne ulaşılır. Ancak aranan sonuç bu olmadığı için yine en son eşitlikteki parantezin içindeki ifadenin sifira eşitliğine bakılır.

$$\cosh \eta \left(\frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{\omega} k + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 \sqrt{-\lambda} \right) + \sinh \eta \left(k + \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4 \frac{-\lambda}{\omega} \right) = 0$$

$$\sinh \eta \left(k + \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4 \frac{-\lambda}{\omega} \right) = -\cosh \eta \left(\frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{\omega} k + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 \sqrt{-\lambda} \right)$$

$$\tanh \eta = -\frac{\frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{\omega} k + \frac{1}{2}(1 - \beta)\sigma^2 \sqrt{-\lambda}}{k + \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4 \frac{-\lambda}{\omega}}$$

(3.13), (3.14) ve $\sqrt{-\lambda} = \frac{\eta}{h_2 - h_1}$ olduğu dikkate alınarak kesirde sadeleştirme yapılırsa en son olarak

$$\tanh \eta = \frac{-2\sigma^2(h_2 - h_1)[\beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \beta)]\eta}{(1 - \beta)(1 - \gamma)\sigma^4 \eta^2 + 4(h_2 - h_1)^2 k \omega} \quad (3.19)$$

Gereken η değeri bulunabildiğine göre keyfi olarak $C_6 = \omega$ seçilebilir. O zaman

$$C_5 = \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{\omega} C_6 = \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma^2 \frac{\eta}{h_2 - h_1}$$

olur. Nihayet, çözüm

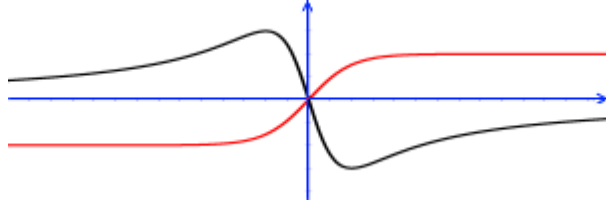
$$U_2(u) = \frac{(1-\gamma)\sigma^2\eta}{2(h_2-h_1)} \cosh\left(\eta\frac{u}{h_2-h_1}\right) + \omega \sinh\left(\eta\frac{u}{h_2-h_1}\right) \quad (3.20)$$

şeklinde bulunur.

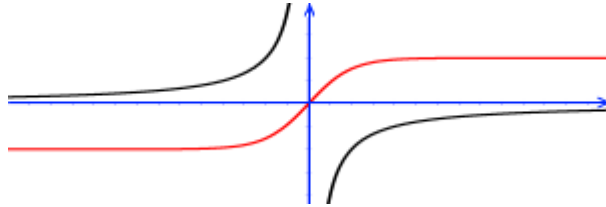
$\lambda > 0$ durumuna benzer şekilde burada da geometrik bir yorum yapılarak (3.19)'un hangi durumlarda kaç tane çözümü olduğu söylenebilir.

$$\tanh \eta = \frac{-a\eta}{b\eta^2 + c} \quad a > 0, b > 0$$

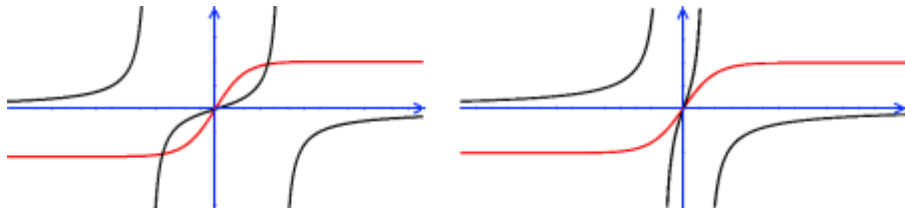
Bu iki fonksiyonun da grafiklerinin kesişim noktaları aslında yukarıdaki eşitliğin çözümüdür.



Şekil 3.4: $c > 0$ durumu



Şekil 3.5: $c = 0$ durumu



Şekil 3.6: $c < 0$ iken olabilecek durumlar

c 'nin durumuna göre bu grafiklerin bir birine göre durumu sadece Şekil 3.4, Şekil 3.5, Şekil 3.6'daki durumlardan birine denk gelebilir (kırmızı grafik $\tanh \eta$ 'nin grafiğidir). Grafiklerden de görüldüğü üzere $c = 0$ durumunda çözüm yok, $c > 0$ durumunda

sadece $\eta = 0$ çözümü var (yani bu durumlarda $U_2(u) = 0$ aşikar çözümü elde edilir). $c < 0$ durumunda ise sağ taraftaki fonksiyonun orijindeki eğimine bağlı olarak ya bir tane $\eta = 0$ çözümü yada üç tane çözüm var. Daha kesin olarak, eğer bu eğim \tanh fonksiyonunun orijindeki eğiminden büyükse sadece $\eta = 0$ çözümü, eğer küçükse üç tane çözüm var. İkinci durum göz önüne alınarak yola çıkılırsa

$$\begin{aligned} (\tanh\eta)' \Big|_{\eta=0} &> \left(\frac{-a\eta}{b\eta^2 + c} \right) \Big|_{\eta=0} \\ \frac{1}{\cosh^2 \eta} \Big|_{\eta=0} &> \frac{-ab\eta^2 - ac + 2ab\eta^2}{(b\eta^2 + c)^2} \Big|_{\eta=0} \\ 1 > \frac{-ac}{c^2} &\Rightarrow c^2 > -ac \Rightarrow c(c+a) > 0 \end{aligned}$$

Önceden de $c < 0$ kabul edildiği için

$$c + a < 0$$

$$\begin{aligned} 4(h_2 - h_1)^2 k\omega + 2\sigma^2(h_2 - h_1)[\beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \beta)] &< 0 \\ 2(h_2 - h_1)k\omega + \sigma^2[\beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \beta)] &< 0 \\ 2(h_2 - h_1)[(\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu)(\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\mu)] + \sigma^2[\beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \beta)] &< 0 \\ 2(h_2 - h_1)[\beta\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\beta\mu - \frac{1}{2}(1 - \beta)\gamma\mu - \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\mu^2] \\ + \sigma^2[\beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \beta)] &< 0 \\ -\frac{1}{2}(h_2 - h_1)(1 - \beta)(1 - \gamma)\mu^2 - [(1 - \beta)\gamma - (1 - \gamma)\beta](h_2 - h_1)\mu \\ + 2\beta\gamma(h_2 - h_1) + \sigma^2[\beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \beta)] &< 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\mu^2 + \left[\frac{\gamma}{1 - \gamma} - \frac{\beta}{1 - \beta} \right] \mu - \frac{2\gamma\beta}{(1 - \beta)(1 - \gamma)} - \frac{\sigma^2}{h_2 - h_1} \left[\frac{\beta}{1 - \beta} + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right] > 0$$

Sıfırları bulunursa

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[\frac{\gamma}{1 - \gamma} - \frac{\beta}{1 - \beta} \right]^2 + \frac{4\gamma\beta}{(1 - \beta)(1 - \gamma)} + \frac{2\sigma^2}{h_2 - h_1} \left[\frac{\beta}{1 - \beta} + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right] \\ &= \left[\frac{\gamma}{1 - \gamma} + \frac{\beta}{1 - \beta} \right]^2 + \frac{2\sigma^2}{h_2 - h_1} \left[\frac{\beta}{1 - \beta} + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right] > 0 \end{aligned}$$

O zaman

$$\mu_1 = -\frac{\gamma}{1 - \gamma} + \frac{\beta}{1 - \beta} - \sqrt{\Delta}; \quad \mu_2 = -\frac{\gamma}{1 - \gamma} + \frac{\beta}{1 - \beta} + \sqrt{\Delta}$$

$\mu_1 < 0$ ve $\mu_2 > 0$ olduğu açık, bu yüzden

$$(\mu + \mu_1)(\mu - \mu_2) > 0$$

Dolayısıyla,

$$\mu \in (-\infty, \mu_1) \cup (\mu_2, \infty)$$

bulunur.

Şimdi $c < 0$ için gereken aralık bulunursa

$$\begin{aligned} 4(h_2 - h_1)^2 k\omega &< 0 \\ 4(h_2 - h_1)^2 [(\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu)(\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\mu)] &< 0 \\ (\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu)(\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\mu) &< 0 \\ \beta\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\beta\mu - \frac{1}{2}(1 - \beta)\gamma\mu - \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \gamma)\mu^2 &< 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - \gamma)\mu^2 + [(1 - \beta)\gamma - (1 - \gamma)\beta]\mu - 2\beta\gamma &> 0 \\ \frac{1}{2}\mu^2 + \left[\frac{\gamma}{1 - \gamma} - \frac{\beta}{1 - \beta} \right] \mu - \frac{2\gamma\beta}{(1 - \beta)(1 - \gamma)} &> 0 \end{aligned}$$

Sıfırları bulunursa

$$\Delta^* = \left[\frac{\gamma}{1 - \gamma} - \frac{\beta}{1 - \beta} \right]^2 + \frac{4\gamma\beta}{(1 - \beta)(1 - \gamma)} = \left[\frac{\gamma}{1 - \gamma} + \frac{\beta}{1 - \beta} \right]^2 > 0$$

O zaman

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= -\frac{\gamma}{1 - \gamma} + \frac{\beta}{1 - \beta} - \sqrt{\Delta^*} = -\frac{2\gamma}{1 - \gamma} \\ \mu_2^* &= -\frac{\gamma}{1 - \gamma} + \frac{\beta}{1 - \beta} + \sqrt{\Delta^*} = \frac{2\beta}{1 - \beta} \end{aligned}$$

$\mu_1^* < 0$ ve $\mu_2^* > 0$ olduğu açık, bu yüzden

$$(\mu + \mu_1^*)(\mu - \mu_2^*) > 0$$

Dolayısıyla,

$$\mu \in (-\infty, \mu_1^*) \cup (\mu_2^*, \infty)$$

bulunur.

Nihayet, $c < 0$ ve $c + a < 0$ eşitsizliklerini aynı anda sağlayan μ değerleri bu iki eşitsizliğin her biri için bulunan çözüm aralıklarının kesişimidir.

$$\mu \in [(-\infty, \mu_1) \cup (\mu_2, \infty)] \cap [(-\infty, \mu_1^*) \cup (\mu_2^*, \infty)]$$

Dikkat edilirse

$$\Delta = \Delta^* + \overbrace{\frac{2\sigma^2}{h_2 - h_1} \left[\frac{\beta}{1 - \beta} + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right]}^{\geq 0} \quad (\text{yani } \Delta \geq \Delta^*)$$

Bu yüzden de $\mu_2^* \leq \mu_2$ ve $\mu_1^* \geq \mu_1$ olduğu açık. O zaman

$$[(-\infty, \mu_1) \cup (\mu_2, \infty)] \cap [(-\infty, \mu_1^*) \cup (\mu_2^*, \infty)] = (-\infty, \mu_1) \cup (\mu_2, \infty)$$

Dolayısıyla en son olarak

$$\mu \in (-\infty, \mu_1) \cup (\mu_2, \infty)$$

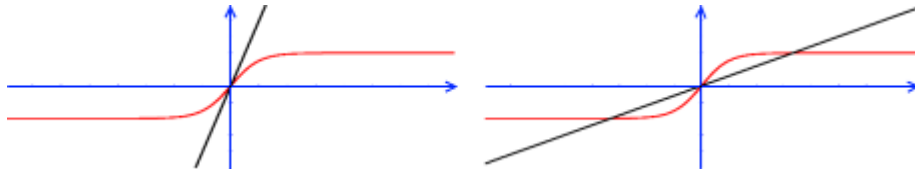
olarak bulunur. Yani $\mu < \mu_1$ veya $\mu > \mu_2$ olduğu durumlarda her zaman sıfırdan farklı $U_2(u)$ çözümü vardır. Diğer durumlarda ya çözüm yok, yada $U_2(u) = 0$ çözümü vardır.

Özel bir durum

Yukarıda yapılan hesaplamalar hep $\beta \neq 1$ ve $\gamma \neq 1$ olduğu dikkate alınarak yapıldı, ancak özel durumlar da vardır. Örneğin $\beta = 1$ ve $\gamma = 1$ durumunda (3.19) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade sıfıra eşittir ve bu durumda sadece $\eta = 0$ çözümü var, dolayısıyla $U_2(u) = 0$ bulunur. $\beta = 1$ ve $\gamma \neq 1$ durumunda ise (3.19) aşağıdaki hale gelir

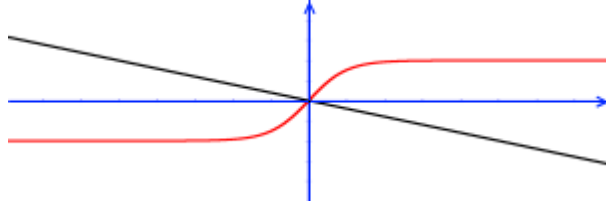
$$\begin{aligned} \tanh \eta &= \frac{-2\sigma^2(1 - \gamma)\eta}{4(h_2 - h_1)\omega} \\ \tanh \eta &= \frac{-2\sigma^2(1 - \gamma)\eta}{4(h_2 - h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\mu]} \\ \tanh \eta &= m\eta, \quad m = \frac{-2\sigma^2(1 - \gamma)}{4(h_2 - h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\mu]} \end{aligned}$$

Burada da yine geometrik yorum yapılırsa $\tanh \eta$ fonksiyonu ve $m\eta$ doğrusunun kesişim noktaları aranan çözümlerdir.



Şekil 3.7: $m > 0$ iken olabilecek durumlar

$m = 0$ durumunu dikkate alınmazsa grafiklerin bir birine göre durumu sadece Şekil 3.7 veya Şekil 3.8'deki durumlardan birine denk geliyor. Grafiklerden de görüldüğü üzere,



Şekil 3.8: $m < 0$ durumu

$m < 0$ olduğu zaman sadece bir kesişim var ve bu orijinde olduğu için $\eta = 0$ bulunur buradan da $U_2(u) = 0$. $m > 0$ olduğu zaman m değerinin büyüklüğüne göre iki durum vardır, ya bir tane orijinde kesişim, yada üç tane kesişim vardır. Aynen yukarıda olduğu gibi doğrunun orijindeki türevi $\tanh \eta$ fonksiyonunun orijindeki türevinden küçükse üç, aksi takdirde bir kesişim vardır. Yine bu durumu dikkate alarak μ üzerinden şartlandırma yapılırsa

$$\begin{aligned} (\tanh \eta)' \Big|_{\eta=0} &> (m\eta)' \Big|_{\eta=0} \\ 1 &> m \\ 1 &> \frac{-2\sigma^2(1-\gamma)}{4(h_2-h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu]} \\ 1 + \frac{\sigma^2(1-\gamma)}{2(h_2-h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu]} &> 0 \\ \frac{\sigma^2(1-\gamma) + 2(h_2-h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu]}{2(h_2-h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu]} &> 0 \\ 2(h_2-h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu] \left(\sigma^2(1-\gamma) + 2(h_2-h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu] \right) &> 0 \\ \left[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu \right] \left(\sigma^2(1-\gamma) + 2(h_2-h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu] \right) &> 0 \end{aligned}$$

Sıfırları bulunursa

$$\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_3^* = -\frac{2\gamma}{1-\gamma}$$

ve

$$\sigma^2(1-\gamma) + 2(h_2-h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu] = 0$$

$$\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu = -\frac{\sigma^2(1-\gamma)}{2(h_2-h_1)}$$

$$\frac{1}{2}(1-\gamma)\mu = -\gamma - \frac{\sigma^2(1-\gamma)}{2(h_2-h_1)}$$

$$\mu_3 = -\frac{2\gamma}{1-\gamma} - \frac{\sigma^2}{h_2-h_1}$$

$\mu_3 < \mu_3^* < 0$ olduğu açık, o zaman

$$(\mu + \mu_3)(\mu + \mu_3^*) > 0$$

Buradan da $\mu \in (-\infty, \mu_3) \cup (\mu_3^*, \infty)$ bulunur.

Şimdi, önceden kabul edildiği için $m > 0$ hangi μ 'ler için geçerli olduğunun bulunması lazım.

$$\frac{-2\sigma^2(1-\gamma)}{4(h_2-h_1)[\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu]} > 0$$

$$\frac{1}{\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu} < 0$$

$$\gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)\mu < 0$$

$$\frac{1}{2}(1-\gamma)\mu < -\gamma \Rightarrow \mu < -\frac{2\gamma}{1-\gamma} = \mu_3^* \text{ yani } \mu \in (-\infty, \mu_3^*)$$

Bulunan bu iki aralığın kesişimi aranan aralıktır

$$[(-\infty, \mu_3) \cup (\mu_3^*, \infty)] \cap (-\infty, \mu_3^*) = (-\infty, \mu_3)$$

Dolayısıyla, aranan μ 'ler $(-\infty, \mu_3)$ aralığındadır, yani $\mu < \mu_3$ olduğu zaman her zaman sıfırdan farklı kesişimler var, bu da sıfırdan farklı $U_2(u)$ çözümünün mevcut olması demektir.

Son olarak $\beta \neq 1$ ve $\gamma = 1$ alınırsa bu durumda (3.19)

$$\tanh \eta = \frac{-2\sigma^2(1-\beta)\eta}{4(h_2-h_1)k}$$

haline gelir. Burada da yine yukarıdaki gibi yorum yapılırsa

$$1 > \frac{-2\sigma^2(1-\beta)}{4(h_2-h_1)k}$$

$$1 > \frac{-\sigma^2(1-\beta)}{2(h_2-h_1)[\beta - \frac{1}{2}(1-\beta)\mu]}$$

$$1 + \frac{\sigma^2(1-\beta)}{2(h_2-h_1)[\beta - \frac{1}{2}(1-\beta)\mu]} > 0$$

$$\frac{\sigma^2(1-\beta) + 2(h_2-h_1)[\beta - \frac{1}{2}(1-\beta)\mu]}{2(h_2-h_1)[\beta - \frac{1}{2}(1-\beta)\mu]} > 0$$

$$2(h_2-h_1)[\beta - \frac{1}{2}(1-\beta)\mu] \left(\sigma^2(1-\beta) + 2(h_2-h_1)[\beta - \frac{1}{2}(1-\beta)\mu] \right) > 0$$

$$[\beta - \frac{1}{2}(1-\beta)\mu] \left(\sigma^2(1-\beta) + 2(h_2-h_1)[\beta - \frac{1}{2}(1-\beta)\mu] \right) > 0$$

Sıfırları bulunursa

$$\beta - \frac{1}{2}(1-\beta)\mu = 0 \Rightarrow \mu_4^* = \frac{2\beta}{1-\beta}$$

ve

$$\sigma^2(1 - \beta) + 2(h_2 - h_1)[\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu] = 0$$

$$\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu = -\frac{\sigma^2(1 - \beta)}{2(h_2 - h_1)}$$

$$\frac{1}{2}(1 - \beta)\mu = \beta + \frac{\sigma^2(1 - \beta)}{2(h_2 - h_1)}$$

$$\mu_4 = \frac{2\beta}{1 - \beta} + \frac{\sigma^2}{h_2 - h_1}$$

$\mu_4 > \mu_4^* > 0$ olduğu açık, o zaman

$$(\mu - \mu_4)(\mu - \mu_4^*) > 0$$

Buradan da $\mu \in (-\infty, \mu_4^*) \cup (\mu_4, \infty)$ bulunur.

Önceden doğrunun eğiminin sıfırdan büyük olduğu kabul edildiği için bu şartı da sağlayan μ 'lerin bulunması lazım.

$$\frac{-2\sigma^2(1 - \beta)}{4(h_2 - h_1)[\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu]} > 0$$

$$\frac{1}{\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu} < 0$$

$$\beta - \frac{1}{2}(1 - \beta)\mu < 0$$

$$\frac{1}{2}(1 - \beta)\mu > \beta \Rightarrow \mu > \frac{2\beta}{1 - \beta} = \mu_4^* \text{ yani } \mu \in (\mu_4^*, \infty)$$

Bulunan bu iki aralığın kesişimi aranan aralıktır

$$[(-\infty, \mu_4^*) \cup (\mu_4, \infty)] \cap (\mu_4^*, \infty) = (\mu_4, \infty)$$

Dolayısıyla, aranan μ 'ler (μ_4, ∞) aralığındadır, yani $\mu > \mu_4$ olduğu sürece her zaman sıfırdan farklı kesişimler var, bu da yine sıfırdan farklı $U_2(u)$ çözümünün mevcut olması demektir.

3.2.2 Genel Çözüm

Nihayet, yukarıda yapılan bütün değerlendirmeler dikkate alınarak (3.10) için aşağıdaki şekilde en genel çözüm yazılabilir [2].

$$U(u) = U_n(u) + C(u), \quad C(u) = \begin{cases} 0, & \text{Durum1} \\ U_1(u), & \text{Durum2} \\ U_2(u), & \text{Durum3} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$Durum1 := \begin{cases} \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu_1 < \mu < \mu_2 & \text{veya} \\ \beta = 1; \gamma \neq 1; \mu > \mu_3 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma = 1; \mu < \mu_4 & \text{veya} \\ \beta = 1; \gamma = 1 & \end{cases}$$

$$Durum2 := \begin{cases} \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu = \mu_1 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu = \mu_2 & \text{veya} \\ \beta = 1; \gamma \neq 1; \mu = \mu_3 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma = 1; \mu = \mu_4 & \end{cases}$$

$$Durum3 := \begin{cases} \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu < \mu_1 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu > \mu_2 & \text{veya} \\ \beta = 1; \gamma \neq 1; \mu < \mu_3 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma = 1; \mu > \mu_4 & \end{cases}$$

(3.21) ile verilen genel çözüm formülüne dikkat edilirse μ 'den bağımsız olarak sıfırdan farklı $U_n(u)$ her zaman mevcut olduğu için yukarıdaki durumların hiç birine dahil edilmiyor. *Durum1*'de $U_1(u)$ ve $U_2(u)$ 'nin mevcut olmadığı veya sıfıra eşit olduğu μ 'ler, *Durum2* ve *Durum3*'de de sırasıyla sıfırdan farklı $U_1(u)$ ve $U_2(u)$ çözümlerinin mevcut olduğu μ 'ler alınmıştır.

Şimdi en başa, (3.4) denkleminde geri dönülürse, artık $U(u)$ ve $T(t)$ bulunduğu göre $z(t, u)$ 'nin neye eşit olduğu söylenilebilir. Fakat burada dikkat edilmesi gereken başka bir husus $U_n(u)$ sonsuz sayıda bulunduğu için denklemin tam çözümünün bütün çözümlerin toplamı şeklinde olmasıdır, yani

$$z(t, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \exp\left(\frac{-\sigma^2 \nu t}{2}\right) U_n(u) \right] + K_1(u)$$

$$K_1(u) = \begin{cases} 0, & Durum1 \\ A_1 \exp\left(\frac{-\sigma^2 \nu t}{2}\right) U_1(u), & Durum2 \\ A_2 \exp\left(\frac{-\sigma^2 \nu t}{2}\right) U_2(u), & Durum3 \end{cases}$$

Burada A_n, A_1, A_2 sabitlerdir ve $\nu = \lambda + \frac{\mu^2}{\sigma^4}$, fakat toplamın içindeki ifade için $\lambda = \frac{\theta_n^2}{(h_2 - h_1)^2}$, *Durum 3*'deki ifade için $\lambda = -\frac{\eta^2}{(h_2 - h_1)^2}$, *Durum 2* için ise $\lambda = 0$. Bunlar da

dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
z(t, u) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \exp \left(\frac{-\sigma^2 t (\lambda + \frac{\mu^2}{\sigma^4})}{2} \right) U_n(u) \right] + K_1(u) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \exp \left(-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2 \lambda t}{2} \right) U_n(u) \right] + K_1(u) \\
&= \exp \left(-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} \right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \exp \left(-\frac{\sigma^2 \theta_n^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} \right) U_n(u) \right] + K_2(u) \right\}
\end{aligned}$$

$$K_2(u) = \begin{cases} 0, & \text{Durum1} \\ A_1 U_1(u), & \text{Durum2} \\ A_2 \exp \left(\frac{\sigma^2 \eta^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} \right) U_2(u), & \text{Durum3} \end{cases}$$

Şimdi, $u = y - h_1$ ve $p(t, u) = \exp \left(\frac{\mu}{\sigma^2} u \right) z(t, u)$ olduğu da dikkate alınarak (3.8) yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}
p(t, y) &= \exp \left(\frac{\mu}{\sigma^2} y - \frac{\mu h_1}{\sigma^2} \right) z(t, u) \\
&= \exp \left(\frac{\mu}{\sigma^2} y - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} \right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \exp \left(-\frac{\sigma^2 \theta_n^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} \right) U_n(y - h_1) \right] + K_3 \right\} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$K_3 = \begin{cases} 0, & \text{Durum1} \\ D_1 U_1(y - h_1), & \text{Durum2} \\ D_2 \exp \left(\frac{\sigma^2 \eta^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} \right) U_2(y - h_1), & \text{Durum3} \end{cases}$$

Burada

$$C_n = \exp \left(-\frac{\mu h_1}{\sigma^2} \right) A_n, \quad D_1 = \exp \left(-\frac{\mu h_1}{\sigma^2} \right) A_1, \quad D_2 = \exp \left(-\frac{\mu h_1}{\sigma^2} \right) A_2$$

sonuçta bunlar sabitler olduğu için nasıl adlandırıldıkları o kadar da önemli değil.

3.2.3 Başlangıç Şart Kullanılarak En Genel Çözümde Sabitlerin Bulunması

Geiş olasılığı yoğunluğu için elde edilen (3.22) ifadesinde C_n , D_1 ve D_2 sabitlerinin bulunması için (3.5) başlangıç şartını kullanacağız. Başlangıç şartı uygularken hesaplamalarda, bazı fonksiyonlar ailesinin sahip olduğu ortogonal sistem oluşturma özeliğinden yararlanacağız.

Tanım 3.2.1. $\{\Phi_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesi

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi_n(x)\Phi_m(x)w(x)dx = 0 \quad \text{eğer } m \neq n$$

şartını sağlarsa bu aileye $[\alpha, \beta]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre *orthogonal sistem* denilir.

3.2.3.1 Elde Edilen Çözümün Ortogonallık Özelliği

İleride kullanacağımız için aşağıdaki iddianın ispatlanması gerekir.

İddia:

$$\{U_n(u)\} = \frac{(1-\gamma)\sigma^2\theta_n}{2(h_2-h_1)} \cos\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) + \omega \sin\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right)$$

fonksiyonlar ailesi $[0, h_2 - h_1]$ aralığında $w = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre *ortogonal sistem*dir.

İspat:

$$U_n(u) = \frac{(1-\gamma)\sigma^2\theta_n}{2(h_2-h_1)} \cos\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) + \omega \sin\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right)$$

$$U_n'(u) = \frac{\theta_n}{h_2-h_1} \left[-\frac{(1-\gamma)\sigma^2\theta_n}{2(h_2-h_1)} \sin\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) + \omega \cos\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} U_n''(u) &= -\frac{\theta_n^2}{(h_2-h_1)^2} \left[\frac{(1-\gamma)\sigma^2\theta_n}{2(h_2-h_1)} \cos\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) + \omega \sin\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) \right] \\ &= -\frac{\theta_n^2}{(h_2-h_1)^2} U_n(u) \end{aligned}$$

Bunları dikkate alarak aşağıdaki şekilde bir integrale bakalım

$$\begin{aligned} & -\frac{\theta_n^2}{(h_2-h_1)^2} \int_0^{h_2-h_1} U_n(u)U_m(u)du \\ &= \int_0^{h_2-h_1} U_n''(u)U_m(u)du \\ &= \int_0^{h_2-h_1} U_m(u)d(U_n'(u)) \\ &= -\int_0^{h_2-h_1} U_m'(u)d(U_n(u)) + U_n'(u)U_m(u) \Big|_{u=0}^{u=h_2-h_1} \\ &= \int_0^{h_2-h_1} U_n(u)U_m''(u)du - U_n(u)U_m'(u) \Big|_{u=0}^{u=h_2-h_1} + U_n'(u)U_m(u) \Big|_{u=0}^{u=h_2-h_1} \\ &= -\frac{\theta_m^2}{(h_2-h_1)^2} \int_0^{h_2-h_1} U_n(u)U_m(u)du - [U_n(h_2-h_1)U_m'(h_2-h_1) \\ & \quad - U_n(0)U_m'(0) - U_n'(h_2-h_1)U_m(h_2-h_1) + U_n'(0)U_m(0)] \end{aligned}$$

(3.11) ve (3.12) sınır şartları gereğince

$$U'(h_2 - h_1) = -\frac{2k}{(1 - \beta)\sigma^2}U(h_2 - h_1) \quad \text{ve} \quad U'(0) = \frac{2\omega}{(1 - \gamma)\sigma^2}U(0)$$

bunlar dikkate alınırsa son eşitlikteki en son terimin (parantezin içindeki ifadenin) sifıra eşit olduğu kolayca görülebilir. Böylece

$$-\frac{\theta_n^2}{(h_2 - h_1)^2} \int_0^{h_2 - h_1} U_n(u)U_m(u)du = -\frac{\theta_m^2}{(h_2 - h_1)^2} \int_0^{h_2 - h_1} U_n(u)U_m(u)du$$

eşitliğine ulaşılmış oluruz. Son olarak bu eşitlik

$$\left(\frac{\theta_m^2}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{\theta_n^2}{(h_2 - h_1)^2} \right) \int_0^{h_2 - h_1} U_n(u)U_m(u)du = 0$$

şeklinde yazılırsa, $m \neq n$ olduğu sürece

$$\int_0^{h_2 - h_1} U_n(u)U_m(u)du = 0$$

sonucuna varmış oluruz.

Not: $u = y - h_1$ olduğundan $\{U_n(y - h_1)\}$ fonksiyonlar ailesi de $[h_1, h_2]$ aralığında $w = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal sistemdir.

3.2.3.2 Başlangıç Şartın Uygulanması

Artık başlangıç şartı uygulayarak (3.22)'de sabitleri bulabiliriz. Kullanacağımız bir diğer bilgi, (3.22) genel çözümünde

$$\exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}y - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \exp\left(-\frac{\sigma^2 \theta_n^2 t}{2(h_2 - h_1)^2}\right) U_n(y - h_1) \right]$$

ve

$$\exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}y - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) K_3(u)$$

kısımlarının ayrı ayrılıkta (3.4)'ün birer çözümleri olması bilgisidir (zaten (3.22) genel çözümü bütün çözümlerin lineer kombinasyonundan oluşan bir tam çözümdür). O zaman başlangıç şart bu iki ayrı kısım için ayrı ayrılıkta uygulanabilir. İlk kısım için uygulanırsa

$$p(0, y) = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}y\right) \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(y - h_1)$$

$$\delta(y - x) \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2}y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(y - h_1)$$

Her iki taraf $U_m(y - h_1)$ ile çarpılırsa ve her iki tarafın $[h_1, h_2]$ aralığında integrali alınarsa

$$\int_{h_1}^{h_2} \delta(y - x) \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2}y\right) U_m(y - h_1) dy = \int_{h_1}^{h_2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(y - h_1) U_m(y - h_1) dy$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \delta(y - x) \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2}y\right) U_m(y - h_1) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{h_1}^{h_2} C_n U_n(y - h_1) U_m(y - h_1) dy$$

$\{U_n(y - h_1)\}$ fonksiyonlar ailesi $[h_1, h_2]$ aralığında ortogonal bir sistem olduğundan sağ taraftaki integrallerden geriye sadece $n = m$ durumuna denk geleni sıfırdan farklı olabilir, dolayısıyla

$$\int_{h_1}^{h_2} \delta(y - x) \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2}y\right) U_n(y - h_1) dy = \int_{h_1}^{h_2} C_n U_n^2(y - h_1) dy$$

buradan da

$$C_n = \frac{\int_{h_1}^{h_2} \delta(y - x) \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2}y\right) U_n(y - h_1) dy}{\int_{h_1}^{h_2} U_n^2(y - h_1) dy} \quad (3.23)$$

bulunur.

Aynı yöntem çözümün diğer kısmına da uygulanırsa D_1 ve D_2 sabitleri için de

$$D_1 = \frac{\int_{h_1}^{h_2} \delta(y - x) \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2}y\right) U_1(y - h_1) dy}{\int_{h_1}^{h_2} U_1^2(y - h_1) dy} \quad (3.24)$$

ve

$$D_2 = \frac{\int_{h_1}^{h_2} \delta(y - x) \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2}y\right) U_2(y - h_1) dy}{\int_{h_1}^{h_2} U_2^2(y - h_1) dy} \quad (3.25)$$

bulunur.

Bu sabitlerin hesaplanması için ise kesirlerin pay ve paydalarındaki integrallerin bulunması lazım. Kesirlerin payındaki integrallerin hesaplanması için Dirac-delta fonksiyonunun

$$\int_c^d f(t) \delta(t - a) dt = \begin{cases} f(a), & \text{eğer } c < a < d \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.26)$$

özellği kullanılacak.

Önce D_1 sabitini hesaplayalım. Paydadaki integrale bakılırsa

$$\int_{h_1}^{h_2} U_1^2(y - h_1) dy = \int_{h_1}^{h_2} \left[y - h_1 - (h_2 - h_1) - \frac{\sigma^2(1 - \beta)}{2k} \right]^2 dy$$

kısa olsun diye $q = h_2 + \frac{\sigma^2(1 - \beta)}{2k}$ denilirse

$$\begin{aligned}
& \int_{h_1}^{h_2} U_1^2(y - h_1) dy = \int_{h_1}^{h_2} [y - q]^2 dy \\
& = \int_{h_1}^{h_2} [y^2 - 2qy + q^2] dy = \left[\frac{y^3}{3} - qy^2 + q^2 y \right]_{y=h_1}^{y=h_2} \\
& = \frac{h_2^3}{3} - qh_2^2 + h_2q^2 - \frac{h_1^3}{3} + qh_1^2 - h_1q^2 \\
& = \frac{h_2^3}{3} - h_2^3 - \frac{\sigma^2(1-\beta)h_2^2}{2k} + h_2^3 + \frac{h_2\sigma^4(1-\beta)^2}{4k^2} + \frac{h_2^2\sigma^2(1-\beta)}{k} - \frac{h_1^3}{3} \\
& \quad + h_1^2h_2 + \frac{h_1^2\sigma^2(1-\beta)}{2k} - h_1h_2^2 - \frac{h_1\sigma^4(1-\beta)^2}{4k^2} - \frac{h_1h_2\sigma^2(1-\beta)}{k} \\
& = \frac{(h_2 - h_1)^3}{3} + \frac{\sigma^2(1-\beta)(h_2 - h_1)^2}{2k} + \frac{\sigma^4(1-\beta)^2(h_2 - h_1)}{4k} = M_2 \quad (3.27)
\end{aligned}$$

bulunur. Paydaki integrale bakılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{-\mu y}{\sigma^2}\right) p(0, y) U_1(y - h_1) dy &= \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{-\mu y}{\sigma^2}\right) U_1(y - h_1) \delta(y - x) dy \\
&= \exp\left(\frac{-\mu x}{\sigma^2}\right) U_1(x - h_1)
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman

$$D_1 = \frac{1}{M_2} \exp\left(\frac{-\mu x}{\sigma^2}\right) U_1(x - h_1) \quad (3.28)$$

Şimdi C_n sabitini hesaplayalım. Kolaylık için $\frac{(1-\gamma)\sigma^2\theta_n}{2(h_2-h_1)} = \varphi_n$ denilirse ve kesirin alt kısmındaki integrale bakılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{h_1}^{h_2} U_n^2(y - h_1) dy = \int_0^{h_2-h_1} U_n^2(u) du \\
& = \int_0^{h_2-h_1} \left[\varphi_n \cos\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) + \omega \sin\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) \right]^2 du \\
& = \int_0^{h_2-h_1} \left[\varphi_n^2 \cos^2\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) + \omega^2 \left(1 - \cos^2\left(\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right)\right) \right] du \\
& \quad + \int_0^{h_2-h_1} \varphi_n \omega \sin\left(2\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) du \\
& = \frac{1}{2}(\varphi_n^2 - \omega^2) \int_0^{h_2-h_1} \left[\cos\left(2\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) + 1 \right] du + \int_0^{h_2-h_1} \omega^2 du \\
& \quad + \int_0^{h_2-h_1} \varphi_n \omega \sin\left(2\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) du \\
& = \frac{1}{2}(\varphi_n^2 - \omega^2) \left[\frac{h_2-h_1}{2\theta_n} \sin\left(2\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) + u \right] \Big|_{u=0}^{u=h_2-h_1} + \omega^2 u \Big|_{u=0}^{u=h_2-h_1} \\
& \quad - \frac{(h_2-h_1)\omega\varphi_n}{2\theta_n} \cos\left(2\theta_n \frac{u}{h_2-h_1}\right) \Big|_{u=0}^{u=h_2-h_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\varphi_n^2 - \omega^2) \left[\frac{h_2 - h_1}{2\theta_n} \sin(2\theta_n) + (h_2 - h_1) \right] \\
&+ \omega^2(h_2 - h_1) + \frac{(h_2 - h_1)\omega\varphi_n}{2\theta_n} [1 - \cos(2\theta_n)] \\
&= \frac{1}{4}(\varphi_n^2 - \omega^2) \frac{h_2 - h_1}{\theta_n} \sin 2\theta_n + \frac{1}{2}(h_2 - h_1)(\varphi_n^2 + \omega^2) + \frac{(h_2 - h_1)\omega\varphi_n}{\theta_n} \sin^2 \theta_n
\end{aligned}$$

Bu noktadan sonra (3.13), (3.14), (3.15) ve $\varphi_n = \frac{(1-\gamma)\sigma^2\theta_n}{2(h_2-h_1)}$ olduğu dikkate alınarak sadeleştirme yapılırsa en son olarak

$$\begin{aligned}
&\int_{h_1}^{h_2} U_n^2(y - h_1) dy \\
&= \frac{(1-\gamma)^2\sigma^4\theta_n^2}{8(h_2-h_1)} + \frac{1}{2}\omega^2(h_2-h_1) \\
&- \left(\frac{1}{2}\cos^2\theta_n + \sin^2\theta_n\right) \frac{4\omega^2\sigma^2(h_2-h_1)^2k - (1-\beta)(1-\gamma)^2\sigma^6\theta_n^2\omega}{2(1-\beta)(1-\gamma)\sigma^4\theta_n^2 - 8(h_2-h_1)^2k\omega} \\
&- \frac{4\omega^3\sigma^2(h_2-h_1)^2(1-\beta) - (1-\gamma)^3\sigma^6\theta_n^2k}{4(1-\beta)(1-\gamma)\sigma^4\theta_n^2 - 16(h_2-h_1)^2k\omega} \cos^2\theta_n = M_1 \tag{3.29}
\end{aligned}$$

bulunur, [2].

Kesirin üst kısmındaki integral de yeniden Dirac-delta fonksiyonun özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{-\mu y}{\sigma^2}\right) p(0, y) U_n(y - h_1) dy \\
&= \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{-\mu y}{\sigma^2}\right) U_n(y - h_1) \delta(y - x) dy = \exp\left(\frac{-\mu x}{\sigma^2}\right) U_n(x - h_1)
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman

$$C_n = \frac{1}{M_1} \exp\left(\frac{-\mu x}{\sigma^2}\right) U_n(x - h_1) \tag{3.30}$$

Son olarak yukarıda yapılan hesaplamalara bezer olarak

$$D_2 = \frac{1}{M_3} \exp\left(\frac{-\mu x}{\sigma^2}\right) U_2(x - h_1) \tag{3.31}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
M_3 &= \int_{h_1}^{h_2} U_2^2(y - h_1) dy = \frac{(1-\gamma)^2\sigma^4\eta^2}{8(h_2-h_1)} - \frac{1}{2}\omega^2(h_2-h_1) \\
&+ (\sinh^2\eta - \frac{1}{2}\cosh^2\eta) \frac{4\omega^2\sigma^2(h_2-h_1)^2k + (1-\beta)(1-\gamma)^2\sigma^6\eta^2\omega}{2(1-\beta)(1-\gamma)\sigma^4\theta_n^2 - 8(h_2-h_1)^2k\omega} \\
&- \frac{4\omega^3\sigma^2(h_2-h_1)^2(1-\beta) + (1-\gamma)^3\sigma^6\eta^2k}{4(1-\beta)(1-\gamma)\sigma^4\eta^2 + 16(h_2-h_1)^2k\omega} \cosh^2\eta \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Sabitler de bulunduğuna göre nihayet $p(t, y)$ 'nin aşağıdaki en son hali yazılabilir [2].

$$p(t, y) = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}(y - x) - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right)$$

$$\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{M_1} \exp \left(-\frac{\sigma^2 \theta_n^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} \right) U_n(y - h_1) U_n(x - h_1) \right] + K_4 \right\} \quad (3.33)$$

$$K_4 = \begin{cases} 0, & Durum1 \\ \frac{1}{M_2} U_1(y - h_1) U_1(x - h_1), & Durum2 \\ \frac{1}{M_3} \exp \left(\frac{\sigma^2 \eta^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} \right) U_2(y - h_1) U_2(x - h_1), & Durum3 \end{cases}$$

$$Durum1 := \begin{cases} \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu_1 < \mu < \mu_2 & \text{veya} \\ \beta = 1; \gamma \neq 1; \mu > \mu_3 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma = 1; \mu < \mu_4 & \text{veya} \\ \beta = 1; \gamma = 1 \end{cases}$$

$$Durum2 := \begin{cases} \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu = \mu_1 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu = \mu_2 & \text{veya} \\ \beta = 1; \gamma \neq 1; \mu = \mu_3 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma = 1; \mu = \mu_4 \end{cases}$$

$$Durum3 := \begin{cases} \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu < \mu_1 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma \neq 1; \mu > \mu_2 & \text{veya} \\ \beta = 1; \gamma \neq 1; \mu < \mu_3 & \text{veya} \\ \beta \neq 1; \gamma = 1; \mu > \mu_4 \end{cases}$$

3.3 İlk geçiş Zamanı İçin Dağılım ve Yoğunluğun Elde Edilmesi

Daha önce de bahsedildiği gibi (h_1, h_2) aralığında ilk geçiş zamanı dağılım fonksiyonunu transition olasılık yoğunluk fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir

$$F_{\tau}(t) = 1 - \int_{h_1}^{h_2} p(t, y) dy \quad (3.34)$$

Artık $p(t, y)$ bulunduğu göre dağılım fonksiyonuna ulaşmak için geriye sadece (3.34)'deki integrali hesaplamak kalır.

$$F_{\tau}(t) = 1 - \int_{h_1}^{h_2} p(t, y) dy$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu(y-x)}{\sigma^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{M_1} \exp\left(\frac{-\sigma^2 \theta_n^2 t}{2(h_2-h_1)^2}\right) U_n(y-h_1) U_n(x-h_1) \right] dy \\
&\quad - \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu(y-x)}{\sigma^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) K_4 dy \\
&= 1 - \frac{1}{M_1} \exp\left(\frac{-\mu x}{\sigma^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-\sigma^2 \theta_n^2 t}{2(h_2-h_1)^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) U_n(x-h_1) \overbrace{\int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) U_n(y-h_1) dy}^{I_1} \\
&\quad - \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} x - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) \overbrace{\int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) K_4 dy}^{I_2}
\end{aligned}$$

I_1 ve I_2 integralleri ayrılıkta hesaplanırsa daha kolay olur.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) U_n(y-h_1) dy = \frac{\sigma^2}{\mu} \int_{h_1}^{h_2} U_n(y-h_1) d\left(\exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right)\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\mu} U_n(y-h_1) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) \Big|_{y=h_1}^{y=h_2} - \frac{\sigma^2}{\mu} \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) U_n'(y-h_1) dy \\
&= \frac{\sigma^2}{\mu} U_n(y-h_1) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) \Big|_{y=h_1}^{y=h_2} - \frac{\sigma^4}{\mu^2} U_n'(y-h_1) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) \Big|_{y=h_1}^{y=h_2} \\
&\quad + \frac{\sigma^4}{\mu^2} \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) U_n''(y-h_1) dy
\end{aligned}$$

$U_n'' = -\frac{\theta_n^2}{(h_2-h_1)^2} U_n$ olduğu bilgisi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&I_1 \left(1 + \frac{\theta_n^2 \sigma^4}{(h_2-h_1)^2 \mu^2} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\mu} U_n(y-h_1) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) \Big|_{y=h_1}^{y=h_2} - \frac{\sigma^4}{\mu^2} U_n'(y-h_1) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) \Big|_{y=h_1}^{y=h_2} \\
I_1 &= \frac{\left[\frac{\sigma^2}{\mu} U_n(y-h_1) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) - \frac{\sigma^4}{\mu^2} U_n'(y-h_1) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) \right] \Big|_{y=h_1}^{y=h_2}}{\frac{(h_2-h_1)^2 \mu^2 + \theta_n^2 \sigma^4}{(h_2-h_1)^2 \mu^2}}
\end{aligned}$$

Kesirin üst kısmını hesaplırsak

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\sigma^2}{\mu} U_n(y - h_1) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) - \frac{\sigma^4}{\mu^2} U_n'(y - h_1) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) \right] \Big|_{y=h_1}^{y=h_2} \\
&= \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) \left[\frac{(1-\gamma)\sigma^4\theta_n}{2\mu(h_2-h_1)} \cos\theta_n + \frac{\sigma^2\omega}{\mu} \sin\theta_n \right] \\
&+ \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) \left[\frac{(1-\gamma)\sigma^6\theta_n^2}{2\mu^2(h_2-h_1)^2} \sin\theta_n - \frac{\sigma^4\omega\theta_n}{\mu^2(h_2-h_1)} \cos\theta_n \right] \\
&- \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) \left[\frac{(1-\gamma)\sigma^4\theta_n}{2\mu(h_2-h_1)} - \frac{\sigma^4\omega\theta_n}{\mu^2(h_2-h_1)} \right] \\
&= \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) \frac{(1-\gamma)\mu\sigma^4\theta_n - 2\sigma^4\omega\theta_n}{2\mu^2(h_2-h_1)} \cos\theta_n \\
&+ \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) \frac{2\mu\sigma^2\omega(h_2-h_1)^2 + (1-\gamma)\sigma^6\theta_n^2}{2\mu^2(h_2-h_1)^2} \sin\theta_n \\
&- \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) \frac{(1-\gamma)\mu\sigma^4\theta_n - 2\sigma^4\omega\theta_n}{2\mu^2(h_2-h_1)}
\end{aligned}$$

(3.14)'den $(1-\gamma)\mu = 2\omega - 2\gamma$, bu yukarıda dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma^2}{2\mu^2(h_2-h_1)^2} \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) (2\mu\omega(h_2-h_1)^2 + (1-\gamma)\sigma^4\theta_n^2) \sin\theta_n \\
&- \frac{\sigma^2}{2\mu^2(h_2-h_1)^2} \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) 2\gamma\sigma^2(h_2-h_1)\theta_n \cos\theta_n \\
&+ \frac{\sigma^2}{2\mu^2(h_2-h_1)^2} \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) 2\gamma\sigma^2(h_2-h_1)\theta_n
\end{aligned}$$

O zaman

$$I_1 = \frac{\sigma^2}{2[(h_2-h_1)^2\mu^2 + \sigma^4\theta_n^2]} B_n$$

burada

$$\begin{aligned}
B_n &= \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) \left[(2\mu\omega(h_2-h_1)^2 + (1-\gamma)\sigma^4\theta_n^2) \sin\theta_n \right. \\
&\quad \left. - 2\gamma\sigma^2(h_2-h_1)\theta_n \cos\theta_n \right] + \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) 2\gamma\sigma^2(h_2-h_1)\theta_n
\end{aligned}$$

Şimdi I_2 integraline bakılırsa K_4 'ün *Durum3*'deki kısmına denk gelen integral bazı küçük değişikliklerle aynen I_1 integralinin hesaplanması gibidir (veya $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ eşitlikleri dikkate alınarak daha kolay şekilde hesaplanabilir). Bu yüzden de direk olarak sonuç yazılabilir, [2]. *Durum2*'ye denk gelen integrale bakılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{U_1(x-h_1)}{M_2} \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) U_1(y-h_1) dy \\
&= \frac{U_1(x-h_1)}{M_2} \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) \left(y - h_2 - \frac{\sigma^2(1-\beta)}{2k} \right) dy \\
&= \frac{\sigma^2 U_1(x-h_1)}{\mu M_2} \int_{h_1}^{h_2} \left(y - h_2 - \frac{\sigma^2(1-\beta)}{2k} \right) d\left(\exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2 U_1(x-h_1)}{\mu M_2} \left[\left(y - h_2 - \frac{\sigma^2(1-\beta)}{2k} \right) \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) \Big|_{h_1}^{h_2} - \frac{\sigma^2}{\mu} \int_{h_1}^{h_2} \exp\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) dy \right] \\
&= -\frac{\sigma^2 U_1(x-h_1)}{\mu M_2} \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) \frac{\sigma^2(1-\beta)}{2k} \\
&\quad - \frac{\sigma^2 U_1(x-h_1)}{\mu M_2} \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) \left(h_1 - h_2 - \frac{\sigma^2(1-\beta)}{2k} \right) \\
&\quad - \frac{\sigma^4 U_1(x-h_1)}{\mu^2 M_2} \left[\exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) - \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) \right] \\
&= \frac{\sigma^4 U_1(x-h_1)}{\mu^2 M_2} \left[\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) - \left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2} - 1 \right) \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) \right] \\
&\quad - \frac{\sigma^2 U_1(x-h_1)}{\mu M_2} \left(h_2 + \frac{\sigma^2(1-\beta)}{2k} \right) \left[\exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) - \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) \right] \\
&= E(n, x)
\end{aligned}$$

burada $E(n, x)$ kısa olsun diye sadece bir işaretlemidir.

Nihayet, toplarsak $F_\tau(t)$ için aşağıdaki sonuç yazılabilir

$$\begin{aligned}
F_\tau(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} &\left[\frac{\sigma^2 C(n, x)}{2[(h_2-h_1)^2 \mu^2 + \sigma^4 \theta_n^2]} \exp\left(\frac{-\sigma^2 \theta_n^2 t}{2(h_2-h_1)^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) \right] \\
&- \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} x - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) K_5 \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$K_5 = \begin{cases} 0 & \text{Durum1} \\ E(n, x) & \text{Durum2} \\ \frac{\sigma^2 C^*(\eta, x)}{2[(h_2-h_1)^2 \mu^2 - \sigma^4 \eta^2]} \exp\left(\frac{\sigma^2 \eta^2 t}{2(h_2-h_1)^2}\right) & \text{Durum3} \end{cases}$$

burada

$$C(n, x) = \frac{U_n(x-h_1)}{M_1} \exp\left(-\frac{\mu x}{\sigma^2}\right) B_n$$

ve

$$\begin{aligned}
C^*(\eta, x) &= \frac{1}{M_3} U_2(x-h_1) \\
&\times \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) [(2\mu\omega(h_2-h_1)^2 - (1-\gamma)\sigma^4\eta^2) \sinh \eta - 2\gamma\sigma^2(h_2-h_1)\eta \cosh \eta] \\
&+ \frac{2}{M_3} U_2(x-h_1) \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) \gamma\sigma^2(h_2-h_1)\eta
\end{aligned}$$

Dağılım fonksiyonu bulunduğuna göre artık yoğunluk fonksiyonu da bulunabilir.

Yoğunluk fonksiyonu dağılım fonksiyonunun zamana göre türevidir

$$f_\tau(t) = \frac{dF_\tau(t)}{dt}$$

(3.35) eşitliğinin t 'ye göre türevi alınırsa yoğunluk fonksiyonuna ulaşmış oluruz.

$$f_\tau(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} - \left(\frac{\sigma^4 \theta_n^2 + \mu^2 (h_2 - h_1)^2}{2\sigma^2 (h_2 - h_1)^2} \right) \\ \times \left[\frac{\sigma^2 C(n, x)}{2[(h_2 - h_1)^2 \mu^2 + \sigma^4 \theta_n^2]} \exp \left(\frac{-\sigma^2 \theta_n^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} \right) \right] \\ + \exp \left(-\frac{\mu}{\sigma^2} x - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} \right) K_6$$

$$K_6 = \begin{cases} 0 & Durum1 \\ \frac{\mu^2}{2\sigma^2} E(n, x) & Durum2 \\ \frac{\sigma^2 C^*(\eta, x)}{2[(h_2 - h_1)^2 \mu^2 - \sigma^4 \eta^2]} \left(\frac{(h_2 - h_1)^2 \mu^2 - \sigma^4 \eta^2}{2\sigma^2 (h_2 - h_1)^2} \right) \exp \left(\frac{\sigma^2 \eta^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} \right) & Durum3 \end{cases}$$

sadeleştirme yapılırsa en son olarak yoğunluk fonksiyonu için aşağıdaki formül elde edilir, [2].

$$f_\tau(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{C(n, x)}{4(h_2 - h_1)^2} \exp \left(\frac{-\sigma^2 \theta_n^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} \right) \right] \\ + \exp \left(-\frac{\mu}{\sigma^2} x - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} \right) K_7 \quad (3.36)$$

$$K_7 = \begin{cases} 0 & Durum1 \\ \frac{\mu^2}{2\sigma^2} E(n, x) & Durum2 \\ \frac{C^*(\eta, x)}{4(h_2 - h_1)^2} \exp \left(\frac{\sigma^2 \eta^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} \right) & Durum3 \end{cases}$$

Not: *Durum1*, *Durum2* ve *Durum3* bölüm 3.2'deki ifadeleri ile aynıdır.

3.3.1 Özel Bir Durum İçin Dağılım ve Yoğunluk

Son olarak ileride kullanılacağı için h_2 sınırının tamamen yutan, h_1 sınırının da tamamen yansıtan engel olduğu özel bir durum için yoğunluk fonksiyonunu hesaplayalım. Başka bir deyişle (3.36) formülünün $\beta = 1$ ve $\gamma = 0$ seçilerek nasıl bir ifadeye dönüştüğüne bakalım.

$\beta = 1$ ve $\gamma = 0$ durumunda $k = 1$ ve $\omega = \frac{1}{2}\mu$ oluyor. (3.15) ve (3.19) özdeğer koşulları aşağıdaki hale gelir

$$\tan \theta_n = -\frac{\sigma^2 \theta_n}{\mu(h_2 - h_1)} \quad \text{ve} \quad \tanh \eta = -\frac{\sigma^2 \eta}{\mu(h_2 - h_1)}$$

Şimdi formülü oluşturan kısımlara bakılırsa

$$M_1 = \frac{\sigma^4 \theta_n^2}{8(h_2 - h_1)} + \frac{1}{8}(h_2 - h_1)\mu^2 + \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta_n + \sin^2 \theta_n\right) \frac{\mu^2 \sigma^2 (h_2 - h_1)^2}{4\mu(h_2 - h_1)^2} - \frac{\sigma^6 \theta_n^2}{8\mu(h_2 - h_1)^2} \cos^2 \theta_n$$

yukarıdaki birinci özdeğer koşulundan $\cos^2 \theta_n = \frac{\mu^2 (h_2 - h_1)^2}{\sigma^4 \theta_n^2} \sin^2 \theta_n$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\sigma^4 \theta_n^2}{8(h_2 - h_1)} + \frac{1}{8}(h_2 - h_1)\mu^2 + \frac{\mu \sigma^2}{8} \cos^2 \theta_n + \frac{\mu \sigma^2}{4} \sin^2 \theta_n \\ &\quad - \frac{\sigma^6 \theta_n^2}{8\mu(h_2 - h_1)^2} \frac{\mu^2 (h_2 - h_1)^2}{\sigma^4 \theta_n^2} \sin^2 \theta_n \\ &= \frac{\sigma^4 \theta_n^2}{8(h_2 - h_1)} + \frac{(h_2 - h_1)\mu^2}{8} + \frac{\mu \sigma^2}{8} \\ &= \frac{\sigma^4 \theta_n^2 + \mu^2 (h_2 - h_1)^2 + \mu \sigma^2 (h_2 - h_1)}{8(h_2 - h_1)} \end{aligned}$$

Aynı mantıkla

$$M_3 = \frac{\sigma^4 \eta^2 - \mu^2 (h_2 - h_1)^2 - \mu \sigma^2 (h_2 - h_1)}{8(h_2 - h_1)}$$

$$M_2 = \frac{1}{3}(h_2 - h_1)^2$$

$$C(n, x) = \frac{1}{M_1} \exp\left(\frac{-\mu x}{\sigma^2}\right) U_n(x - h_1) \exp\left(\frac{-\mu h_2}{\sigma^2}\right) [\sigma^4 \theta_n^2 + \mu^2 (h_2 - h_1)^2] \sin \theta_n$$

$$C^*(\eta, x) = \frac{1}{M_3} \exp\left(\frac{-\mu x}{\sigma^2}\right) U_2(x - h_1) \exp\left(\frac{-\mu h_2}{\sigma^2}\right) [\mu^2 (h_2 - h_1)^2 - \sigma^4 \eta^2] \sinh \eta$$

$$E(n, x) = \frac{\sigma^2 U_1(x - h_1)}{\mu^2 M_2} \left([\sigma^2 + \mu(h_2 - h_1)] \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) - \sigma^2 \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) \right)$$

$$U_1(x - h_1) = x - h_2$$

$$U_2(x - h_1) = \frac{\sigma^2 \eta}{2(h_2 - h_1)} \cosh\left(\eta \frac{x - h_1}{h_2 - h_1}\right) + \frac{\mu}{2} \sinh\left(\eta \frac{x - h_1}{h_2 - h_1}\right)$$

$$U_n(x - h_1) = \frac{\sigma^2 \theta_n}{2(h_2 - h_1)} \cos\left(\theta_n \frac{x - h_1}{h_2 - h_1}\right) + \frac{\mu}{2} \sin\left(\theta_n \frac{x - h_1}{h_2 - h_1}\right)$$

$$\mu_3 = -\frac{\sigma^2}{h_2 - h_1}$$

$$Durum1 := \mu > -\frac{\sigma^2}{h_2 - h_1}$$

$$Durum2 := \mu = -\frac{\sigma^2}{h_2 - h_1}$$

$$Durum3 := \mu < -\frac{\sigma^2}{h_2 - h_1}$$

Bütün bunlar dikkate alınarak (3.36) yeniden yazılırsa, [2]

$$\begin{aligned}
f_\tau(t) = & \exp\left(-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} - \frac{\mu x}{\sigma^2}\right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\sigma^4 \theta_n^2 + \mu^2 (h_2 - h_1)^2 + \sigma^2 \mu (h_2 - h_1)} \right. \right. \\
& \times \left[\frac{\sigma^2 \theta_n^2}{2(h_2 - h_1)^2} \cos\left(\theta_n \frac{x - h_1}{h_2 - h_1}\right) + \frac{\mu}{2(h_2 - h_1)} \sin\left(\theta_n \frac{x - h_1}{h_2 - h_1}\right) \right] \\
& \left. \left. \times \exp\left(\frac{-\theta_n^2 \sigma^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} + \frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) [\sigma^4 \theta_n^2 + \mu^2 (h_2 - h_1)^2] \sin \theta_n \right\} + K_8 \right\} \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$K_8 = \begin{cases} 0, & \mu > -\frac{\sigma^2}{h_2 - h_1} \\ \Phi, & \mu = -\frac{\sigma^2}{h_2 - h_1} \\ \Psi, & \mu < -\frac{\sigma^2}{h_2 - h_1} \end{cases}$$

Burada

$$\Phi = \frac{3(x - h_2)}{2(h_2 - h_1)^3} \left[(\sigma^2 + \mu(h_2 - h_1)) \exp\left(\frac{\mu h_1}{\sigma^2}\right) - \sigma^2 \exp\left(\frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{2}{[\sigma^4 \eta^2 - \mu^2 (h_2 - h_1)^2 - \sigma^2 \mu (h_2 - h_1)] (h_2 - h_1)} \\
&\times \left[\frac{\sigma^2 \eta^2}{2(h_2 - h_1)} \cosh\left(\eta \frac{x - h_1}{h_2 - h_1}\right) + \frac{\mu}{2} \sinh\left(\eta \frac{x - h_1}{h_2 - h_1}\right) \right] \\
&\times \exp\left(\frac{\eta^2 \sigma^2 t}{2(h_2 - h_1)^2} + \frac{\mu h_2}{\sigma^2}\right) [\mu^2 (h_2 - h_1)^2 \sigma^4 \eta^2] \sinh \eta
\end{aligned}$$

4. BROWN HAREKETİ İÇİN MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİNİN DAĞILIM VE BEKLENEN DEĞERİ

Bu bölümde, bir önceki bölümde bulunan ilk geçiş zamanı yoğunluk fonksiyonu kullanılarak beklenen değeri sıfırdan farklı Brown hareketi için maksimum kayıp değişkeni beklenen değeri bulunması ve bu beklenen değerın asimptotik davranışından bahsedilecek, [3].

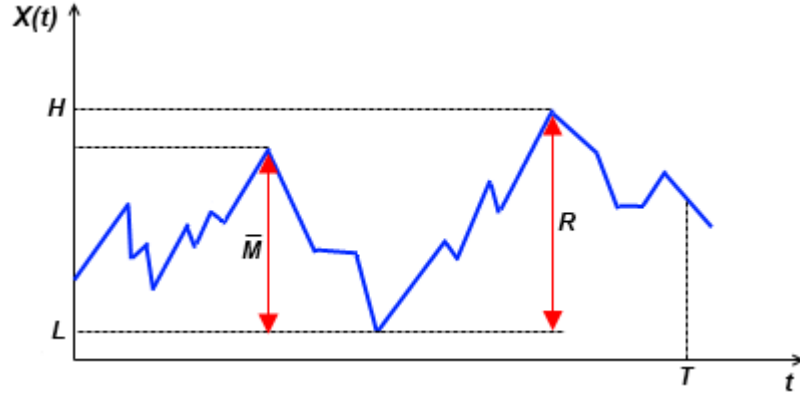
4.1 Bir Sürecin İnfemum, Supremum, Menzil ve Maksimum Kayıp Değişkeni

Rastgele bir $\{X_t; t \geq 0\}$ sürecinin herhangi bir T anına kadarki maksimum kayıp değişkeni bu süreçte yaşanan düşüşlerin en büyüğünü, infemum değişkeni sürecin ulaştığı en küçük değeri, supremum değişkeni sürecin ulaştığı en büyük değeri, menzil değişkeni ise verilen zaman aralığındaki en büyük değerle en küçük değer arasındaki farkı ifade eder. Aşağıdaki şekilde tanımlayalım [14]

- $H = \sup_{t \in [0, T]} X_t$, supremum değişkeni
- $L = \inf_{t \in [0, T]} X_t$, infemum değişkeni
- $R = H - L$, menzil değişkeni
- $\bar{M} = \sup_{t \in [0, T]} \left[\sup_{s \in [0, t]} X_s - X_t \right]$, maksimum kayıp değişkeni

Maksimum kayıp değişkeni $\bar{M} = \sup_{0 \leq s \leq t \leq T} (X_s - X_t)$ şeklinde de tanımlanır. Bu değişken bazen sürecin menzil değişkeni ile karıştırılıyor. Menzil değişkeni direk olarak en büyük değerle en küçük değerın farkıdır, fakat maksimum kayıp değişkeni sürecin herhangi bir yerel maksimum değeri ile bu maksimumdan sonra gelecek minimumla arasında olabilecek farkların en büyüğüdür. Tanımlarından da anlaşılacağı üzere, sadece sürecin en büyük değeri en küçük değereninden önce geldiği durumda menzil değişkeni ile maksimum kayıp değişkeni aynı değere sahiptir. Şekil 4.1'de bu değişkenler arasındaki fark grafik üzerinde daha açık gözüküyor.

Süreç Brown hareketi ise literatürde bu değişkenler üzerine bazı analitik sonuçlar vardır, fakat süreç kesikli Brown hareketi ise bu değişkenler üzerine olan sonuçların önemli çoğunluğu nümerik sonuçlardır. En son bölümde bundan bahsedeceğiz.



Şekil 4.1: maksimum kayıp, menzil, supremum ve infemum değişkenleri

4.2 Maksimum Kayıp Değişkeninin Dağılımı ve Beklenen Değeri

Yukarıdaki maksimum kayıp değişkeni ifadesinden görüldüğü üzere $t \in [0, T]$ için

$$M_t = \sup_{s \in [0, t]} X_s - X_t$$

denilirse o zaman $\bar{M} = \sup_{t \leq T} M_t$. Aslında M_t kendisi de bir rastgele süreçtir ve \bar{M} 'ye bu sürecin maksimumu gibi bakılabilir. Eğer X_t beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olan bir süreç ise o zaman M_t de beklenen değeri $-\mu$, varyansı σ^2 olan bir süreç olmuş olur, [3]. $M_0 = 0$ ve her zaman $M_t \geq 0$, hatta daha da fazlası M_t , 0'da yansıtan engele sahip bir yansımış Brown hareketidir, [7].

$\bar{M} = \sup_{t \leq T} M_t$ ve $h > 0$, M_t için bir yutan engel olsun, $[0, T]$ aralığında $\bar{M} \geq h$ olasılığı

$$P_{\bar{M}}(h) = \int_0^T f_\tau(t, h) dt \quad (4.1)$$

şeklinde hesaplanıyor. Burada τ yutulma zamanı ve f_τ yutulma zamanı yoğunluk fonksiyonudur. Önceki bölümde bu yoğunluk fonksiyonu daha genel bir durum için elde edilmişti. Şimdiki durum sadece $[0, h]$ aralığında, 0'ın tamamen yansıtan, h 'ın tamamen yutan engel olduğu özel bir durumdur, yani önceki bölümde $\beta = 1$, $\gamma = 0$ olduğu durum. Başka bir deyişle önceki bölümdeki (3.37) formulünde $h_1 = 0$, $h_2 = h$ ve $\mu = -\mu$ seçilirse tamamen bu duruma denk geliyor. Dikkat edilmesi gereken başka bir husus da (3.37) formulünde $x = 0$ seçilmesi gerekmesidir, çünkü $M(0) = 0$, yani sürecin başlangıç değeri sıfırdır. Bunlar dikkate alınarak (3.37) ile verilen f_τ nasıl hale geldiğine bakalım

$$Durum1 := \mu < \frac{\sigma^2}{h}$$

$$Durum2 := \mu = \frac{\sigma^2}{h}$$

$$Durum3 := \mu > \frac{\sigma^2}{h}$$

$$\Phi = \frac{-3h}{2h^3} \left[\sigma^2 - \mu h - \sigma^2 \exp\left(-\mu \frac{h}{\sigma^2}\right) \right]$$

Φ değişkeni Durum2'ye denk geliyor ve burada $\mu = \frac{\sigma^2}{h}$ olduğu dikkate alınır

$$\Phi = \frac{-3}{2h^2} \left[\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{h} h - \sigma^2 e^{-1} \right] = \frac{3\sigma^2}{2eh^2}$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{2}{(\sigma^4 \eta^2 - \mu^2 h^2 + \sigma^2 \mu h) h} \frac{\sigma^2 \eta}{2h} \exp\left(\frac{\eta^2 \sigma^2 t}{2h^2} - \frac{\mu h}{\sigma^2}\right) [\mu^2 h^2 - \sigma^4 \eta^2] \sinh \eta \\ &= \frac{\sigma^2 \eta [\mu^2 h^2 - \sigma^4 \eta^2] \sinh \eta}{h^2 \sigma^4 \eta^2 - \mu^2 h^2 + \sigma^2 \mu h} \exp\left(\frac{-\mu h}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\sigma^2 \eta^2 t}{2h^2}\right) \end{aligned}$$

O zaman

$$\begin{aligned} f_\tau(t, h) &= \exp\left(-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) \\ &\times \left[\frac{\sigma^2}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_n [\mu^2 h^2 + \sigma^4 \theta_n^2] \sin \theta_n}{\sigma^4 \theta_n^2 + \mu^2 h^2 - \sigma^2 \mu h} \exp\left(\frac{-\mu h}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{-\sigma^2 \theta_n^2 t}{2h^2}\right) + K_9 \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$K_9 = \begin{cases} 0 & \mu < \frac{\sigma^2}{h} \\ \frac{3\sigma^2}{2eh^2} & \mu = \frac{\sigma^2}{h} \\ \frac{\sigma^2 \eta [\mu^2 h^2 - \sigma^4 \eta^2] \sinh \eta}{h^2 \sigma^4 \eta^2 - \mu^2 h^2 + \sigma^2 \mu h} \exp\left(\frac{-\mu h}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\sigma^2 \eta^2 t}{2h^2}\right) & \mu > \frac{\sigma^2}{h} \end{cases}$$

θ_n ve η 'nin bulunduğu (3.15) ve (3.19) özdeğer koşulları da aşağıdaki hale gelir

$$\tan \theta_n = \frac{\sigma^2}{\mu h} \theta_n \quad (4.3)$$

$$\tanh \eta = \frac{\sigma^2}{\mu h} \eta \quad (4.4)$$

Artık, (4.1) formülü kullanılarak $P_{\bar{M}}(h) = P[\bar{M} \geq h]$ dağılımı bulunabilir. Dikkat edilirse (4.1)'deki integral t değişkenine göre olduğundan ve $f_\tau(t, h)$ 'nin (4.2) ile verilen

ifadesinde t 'ye bağılı kısım sadece \exp fonksiyonu içinde t 'nin birinci kuvveti şeklinde olduğundan (4.1) integralinin hesaplanması kolaydır, bu yüzden de direk olarak sonuç yazılabilir, [3].

$$P_{\bar{M}}(h) = 2\sigma^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n \sin \theta_n}{\sigma^4 \theta_n^2 + \mu^2 h^2 - \sigma^2 \mu h} \exp\left(-\frac{\mu h}{\sigma^2}\right) \times \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2 \theta_n^2 T}{2h^2}\right) \exp\left(-\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}\right)\right] + K_{10} \quad (4.5)$$

$$K_{10} = \begin{cases} 0 & \mu < \frac{\sigma^2}{h} \\ \frac{3}{e} \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}\right)\right] & \mu = \frac{\sigma^2}{h} \\ \frac{2\sigma^4 \eta \sinh \eta \exp\left(-\frac{\mu h}{\sigma^2}\right)}{\sigma^4 \eta^2 - \mu^2 h^2 + \sigma^2 \mu h} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2 \eta^2 T}{2h^2}\right) \exp\left(-\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}\right)\right] & \mu > \frac{\sigma^2}{h} \end{cases}$$

Şimdi, $\bar{M} \geq 0$ olduğu da dikkate alınırsa \bar{M} 'nin beklenen değeri

$$E(\bar{M}) = \int_0^{\infty} P_{\bar{M}}(h) dh \quad (4.6)$$

formülü ile elde ediliyor.

Beklenen değer (4.6) formülündeki integral h değişkenine göre olduğundan analitik olarak hesaplanması kolay olmayan bir iştir. Fakat, [3]'de yapıldığı üzere (4.6) beklenen değeri $\mu > 0$ ve $\mu < 0$ için sonsuz seri gösterimi şeklinde $\mu = 0$ için ise analitik şekilde verilebilir (yani μ 'nün değer ve işareti üzerinden sınıflandırma yapılarak). Daha sonra bu gösterimlerin de $T \rightarrow \infty$ iken asimptotik davranışına bakılabilir.

4.2.1 İnfimum, Supremum ve Menzil için Beklenen Değer

Maksimum kayıp değişkeni beklenen değerinin $T \rightarrow \infty$ iken asimptotik davranışına bakıldığı zaman kullanılacağı için önce infimum, supremum ve menzil değişkenlerin beklenen değerleri bulunması lazım. Bunun için ise yine λ yutulma zamanının $f_{\lambda}(t)$ yoğunluğu kullanılacak. Eğer bir önceki bölümde (3.36) formülünde $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $h_2 = h$ seçilirse ve $h_1 \rightarrow -\infty$ iken limite bakılırsa istenilen fonksiyon elde etmiş oluruz, [2] (aslında bu tek engel problemidir ve yoğunluk fonksiyonu da ters Gaussian dağılımı ile verilir)

$$f_{\lambda}(t) = \lim_{h_1 \rightarrow -\infty} f_{\tau}(t) = \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left(-\frac{(h - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

O zaman $P[H \geq h]$ için aşağıdaki yazılabilir

$$P[H \geq h] = \int_0^T f_{\lambda}(t) dt = \int_0^T \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left(-\frac{(h - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) dt$$

Dağılım bulunabildiğine göre artık H 'ın beklenen değeri de bulunabilir

$$\begin{aligned} E[H] &= \int_0^\infty P[H \geq h] dh = \int_0^\infty \int_0^T f_\lambda(t) dt dh \\ &= \int_0^\infty \int_0^T \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left(-\frac{(h-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) dt dh \end{aligned}$$

Aşağıdaki şekilde değişken değişimi yapılırsa

$$u = \frac{(h-\mu t)}{\sqrt{2\sigma^2 t}} \Rightarrow h = \mu t + u\sqrt{2\sigma^2 t} \Rightarrow dh = \sqrt{2\sigma^2 t} du$$

sınırlar da

$$h \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty, \quad h \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow -\frac{\mu\sqrt{t}}{\sqrt{2}\sigma} = \alpha(t)$$

şeklinde değişir. Bunlar yukarıdaki integralde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} E[H] &= \int_{\alpha(t)}^\infty \int_0^T \frac{\mu t + u\sqrt{2\sigma^2 t}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \sqrt{2\sigma^2 t} e^{-u^2} dt du \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(t)}^\infty \int_0^T e^{-u^2} dt du + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(t)}^\infty \int_0^T \left(\frac{2\sigma^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}} u e^{-u^2} dt du \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \left[\int_{\alpha(t)}^0 e^{-u^2} du + \int_0^\infty e^{-u^2} du \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \left(\frac{2\sigma^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\alpha(t)}^\infty u e^{-u^2} du \right] dt \end{aligned}$$

Burada $\alpha(t) < 0$ kabul ediliyor ve şimdi de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ bilgisi kullanılırsa

$$\begin{aligned} E[H] &= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^0 e^{-u^2} du dt + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \frac{\sqrt{\pi}}{2} dt \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \left(\frac{2\sigma^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} e^{-u^2} \Big|_{\alpha(t)}^b \right] dt \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^0 e^{-u^2} du dt + \frac{\mu T}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \left(\frac{\sigma^2}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha^2(t)} dt \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \int_0^{-\alpha(t)} e^{-u^2} du dt + \frac{\mu T}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \left(\frac{\sigma^2}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha^2(t)} dt \end{aligned}$$

Not: $e^{-u^2} \geq 0$ ve y eksenine göre simmetrik olduğundan bu fonksiyon için $\int_{\alpha(t)}^0 = \int_0^{-\alpha(t)}$

Yukarıdaki integraller ayrı ayrılıkta hesaplanırsa daha kolay olur. Ayrıca kısa olsun diye aşağıdaki gibi bir kısaltma da kullanılabilir

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du = \operatorname{erf}(x)$$

$erf(x)$ fonksiyonu bilinen bir fonksiyondur ve bu fonksiyona hata fonksiyonu denilir.

İlk integrale bakılırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \int_0^{-\alpha(t)} e^{-u^2} du dt \\
&= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(-\alpha(t)) dt = \frac{\mu}{2} \int_0^T erf(-\alpha(t)) dt \\
&= \frac{\mu}{2} \left[erf(-\alpha(t))t \Big|_0^T - \int_0^T t \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2(t)} (-\alpha(t))' dt \right] \\
&= \frac{\mu}{2} \left[erf(-\alpha(T))T - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \frac{\mu t}{2\sqrt{t}\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\alpha^2(t)} dt \right] \\
&= \frac{\mu}{2} \left[erf(-\alpha(T))T + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \alpha(t) e^{-\alpha^2(t)} dt \right]
\end{aligned}$$

Şimdi aşağıdaki gibi değişken değişimi yapılırsa

$$-\alpha(t) = \frac{\mu\sqrt{t}}{\sqrt{2\sigma^2}} = y \Rightarrow t = \frac{2\sigma^2}{\mu^2} y^2 \Rightarrow dt = 4\frac{\sigma^2}{\mu^2} y dy$$

sınırlarsa $t \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$, $t \rightarrow T \Rightarrow y \rightarrow -\alpha(T)$ ve sadelik için $-\alpha(T) = \omega$ denilirse ve bunlar yukarıda dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\mu}{2} \left[erf(\omega)T - \frac{4\sigma^2}{\mu^2\sqrt{\pi}} \int_0^\omega y^2 e^{-y^2} dy \right] \\
&= \frac{\mu}{2} \left[erf(\omega)T + \frac{4\sigma^2}{\mu^2\sqrt{\pi}} \int_0^\omega \frac{1}{2} y d(e^{-y^2}) \right] \\
&= \frac{\mu}{2} \left[erf(\omega)T + \frac{2\sigma^2}{\mu^2\sqrt{\pi}} \left(ye^{-y^2} \Big|_0^\omega - \int_0^\omega e^{-y^2} dy \right) \right] \\
&= \frac{\mu}{2} \left[erf(\omega)T + \frac{2\sigma^2}{\mu^2\sqrt{\pi}} \omega e^{-\omega^2} - \frac{\sigma^2}{\mu^2} erf(\omega) \right] \\
&= \frac{\mu T}{2} erf(\omega) + \frac{\sigma^2}{\mu\sqrt{\pi}} \omega e^{-\omega^2} - \frac{\sigma^2}{2\mu} erf(\omega)
\end{aligned}$$

Şimdi ikinci integrale bakalım

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \left(\frac{\sigma^2}{2t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha^2(t)} dt$$

Yine önceki integralde yapıldığı gibi değişken değişimi yapılırsa

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\omega \frac{\sigma}{\sqrt{2}\frac{\sqrt{2\sigma}}{\mu} y} e^{-y^2} \frac{4\sigma^2}{\mu^2} y dy = \frac{\sigma^2}{\mu} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\omega e^{-y^2} dy = \frac{\sigma^2}{\mu} erf(\omega)$$

İki integral de hesaplandığına göre artık $E[H]$ için aşağıdaki yazılabilir

$$\begin{aligned} E[H] &= \frac{\mu T}{2} + I_1 + I_2 \\ &= \frac{\mu T}{2} + \frac{\mu T}{2} \operatorname{erf}(\omega) + \frac{\sigma^2}{\mu\sqrt{\pi}} \omega e^{-\omega^2} + \frac{\sigma^2}{2\mu} \operatorname{erf}(\omega) \\ &= \frac{\mu T}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu} \left[\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2} \operatorname{erf}(\omega) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \omega e^{-\omega^2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\omega) \right] \end{aligned}$$

Yeniden $\mu\sqrt{T}/\sqrt{2\sigma^2} = \omega$ olduğu dikkate alınırsa $E[H]$ için aşağıdaki nihayi sonuç yazılabilir, [3]

$$E[H] = \frac{\mu T}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu} \left[\operatorname{erf}(\omega) \left(\omega^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (4.7)$$

L 'nin beklenen değeri için de $E[L] = -E[H | -\mu]$ yazılabilir, çünkü L 'ye beklenen değer negatif alınarak elde edilen H 'nin negatifi gibi bakılabilir. O zaman R 'nin beklenen değeri için de doğal olarak aşağıdaki yazılabilir.

$$R = H - L \Rightarrow E[R] = E[H] - E[L] = E[H|\mu] + E[H | -\mu]$$

$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ (yani erf tek fonksiyondur) olduğu da dikkate alınırsa

$$E[L] = \frac{\mu T}{2} - \frac{\sigma^2}{\mu} \left[\operatorname{erf}(\omega) \left(\omega^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (4.8)$$

$$E[R] = \frac{2\sigma^2}{\mu} \left[\operatorname{erf}(\omega) \left(\omega^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (4.9)$$

4.2.2 Maksimum Kayıp Değişkeninin Beklenen Değeri Hesaplanması ve Asimptotik Davranışı

Artık maksimum kayıp değişkeni belenen değeri hesaplanması için elimizde gereken bilgiler var, fakat daha önce de belirtildiği gibi bu değişken için analitik sonuçların çok az ve karmaşık olmasından dolayı belli bir noktadan sonra asimptotik davranışına bakılması daha makuldür. İleride bu değişkenin finansta uygulamasına bakıldığı zaman da asimptotik davranışın önemi bir daha ortaya çıkacak. [3]'de beklenen değer μ 'nün değer ve işareti üzerinden sınıflandırarak verilmiştir.

4.2.2.1 $\mu = 0$ için beklenen değer

Bu durumda (4.5) formülünde K_{10} kısmı sifıra eşit oluyor, çünkü $\sigma^2/h \geq 0$ ve dolayısıyla *Durum3*'ün gerçekleşmesi mümkün değil, eğer bir şekilde $\sigma^2/h = 0$ olursa o zaman

Durum2 gerçekleşmiş olur ki bu duruma denk gelen ifade $\mu = 0$ olduğu için sifıra eşit oluyor. *Durum1*'de ise zaten $K_{10} = 0$. Ayrıca $\mu = 0$ olduğu zaman (4.3) özdeğer şartı $\tan \theta_n = \infty$ haline gelir ve buradan da

$$\theta_n = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

bulunur. Yukarıdakiler dikkate alınarak (4.5) yeniden yazılırsa

$$P_{\bar{M}}(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \sin(n + \frac{1}{2})\pi}{(n + \frac{1}{2})\pi} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 T}{2h^2}\right) \right]$$

$\sin(n + \frac{1}{2})\pi = \cos(n\pi)$ olduğu da dikkate alınırsa

$$P_{\bar{D}}(h) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n + \frac{1}{2})} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 T}{2h^2}\right) \right] = \frac{2}{\pi} g\left(\frac{h}{\pi\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Burada

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})} \left[1 - \exp\left(-\frac{(n + \frac{1}{2})^2}{2x^2}\right) \right]$$

O zaman beklenen değer için aşağıdaki yazılabilir

$$E(\bar{M}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g\left(\frac{h}{\pi\sigma\sqrt{T}}\right) dh$$

$\frac{h}{\pi\sigma\sqrt{T}} = v$ denilirse

$$dv = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{T}} dh \quad \Rightarrow \quad dh = \pi\sigma\sqrt{T} dv$$

O zaman

$$E(\bar{M}) = 2\sigma\sqrt{T} \int_0^{\infty} g(v) dv$$

$\int_0^{\infty} g(v) dv = \sqrt{\pi/8}$ olduğu [8]'de hesaplanmıştır. Nihayet, $\mu = 0$ durumu için maksimum kayıp değişkeni beklenen değeri için aşağıdaki sonuç yazılabilir, [3].

$$E(\bar{M}) = 2\sigma\sqrt{T} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \approx 1.2533\sigma\sqrt{T} \quad (4.10)$$

4.2.2.2 $\mu < 0$ için beklenen değer

Bu durumda (4.5) formülünde yine $K_{10} = 0$, çünkü $\frac{\sigma^2}{h} > 0$ ve $\mu < 0$ dolayısıyla sadece *Durum1*'in gerçekleşmesi mümkün olabilir. (4.3) özdeğer şartından

$$\mu h = \sigma^2 \theta_n \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n} \quad \text{veya} \quad \sigma^2 \theta_n = \mu h \tan \theta_n$$

Bu (4.5)'de yerine yazılırsa

$$P_{\bar{M}}(h) = 2\sigma^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n \sin \theta_n}{\sigma^4 \theta_n^2 + \frac{\sigma^4 \theta_n^2 \cos^2 \theta_n}{\sin^2 \theta_n} - \frac{\sigma^4 \theta_n \cos \theta_n}{\sin \theta_n}} \exp\left(-\frac{\mu h}{\sigma^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[1 - \exp \left(-\frac{(\sigma^4 \theta_n^2 + \mu^2 h^2) T}{2h^2 \sigma^2} \right) \right] \\
& = 2 \exp \left(-\frac{\mu h}{\sigma^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 \theta_n}{\theta_n \sin^2 \theta_n + \theta_n \cos^2 \theta_n - \sin \theta_n \cos \theta_n} \\
& \quad \times \left[1 - \exp \left(-\frac{\mu^2 h^2 (1 + \tan^2 \theta_n) T}{2h^2 \sigma^2} \right) \right] \\
& = 2 \exp \left(-\frac{\mu h}{\sigma^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 \theta_n}{\theta_n - \sin \theta_n \cos \theta_n} \left[1 - \exp \left(-\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2 \cos^2 \theta_n} \right) \right]
\end{aligned}$$

(4.6) formülünü uygulamadan önce $u = -\mu h/\sigma^2$ değişken değişimi yapılırsa

$$du = -\frac{\mu}{\sigma^2} dh \quad \Rightarrow \quad dh = -\frac{\sigma^2}{\mu} du$$

o zaman $\mu < 0$ durumu için beklenen değer, [3]

$$E(\bar{M}) = \frac{-2\sigma^2}{\mu} Q_n(\omega^2) \quad (4.11)$$

Burada

$$Q_n(x) = \int_0^\infty \left\{ e^u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 \theta_n}{\theta_n - \sin \theta_n \cos \theta_n} \left[1 - \exp \left(-\frac{x}{\cos^2 \theta_n} \right) \right] \right\} du \quad (4.12)$$

ve $\omega = \mu \sqrt{T/2\sigma^2}$

(4.12) fonksiyonu çok karmaşık ve hesaplanması zor bir fonksiyondur, bu yüzden bu fonksiyonun $x \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken nasıl davrandığına bakılması daha uygundur. Fakat [9]'de x 'in bazı farklı değerleri için de nümerik olarak elde edilen değer tablosu da vardır. $T \rightarrow \infty$ iken (4.11)'in nasıl davrandığını bulmak için aşağıdaki ilişki kullanılacak

$$R \geq \bar{M} \geq -L$$

Bu üç değişken arasında böyle bir ilişkinin olması direk olarak onların tanımından ortaya çıkan bir bilgidir. Şimdi her üç değişkenin de beklenen değeri alınırsa

$$E[R] \geq E[\bar{M}] \geq -E[L]$$

Bu beklenen değerler için de (4.8), (4.9) ve (4.11) ile verilen formulleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{2\sigma^2}{\mu} \left[erf(\omega) \left(\omega^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \right] \geq -\frac{2\sigma^2}{\mu} Q_n(\omega^2) \\
& \geq -\frac{\mu T}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu} \left[erf(\omega) \left(\omega^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \right]
\end{aligned}$$

$\mu < 0$ olduğu için $-\frac{2\sigma^2}{\mu} > 0$ ve her taraf buna bölünürse

$$-erf(\omega)(\omega^2 + \frac{1}{2}) - \frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \geq Q_n(\omega^2) \geq \frac{\mu^2 T}{4\sigma^2} - \frac{1}{2} \left[erf(\omega)(\omega^2 + \frac{1}{2}) + \frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \right]$$

$$erf(-\omega)(\omega^2 + \frac{1}{2}) - \frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \geq Q_n(\omega^2) \geq \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} \left[erf(-\omega)(\omega^2 + \frac{1}{2}) - \frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \right]$$

$\mu < 0$ olduğu için $T \rightarrow \infty$ iken $\omega \rightarrow -\infty$ dolayısıyla $erf(-\omega) \rightarrow 1$ ve $\frac{\omega e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow 0$. Bunlar yukarıda dikkate alınırsa

$$\omega^2 + \frac{1}{2} \geq Q_n(\omega^2) \geq \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2}(\omega^2 + \frac{1}{2})$$

$$\omega^2 + \frac{1}{2} \geq Q_n(\omega^2) \geq \omega^2 + \frac{1}{4}$$

yani buradan çıkan sonuç

$$Q_n(x) \rightarrow x + \epsilon(x), \quad \frac{1}{4} \leq \epsilon(x) \leq \frac{1}{2}$$

$\epsilon(x)$ 'in $x \rightarrow \infty$ iken nasıl bir sayı olduğunu aslında tahmin edilebilir. [3]'de $\mu < 0$ iken $\lim_{x \rightarrow \infty} \epsilon(x) = \frac{1}{2}$ olduğu, asimptotik olarak bu durum için $E[\bar{M}] = E[R]$ olduğu ispatlanarak gösterilmiştir. Bunun için önce R 'nin beklenen değeri aşağıdaki notasyonla yazılıyor

$$E[R] = E[R|H \rightarrow L]P[H \rightarrow L] + E[R|L \rightarrow H]P[L \rightarrow H]$$

Burada " $A \rightarrow B$ ", A olayının B olayından önce gerçekleştiğini belirtmek için bir işaretlemidir, $P[A \rightarrow B]$ ise bunun olasılığıdır. $\mu < 0$ durumunda $P[L \rightarrow H]$ olasılığı $T \rightarrow \infty$ iken hızla sifıra gidiyor, bu yüzden de R 'nin beklenen değeri için yukarıdaki formülden geriye sadece

$$E[R] = E[R|H \rightarrow L]P[H \rightarrow L]$$

kalıyor. Diğer tarafan, eğer $H \rightarrow L$ durumu söz konusu ise \bar{M} 'nin tanımından dolayı $\bar{M} = R$. O zaman $P[H \rightarrow L] \leq 1$ olduğu için de

$$E[\bar{M}] \geq E[R|H \rightarrow L]P[H \rightarrow L]$$

Fakat tanımlarından dolayı daha genel bir durum için $R \geq \bar{M}$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla bu iki eşitsizliğin sonucu olarak $\mu < 0$ için asimptotik olarak $R = \bar{M}$ kanaatine varmış oluruz. Bundan dolayı da

$$Q_n(x) \rightarrow x + \frac{1}{2}, \quad x \rightarrow \infty$$

sonucuna varmış olunuz. Bu (4.11)'de dikkate alınır, sonuç itibarı ile $\mu < 0$ durumunda $T \rightarrow \infty$ iken \bar{M} 'nin beklenen değerinin asimptotik davranışı için aşağıdaki yazılabilir, [3]

$$E[\bar{M}] = -\frac{2\sigma^2}{\mu} Q_n \left(\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2} \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} -\mu T - \frac{\sigma^2}{\mu} \quad (4.13)$$

4.2.2.3 $\mu > 0$ için beklenen değer

Bu durumda $P_{\bar{M}}(h)$ için (4.5) formülünde ilave olarak K_{10} kısmından *Durum3*'e denk gelen kısım da yer alacak. (4.3) ve (4.4) özdeğer şartlarından

$$\mu h = \sigma^2 \theta_n \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n} \quad \text{veya} \quad \sigma^2 \theta_n = \mu h \tan \theta_n$$

$$\mu h = \sigma^2 \theta_n \frac{\cosh \eta}{\sinh \eta} \quad \text{veya} \quad \sigma^2 \eta = \mu h \tanh \eta$$

olduğunu da dikkate alarak $\mu < 0$ durumundaki sadeleştirmenin aynısı yapılırsa beklenen değer için aşağıdaki yazılabilir

$$\begin{aligned} E[\bar{M}] &= \int_0^\infty P_{\bar{M}}(h) dh \\ &= 2 \int_0^\infty \exp\left(\frac{-\mu h}{\sigma^2}\right) \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^3 \theta_n}{\theta_n - \cos \theta_n \sin \theta_n} \left[1 - \exp\left(\frac{-\mu T^2}{2\sigma^2 \cos^2 \theta_n}\right) \right] dh \\ &\quad - 2 \int_0^\infty \exp\left(\frac{-\mu h}{\sigma^2}\right) \frac{\sinh^3 \eta}{\eta - \cosh \eta \sinh \eta} \left[1 - \exp\left(\frac{-\mu T^2}{2\sigma^2 \cosh^2 \eta}\right) \right] dh \end{aligned}$$

İlk integralde

$$u = \frac{\mu h}{\sigma^2} \Rightarrow dh = \frac{\sigma^2}{\mu} du$$

ikinci integralde ise $u = \eta(h)$ denilerek

$$h = \frac{\sigma^2}{\mu} \frac{u}{\tanh u} \Rightarrow dh = \frac{\sigma^2}{\mu} \frac{\cosh u \sinh u - u}{\sinh^2 u}$$

şeklinde değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} E[\bar{M}] &= \frac{2\sigma^2}{\mu} \int_0^\infty e^{-u} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^3 \theta_n}{\theta_n - \cos \theta_n \sin \theta_n} \left[1 - \exp\left(\frac{-\mu T^2}{2\sigma^2 \cos^2 \theta_n}\right) \right] du \\ &\quad - \frac{2\sigma^2}{\mu} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u}{\tanh u}\right) \frac{\sinh^3 u}{u - \cosh u \sinh u} \frac{\cosh u \sinh u - u}{\sinh^2 u} \\ &\quad \times \left[1 - \exp\left(\frac{-\mu T^2}{2\sigma^2 \cosh^2 u}\right) \right] du \end{aligned}$$

yeniden $\omega = \frac{\mu\sqrt{T}}{\sqrt{2\sigma^2}}$ denilirse ve sadeleştirme yapılırsa

$$E[\bar{M}] = \frac{2\sigma^2}{\mu} Q_p(\omega^2) \quad (4.14)$$

Burada

$$Q_p(x) = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{n=0}^\infty \frac{\sin^3 \theta_n}{\theta_n - \cos \theta_n \sin \theta_n} \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cos^2 \theta_n}\right) \right] du$$

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u}{\tanh u}\right) \sinh u \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cosh^2 u}\right) \right] du \quad (4.15)$$

Yine (4.14) beklenen değerin $T \rightarrow \infty$ iken (yani $x \rightarrow \infty$ iken) asimptotik davranışına bakacağız. Kolaylık olsun diye (4.15) fonksiyonunu oluşturan integralleri ayrı ayrılıkta değerlendireceğiz ((4.15) fonksiyonun bazı ara değerleri nümerik olarak hesaplanarak [9]'de tablo şeklinde verilmiştir). İlk integrale I_1 , ikinci integrale I_2 diyelim ve I_1 'den başlayalım.

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{n=0}^\infty \frac{\sin^3 \theta_n}{\theta_n - \cos \theta_n \sin \theta_n} \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cos^2 \theta_n}\right) \right] du$$

parantezin içindeki ifade hızla 1'e gidiyor ve e^{-u} ifadesi hızla azaldığından integraller toplam işaretinin yerini değiştirmekte bir mahsur yoktur

$$I_1 = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-u} \frac{\sin^3 \theta_n}{\theta_n - \cos \theta_n \sin \theta_n} \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cos^2 \theta_n}\right) \right] du$$

Yukarıdaki θ_n 'lerin (4.3) özdeğer şartı ve dolayısıyla $\tan \theta_n = \theta_n/u$ şartını sağladığını hatırlarsak ve $v = \theta_n(u)$ değişken değişimi yaparsak

$$u = \frac{v}{\tan v} \Rightarrow du = \frac{\cos v \sin v - v}{\sin^2 v} dv$$

sınırlar da

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow v \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad u \rightarrow \infty \Rightarrow v \rightarrow n\pi$$

şeklinde değişir. Bunlar yukarıdaki integralde dikkate alınır

$$I_1 = \sum_{n=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2} + n\pi}^{n\pi} \exp\left(\frac{-v}{\tan v}\right) \frac{\sin^3 v}{v - \cos v \sin v} \frac{\cos v \sin v - v}{\sin^2 v} \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cos^2 v}\right) \right] dv$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \exp\left(-\frac{v}{\tan v}\right) \sin v \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\cos^2 v}\right) \right] dv$$

Şimdi de $z = v - n\pi$ değişken değişimi yapılırsa

$$z = v - n\pi \Rightarrow dv = dz$$

ve sınırlar

$$v \rightarrow n\pi \Rightarrow z \rightarrow 0 \quad v \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow z \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Bunlar yukarıda dikkate alınırsa

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{-(z+n\pi)}{\tan(z+n\pi)}\right) \sin(z+n\pi) \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\cos^2(z+n\pi)}\right)\right] dz$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için

$$\tan(z+n\pi) = \tan z, \quad \sin(z+n\pi) = (-1)^n \sin z, \quad \cos(z+n\pi) = (-1)^n \cos z$$

olduğu dikkate alınırsa ve toplamla integral işaretinin yeri yeniden değiştirilirse

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n\pi}{\tan z}\right) \exp\left(-\frac{z}{\tan z}\right) \sin z \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\cos^2 z}\right)\right] dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-\frac{\pi}{\tan z}}\right)^n \exp\left(-\frac{z}{\tan z}\right) \sin z \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\cos^2 z}\right)\right] dz \end{aligned}$$

Yukarıdaki toplamda n 'e bağlı kısım ayrılıkta yazılırsa bunun bir geometrik seri olduğu açıkça görünüyor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-\frac{\pi}{\tan z}}\right)^n = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{\pi}{\tan z}\right)}$$

O zaman

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-z/\tan z) \sin z [1 - \exp(-x/\cos^2 z)]}{1 + \exp(-\pi/\tan z)} dz$$

Şimdi $x \rightarrow \infty$ iken I_1 'in nasıl davrandığına bakalım

$$\beta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-z/\tan z) \sin z}{1 + \exp(-\pi/\tan z)} dz$$

denilirse, o zaman

$$(1 - e^{-x})\beta \leq I_1 \leq \beta$$

olduğu açıktır, çünkü

$$e^{-x} \geq e^{-\frac{x}{\cos^2 z}} \quad \Rightarrow \quad (1 - e^{-x}) \leq (1 - e^{-\frac{x}{\cos^2 z}}) \leq 1$$

$x \rightarrow \infty$ iken $(1 - e^{-x}) \rightarrow 1$, dolayısıyla $I_1 \rightarrow \beta$. Diğer taraftan nümerik olarak $\beta \approx 0.4575$ (*Scientific WorkPlace*'de elde edilmiştir). Sonuç olarak $I_1 \approx 0.4575$

Şimdi I_2 integraline bakalım

$$I_2 = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{u}{\tanh u}\right) \sinh u \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cosh^2 u}\right)\right] du$$

parantezin içindeki ifade $x \rightarrow \infty$ iken hızla 1'e yakınsar, fakat u 'nun da sonsuza gittiği göz önüne alınırsa bu durum $\cosh u \sim x$ olana kadar devam eder ve bu noktadan sonra hızla sıfıra yakınsamaya başlar, çünkü $\cosh^2 u$ ifadesi sonsuza x 'e oranla daha büyük

bir hızla yakınsar. İntegralin içindeki diğer kısmın ise $u \rightarrow \infty$ iken $1/2$ 'ye yakınsadığını $\sinh u = (e^u - e^{-u})/2$ olduğu bilgisini ve L'Hôpital kuralını kullanarak göstermek çok kolay. Bu bilgiden yararlanarak integrali aşağıdaki şekilde üç integralin toplamı şeklinde yazıp, daha sonra bu üç integralin asimptotik davranışına ayrılıkta bakarak I_2 nin asimptotik davranışı için bir sonuca ulaşılabilir, [3]. Bunu etmekdeki amaç daha zor olan bir integrali üç tane daha kolay integral şeklinde ifade ederek değerlendirmektir.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{u}{\tanh u}\right) \sinh u - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cosh^2 u}\right) \right] du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cosh^2 u}\right) \right] du \\
&+ \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{u}{\tanh u}\right) \sinh u - \frac{1}{2} \right] \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cosh^2 u}\right) \right] du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\cosh^2 u}\right) \right] du \\
&- \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - \exp\left(-\frac{u}{\tanh u}\right) \sinh u \right] du \\
&+ \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - \exp\left(-\frac{u}{\tanh u}\right) \sinh u \right] \exp\left(\frac{-x}{\cosh^2 u}\right) du
\end{aligned}$$

Şimdi bu integrallerin ilkinde I_{2_1} , ikincisine I_{2_2} ve üçüncüsüne I_{2_3} diyelim ve sınırlar oluşturmayı deneyelim. I_{2_1} 'den başlarsak, üstten sınırlamak için $\cosh u \geq \frac{1}{2}e^u$ eşitsizliğinden ($\cosh u = (e^u + e^{-u})/2$ olduğundan bu eşitsizliğin ispatı çok kolay) yararlanacak. Altdan sınırlamak için ise aşağıdaki iddadaki eşitsizlik kullanılacak.

İddia: Keyfi belirlenmiş bir A için, $u \geq A$ olduğu sürece, $\cosh u \leq \frac{1}{2}e^{\lambda(A)u}$. Burada $\lambda(A) = 1 + e^{-2A}/A$

İspat: $\frac{\frac{1}{2}e^{\lambda(A)u}}{\cosh u}$ oranının birden büyük olmasının gösterilmesi yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}e^{\lambda(A)u}}{\cosh u} &= \frac{\frac{1}{2}e^{\left(1+\frac{1}{Ae^{2A}}\right)u}}{\frac{1}{2}(e^u + e^{-u})} = \frac{e^u e^{\frac{u}{Ae^{2A}}}}{e^u + e^{-u}} = \frac{e^{\frac{u}{Ae^{2A}}}}{1 + e^{-2u}} \\
&\geq \frac{e^{\frac{u}{e^{2u}}}}{1 + e^{-2u}} = \frac{e^{\frac{1}{e^{2u}}}}{1 + e^{-2u}} = \frac{e^{e^{-2u}}}{1 + e^{-2u}} = \frac{e^t}{1 + t}
\end{aligned}$$

burada $t = e^{-2u}$ ve $t > 0$. $\forall t > 0$ için de $e^t > 1 + t$, bu da iddanın ispatını tamamlar.

Şimdi bu eşitsizlikleri kullanarak sınırlar oluşturabilir, [3]

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\frac{1}{4}e^{2\lambda(A)u}}\right) \right] du \leq I_{2_1} \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{\frac{1}{4}e^{2u}}\right) \right] du$$

$$\int_0^\infty \left[1 - \exp(-4xe^{-2\lambda(A)u}) \right] du \leq 2I_{2_1} \leq \int_0^\infty \left[1 - \exp(-4xe^{-2u}) \right] du$$

Alt sınırdaki integralde $v = xe^{-2\lambda(A)u}$ değişken değişimi yapılırsa

$$v = xe^{-2\lambda(A)u} \Rightarrow du = -\frac{1}{2\lambda(A)xe^{-2\lambda(A)u}} dv = -\frac{1}{2\lambda(A)v} dv$$

sınırlarsa

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow v \rightarrow x \quad \text{ve} \quad u \rightarrow \infty \Rightarrow v \rightarrow 0$$

Üst sınırdaki integralde $v = xe^{-2u}$ değişken değişimi yapılırsa

$$v = xe^{-2u} \Rightarrow du = -\frac{1}{2xe^{-2u}} dv = -\frac{1}{2v} dv$$

sınırlarsa

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow v \rightarrow x \quad \text{ve} \quad u \rightarrow \infty \Rightarrow v \rightarrow 0$$

Bunlar yukarıdaki dikkate alınır

$$-\int_x^0 [1 - e^{-4v}] \frac{1}{2\lambda(A)v} dv \leq 2I_{2_1} \leq -\int_x^0 [1 - e^{-4v}] \frac{1}{2v} dv$$

$$\frac{1}{2\lambda(A)} \int_0^x \frac{1}{v} [1 - e^{-4v}] dv \leq 2I_{2_1} \leq \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{v} [1 - e^{-4v}] dv$$

Şimdi $x \rightarrow \infty$ iken $\int_0^x \frac{1}{v} [1 - e^{-4v}] dv$ integralinin nasıl davrandığına bakalım. İntegral $\int_0^1 + \int_1^x$ şeklinde ikiye ayrılırsa $x \rightarrow \infty$ iken bu iki kısmın nümerik olarak hesaplanması mümkündür.

$$\int_0^x \frac{1}{v} [1 - e^{-4v}] dv = \int_0^1 \frac{1}{v} [1 - e^{-4v}] dv + \int_1^x \frac{1}{v} [1 - e^{-4v}] dv$$

$$= \overbrace{\int_0^1 \frac{1}{v} [1 - e^{-4v}] dv}^B + \int_1^x \frac{1}{v} dv - \overbrace{\int_1^x \frac{e^{-4v}}{v} dv}^C = B - C + \ln x$$

C integrali $x \rightarrow \infty$ iken, *exponential integral* fonksiyonunun genel hali adı ile bilinen $E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt$ fonksiyonunun özel bir halidir ve nümerik olarak hesaplanması kolaydır. Bizim durumda $C = E_1(4) \approx 0.0037794$ (Scientific WorkPlace). Diğer taraftan nümerik olarak $B \approx 1.9673$ (Scientific WorkPlace). O zaman $x \rightarrow \infty$ iken

$$\int_0^x \frac{1}{v} [1 - e^{-4v}] dv \approx \ln x + 1.9635$$

Sınırlara geri dönersek A keyfi olduğundan x 'le birlikte büyüyerek sonsuza gidecek şekilde seçilebilir, o zaman $\lambda(A) \rightarrow 1$. Sonuç olarak $x \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2}(\ln x + 1.9635) \leq 2I_{2_1} \leq \frac{1}{2}(\ln x + 1.9635)$$

Dolayısıyla

$$I_{2_1} \rightarrow \frac{1}{4} \ln x + 0.49088$$

I_{2_2} integrali x 'e bağlı değil ve nümerik olarak $I_{2_2} = 0.4575$ (Scientific WorkPlace)
Son olarak I_{2_3} integralinin $x \rightarrow \infty$ iken davranışına bakalım. Bunun için aşağıdaki teorem kullanılacak.

Teorem 4.2.1. (*Lebesgue Yakınsaklık Teoremi*) $f_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty]$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun ve $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Eğer öyle bir integrallenebilir $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty]$ fonksiyonu varsa ki hemen-hemen her yerde $|f_n(x)| \leq g(x)$ olsun o zaman her bir $f_n(x)$ ve $f(x)$ integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

Teoremi I_{2_3} 'e aşağıdaki şekilde uygulayacağız.

$$g(u) = \frac{1}{2} - \exp\left(-\frac{u}{\tanh u}\right) \sinh u$$

olsun. I_{2_3} , x arttıkça monoton olarak azalır olduğundan ve bu integrali $x \rightarrow \infty$ iken değerlenireceğimizden bu değerlendirmeyi $x \in \mathbb{N}$ olarak yapılması da yeterlidir. O zaman f_n dizisi olarak da

$$f_n(u) = g(u) \exp\left(-\frac{n}{\cosh^2 u}\right)$$

seçilmesi uygundur, başka bir deyişle $x \rightarrow \infty$ iken (yani $n \rightarrow \infty$ iken) $f_n(u)$ hemen-hemen I_{2_3} integralinin altındaki ifade gibi davranır. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ olduğu açık (yani bu durumda $f(u) = 0$). Diğer taraftan $\exp(-n/\cosh^2 u) \leq 1$ olduğundan $|f_n| \leq g$. O zaman yukarıdaki teorem gereğince $n \rightarrow \infty$ iken

$$I_{2_3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(u) du = \int_0^\infty f(u) du = 0$$

Nihayet toparlarsak, asimptotik olarak

$$I_2 \approx I_{2_1} - I_{2_2} + I_{2_3} = \frac{1}{4} \ln x + 0.49088 - 0.4575 + 0 = \frac{1}{4} \ln x + 0.03338$$

O zaman $Q_p(x) = I_1 + I_2$ olduğunu da hatırlarsak

$$Q_p(x) \approx \frac{1}{4} \ln x + 0.49088, \quad x \rightarrow \infty$$

Bu (4.14)'de dikkate alınırsa, sonuç itibarı ile $\mu > 0$ durumunda, $T \rightarrow \infty$ iken \bar{M} 'nin beklenen değerinin asimptotik davranışı için aşağıdaki yazılabilir, [3]

$$E[\bar{M}] = \frac{2\sigma^2}{\mu} Q_p\left(\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}\right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{\mu} \left(\frac{1}{2} \ln T + 0.98176\right) \quad (4.16)$$

5. MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİNİN FINANSDA UYGULANMASI

Önceki bölümde maksimum kayıp değişkeni, bu değişkenin dağılımı ve beklenen değeri için formüllerin nasıl elde edildiğine bakılmıştı. Bu bölümde maksimum kayıp değişkeninin finansal piyasalarda risk ölçümü olarak nasıl kullanıldığına bakılacak. Ayrıca uygulamadan elde edilen sonuçların finansal portföyler üzerinde nasıl uygulanacağından bahsedilecek, [4].

5.1 Finansda Risk Ölçümü

Finansal potrföylerin oluşturulması zamanı onların risk oranının belirlenmesi çok önemlidir. [22]'de risk ölçüsü ve çeşitleri hakkında özet bir bilgi verilmiştir. Geçmişten bu yana risk ölçümü olarak en çok standart sapmadan yararlanmıştır. Örneğin Sharpe oranında olduğu gibi. Bu oran kabaca, alınan riskin kazanç açısından hangi ölçüde telafi edilebilirliğini gösteren bir sayıdır. PG portföyün getirisini, RPG risksiz portföyün getirisini ve *toplam risk* standart sapmayı ifade etmek üzere *Sharpe* oranı için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$Sharpe = \frac{PG - RPG}{\text{toplam risk}}$$

Yukarıdaki ifadeden de anlaşıldığı üzere, bu oranın yüksek olması yatırımın performansının riske dayalı getiri esasına göre iyi olduğunu, düşük oran ise başarısız bir performansa sahip olduğunu göstermektedir. Fakat hesaplamalardaki kolaylığına rağmen standart sapmanın simetri özelliğine göre ve düşük olasılıklı riskleri değerlendirememesi açısından yeterli olmadığı düşünülmektedir, [22].

5.1.1 Calmar Oranı

Literatürde risk ölçümü olarak standart sapma yerine maksimum kayıp değişkeninin kullanılması daha iyi ve sağlam sonuçlar verebileceği bir çok yazar tarafından kabul edilmektedir, [11], [12], [13], [21]. Bu değişken Calmar oranında kullanılıyor. Calmar oranı Sharpe oranına benzer şekilde tanımlanan fakat standart sapma yerine maksimum kayıp değişkeninin kullanıldığı risk odaklı bir ölçüdür. $[0, T]$ aralığı boyunca aşağıdaki gibi de tanımlanabilir, [4]

$$Calmar(T) = \frac{G}{M}$$

burada, G $[0, T]$ aralığındaki getiri (kazanç), \bar{M} $[0, T]$ aralığındaki maksimum kayıp değişkenidir.

Portföylerin Calmar oranların karşılaştırılması zamanı bu portföylerin hepsine aynı zaman aralığında bakılması gerekiyor (genel olarak üç yıl alınıyor), yani örneğin henüz bir yıl piyasada olan bir portföyle on yıl piyasada olan bir portföyün Calmar oranının karşılaştırılması güvenilir sonuç vermeyebilir. Bu olay Calmar oranının bir eksikliği olarak kabuledilebilir. Sharpe oranında bu eksiklik "square-root-T-law" denilen metodla zamana göre ölçeklendirilerek aradankaldırılabilir. Calmar oranı için de [4]'de normalleştirilmiş Calmar oranı dahil edilerek farklı sürelerle piyasada olan portföylerin de Calmar oranları anlamlı olarak karşılaştırılabilir.

5.2 Maksimum Kayıp Değişkeni Beklenen Değerinin Uygulanması

Maksimum kayıp değişkeni ile ilgili önceki bölümlerdeki sonuçları portföyler üzerinde uygulanabilmesi için portföy değerlerinin Brown hareketi izlediğinin kabul edilmesi lazım, çünkü bu değişkene bir Brown hareketinin (yansıyan Brown hareketi) maksimumu gibi bakılarak yola çıkılmıştı, [3]. x portföyün değeri ise bu değer Brown hareketi izlemesi matematiksel olarak aşağıdaki modelle veriliyor.

$$dx = \mu dt + \sigma dW, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.1)$$

Burada μ ortalama getiri ve dW sadece Wiener farkıdır. μ 'nün negatif olması portföyün para kaybediyor olması, pozitif olması kazanç getiriyor olması ve sıfır ise ne kazanç ne kayıp durumunda (ortada) olması anlamına geliyor. Bu model çok basittir, örneğin elde edilen kazancın tekrardan yatırılması gibi durumları ifade etmez. Eğer elde edilen kazanç tekrardan yatırım olarak kullanılıyorsa o zaman portföy değerinin geometrik Brown hareketi izlemesi lazım. Eğer portföy değeri daha karmaşık bir süreç izliyorsa bunun için de Brown hareketi ölçüt olarak kullanılabilir, [4].

5.2.1 Beklenen Değerin Asimptotik Davranışı

Yukarıdaki (5.1) modelinde risk ölçüm aracı olarak maksimum kayıp değişkenin kullanılması uygun olur. Özellikle bu değişkenin beklenen değerinin asimptotik davranışı ile portföyün kazanç getiriyor olması ($\mu > 0$), para kaybettiriyor olması ($\mu < 0$), hatta sabit kalması ($\mu = 0$) arasında bir ilişki söz konusudur. Asimptotik

davranışın önemli olmasının sebebi ise çoğu yatırımcının veya ticari sistemlerin uzun vadeli yatırımlarla ilgileniyor olmasıdır. Önceki bölümdeki maksimum kayıp değişkeni beklenen değeri asimptotik davranışı ile ilgili sonuçları toplarsak, [4]

$$E[\bar{M}] = \begin{cases} \frac{2\sigma^2}{\mu} Q_p \left(\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2} \right) & T \rightarrow \infty \\ \frac{\sigma^2}{\mu} \left(\frac{1}{2} \ln T + 0.98176 \right) & \mu > 0 \\ 1.2533\sigma\sqrt{T} & \mu = 0 \\ \frac{2\sigma^2}{\mu} Q_n \left(\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2} \right) & T \rightarrow \infty \\ -\mu T - \frac{\sigma^2}{\mu} & \mu < 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Yukarıda bahsedilen ilişki (5.2) formülü üzerinden değerlendirilirse $T \rightarrow \infty$ olduğu zaman $E[\bar{M}]$ sayısı da sonsuza gider, fakat dikkat edilirse $\mu < 0$ durumunda en hızlı (lineer olarak), $\mu = 0$ durumunda biraz daha yavaş (\sqrt{T} olarak), $\mu > 0$ durumunda ise diğerlerine nazaran en yavaş şekilde ($\ln T$ olarak) gider. Yatırımcılar için maksimum kayıp değişkeni ne kadar küçük olursa o kadar iyi olduğunu da hatırlarsak bu durum asimptotik davranış zamanı μ 'nun değer ve işareti ile bağdaşiyor, yani $\mu > 0$ olduğu zaman (kazanç söz konusu olduğu zaman) maksimum kayıp değişkeni en küçük, $\mu < 0$ olduğu zaman (kayıp söz konusu olduğu zaman) en büyüktür.

(5.2)'de dikkati çeken başka bir husus, \sqrt{T} ölçeklendirilmiş Sharpe oranı $Shrp = \frac{\mu}{\sigma}$ şeklinde tanımlanırsa, σ üzerinden normalize edilmiş maksimum kayıp değişkeni beklenen değerinin bu formül dikkate alınarak Sharpe oranı cinsinden yazılabilmektedir, [4]. Örneğin $\mu > 0$ durumu için $\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2} = \frac{T}{2} Shrp^2$ olacağından

$$\frac{E[\bar{M}]}{\sigma} = \frac{2Q_p\left(\frac{T}{2} Shrp^2\right)}{Shrp} \quad (5.3)$$

5.2.2 Normalleştirilmiş Calmar Oranı

Daha önce de bahsedildiği gibi zamanı (T) dikkate almadan portföylerin Calmar oranının bilinmesi bu portföylerin karşılaştırılması açısından çok bir şey ifade etmez, örneğin farklı zamanlar üzerinden değerlendirildiği durumda bir portföyün Calmar oranı diğer bir portföyün Calmar oranından aşağı olsa bile Calmar oranı aşağı olan portföy daha kazançlı olabilir. Bu durumu anlamak için önce Calmar oranı ile zaman arasında nasıl bir ilişki olduğuna bakalım, [4]. Maksimum kayıp değişkeni beklenen değerini kullanarak geleneksel Calmar oranından azıcık farklı şekilde beklenen (ortalama) performans için aşağıdaki şekilde Calmar oranı tanımlayalım

$$Clmr(T) = \frac{\mu T}{E[\bar{M}]}$$

$Shrp = \frac{\mu}{\sigma}$ olduğu ve (5.3) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} Clmr(T) &= \frac{\mu T}{\frac{2\sigma Q_p(\frac{T}{2} Shrp^2)}{Shrp}} = \frac{\mu T Shrp}{2\sigma Q_p(\frac{T}{2} Shrp^2)} \\ &= \frac{T Shrp^2}{2Q_p(\frac{T}{2} Shrp^2)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{T Shrp^2}{\frac{1}{2} \ln T + 0.98176} \end{aligned} \quad (5.4)$$

(5.4)'den görüldüğü üzere, sabitlenmiş μ ve σ için zaman arttıkça $Clmr$ oranı da artar, bu yukarıdaki argümanı destekler. Calmar oranlarında daha iyi bir karşılaştırma yapabilmek için bu oranların hangi zaman aralıklarında bulunduğu da dikkate alınması gerekiyor.

[4]'de Calmar oranının zamana bağlı olma problemi ölçeklendirme yöntemi ile bu oranın normalleştirilmesi ile aradan kaldırılıyor. Baz olarak bir τ zaman aralığı seçiliyor. (5.4)'den τ ve herhangi bir T zamanı için

$$Clmr(\tau) = \frac{\frac{\tau}{2} Shrp^2}{Q_p(\frac{\tau}{2} Shrp^2)} \quad \text{ve} \quad Clmr(T) = \frac{\frac{T}{2} Shrp^2}{Q_p(\frac{T}{2} Shrp^2)}$$

Aşağıdaki şekilde normalleştirme çarpanı tanımlanıyor

$$\begin{aligned} \gamma_\tau(T, Shrp) &= \frac{Clmr(\tau)}{Clmr(T)} = \frac{\frac{\frac{\tau}{2} Shrp^2}{Q_p(\frac{\tau}{2} Shrp^2)}}{\frac{\frac{T}{2} Shrp^2}{Q_p(\frac{T}{2} Shrp^2)}} \\ &= \frac{\tau Q_p(\frac{T}{2} Shrp^2)}{T Q_p(\frac{\tau}{2} Shrp^2)} = \frac{\frac{1}{T} Q_p(\frac{T}{2} Shrp^2)}{\frac{1}{\tau} Q_p(\frac{\tau}{2} Shrp^2)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$[0, T]$ aralığındaki bulunan Calmar oranını bu çarpanla çarparak (ölçeklendirerek) τ -normalleştirilmiş Calmar oranı elde edilir

$$\overline{Calmar}_\tau(T) = \gamma_\tau(T, Shrp) \times Calmar \text{ oran} \quad (5.6)$$

5.2.3 Portföylerin Karşılaştırılması

[4]'den alınan bir örnekle portföylerin normalleştirilmiş Calmar oranı ile nasıl karşılaştırıldığına bakalım. P_1, P_2, P_3 aşağıdaki verilere sahip portföyler olsun

Portföy	μ (%)	σ (%)	Calmar	zaman aralığı
P_1	25	10	5	[0, 1]
P_2	30	10	6	[0.5, 2]
P_3	25	12.5	6	[0, 2]

Yukarıdaki tabloda sadece Calmar oranlarına odaklanarak, P_1 portföyünün en kötü, P_2 ve P_3 portföylerinin de bir birine eşit güçte olması gibi yalınış bir öngörüye sahip olmuş oluruz. Normalleştirilmiş Calmar oranını yöntemi ile gerçek durumun ne olduğuna bakalım. Önce (5.4) formülünü ve Q_p fonksiyonu ara değerleri için [9]'de verilen tabloyu kullanarak her bir portföy için $Clmr$ oranını hesaplayalım

P_1 için $T = 1 - 0 = 1$

$$Clmr(P_1) = Clmr(1) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{25}{10}\right)^2}{Q_p\left(\frac{1}{2} \left(\frac{25}{10}\right)^2\right)} = \frac{3.125}{Q_p(3.125)} \approx \frac{3.125}{0.83} \approx 3.8$$

P_2 için $T = 2 - 0.5 = 1.5$

$$Clmr(P_2) = Clmr(1.5) = \frac{\frac{1.2}{2} \left(\frac{30}{10}\right)^2}{Q_p\left(\frac{1.5}{2} \left(\frac{30}{10}\right)^2\right)} = \frac{6.75}{Q_p(6.75)} \approx \frac{6.75}{0.98} \approx 6.76$$

P_3 için $T = 2 - 0 = 2$

$$Clmr(P_3) = Clmr(2) = \frac{\left(\frac{25}{12.5}\right)^2}{Q_p\left(\left(\frac{25}{12.5}\right)^2\right)} = \frac{4}{Q_p(4)} \approx \frac{4}{0.875} \approx 4.55$$

Şimdi $\tau = 1$ zamanına göre (5.5) formülünü kullanarak normalleştirici çarpanları hesaplayalım

$$\gamma(P_1) = \gamma_1\left(1, \frac{25}{10}\right) = \frac{Q_p(3.125)}{Q_p(3.125)} = 1$$

$$\gamma(P_2) = \gamma_1\left(1.5, \frac{30}{10}\right) = \frac{\frac{1}{1.5} Q_p\left(\frac{1.5}{2} 9\right)}{Q_p(4.5)} \approx 0.74$$

$$\gamma(P_3) = \gamma_1\left(2, \frac{25}{12.5}\right) = \frac{\frac{1}{2} Q_p(4)}{Q_p(2)} \approx 0.6$$

En son olarak (5.6) formülünü kullanarak $\tau = 1$ zamanına göre normalleştirilmiş Calmar oranlarını bulalım

P_1 için

$$\overline{Calmar}_1(1) = \gamma(P_1) \times Calmar = 1 \times 5 = 5$$

P_2 için

$$\overline{Calmar}_1(1.5) = \gamma(P_2) \times Calmar = 0.74 \times 6 = 4.44$$

P_3 için

$$\overline{Calmar}_1(2) = \gamma(P_3) \times Calmar = 0.6 \times 6 = 3.6$$

Şimdi artık farklı zaman aralıklarında piyasada kalmalarına rağmen portföyleri sağlam şekilde karşılaştırabiliriz. Alınan sonuçlardan da görüldüğü üzere en iyi performansa P_1 , en kötü performansa ise P_3 portföyü sahiptir.

Genel olarak bir değer için Calmar oranı 3 yıllık süre içerisindeki performansına göre

hesaplanır, örneğin, bir değer 25 yıl süreliğine piyasada olmasına rağmen en son üç yıllık kısmı alınarak bu kısım zarfında Calmar oranına bakılır. Bu durumda ise geriye kalan 22 yıllık değerli veri dikkate alınmamış oluyor. Normalleştirilmiş Calmar oranının önemli özelliklerinden biri de piyasada olan değeri tüm piyasa geçmişi boyunca değerlendirebilmesidir, [4].

5.2.3.1 Portföyler Arasında İzafi Güç

Normalleştirilmiş Calmar oranı kullanılırken baz zaman aralığı olarak τ 'nın nasıl seçilmesi sorusu ortaya çıkabilir. [4]'de portföyler arasında *izafi güç* kavramı dahil edilerek τ 'ya bağlı olma özelliği aradan kaldırılıyor. Kısaca bundan bahsedelim. Farz edelim ki elimizde üç tane P_1, P_2, P_3 portföyleri var. P_1 portföyünün P_2 portföyüne göre τ izafi gücü aşağıdaki şekilde tanımlanıyor

$$\begin{aligned}\beta_\tau(P_1|P_2) &= \frac{\overline{Calmar}_\tau(P_1)}{\overline{Calmar}_\tau(P_2)} = \frac{\gamma_\tau(T_1, Shrp_1) \times Calmar(P_1)}{\gamma_\tau(T_2, Shrp_2) \times Calmar(P_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{T_1} Q_p \left(\frac{T_1}{2} Shrp_1^2 \right)}{\frac{1}{T_2} Q_p \left(\frac{T_2}{2} Shrp_2^2 \right)} \times \frac{Calmar(P_1)}{Calmar(P_2)} \\ &= \frac{1}{T_1} Q_p \left(\frac{T_1}{2} Shrp_1^2 \right) \times \frac{Calmar(P_1)}{Calmar(P_2)} \times \frac{Q_p \left(\frac{T_2}{2} Shrp_2^2 \right)}{Q_p \left(\frac{T_2}{2} Shrp_1^2 \right)}\end{aligned}\quad (5.7)$$

Eğer $Shrp_1 = Shrp_2$ ise yukarıdaki üçüncü çarpan 1'e eşit olur, o zaman τ 'dan bağımsız şekilde P_1 'in P_2 'ye göre izafi gücü

$$\beta(P_1|P_2) = \frac{1}{T_1} Q_p \left(\frac{T_1}{2} Shrp_1^2 \right) \times \frac{Calmar(P_1)}{Calmar(P_2)}\quad (5.8)$$

Eğer $Shrp_1 \neq Shrp_2$ ise o zaman da $\tau \rightarrow \infty$ iken (5.7)'nin limitine bakılır

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \beta_\tau(P_1|P_2) = \frac{1}{T_1} Q_p \left(\frac{T_1}{2} Shrp_1^2 \right) \times \frac{Calmar(P_1)}{Calmar(P_2)} = \beta(P_1|P_2)$$

çünkü (5.7)'de τ 'ya bağlı kısım sadece üçüncü çarpan ve bu da $\tau \rightarrow \infty$ iken 1'e eşit olur. Nihayet, her bir portföyün verilerine göre hesaplamalar yapıldıktan sonra, eğer $\beta(P_1|P_2) \geq 1$ ise P_1 portföyü P_2 portföyünden daha iyi sayılır ve $P_1 \succeq P_2$ gibi işaretlenir, [4]. $\beta(P_1|P_3)$ için de kolayca $\beta(P_1|P_3) = \beta(P_1|P_2)\beta(P_2|P_3)$ olduğu gösterilebilir, buradan da izafi gücün geçişkenlik özelliğini ortaya çıkar, yani eğer $P_1 \succeq P_2$ ve $P_2 \succeq P_3$ ise o zaman $P_1 \succeq P_3$.

6. KESİRLİ BROWN HAREKETİNİN MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİ ÜZERİNE UYGULAMA VE SONUCUMUZ

Bu bölümde kesirli Brown hareketi maksimum kayıp değişkeni için literatürde var olan sınırlardan ve alt sınır için teorik olarak elde ettiğimiz yeni sınır ve gerçek veriler üzerinde çalışmamızdan bahsedeceğiz.

6.1 Maksimum Kayıp Değişkeni Beklenen Değeri İçin Literatürde Var Olan Sınırlar

Kesirli Brown hareketi tanımı ve özellikleri hakkında bölüm 2'de bahsetmiştik. Bu değişkenin maksimum kayıp değişkenini de

$$M_t^H := \sup_{0 \leq u \leq v \leq T} (B_u^H - B_v^H)$$

şeklinde tanımlayalım. Literatürde bu değişkenin beklenen değeri sınırları üzerine sonuçlar vardır ve bu sonuçlar zamanla daha da geliştiriliyor. 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni beklenen değeri için [17]'de aşağıda verilen sınırlar ispatlanmıştır

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(M_1^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \quad (6.1)$$

Daha sonra kesirli Brown hareketinin özbenzerlik özelliği kullanılarak bu sonuç herhangi bir t zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketi için genelleştirilmiştir

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} t^H \leq E(M_t^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} t^H$$

Çağlar ve Vardar [17] tarafından bu değişken için alt sınır hesaplanmıştır.

Teorem 6.1.1. $\{B_t^H : t \geq 0\}$, (Ω, \mathcal{F}, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi ve $M_t^H = \sup_{0 \leq u \leq v \leq T} (B_u^H - B_v^H)$ kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni olsun. O halde

$$\frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \leq E(M_t^H)$$

eşitsizliği sağlanır [17]

Kesirli Brown hareketi kesikli hale getirilerek [14]'de Ross [18] hesaplama yöntemi ile 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin

beklenen değeri için nümerik alt sınır değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca, [14]'de Sudakov-Fernique eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki teoremdaki sonuç bulunmuştur.

Teorem 6.1.2. (Ω, \mathcal{F}, P) olasılık uzayı üzerinde, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için

$$E(M_1^H) = E\left(\sup_{0 < u < v < 1} (B_u^H - B_v^H)\right) \leq E\left(\sup_{0 < u < 1} \sqrt{2}B_u^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kesirli Brown hareketi için supremum değişkenini de

$$S_t^H := \sup_{0 \leq u \leq t} B_u^H$$

şeklinde tanımlayalım. Bu değişkenin de sınırları üzerine literatürde olan en güncel sonuç

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}t^H \leq E(S_t^H) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}t^H \quad (6.2)$$

şeklindedir [19]

6.2 Maksimum Kayıp Değişkeni Beklenen Değeri Alt Sınırı Üzerine Sonucumuz

Bu bölümde, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketi maksimum kayıp değişkeni beklenen değeri alt sınırı için yeni elde ettiğimiz sınırdan bahsedilecektir. Önce ileride kullanacağımız için aşağıdaki teoremi verelim

Teorem 6.2.1. (Sudakov-Fernique Eşitsizliği) X ve Y , τ üzerinde tanımlı ortalanmış Gauss süreçleri olsun. $s, t \in \tau$ olmak üzere

$$E(X_s - X_t)^2 \leq E(Y_s - Y_t)^2$$

şartı sağlanıyor ise

$$E(\sup_{\tau} X_t) \leq E(\sup_{\tau} Y_t)$$

eşitsizliği sağlanır [20].

Bu eşitsizliği kullanabilmek için bir zemin oluşturmamız lazım. Bunun için öncelikle kesirli Brown hareketi kovaryans fonksiyonu (2.2)'den yararlanarak $E[(B_u^H - B_v^H) -$

$(B_u^H - B_v^H)^2$ ifadesinin neye eşit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
& E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \\
&= E[(B_u^H - B_v^H)^2] - 2E[(B_u^H - B_v^H)(B_{u'}^H - B_{v'}^H)] + E[(B_{u'}^H - B_{v'}^H)^2] \\
&= E[(B_u^H)^2] - 2E[B_u^H B_v^H] + E[(B_v^H)^2] \\
&\quad - 2E[B_u^H B_{u'}^H] + 2E[B_u^H B_{v'}^H] + 2E[B_v^H B_{u'}^H] - 2E[B_v^H B_{v'}^H] \\
&\quad + E[(B_{u'}^H)^2] - 2E[B_{u'}^H B_{v'}^H] + E[(B_{v'}^H)^2] \\
&= u^{2H} - (u^{2H} + v^{2H} - |u - v|^{2H}) + v^{2H} - (u^{2H} + u'^{2H} - |u - u'|^{2H}) \\
&\quad + (u^{2H} + v'^{2H} - |u - v'|^{2H}) + (v^{2H} + u'^{2H} - |v - u'|^{2H}) \\
&\quad - (v^{2H} + v'^{2H} - |v - v'|^{2H}) + u'^{2H} - (u'^{2H} + v'^{2H} - |u' - v'|^{2H}) + v'^{2H} \\
&= |u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} + |u - u'|^{2H} \\
&\quad - |u - v'|^{2H} - |v - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Şimdi de $E[(\sqrt{2}B_u^1 - \sqrt{2}B_v^1)^2]$ ifadesinin neye eşit olduğuna bakalım.

$$\begin{aligned}
E[(\sqrt{2}B_u^1 - \sqrt{2}B_v^1)^2] &= E[2(B_u^1)^2] + E[2(B_v^1)^2] - 2E[2B_u^1 B_v^1] \\
&= 2(u^2 + v^2 - u^2 - v^2 + |u - v|^2) = 2|u - v|^2
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Kullanacağımız başka bir ilişki de aşağıdaki eşitsizlik olacak

$$\begin{aligned}
|u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} &\geq 2 \min \{|u - v|^{2H}, |u' - v'|^{2H}\} \geq 2 \min \{|u - v|^2, |u' - v'|^2\} \\
&= \begin{cases} E[(\sqrt{2}B_u^1 - \sqrt{2}B_v^1)^2], & |u - v|^{2H} < |u' - v'|^{2H} \\ E[(\sqrt{2}B_{u'}^1 - \sqrt{2}B_{v'}^1)^2], & |u - v|^{2H} > |u' - v'|^{2H} \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Yukarıdaki ifadelerde $0 \leq u \leq v \leq 1$ ve $0 \leq u' \leq v' \leq 1$ olduğu kabul ediliyor. Dikkat edilirse, $[0, 1]$ aralığından seçilen u, v, u', v' sayıları, $u < v$ ve $u' < v'$ olması koşulu altında sadece aşağıdaki altı farklı yolla seçilebilir.

1. $0 \leq u \leq v \leq u' \leq v' \leq 1$
2. $0 \leq u \leq u' \leq v \leq v' \leq 1$
3. $0 \leq u \leq u' \leq v' \leq v \leq 1$
4. $0 \leq u' \leq v' \leq u \leq v \leq 1$
5. $0 \leq u' \leq u \leq v' \leq v \leq 1$

6. $0 \leq u' \leq u \leq v \leq v' \leq 1$

Bizim amacımız, olabilecek bu altı durumun hepsi için

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq E[(\sqrt{2}B_s^1 - \sqrt{2}B_t^1)^2] \quad (6.6)$$

şekline bir ilişki olduğunu göstermek (burada s ve t değişkenleri u, v, u', v' değişkenlerinden birine denk geliyor) ve daha sonra Sudakov-Fernique eşitsizliği ve (6.2)'yi kullanarak, bir zamanına kadar tanımlı kesirli Brown hareketi maksimum kayıp değişkeni alt sınırı için bulduğumuz

$$E[M_1^H] \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

sonucunu ispatlamaktır. Dikkat etmemiz gereken başka bir husus, yukarıda bahsedilen durumlarda, üçüncü ve altıncı durum için Hurst parametresini $H \in [1/2, 1)$, diğer dört durumda ise $H \in (0, 1/2]$ alacağız.

- $0 \leq u \leq v \leq u' \leq v' \leq 1$, $H \in (0, 1/2]$ durumu.

Amacımız

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq |u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} \quad (6.7)$$

olduğunu göstermektir. Bunun için ise (6.3)'ü göz önüne alırsak

$$|u - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H} - |u - v'|^{2H} - |v - u'|^{2H} \geq 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & a > b \\ b - a, & b > a \end{cases}$$

olduğu bilgisini ve (2.4) açılımını kullanacağız

$$\begin{aligned} & |u - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H} - |u - v'|^{2H} - |v - u'|^{2H} \\ &= (u' - u)^{2H} + (v' - v)^{2H} - (v' - u)^{2H} - (u' - v)^{2H} \\ &= u'^{2H} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} u'^{2H-k} u^k + v'^{2H} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v'^{2H-k} v^k \\ & \quad - v'^{2H} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v'^{2H-k} u^k - u'^{2H} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} u'^{2H-k} v^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[u'^{2H-k} u^k + v'^{2H-k} v^k - v'^{2H-k} u^k - u'^{2H-k} v^k \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[v^k (v'^{2H-k} - u'^{2H-k}) - u^k (v'^{2H-k} - u'^{2H-k}) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[(v'^{2H-k} - u'^{2H-k})(v^k - u^k) \right] \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Şimdi dikkat edilirse, $2H \leq 1$, $v' > u'$ ve $v > u$ olduğundan $k \geq 1$ için her zaman

$$(v'^{2H-k} - u'^{2H-k})(v^k - u^k) \leq 0$$

Diğer taraftan $2H \leq 1$ olduğundan, reel kuvvetler için binom katsayısı tanımından dolayı $k \geq 2$ için

$$k \text{ tek ise } \binom{2H}{k} > 0, \quad k \text{ çift ise } \binom{2H}{k} < 0$$

Dolayısıyla bütün k 'lar için her zaman

$$(-1)^k \binom{2H}{k} < 0$$

O zaman (6.8) toplamının bütün terimleri pozitiftir. Bu da (6.7)'ni ispatlar.

Şimdi (6.5)'i dikkate alarsak (6.7)'yi aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq 2 \min \{|u - v|^2, |u' - v'|^2\} \tag{6.9}$$

- $0 \leq u \leq u' \leq v \leq v' \leq 1$, $H \in (0, 1/2]$ durumu.

Bu durumda amacımız

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq |u - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H} \tag{6.10}$$

olduğunu göstermektir. Bunun için ise (6.3)'ü göz önüne alırsak

$$|u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} - |u - v'|^{2H} - |v - u'|^{2H} \geq 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bir önceki durumdakine benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&|u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} - |u - v'|^{2H} - |v - u'|^{2H} \\
&= (v - u)^{2H} + (v' - u')^{2H} - (v' - u)^{2H} - (v - u')^{2H} \\
&= v^{2H} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v^{2H-k} u^k + v'^{2H} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v'^{2H-k} u'^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -v'^{2H} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v'^{2H-k} u^k - v^{2H} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v^{2H-k} u'^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[v'^{2H-k} u^k + v'^{2H-k} u'^k - v'^{2H-k} u^k - v^{2H-k} u'^k \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[u'^k (v'^{2H-k} - v^{2H-k}) - u^k (v'^{2H-k} - v^{2H-k}) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[(v'^{2H-k} - v^{2H-k})(u'^k - u^k) \right] \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Şimdi dikkat edilirse, $2H \leq 1$, $u' > u$ ve $v' > v$ olduğundan $k \geq 1$ için her zaman

$$(v'^{2H-k} - v^{2H-k})(u'^k - u^k) \leq 0$$

Bir önceki durum ile aynı şekilde

$$(-1)^k \binom{2H}{k} < 0$$

O zaman (6.11) toplamının bütün terimleri pozitiftir. Bu da (6.10)'u ispatlar.

Şimdi (6.5)'i dikkate alarsak (6.10)'u aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq 2 \min \{|u - u'|^2, |v - v'|^2\} \tag{6.12}$$

İspat yöntemi aynı olduğu için ve simetri söz konusu olduğundan, dördüncü ve beşinci durum için direk olarak sonucu yazabiliriz

- $0 \leq u' \leq v' \leq u \leq v \leq 1$, $H \in (0, 1/2]$ durumu

Bu durumda

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq |u' - v'|^{2H} + |u - v|^{2H}$$

Dolayısıyla

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq 2 \min \{|u' - v'|^2, |u - v|^2\} \tag{6.13}$$

- $0 \leq u' \leq u \leq v' \leq v \leq 1$, $H \in (0, 1/2]$ durumu

Bu durumda

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq |u - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H}$$

Dolayısıyla

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq 2 \min \{|u - u'|^2, |v - v'|^2\} \tag{6.14}$$

Dikkat edilirse (6.7)'nin sağ tarafındaki ifadeyi seçerken (6.3)'deki iki tane pozitif terimin toplamını seçtik ve bu terimlerin içindeki değişkenler de kendi durumlarına uygun gelen komşu değişkenlerdir.

Şimdi de üçüncü durumu ispat edelim ve ispatı aynı şekilde olduğu için altıncı durum için de sadece sonucu yazalım

- $0 \leq u \leq u' \leq v' \leq v \leq 1$, $H \in [1/2, 1)$ durumu

Bu durumda amacımız

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq |u - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H} \quad (6.15)$$

olduğunu göstermektir. Bunun için ise (6.3)'ü göz önüne alırsak

$$|u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} - |u - v'|^{2H} - |v - u'|^{2H} \geq 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bir önceki durumdakine benzer şekilde

$$\begin{aligned} & |u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} - |u - v'|^{2H} - |v - u'|^{2H} \\ &= (v - u)^{2H} + (v' - u')^{2H} - (v' - u)^{2H} - (v - u')^{2H} \\ &= v^{2H} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v^{2H-k} u^k + v'^{2H} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v'^{2H-k} u'^k \\ &\quad - v'^{2H} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v'^{2H-k} u^k - v^{2H} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} v^{2H-k} u'^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[v^{2H-k} u^k + v'^{2H-k} u'^k - v'^{2H-k} u^k - v^{2H-k} u'^k \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[u'^k (v'^{2H-k} - v^{2H-k}) - u^k (v'^{2H-k} - v^{2H-k}) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[(v'^{2H-k} - v^{2H-k})(u'^k - u^k) \right] \\ &= - \binom{2H}{1} \left[(v'^{2H-1} - v^{2H-1})(u' - u) \right] \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \binom{2H}{k} \left[(v'^{2H-k} - v^{2H-k})(u'^k - u^k) \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

Şimdi dikkat edilirse, $1 \leq 2H \leq 2$, $u' > u$ ve $v > v'$ olduğundan $k \geq 2$ için her zaman

$$(v'^{2H-k} - v^{2H-k})(u'^k - u^k) \geq 0$$

Diğer taraftan $1 \leq 2H \leq 2$ olduğundan, reel kuvvetler için binom katsayısı tanımından dolayı $k \geq 2$ için

$$k \text{ çift ise } \binom{2H}{k} > 0, \quad k \text{ tek ise } \binom{2H}{k} < 0$$

Dolayısıyla bütün k 'lar için her zaman

$$(-1)^k \binom{2H}{k} > 0$$

O zaman (6.16) toplamının bütün terimleri pozitiftir ve

$$- \binom{2H}{1} [(v^{2H-1} - v^{2H-1})(u' - u)] \geq 0$$

Bu da (6.15)'i ispatlar.

Şimdi (6.5)'i dikkate alarsak (6.15)'i aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq 2 \min \{|u - u'|^2, |v - v'|^2\} \quad (6.17)$$

- $0 \leq u' \leq u \leq v \leq v' \leq 1, H \in [1/2, 1)$ durumu

Bu durumda

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq |u - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H}$$

Dolayısıyla

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq 2 \min \{|u - u'|^2, |v - v'|^2\} \quad (6.18)$$

Nihayet, (6.9),(6.12),(6.13),(6.14),(6.15) ve (6.18)'i dikkate alarsak bütün durumlar için

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq 2 \min \{|u - v|^2, |u' - v'|^2, |u - u'|^2, |v - v'|^2\} \quad (6.19)$$

Şimdi (6.4) ve (6.5)'i de dikkate alarsak

$$E[(B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H)]^2 \geq 2|a - b|^2 = E[(\sqrt{2}B_a^1 - \sqrt{2}B_b^1)^2] \quad (6.20)$$

Burada $|a - b|^2 = \min \{|u - v|^2, |u' - v'|^2, |u - u'|^2, |v - v'|^2\}$ En son olarak (6.20)'ye Sudakov-Fernique eşitsizliğini uygularsak

$$E[\sup_{0 \leq u \leq v \leq 1} (B_u^H - B_v^H)] = E[M_1^H] \geq \sqrt{2}E[\sup_{0 \leq t \leq 1} B_t^1] = E[S_1^1] \quad (6.21)$$

Nihayet, (6.2)'yi de dikkate alarsak

$$E[M_1^H] \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (6.22)$$

Bulunan bu sonuç, kesirli Brown hareketi özbenzerlik özelliği kullanılarak kolayca herhangi bir t zamanına kadar tanımlı süreç için genelleştiriliyor.

6.3 Gerçek Veriler Üzerindeki Çalışmamız

Bu bölümde, Türkiyedeki hisse senedi piyasasından alınan altı farklı şirketin beş yıl (60 ay) süresince hisse senedi kapanış fiyatları veileri üzerinde yapılan çalışmadan bahsedeceğiz. Veriler *foreks.com* web sitesinden alınmıştır. Yapılan çalışmanı özet olarak verelim.

Baktığımız zaman aralığı beş yıl olduğundan, haftasonlarını da çıkarırsak bu süre 1258 güne denk geliyor (bazı ayların günleri farklı olduğundan hangi aydan başladığımıza bağımlı olarak bu süre 1258 günden bir veya iki gün farklı da olabilir), yani baktığımız veri aşağıdaki çizelgedeki şeklindedir

<i>Tarih</i>	<i>Kapanış fiyatı</i>
gün.ay.yıl	a_1
gün.ay.yıl	a_2
gün.ay.yıl	a_3
\vdots	\vdots
gün.ay.yıl	a_{1258}

Piyasalardaki fiyatlar (a_i 'ler), kullanılan modele bağlı olarak eksponensiyel kuvvetleri şeklinde oluyorlar, orneğin Giriş bölümünde verilen Black-Scholes modeline olduğu gibi. Bu yüzden, öncelikle her fiyatın natürel logaritması alınıyor (yani kapanış fiyatları $\ln(a_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, 1258$ şekline getiriliyor).

<i>Tarih</i>	<i>Kapanış fiyatı</i>
gün.ay.yıl	$\ln(a_1)$
gün.ay.yıl	$\ln(a_2)$
gün.ay.yıl	$\ln(a_3)$
\vdots	\vdots
gün.ay.yıl	$\ln(a_{1258})$

Bu verini 1258×1 vektörü şeklinde yazabiliriz

$$V = \begin{bmatrix} \ln(a_1) \\ \vdots \\ \ln(a_{1258}) \end{bmatrix}$$

Literatürdeki yukarıda bahsettiğimiz sınırlar beklenen değeri sıfır ve standart sapması bir olan kesirli Brown hareketi için olduğundan, verini drift ve standart sapmadan arındırmak için aşağıdaki şekilde standartize etmemiz gerekir.

$$z_i = \frac{\ln(a_i) - \text{ortalama}[V]}{\text{standart sapma}[V]}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 1258$$

Oluşturulan bütün 1258 tane z_i değerlerini de aşağıdaki 1258×1 vektörü şeklinde yazalım

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{1258} \end{bmatrix}$$

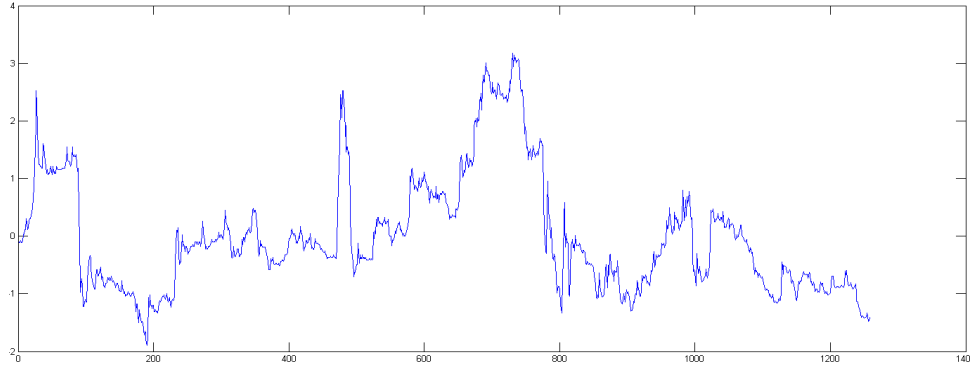
Örnek olarak, iki şirketin verileri için Z vektöründen oluşan yörüngeleri son sayfada, Şekil 6.1, Şekil 6.2'de gösterilmiştir.

Z vektörü şeklinde oluşturulan veri daha sonra tarihleri ile örtüşecek şekilde 60 aya (60 vektör şeklinde, her ay farklı günlere sahip olduğundan ve haftasonları da çıkarıldığından bu 60 vektörün de boyutları 18×1 ile 23×1 arasında değişiyor) bölünüyor. Bunu etmedeki amaç, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketindeki "1"i, "bir ay" şeklinde seçmektir. Dolayısıyla bir şirketin verisi üzerinde 60 tane yörünge oluşturmuş oluyoruz. En son olarak MATLAB R2008a kullanılarak 60 vektörün (yörüngenin) her biri için maksimum kayıp değişkeni bulunmuş ve bunların ortalaması bulunarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli brown hareketi maksimum kayıp değişkeni beklenen değeri ($E[M_1^H]$) bulunmuştur. Sonuçlar aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

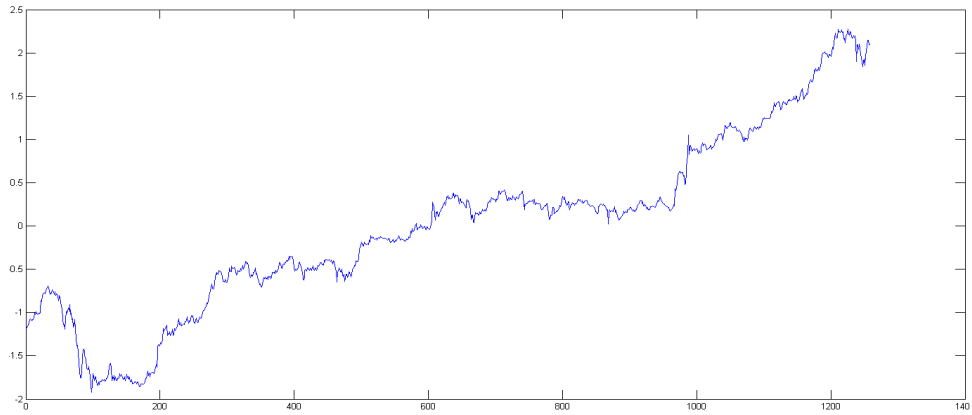
<i>Sirket</i>	<i>Tarih</i>	$E[M_1^H]$
Fenerbahçe SK	02.06.2008-31.05.2013	0.5580
Ülker Gıda A.Ş.	01.07.2008-01.07.2013	0.1329
Afyon Çimento A.Ş.	01.07.2008-01.07.2013	0.1703
Galatasaray SK	01.07.2008-01.07.2013	0.2896
TurkCell A.Ş.	01.07.2008-01.07.2013	0.5451
Kent Gıda A.Ş.	01.07.2008-01.07.2013	0.2193

Bulunan maksimum kayıp değerleri literatürde olan üst sınırları sağlamakta, fakat alt sınır, bulduğumuz sonuçtan da belli olduğu gibi Hurst parametresine bağlı olarak değişebildiğinden bazı verilerde uyumsuzluk ortaya çıkıyor. Hurst parametresine bağlılık tahmin edileceği üzere şu şekildedir: Hurst parametresi azaldıkça maksimum kayıp değeri artar, Hurst parametresi arttıkça maksimum kayıp değeri artar (aynı zaman aralığında bakılan).

Aslında bulduğumuz maksimum kayıp değişkenleri beklenen değerlerinin literatürdeki alt sınırlarla ortaya çıkabilecek uyumsuzluğu, "1" zamanının nasıl seçilmesine de bağlı, yani eğer biz burdaki "1" zamanını iki ay veya daha yüksek seçersek maksimum kayıp değişkeni beklenen değeri için de daha büyük bir sayı bulmuş oluruz, veya yarım ay seçersek daha da küçük bulmuş oluruz. Başka bir şekilde ifade edersek, verilerimiz günlük veriler olduğundan, eğer "1" zamanını bir gün şeklinde seçersek o zaman bütün maksimum kayıp değişkenleri sıfır olarak bulunur ve dolayısıyla beklenen değer de sıfır olmuş olur. Literatürde "1" zamanı olarak bir yıl kabul ediliyor, fakat bu durumda da aynı hesaplamaları yapabilmek için 60 yıllık bir veriye ihtiyacımız olurdu. Bu kadar veriye ihtiyaç olmasındaki amaç, beklenen değer için daha kesin, daha gerçekçi sonuçlar elde etmektir.



Şekil 6.1: Fenerbahçe SK, Z



Şekil 6.2: Ülker, Z

KAYNAKLAR

- [1] Risken, H., The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Application, Springer, 1 Jan 1996
- [2] Dominé, M., First passage time distribution of a Wiener process with drift concerning two elastic barriers, J.Appl. Prob.33, 164-175, 1996.
- [3] Magdon-Ismail, M., Atiya, A., Pratap, A., Abu-Mostafa, Y., On the maximum drawdown of a Brownian motion, J.Appl. Prob.41, 147-161, 2004.
- [4] Magdon-Ismail, M., Atiya, A., Maximum Drawdown, kaynak: Risk magazine 01.10.2004
- [5] Gardiner, C. W., Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, Springer, Berlin, 2004.
- [6] Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B., Zhang T., Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications, Springer Verlag, London, 2008.
- [7] Graversen, S. E., Shiryaev, A., An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion with drift, Bernoulli 6, 615-620.
- [8] Bond, G. C., Green's function for a zero drift reflected Brownian motion and the expected maximum drawdown (2003), submitted
- [9] Q-functions,
erişim adresi: [http : //www.cs.rpi.edu/_magdon/data/Qfunctions.html](http://www.cs.rpi.edu/~magdon/data/Qfunctions.html)
- [10] Nakhlé H. A., Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, Prentice Hall 2005.
- [11] Chekhlov, A., Uryasev, S., Zabarankin, M., Portfolio optimization with Drawdown constraints, Implemented in Portfolio Safeguard by AORDA.com, Theory Probability Application Vol.44, No.1, 2003.

- [12] Harding, D., Nakou, G., Nejjar, A., The pros and cons of drawdown as a statistical measure for risk in investments. AIMA Journal, pages 16–17, 2003.
- [13] Burghardt, G., Duncan, R., Liu, L., Understanding drawdowns, Carr Futures, 2003.
- [14] Çakar, H., Kesirli Brown Hareketinin Maksimum Kayıp ve Supremum Değişkenleri, TOBB ETÜ, Fbe, Matematik b., Yüksek Lisans Tezi, 08.2012.
- [15] Usta, Ö., İşletme Finansı ve Finansal Yönetim, Detay Yayıncılık, Ankara 2005.
- [16] Milian, A., Transition Probability Density of a Certain Diffusion Process Concentrated on a Finite Spatial Interval, J. Appl. Prob. 29, 334-342, 1992.
- [17] Caglar, M., Vardar, C., Distribution of maximum loss for fractional Brownian motion. (incelemede)
- [18] Ross, A. M., Computing bounds on the expected maximum of correlated normal variables, Methodology and Computing in Applied probability, 12(1), 111-138, 2010.
- [19] Norros, I., Four approaches to the fractional Brownian storage, Fractals in Engineering, eds. Levy Vehel, Lutton, Tricot, Springer, 154-169, 1997.
- [20] Adler, R., An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, 1990
- [21] Hamelink, F., Hoesli, M., The Maximum Drawdown as a Risk Measure: The Role of Real Estate in the Optimal Portfolio Revisited, FAME, 2003.
- [22] Sereda, E., Bronshtein, E., Rachev, S., Fabozzi, F., Sun, W., Stoyanov, S., Distortion Risk Measures in Portfolio Optimization
- [23] Karatzas, I., S. E. Shreve, S. E., Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [24] Fabrice, D. R, Vainberg, G., Option Pricing Models and Volatility Using Excel-VBA, Wiley, John and Sons, New Jersey, 2007.
- [25] Daehwan, K., Relevance of maximum drawdown in the investment fund selection problem when utility is non-additive, 2010
erişim adresi: <http://ssrn.com/abstract=1576998>
- [26] Masaaki, K., Stochastic Processes with Applications to Finance, Chapman and Hall/CRC, 2003.

EKLER

A. Terim Sözlüğü

Türkçe terim

düzgün

geçiş olasılığı

ilk geçiş zamanı

lineer

normalizasyon

olasılık akını

özdeğer

yansıtıcı engel

yutan engel

İngilizce Terim

smooth

transition probability

first passage time

linear

normalization

probability current, probability flux

eigenvalue

reflecting barrier

absorbing barrier

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : İSLAMOV, Zabit
Uyruğu : Azerbaycan
Doğum tarihi ve yeri : 12.09.1986 Azerbaycan/Ağdaş
Medeni hali : bekar
Telefon : +905348521596
Faks :
e-mail : zislamov@.etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Y. Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2013
Lisans	Bakü Devlet Üniversitesi	2008

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-2013	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (Çok iyi)
Rusca (Çok iyi)