# YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER İNDİRGEME DİZİLERİNİN TERİMLERİNİN TERS TOPLAMLARI

TALHA ARIKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2013

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Necip CAMUŞCU
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

TALHA ARIKAN tarafından hazırlanan YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER İNDİRGEME DİZİLERİNİN TERİMLERİNİN TERS TOPLAMLARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Emrah KILIÇ
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Adnan TERCAN

Üye : Doç. Dr. Emrah KILIÇ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Çetin ÜRTİŞ

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Talha Arıkan

| | | |
|---|---|---|
| **Üniversitesi** | **:** | **TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi** |
| **Enstitüsü** | **:** | **Fen Bilimleri Enstitüsü** |
| **Anabilim Dalı** | **:** | **Matematik** |
| **Tez Danışmanı** | **:** | **Doç. Dr. Emrah KILIÇ** |
| **Tez Türü ve Tarihi** | **:** | **Yüksek Lisans – Ağustos 2013** |


**Talha Arıkan**


## YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER İNDİRGEME DİZİLERİNİN TERİMLERİNİN TERS TOPLAMLARI

## ÖZET


Keyfi başlangıç koşullarına sahip ve her $1 \leq i \leq k$ için $p_i$'ler keyfi reel sayılar olmak üzere yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer indirgeme dizisi $\{u_n\}$

$$u_n = p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \cdots + p_k u_{n-k}$$

kuralı ile tanımlanır.

Bu tezde, başlangıç koşullarına ve katsayıların seçimine bağlı olarak her bir $\{u_n\}$ dizisi için $0 \leq r < t$ şartını sağlayan keyfi $t$ ve $r$ tamsayıları için

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| \quad \text{ve} \quad \left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\|$$

şeklinde tanımlanan kısmi ters ve alterne kısmi ters toplamlara dair sonuçlar verilecektir.



**Anahtar Kelimeler:** Ters Toplamlar, Rekürans Dizileri, Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi.

| | | |
|---|---|---|
| **University** | : | **TOBB University of Economics and Technology** |
| **Institute** | : | **Institute of Natural and Applied Sciences** |
| **Science Programme** | : | **Mathematics** |
| **Supervisor** | : | **Assoc. Prof. Emrah KILIÇ** |
| **Degree Awarded and Date** | : | **M.Sc. – AUGUST 2013** |

**Talha Arıkan**

## RECIPROCAL SUMS OF THE TERMS OF THE HIGHER ORDER RECURSIVE SEQUENCES

## ABSTRACT

Let $p_i$'s be arbitrary reals for all $1 \leq i \leq k$. Higher order linear recursive sequence $\{u_n\}$ with constant coefficients and arbitrary initials is defined by the recursion

$$u_n = p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \cdots + p_k u_{n-k}.$$

In this thesis, we obtain some results about partial reciprocal and alternating partial reciprocal sums of the terms of the sequence $\{u_n\}$ given by

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| \quad \text{and} \quad \left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\|$$

according to choice of initials and coefficients for arbitrary integers $t$ and $r$ with $0 \leq r < t$.

**Keywords:** Reciprocal Sums, Recurrences, Higher Order Generalized Fibonacci Sequence.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez çalışmamda ve hayatımın diğer bir çok aşamasında desteğini esirgemeyen ve her anlamda bana rehber olan danışman hocam Doç. Dr. Emrah KILIÇ'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bir çok konuda yardımlarını esirgemeyen TOBB ETÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve her zaman destekleriyle yanımda olan tüm asistan arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi anlamda en büyük destekçim olan aileme ve eşim Hande ARIKAN'a tüm destekleri için teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak, yüksek lisans eğitimimdeki maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a ve TOBB ETÜ'ye teşekkürlerimi sunarım.

# İçindekiler

# Tablo Listesi

# SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}^+$ | Pozitif reel sayılar kümesi |
| $F_n$ | $n$. Fibonacci sayısı |
| $L_n$ | $n$. Lucas sayısı |
| $P_n$ | $n$. Pell sayısı |
| $p_n$ | $n$. Pell-Lucas sayısı |
| $J_n$ | $n$. Jakobsthal sayısı |
| $j_n$ | $n$. Jakobsthal-Lucas sayısı |
| $W_n$ | $n$. Horadam sayısı |
| $T_n$ | $n$. Tribonacci sayısı |
| $\{U_n(p,q)\}$ | Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi |
| $\{V_n(p,q)\}$ | Genelleştirilmiş Lucas dizisi |
| $\{u_n\}$ | $k$. mertebeden genelleştirilmiş Fibonacci dizisi |
| $\lvert\circ\rvert$ | Modül fonksiyonu |
| $\lfloor\circ\rfloor$ | Taban fonksiyonu |
| $\lVert a\rVert$ | $a$ sayısına en yakın tamsayı değeri |
| $a(n) \sim b(n)$ | $a(n)$, $b(n)$ e asimptotiktir |
| $O$ | Büyük $O$ gösterimi |
| $\boxdot_n$ | 1'den $n$'e kadar olan tamsayıların kareleri toplamı |

# 1. GİRİŞ

## 1.1 Yüksek mertebeden lineer indirgeme dizileri

Bu bölümde yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer indirgeme dizilerini takdim edeceğiz. Bu dizilerle ilgili çeşitli tanımlar, özellikler ve formüller sunacağız.

Eğer bir dizinin terimleri, kendinden önceki terimleri cinsinden ifade ediliyorsa o diziye indirgeme dizisi denir. Örneğin $f$, $k$ değişkenli bir bağıntı olmak üzere eğer $\{u_n\}$ bir indirgeme dizisi ise bu diziyi

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-k}),$$

şeklinde yazarız. Bu kural, indirgeme bağıntısı veya rekürans bağıntısı olarak adlandırılır.

**Tanım 1.1.1.** *Kabul edelim ki her $1 \leq i \leq k$ için $p_i$'ler keyfi reel sayılar olsun. Her $n \geq k$ için negatif olmayan keyfi reel başlangıç koşullarıyla ve*

$$u_n = p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \cdots + p_k u_{n-k}, \tag{1.1}$$

*kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ dizine $k$. mertebeden sabit katsayılı lineer indirgeme dizisi veya $k$. mertebeden sabit katsayılı lineer rekürans dizisi adı verilir.*

(1.1) kuralı göz önüne alınırsa $\{u_n\}$ dizisinin terimleri başlangıç koşullarına ve her bir $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $p_i$ katsayılarına bağlı olarak değerler alacaktır. Bu durumda (1.1) kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç değerleri veya katsayıları değiştikçe yeni diziler elde edilecektir. Şimdi çeşitli başlangıç koşulları

Tablo 1.1: Özel Sayı Dizileri

| Mertebe | Katsayılar | Başlangıç değeleri | Dizinin adı |
|---|---|---|---|
| 2 | $p_1 = 1,\ p_2 = 1$ | $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ | Fibonacci $\{F_n\}$ |
| 2 | $p_1 = 1,\ p_2 = 1$ | $u_0 = 2,\ u_1 = 1$ | Lucas $\{L_n\}$ |
| 2 | $p_1 = 2,\ p_2 = 1$ | $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ | Pell $\{P_n\}$ |
| 2 | $p_1 = 2,\ p_2 = 1$ | $u_0 = 2,\ u_1 = 2$ | Pell-Lucas $\{p_n\}$ |
| 2 | $p_1 = 1,\ p_2 = 2$ | $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ | Jakobsthal $\{J_n\}$ |
| 2 | $p_1 = 1,\ p_2 = 2$ | $u_0 = 2,\ u_1 = 1$ | Jakobsthal-Lucas $\{j_n\}$ |
| 2 | $p_1 = p,\ p_2 = q$ | $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ | Gen. Fibonacci $\{U_n(p,q)\}$ |
| 2 | $p_1 = p,\ p_2 = q$ | $u_0 = 2,\ u_1 = p$ | Gen. Lucas $\{V_n(p,q)\}$ |
| 2 | $p_1 = p,\ p_2 = -q$ | $u_0 = a,\ u_1 = b$ | Horadam $\{W_n\}$ |
| 2 | $p_1 = 2,\ p_2 = -1$ | $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ | Doğal Sayılar $\mathbb{N}$ |
| 3 | $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ | $u_0 = 0,\ u_1 = u_2 = 1$ | Tribonacci $\{T_n\}$ |

ve katsayı seçimlerine göre elde edilen bazı özel sayı dizilerini Tablo 1.1 ile verebiliriz. Bu sayı dizileri bir çok yazar tarafından çalışılmış ve çeşitli özellikleri elde edilmiştir [9, 10, 16, 17, 24, 35].

Sabit katsayılı lineer indirgeme dizileri ile ilgili sıkça kullanılacak iki tanımı verelim.

**Tanım 1.1.2.** *(1.1) kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ dizisi için*

$$f(x) = x^k - p_1x^{k-1} - p_2x^{k-2} - \cdots - p_{k-1}x - p_k$$

*polinomuna $\{u_n\}$ dizisinin **karakteristik polinomu** ve*

$$x^k - p_1x^{k-1} - p_2x^{k-2} - \cdots - p_{k-1}x - p_k = 0$$

*denklemine $\{u_n\}$ dizisinin **karakteristik denklemi** denir.*

Rekürans bağıntısı dizinin genel örüntüsü hakkında bilgi verirken dizinin yeterince büyük terimlerini hesaplamada her zaman kullanışlı bir kural değildir. Bu tür durumlarda

$$u_n = f(n)$$

şeklinde bir kapalı formül bulmak istenilen terimi hesaplamak için daha yararlı olacaktır.

**Tanım 1.1.3.** *Sabit katsayılı lineer indirgeme dizisi $\{u_n\}$ için $u_n = f(n)$ şeklinde bulunacak olan kurala* ***Binet formülü*** *adı verilir.*

Şimdi herhangi bir sabit katsayılı lineer rükerans dizisi için Binet formülünün nasıl bulunacağını inceleyelim. Hatırlatalım ki (1.1) kuralı ile verilen $\{u_n\}$ dizisi

$$u_n = p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \cdots + p_k u_{n-k}$$

indirgeme kuralı ile tanımlanır.

1. Öncelikle $\{u_n\}$ rekürans dizisinin karakteristik polinomu $f(x)$ belirlenir.
2. Karakteristik polinom $f(x)$, yani

   $$f(x) = x^k - p_1 x^{k-1} - p_2 x^{k-2} - \cdots - p_{k-1} x - p_k$$

   in kökleri bulunur.
3. **a)** Eğer karakteristik polinom $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ gibi $k$ tane farklı köke sahip ise bu durumda $\{u_n\}$ dizisi

   $$u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots c_k \alpha_k^n$$

   olarak yazılır.

   **b)** Eğer karakteristik polinomun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ kökleri $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = k$ olacak şekilde sırasıyla $r_1, r_2, \ldots, r_t$ katlı kökler ise bu durumda $\{u_n\}$ dizisi

   $$\begin{aligned} u_n = & \left(c_1 n^{r_1-1} + c_2 n^{r_1-2} + \cdots + c_{r_1-1} n + c_{r_1}\right) \alpha_1^n \\ & + \left(c_{r_1+1} n^{r_2-1} + c_{r_1+2} n^{r_2-2} + \cdots + c_{r_1+r_2-1} n + c_{r_1+r_2}\right) \alpha_2^n \\ & + \ldots \\ & + \left(c_{k-r_t+1} n^{r_t-1} + c_{k-r_t+2} n^{r_t-2} + \cdots + c_{k-1} n + c_k\right) \alpha_t^n \end{aligned}$$

   olarak yazılır.
4. Yukarıdaki durumlar ve $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç koşulları göz önüne alınarak elde edilecek lineer denklem sistemi çözülerek $c_i$ katsayıları hesaplanır ve iddia edilen Binet formülü bulunur.

Şimdi 4 adım ile tarif edilen formülasyonu bir örnek ile nasıl elde edileceğini gösterelim. Bu örneğimizde genelleştirilmis Fibonacci dizisi $\{U_n(p,q)\}$, kısaca $\{U_n\}$, i göz önüne alalım. Burada genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$'nin rekürans kuralını ve başlangıç koşullarını hatırlatalım: $\{U_n\}$ dizisi, $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $p$ ve $q$, $p^2 + 4q \neq 0$ olacak şekilde tamsayılar olmak üzere her $n \geq 2$ için

$$U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}$$

indirgeme kuralıyla tanımlanır.

1. $\{U_n\}$ dizisinin karakteristik polinomu

$$f(x) = x^2 - px - q$$

dur.

2. Bu polinomun kökleri

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

olarak bulunur.

3. Karakteristik polinom $f(x)$, $p^2 + 4q \neq 0$ olduğundan katlı köklere sahip değildir. O halde Binet formülü

$$U_n = c_1 \left( \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \right)^n$$

şeklinde olacaktır.

4. Şimdi $c_1$ ve $c_2$ sabitlerini bulalım. $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ başlangıç değerlerini göz önüne alarak

$$U_0 = 0 = c_1 + c_2$$
$$U_1 = 1 = c_1\alpha + c_2\beta$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$c_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} \text{ ve } c_2 = -\frac{1}{\alpha - \beta}$$

olarak bulunur.

Bu durumda iddia edilen Binet formülü

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir.

Benzer şekilde genelleştirilmiş Lucas sayıları $\{V_n(p,q)\}$ için Binet formülü

$$V_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde bulunur.

Dolayısıyla $k$. mertebeden sabit katsayılı lineer indirgeme dizileri için Binet formülü bulmak o dizinin $k$. dereceden karakteristik polinomunun kökünü bulmayı ihtiva eder. Yüksek dereceden polinomların köklerini bulmak için genel bir teori mevcut olmadığından dolayı yüksek mertebeden indirgeme dizileri çok fazla çalışılmamaktadır. Bazı özel durumlar için kökler sembolik olarak göz önüne alınır veya asimptotik yaklaşımlarla çeşitli yorumlarda bulunulabilir.

## 1.2 Asimptotik yaklaşımlar

Verilen bir matematiksel problemin çözümü için net bir formül bulmak en idealidir. Eğer böyle net bir formül bulunamıyorsa, çözüme dair yaklaşık cevaplar verilebilir. Örneğin verilen bir dizinin Binet formülünü net olarak bulamayabiliriz ya da verilen bir toplamın değerini net olarak formüle edemeyebiliriz. Bu tür durumlarda çözümün davranışını kestirmek bizim için önemli olacaktır. Bu tür kestirimlere asimptotik yaklaşımlar denir.

Şimdi bu durumu bir örnek ile inceleyelim. Mesela

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k}$$

toplamını göz önüne alalım. Bu toplam için bilinen bir formül yoktur. Fakat $n \to \infty$ iken $S_n$ kısmi toplamlar dizisinin $2\binom{3n}{n}$'ye asimptotik olduğunu bilmek bize bazı bilgiler verir. $n \to \infty$ iken $S_n$'nin $2\binom{3n}{n}$ 'ye asimptotik olması $S_n \sim 2\binom{3n}{n}$ şeklinde gösterilir. Aynı zamanda

$$S_n = \binom{3n}{n}\left(2 - \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

olarak da ifade edilebilir [12]. Bu eşitlik bize daha detaylı bilgi vermektedir. Burada $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ifadesi bize göreceli hatanın mertebesinin $\frac{1}{n^2}$ olduğunu söyler. Bu ifade öncekine göre bize daha fazla bilgi vermesine rağmen bazı durumlarda yeterli bilgiyi vermeyebilir. Dolayısıyla burada istenen ifadeye bizim ihtiyacımızı görecek en uygun asimptotik yaklaşımı yapmalıyız.

Şimdi bu asimptotik yaklaşımlar için sıklıkla kullanılan $O$ notasyonunun özelliklerini inceleyelim.

### 1.2.1 Büyük $O$ notasyonu

Asimptotik analiz için en uygun notasyon 1894'te Paul Bachmann tarafından ortaya atılmış ve ilerleyen yıllarda özellikle Edmund Landau'nun ve diğer yazarların katkılarıyla geliştirilmiştir [12]. Bu notasyon matematiksel eşitliklerde

$$H_n = \ln n + \gamma + O\left(1/n\right)$$

şeklinde görülür. Bu ifadeye göre $n$. harmonik sayı $H_n$; $n$ nin doğal logaritması $\ln n$, Euler sabiti $\gamma$ ve $1/n$'nin $O$ değerlerinin toplamıdır. $O\left(1/n\right)$ ifadesi kesin bir bilgi vermezken, mutlak değeri $1/n$'nin sabit bir katından büyük olmayan bir değeri göstermektedir.

Genel olarak $O\left(\alpha\right)$, mutlak değeri $|\alpha|$'nın sabit bir katından küçük eşit olan bir sayıyı belirtir. Burada sayının ve sabitin ne olduğu hakkında kesin bir bilgi yoktur. $O$ gösteriminde, sadece sınırlar hakkında net bir bilgi mevcuttur. Matematiksel olarak

$$f\left(n\right) = O\left(g\left(n\right)\right) \ \forall n \text{ için,}$$

ifadesi

$$|f\left(n\right)| \leq C|g\left(n\right)| \ \forall n \text{ için,}$$

ifadesine denktir. Bir ifade içinde kullanılan her bir $O$ kullanımına karşılık gelen $C$ sabiti farklıdır ve bu $C$ değerleri $n$ den bağımsızdır. Örneğin, 1'den $n$'e kadar olan tamsayıların kareleri toplamını $\boxdot_n$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\boxdot_n &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\end{aligned}$$

olarak formülüze edilir. Bu ifade aynı zamanda

$$\boxdot_n = O\left(n^3\right)$$

şeklinde de yazılabilir. Çünkü $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right| \leq \frac{1}{3}|n|^3 + \frac{1}{2}|n|^2 + \frac{1}{6}|n| \leq \frac{1}{3}\left|n^3\right| + \frac{1}{2}\left|n^3\right| + \frac{1}{6}\left|n^3\right| = \left|n^3\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde

$$\boxdot_n = \frac{1}{3}n^3 + O\left(n^2\right)$$

olarak da yazılabilir ya da

$$\boxdot_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + O(n)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu üç farklı gösterimde her biri kendinden önceki gösterimden daha fazla bilgi verir. Ayrıca

$$\boxdot_n = O\left(n^{10}\right)$$

ifadeside doğru bir ifade olup neredeyse hiç bir bilgi içermedeğinden kullanışlı değildir. Bizim bu notasyonu kullanmaktaki en önemli amacımız, ihtiyacımızı görecek kadar bilgiyi veren ifadeyi elde etmek olmalıdır.

Bazı durumlarda bize her $n$ doğal sayısı için olmasada belli kısıtlar altında asimptotik yaklaşımlar gerekmektedir. Mesela

$$f(n) = O(g(n)) \;\; n \to \infty \text{ iken,}$$

ifadesi

$$|f(n)| \leq C|g(n)| \;\; n \geq n_0$$

eşitsizliğine denktir. Burada $O$ notasyonu $n$ değeri sonsuza giderken, yani yeterince büyükken, özelliğini koruyacaktır. Buradaki $C$ ve $n_0$ sabitlerinin değerleri her bir $O$ gösterimi için farklı olabilir. Fakat bu sabitler $n$'ye bağlı değildirler. Benzer şekilde,

$$f(x) = O(g(x)) \;\; x \to 0 \text{ iken},$$

öyle $C$ ve $\epsilon$ sabitleri vardır ki

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \;\; |x| \leq \epsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

$O$ notasyonu, sadece değişkenin (bu değişken genelde doğal sayı ise $n$, reel sayı ise $x$ ile gösterilir) sonsuza veya sıfıra yaklaştığı durumlarda kullanılmaz. Genel olarak $O$ notasyonu değişken, sonsuz veya sıfır dışındaki bir değere yaklaştığında da kullanılabilir.

$O$ notasyonunun kullanımında bazı manüpilasyon kuralları vardır. Bunlardan önemli olanları ispatsız bir şekilde aşağıda veriyoruz.

$m$ ve $m'$, $m \leq m'$ olacak şekilde birer reel sayı olmak üzere

$$n^m = O\left(n^{m'}\right)$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca keyfi bir $c$ sabiti için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
O(f(n)) + O(g(n)) &= O(|f(n)| + |g(n)|), \\
f(n) &= O(f(n)), \\
cO(f(n)) &= O(f(n)), \\
O(O(f(n))) &= O(f(n)), \\
O(f(n))\,O(g(n)) &= O(f(n)\,g(n)), \\
O(f(n)\,g(n)) &= f(n)\,O(g(n)).
\end{aligned}$$

## 1.3 Descartes işaret kuralı

Birçok matematiksel problemde ve modellemede polinomyal denklemlerle karşılaşırız. Örneğin, bir rekürans dizisinin Binet formülünü bulmak için ilgili dizinin karakteristik polinomunun köklerine ihtiyacımız vardır. Dolayısıyla matematik tarihinde polinom köklerinin yapısı ve polinom köklerini bulma metodları birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalar sonucu literütürde; köklerin sayısı hakkında bilgi veren kurallar, köklerin yapısını inceleyen yaklaşımlar, kök bulma metodları v.b. gibi sonuçlar mevcuttur. Bunlardan biri de *Descartes İşaret Kuralı* olarak bilinen ve polinom köklerinin karakterini (pozitif, negatif ya da sanal) belirlemeye yardımcı olan kuraldır.

Reel katsayılı ve $n$. dereceden keyfi $p(x)$ polinomu, $p_0, p_1, \ldots, p_n$ hepsi birden sıfır olmayan reel katsayılar olmak üzere,

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Descartes, *La Geometrie* adlı eserinde polinomun katsayılarının işaretleriyle ilgili kuralından söz etmiş fakat ispatını vermemiştir. Bahsedilen kural:

"Bir denklemin pozitif ve negatif köklerinin sayısını şu şekilde belirleyebiliriz: Bir denklem, en fazla "$+$" dan "$-$" ye veya "$-$" den "$+$" ya, içerdiği işaret değişimi kadar pozitif köklere sahip olabilir. Bununla beraber en fazla, iki ardışık "$+$" veya "$-$" işaretinin sayısı kadar negatif köklere sahip olabilir."

şeklindedir.

Daha sonra bu ifadenin ispatı ve daha genel durumları bir çok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalar neticesinde Descartes İşaret Kuralı aşağıdaki şekliyle bilinmektedir.

**Tanım 1.3.1.** *$p_0 \neq 0$ ve $p_1, \ldots, p_n$ hepsi birden sıfır olmayan reel katsayılar olmak üzere (1.2) ile verilen $p(x)$ polinomunu göz önüne alalım. Bu $p(x)$ polinomunun pozitif köklerinin sayısı; ya polinomun katsayılarının işaret değişiminin sayısına ya da bu sayının bir çift tamsayı eksiğine eşittir.*

Bu tanımdan yola çıkarak negatif kökler için şu çıkarımı yapabiliriz. Verilen bir polinomda $x$ değişkeni yerine $-x$ koyularak elde edilecek yeni polinomun, pozitif reel kökleri ilk polinomun negatif köklerine eşit olacaktır. Descartes işaret kuralını bu yeni polinoma uygularsak elde edececeğimiz pozitif kökler hakkındaki bilgi ilk polinomun negatif kökleri için geçerli olacaktır. Dolayısıyla yukarıda tanımını verdiğimiz kural ile hem pozitif hem de negatif köklerin sayısı hakkında bilgi edinebiliriz. Daha detaylı bilgi için [4] nolu çalışmaya bakılabilir.

Şimdi Descartes İşaret Kuralı'nı örnekler üzerinde anlamaya çalışalım.

**Örnek 1.3.1.** $4x^3 - 5x^2 + 6$ *polinomunu ele alalım. Katsayıların işaretleri sırasıyla* $+, -, +$ *olup, işaret değişimi iki defa gerçekleşmiştir. O halde pozitif köklerin sayısı ya* 2 *dir ya da* 0 *dır. Ayrıca,* $x$ *yerine* $-x$ *yazarsak* $-4x^3 - 5x^2 + 6$ *polinomunu elde ederiz. Buradaki katsayıların işaret değişimi bir kere gerçekleştiğinden negatif kök sayısı tam olarak* 1 *dir.*

**Örnek 1.3.2.** $x^3 - 6x^2 + 14x - 15$ *polinomunu göz önüne alalım. Katsayı işaretleri sırasıyla* $+, -, +, -$ *olur. üç defa işaret değişimi gerçekleştiğinden dolayı pozitif köklerin sayısı ya* 3 *tür ya da* 1 *dir.* $x$ *yerine* $-x$ *yazılarak* $-x^3 - 6x^2 - 14x - 15$ *polinomu elde edilir ve hiç bir işaret değişimi olmadığından* $x^3 - 6x^2 + 14x - 15$ *polinomunun negatif kökü yoktur.*

**Örnek 1.3.3.** *(1.1) ile tanımlanan indirgeme dizisini inceleyelim. Kabul edelim ki, her* $1 \leq i \leq k$ *için* $p_i$ *katsayıları pozitif reel sayılar olsun. Bu dizinin karakteristik polinomu* $x^k - p_1 x^{k-1} - p_2 x^{k-2} - \cdots - p_{k-1} x - p_k$ *dır. Her* $1 \leq i \leq k$ *için* $p_i$*'ler pozitif olduğundan katsayıların işaret değişimi sadece bir kez gerçekleşmektedir. Dolayısıyla bu polinomun sadece bir tane pozitif reel kökü vardır. Diğer kökleri ya negatif ya da kompleks köklerdir.*

Bu kural pozitif veya negatif köklerin sayısı için sadece olabilecek değerleri vermektedir. Kökler hakkında başka bir yorum yapmaya olanak vermemektedir. Örneğin katlı kökler hakkında bize bilgi vermemektedir. Bu durumu aşağıdaki not ile belirtiyoruz.

**Not 1.3.1.** *Descartes İşaret Kuralı, pozitif(negatif) köklerin sayısı hakkında bilgi verirken katlı kökleride ayrı ayrı birer kök olarak saymaktadır. Fakat bu kural ile herhangi bir pozitif(negatif) kökün kaç katlı olduğu bilgisine ulaşılamaz.*

Bu durumu daha iyi anlamak için bir örnek ile inceleyelim.

**Örnek 1.3.4.** *"3", $x^2 - 6x + 9$ polinomunun çift katlı köküdür. $x^2 - 6x + 9$ polinomunda katsayılar arasındaki işaret değişimi iki kere gerçekleştiğinden, Descartes işaret kuralı gereği bu polinomun ya iki pozitif kökü vardır ya da hiç pozitif kökü yoktur. Biliyoruz ki "3" bu polinomun pozitifi bir köküdür. Demekki çift katlı kök iki ayrı kök olarak sayılmaktadır.*

Dolayısıyla Descartes İşaret Kuralı, çoğu zaman tek başına yeterli olmaz. Bu kısıtlılığı gidermek için başka kurallar veya manipülasyonlar ile beraber uygulamak gerekebilir.

# 2. GEÇMİŞ ÇALIŞMALAR

## 2.1 Ters Toplamlar

Bu bölümde şimdiye kadar indirgeme dizilerinin ters toplamları ile ilgili yapılan çalışmaları özetleyeceğiz.

Bu alanda ilk olarak Landau [25]

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$$

ile tanımlanan Lambert serileri ve Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}} = \sqrt{5} \left( L\left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) - L\left( \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right) \right)$$

bağıntısıyla verdi.

Bununla ilgili olarak Landau'nun sonucunu, Horadam [18] genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_{2n}} = (\alpha - \beta) \left( L\left(\beta^2\right) - L\left(\beta^4\right) \right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_{2n-1}} = -L\left(\beta\right) + 2L\left(\beta^2\right) - L\left(\beta^4\right)$$

şeklinde elde etmiştir. Ayrıca bu çalışmasında benzer bazı sonuçları keyfi başlangıç koşullu ve keyfi katsayılı ikinci mertebeden lineer indirgeme dizileri için de elde etmiştir.

Andre-Jeannin [1] Lambert serileri ile ilişkili olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{U_n(p,1)U_{n+1}(p,1)}=2\left(\alpha-\beta\right)\left(L\left(\beta^2\right)-2L\left(\beta^4\right)+2L(\beta^8)\right)+\beta$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{V_n(p,1)V_{n+1}(p,1)}=\frac{2}{\alpha-\beta}\left(L\left(\beta^2\right)-2L\left(\beta^8\right)\right)+\frac{\beta}{\left(\alpha-\beta\right)p}$$

eşitliklerini elde etmiştir.

Bazı özel indirgeme dizilerinin sonsuz ters toplamlarının farklı yazarlar tarafından farklı zamanlarda hesaplanan nümerik değerleri Brousseau'nun [8] nolu kitabında toplu bir şekilde verilmiştir. Bu değelerin bazıları aşağıda listelenmiştir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n}=3.3598856662..., \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n-1}}=1.82451515...,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_{2n}}=0.56617767..., \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_{2n}}=0.60057764...\ .$$

Bu değelerin rasyonel olup olmadıkları doğrudan anlaşılmadığından çeşitli yazarlar bu tür toplamların irrasyonelliğini ayrıca incelemiştirler. Örneğin, Andre-Jeannin [2] Lucas sayılarının ters toplamının irrasyonel olduğunu ispatlamıştır.

Good [11] Fibonacci sayıları için aşağıdaki ters toplamı hesaplamıştır.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}}=\frac{7-\sqrt{5}}{2}. \tag{2.1}$$

Ayrıca Hoggatt ve Bicknell [14] bu sonucun 10 farklı yoldan ispatını göstermişlerdir.

Bu toplamın bir genel durumu olarak, Hoggatt ve Bicknell [13]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{k2^n}}=\begin{cases}\dfrac{2L_k-F_{2k}\sqrt{5}+5F_k^2}{2F_{2k}} & \text{eğer } k \text{ tek ise,}\\[2ex] \dfrac{2-F_k\sqrt{5}+L_k}{2F_k} & \text{eğer } k \text{ çift ise,}\end{cases} \tag{2.2}$$

sonucunu elde etmişlerdir.

Fibonacci sayıları için verilen bu iki ters toplamı, Bergum ve Hoggatt [6] Fibonacci ve Lucas polinomlarını kullanarak genelleştirmişlerdir. Bunun yanında $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizisi $\{F_n(x)\}$ in karakteristik polinomunun kökleri olmak üzere $q = b - a + k$ kabulu altında

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{qn+a-k} \frac{F_{b-a+k}(x)F_k(x)}{F_{qn+a-k}(x)F_{qn+b}(x)} = \frac{F_{b+k}(x)}{F_b(x)} - \begin{cases} \alpha^k(x) & x < 0, \\ \beta^k(x) & x > 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

toplamını hesaplamışlardır. Aynı çalışmada Lucas polinomları için de benzer sonuçları elde etmişlerdir.

Backstrom [5], bazı pozitif $a, b$ ve $c$ tamsayıları için ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{an+b} + c} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L_{an+b} + c} \tag{2.4}$$

tipindeki toplamları hesaplamıştır. Örneğin, $a = 2,\ b = 1$ ve $c = F_k$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1} + F_k} = \frac{k\sqrt{5}}{2L_k}$$

sonucunu buluruz. Ayrıca $a = 2k$, $b = k + 2t$ ve $c = F_k$ değerleri için ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{(2n+1)k+2t} + F_k} = \frac{1}{2L_k} \begin{cases} \sqrt{5} - 5F_t/L_t & \text{eğer } t \text{ çift ise,} \\ \sqrt{5} - L_t/F_t & \text{eğer } t \text{ tek ise,} \end{cases}$$

toplamını elde ederiz.

Popov [29], (2.3) ile verilen toplamı, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri $\{U_n(p,q)\}$ ve $\{V_n(p,q)\}$ için hesaplamıştır. Ayrıca, Bacstorm'un (2.4) tipindeki toplamlarını $\{F_n\}$ yerine ayrı ayrı $\{U_n(p,q)\}$ ve $\{V_n(p,q)\}$ alarak daha genele taşımıştır.

Brousseau [7] birbirinden farklı pozitif $k_i$ tamsayıları için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+k_1} F_{n+k_2} \cdots F_{n+k_r}} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{F_n F_{n+k_1} F_{n+k_2} \cdots F_{n+k_r}}$$

tipindeki sonsuz toplamları göz önüne almıştır. Rabinowitz [30], aynı tipteki toplamların hesaplanması için algoritmik bir yaklaşım vermiştir. Daha sonra, yine Rabinowitz [31] $\{F_n\}$ yerine, keyfi başlangıç koşullarına ve keyfi katsayılara sahip ikinci dereceden rekürans dizilerini kullanarak önceki sonuçların genel durumlarını elde etmiştir.

Melham ve Shannon [26], (2.1) ve (2.2) de Fibonacci sayıları için verilen sonuçları, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n(p,1)\}$ ve Lucas dizisi $\{V_n(p,1)\}$ için elde etmiştir. Bununla beraber sonsuz toplamlara dair

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_{kn}(p,1)U_{k(n+1)}(p,1)} = \frac{1}{\alpha^k U_k^2(p,1)} \tag{2.5}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{kn}(p,1)V_{k(n+1)}(p,1)} = \frac{1}{2(\alpha-\beta)U_k(p,1)} \tag{2.6}$$

sonuçlarını vermişlerdir.

Andre-Jeannin [3], (2.5) ve (2.6) daki sonuçları, ikinci dereceden en genel rekürans dizisi $\{W_n\}$ için,

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{W_n W_{n+k}} \quad \text{ve} \quad T_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{W_n W_{n+k}}$$

toplamlarını hesaplayarak daha genele götürmüştür.

Bu bölümde şimdiye kadar bilinen ters toplamlara dair çeşitli sonuçları vermeye çalıştık. Bundan sonraki bölümde kısmi ters toplamlara dair çeşitli sonuçlar vereceğiz.

## 2.2 Kısmi Ters Toplamlar

Xi [34], Horadam dizisi $\{W_n\}$'in keyfi iki teriminin çarpımının $l$. kuvvetlerinin ters toplamlarını göz önüne almış ve

$$\sum_{n=k}^{t} \frac{q^n}{W_n^l W_{n+m}^l} \sum_{i=0}^{l-1} \left[ \left(W_{k+1} - W_k \beta\right) q^{n-k} \alpha^m - \left(W_{k+1} - W_k \alpha\right) \beta^{2(n-k)+m} \right]^{l-1-i}$$
$$\times \left[ \left(W_{k+1} - W_k \beta\right) q^{n-k} \beta^m - \left(W_{k+1} - W_k \alpha\right) \beta^{2(n-k)+m} \right]^{i}$$
$$= \frac{\left(p^2 - 4q\right)^{\frac{l}{2}} q^k}{\left(\alpha^m - \beta^m\right)\left(W_{k+1} - W_k \beta\right)} \sum_{i=0}^{m-1} \left[ \frac{\beta^{li}}{W_{k+i}^l} - \frac{\beta^{l(t+i+1-k)}}{W_{t+i+1}^l} \right]$$

ve

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^n}{W_n^l W_{n+m}^l} \sum_{i=0}^{l-1} \left[ \left(W_{k+1} - W_k \beta\right) q^{n-k} \alpha^m - \left(W_{k+1} - W_k \alpha\right) \beta^{2(n-k)+m} \right]^{l-1-i}$$
$$\times \left[ \left(W_{k+1} - W_k \beta\right) q^{n-k} \beta^m - \left(W_{k+1} - W_k \alpha\right) \beta^{2(n-k)+m} \right]^{i}$$
$$= \frac{\left(p^2 - 4q\right)^{\frac{l}{2}} q^k}{\left(\alpha^m - \beta^m\right)\left(W_{k+1} - W_k \beta\right)} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\beta^{li}}{W_{k+i}^l}$$

sonuçlarını elde etmiştir.

Kılıç ve Irmak [19], Xi'nin sonuçlarını keyfi pozitif $k$ tamsayısı için $\{W_{kn}\}$ dizisini ele alarak genelleştirmişlerdir.

Othsuka ve Nakamura [28], Fibonacci sayıları ve karelerinin kısmi ters toplamlarının çarpımsal terslerinin taban değerlerini aşağıdaki gibi vermişlerdir.

$$\left\lfloor \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-2} & \text{eğer } n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ F_{n-2} - 1 & \text{eğer } n \geq 1 \text{ tek ise.} \end{cases} \tag{2.7}$$

ve

$$\left\lfloor \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-1}F_n - 1 & \text{eğer } n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ F_{n-1}F_n & \text{eğer } n \geq 1 \text{ tek ise.} \end{cases}$$

Zhang ve Wang [33], (2.7) deki sonucu Pell sayıları için

$$\left\lfloor \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{P_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} P_{n-1} + P_{n-2} & \text{eğer } n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ P_{n-1} + P_{n-2} - 1 & \text{eğer } n \geq 1 \text{ tek ise,} \end{cases}$$

şeklinde bulmuşlardır. Ayrıca aynı yazarlar [32] nolu çalışmalarında, Pell sayılarının karelerinin kısmi ters toplamlarına dair sonuçlar elde etmişlerdir.

Holliday ve Komatsu [15], yukarıdaki sonuçları genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n(p,1)\}$'i göz önüne alarak aşağıdaki gibi genelleştirmişlerdir.

$$\left\lfloor \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{U_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} U_n - U_{n-1} & \text{eğer } n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ U_n - U_{n-1} - 1 & \text{eğer } n \geq 1 \text{ tek ise,} \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\left\lfloor \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{U_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} pU_nU_{n-1} - 1 & \text{eğer } n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ pU_nU_{n-1} & \text{eğer } n \geq 1 \text{ tek ise.} \end{cases}$$

Buna ek olarak aynı çalışmada yazarlar Jakobsthal sayı dizisi $\{J_n\}$ için

$$\left\lfloor \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} J_{n-1} - 1 & \text{eğer } n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ J_n & \text{eğer } n \geq 1 \text{ tek ise,} \end{cases}$$

sonsuz kısmi ters toplamını hesaplamışlardır.

Komatsu [23], bunlardan farklı olarak "*alta tamamlama fonksiyonu*" yerine "*en yakın tamsayı fonksiyonu*" $\|\circ\|$'ı ($\|x\| = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$) kullanarak çeşitli ters toplamlar elde etmiştir. $p_1 \geq p_2 \geq 0$ olmak üzere ikinci mertebeden en genel indirgeme dizisi $\{u_n\}$ için her $n \geq n_0$ olmak üzere

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_n} \right)^{-1} \right\| = u_n - u_{n-1}$$

sonucunu elde etmiştir. Buradaki $n_0, p_1, p_2$ ve $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç değerlerine bağlıdır.

Yine Komatsu [22], 3. mertebeden Tribonacci dizisi $\{T_n\}$'nin kısmi ters toplamları için

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{T_k} \right)^{-1} \right\| = T_n - T_{n-1}, \quad (n \geq 1)$$

ve

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{T_{2k}} \right)^{-1} \right\| = T_{2n} - T_{2n-2}, \quad (n \geq 1)$$

sonuçlarını ve bunlara paralel olarak alterne kısmi ters toplamlarını vermiştir.

Komatsu ve Laohakosol [21], literetürde ilk defa yüksek mertebeden indirgeme dizileri için kısmi ters toplamlara dair sonuçlar vermiştirler. İlgili çalışmalarında, keyfi başlangıç koşullarına sahip ve her $n \geq k$ ve $p \geq 1$ için

$$u_n = pu_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + \cdots + u_{n-k}$$

kuralıyla tanımlanan $k$. mertebeden lineer indirgeme dizisini göz önüne alarak

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_k} \right)^{-1} \right\| = u_n - u_{n-1}, \ (n \geq n_0)$$

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_k} \right)^{-1} \right\| = (-1)^n \left( u_n - u_{n-1} \right), \ (n \geq n_1)$$

ve

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{2k}} \right)^{-1} \right\| = u_{2n} - u_{2n-2}, \ (n \geq n_2)$$

sonuçlarını vermişlerdir. Buradaki $n_0, n_1, n_2$ değerleri, $p$'ye ve $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarına bağlı doğal sayılardır.

Bu çalışmanın bir adım ötesinde, Kılıç ve Arıkan [20] nolu çalışmalarında, $p$ ve $q$ keyfi pozitif katsayılar olmak üzere, keyfi başlangıç koşullarına sahip ve $n \geq k$ için

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2} + u_{n-3} + \cdots + u_{n-k}$$

kuralıyla tanımlanan yüksek mertebeden indirgeme dizisini göz önüne almışlardır. Bu çalışmalarında $t$ ve $r$, $0 \leq r < t$ şartını sağlayan keyfi tamsayılar ve $p \geq q$ olmak üzere

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = u_{tn+r} - u_{tn-t+r}, \ (n \geq n_0)$$

ve

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = (-1)^{tn+r} \left( u_{tn+r} + u_{tn-t+r} \right), \ (n \geq n_1)$$

toplamlarını hesaplamışlardır. Buradaki $n_0$ ve $n_1$, $t, r, p, q$ değerlerine ve $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarına bağlı doğal sayılardır. Bu toplamlar daha önce tanımlanıp hesaplanmış olan tüm kısmi toplamları ve daha genel durumlarını ihtiva etmektedir.

Şimdi iki farklı örnek verelim.

Eğer $p = q = 1$ ve başlangıç koşulları $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ olarak alınırsa, ikinci mertebeden lineer indirgeme dizisi $\{u_n\}$, bize Fibonacci dizisi $\{F_n\}$'i verir. O halde $t = 5$ ve $r = 3$ olarak seçilirse

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_{5k+3}} \right)^{-1} \right\| = F_{5n+3} - F_{5n-2}, \ (n \geq 1)$$

ve

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{F_{5k+3}} \right)^{-1} \right\| = (-1)^n \left( F_{5n+3} + F_{5n-2} \right), \ (n \geq 1)$$

kısmi ters toplamlarını elde ederiz. Buradaki $n \geq 1$ şartı nümerik hesaplamalar sonucu elde edilmiştir.

İkinci örneğimizde, $p = 7$, $q = 4$ ve başlangıç koşulları $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 1$ ve $u_3 = 2$ seçilerek elde edilen 4. mertebeden $\{u_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Yani $\{u_n\}$ dizisi $n \geq 4$ için

$$u_n = 7u_{n-1} + 4u_{n-2} + u_{n-3} + u_{n-4}$$

indirgeme kuralı ile tanımlanmış olsun. Eğer $t = 1$ ve $r = 0$ olarak seçilirse

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_k} \right)^{-1} \right\| = u_n - u_{n-1}, \ (n \geq n_0)$$

ve

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_k} \right)^{-1} \right\| = (-1)^n \left( u_n + u_{n-1} \right), \ (n \geq n_1)$$

sonuçları elde edilir. Buradaki $n_0$ ve $n_1$ doğal sayıları $\{u_n\}$ dizisinin karakteristik polinomunun köklerine ve başlangıç değerlerine bağlıdır.

# 3. PROBLEM TANIMI

Şimdiye kadar literatürde çeşitli indirgeme dizilerinin ters toplamlarına ilişkin elde edilmiş sonuçları verdik. Bahsedilen çalışmalarda, yazarlar genelde ikinci dereceden lineer indirgeme dizilerinin ters toplamları için bazı sonuçlar vermişlerdir. Bir kısım yazarda yüksek mertebeden bazı özel lineer indirgeme dizileri için ters toplamlar elde etmişlerdir. Bununla beraber son zamanlarda, $\|\circ\|$ en yakın tamsayı normunu göstermek üzere

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_k} \right)^{-1} \right\|$$

şeklindeki kısmi ters toplamlara dair sonuçlar verilmiştir. Bu tip toplamlar için en genel sonucu, Kılıç ve Arıkan [20] nolu çalışmalarında, keyfi başlangıç koşullarına sahip ve iki keyfi katsayılı

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2} + u_{n-3} + \cdots + u_{n-k}$$

kuralıyla tanımlanan indirgeme dizisi $\{u_n\}$'i göz önüne alarak vermişlerdir.

Bu çalışmadaki esas amacımız, hepsi birden sıfır olmayan keyfi başlangıç koşullarına sahip ve (1.1) indirgeme kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ dizisi için

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\|$$

ve

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\|$$

kısmi ters toplamlarını hesaplamaktır. Burada $t$ ve $r$, $0 \leq r < t$ şartını sağlayan keyfi tamsayılardır.

Göz önüne aldığımız $\{u_n\}$ dizisi, daha önce kısmi toplamları hesaplanan dizilerin en genel halidir (Bakınız Tablo 1.1). Dolayısıyla bu çalışmada vereceğimiz sonuçlar önceki sonuçların bir genellemesi olacaktır.

# 4. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME

## 4.1 Elde edilen sonuçlar

Sabit katsayılı ve keyfi başlangıç koşullu $k$. mertebeden lineer indirgeme dizisi $\{u_n\}$'i

$$u_n = p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \cdots + p_k u_{n-k} \tag{4.1}$$

kuralı ile tanımlamıştık. Bu bölümde yukarıdaki kural ile tanımlanan $\{u_n\}$ dizisinin kısmi ters toplamlarına dair sonuçlar vereceğiz.

(4.1) kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ dizisinin, en az bir başlangıç koşulu sıfırdan farklı olmak zorundadır aksi takdirde **sıfır sabit dizisini** elde ederiz.

Şimdi elde ettiğimiz sonuçları verebiliriz.

**Teorem 4.1.1.** *Her $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ için $p_i \geq p_{i+1}$ olmak üzere (4.1) kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ indirgeme dizisini göz önüne alalım. Bu durumda $0 \leq r < t$ şartını sağlayan $t$ ve $r$ tamsayıları için belli bir $n_0$ pozitif tamsayısı vardır öyle ki her $n > n_0$ için*

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = u_{tn+r} - u_{tn-t+r}$$

*eşitliği sağlanır.*

Buradaki $n_0$ pozitif tamsayısı, $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarına, $t$ ve $r$ tamsayılarına ve $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $p_i$ katsayılarına bağlı olarak belirlenir.

Teoremin ispatı için aşağıda vereceğimiz lemmalara ihtiyacımız olacaktır.

**Lemma 4.1.1.** *Kabul edelim ki $p_i$ katsayıları her $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ için $p_i \geq p_{i+1}$ şartını sağlayan keyfi pozitif reel sayılar ve $k \geq 2$ bir tamsayı olsun. O halde*

$$f(x) = x^k - p_1 x^{k-1} - p_2 x^{k-2} - p_3 x^{k-3} - \cdots - p_{k-1} x - p_k$$

*şeklinde tanımlanan $f(x)$ polinomu için*

*(i) $f(x)$ polinomunun yalnızca bir tane $\alpha$ pozitif reel kökü vardır ve bu kök $p_1 < \alpha < p_1 + 1$ eşitsizliğini sağlar,*

*(ii) $f(x)$ polinomunun diğer $k-1$ tane kökü kompleks düzlemdeki birim çemberin içerisindedir,*

*şartları gerçeklenir.*

**İspat.** İlk olarak $g(x)$ polinomunu

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)\,f(x) \\ &= x^{k+1} - (p_1+1)\,x^k + (p_1 - p_2)\,x^{k-1} + (p_2 - p_3)\,x^{k-2} + \ldots + p_k \\ &= x^{k+1} - (p_1+1)\,x^k + \sum_{i=1}^{k-1} (p_i - p_{i+1})\,x^{k-i} + p_k \end{aligned}$$

şeklinde inşaa edelim. Descartes İşaret Kuralı gereğince $f(x)$ polinomunun tam olarak bir tane ve böylece $g(x)$ polinomunun tam olarak iki tane pozitif reel kökü vardır. (Bakınız Örnek 1.3.3). Tanımı gereği açıkça $g(x)$ polinomunun köklerinden biri 1 dir ve diğer kökü ise $f(x)$ polinomunun pozitif reel köküdür. $p_i$'ler pozitif reel sayılar olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} f(p_1) &= p_1^k - p_1^k - p_2 p_1^{k-2} - p_3 p_1^{k-3} - \cdots - p_{k-1} p_1 - p_k \\ &= -\left(p_2 p_1^{k-2} + p_3 p_1^{k-3} - \cdots + p_{k-1} p_1 + p_k\right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} & f(p_1+1) \\ &= (p_1+1)^k - p_1 (p_1+1)^{k-1} - p_2 (p_1+1)^{k-2} - p_3 (p_1+1)^{k-3} - \cdots - p_k \\ &= (p_1+1)^{k-1} (p_1 + 1 - p_1) - \Big(p_2 (p_1+1)^{k-2} + p_3 (p_1+1)^{k-3} + \cdots + p_k\Big) \\ &= (p_1+1)^{k-1} - \Big(p_2 (p_1+1)^{k-2} + p_3 (p_1+1)^{k-3} + \cdots + p_k\Big) \qquad (4.2) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Her bir $i > 1$ için $p_1 \geq p_i$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
&p_2\left(p_1+1\right)^{k-2}+p_3\left(p_1+1\right)^{k-3}+\cdots+p_k \\
&\leq p_1\left(\left(p_1+1\right)^{k-2}+\left(p_1+1\right)^{k-3}+\cdots+1\right) \\
&=p_1\left(\frac{\left(p_1+1\right)^{k-1}-1}{p_1+1-1}\right) \\
&=\left(p_1+1\right)^{k-1}-1
\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazarız. (4.2) eşitliğinin sağ tarafında bulunan

$$p_2\left(p_1+1\right)^{k-2}+p_3\left(p_1+1\right)^{k-3}+\cdots+p_k$$

ifadesi $\left(p_1+1\right)^{k-1}$ değerinden daha küçük olduğundan dolayı $f(p_1+1) > 0$ dır. Dolayısıyla ara değer teoremi gereğince $f(x)$'in $p_1 < \alpha < p_1+1$ şartını sağlayan $\alpha$ pozitif reel kökü vardır. Böylece Lemma (i)'nin ispatı tamamlanır. □

**Sonuç 4.1.1.** *Lemma (i)'yi göz önüne alırsak,*

$$\begin{aligned}
&\textit{eğer } x \in \mathbb{R} \textit{ ve } x > \alpha \textit{ ise } f(x) > 0, \qquad (4.3)\\
&\textit{eğer } x \in \mathbb{R} \textit{ ve } 0 \leq x < a \textit{ ise } f(x) < 0,
\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}
&\textit{eğer } x \in \mathbb{R} \textit{ ve } x > \alpha \textit{ ise } g(x) > 0,\\
&\textit{eğer } x \in \mathbb{R} \textit{ ve } 1 < x < a \textit{ ise } g(x) < 0, \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

*ifadelerini elde ederiz.*

Lemma (ii)'nin ispatı için $f(x)$'in birim çemberin üzerinde ve dışında $\alpha$'dan başka bir kökünün olmadığını göstermemiz yeterli olacaktır.

**Lemma (ii)'nin İspatı.**
**İddia 1:** $f(x)$'in $|z_1| > \alpha$ olacak şekilde $z_1$ kompleks kökü yoktur.

Kabul edelimki böyle bir $z_1$ kompleks kökü mevcut olsun. Bu durumda

$$f(z_1) = z_1^k - p_1 z_1^{k-1} - p_2 z_1^{k-2} - p_3 z_1^{k-3} - \cdots - p_{k-1} z_1 - p_k = 0$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\left|z_1^k\right| &\leq p_1\left|z_1^{k-1}\right| + p_2\left|z_1^{k-2}\right| + p_3\left|z_1^{k-3}\right| + \cdots + p_{k-1}\left|z_1\right| + p_k \\ f(|z_1|) &= |z_1|^k - p_1|z_1|^{k-1} - p_2|z_1|^{k-2} - p_3|z_1|^{k-3} - \cdots - p_{k-1}|z_1| - p_k \leq 0\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (4.3) de verilen eşitsizliği ile çeliştiğinden dolayı böyle bir kök mevcut değildir.

**İddia 2:** $f(x)$'in $1 < |z_2| < \alpha$ şartını sağlayan $z_2$ kompleks kökü yoktur.

Farz edelimki böyle bir $z_2$ kompleks kökü olsun. Bu durumda $f(z_2) = 0$ olacağından

$$g(z_2) = z_2^{k+1} - (p_1+1)\,z_2^k + \sum_{i=1}^{k-1}(p_i - p_{i+1})\,z_2^{k-i} + p_k = 0$$

olur. Bununla beraber her $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ için $p_i \geq p_{i+1}$ olduğundan

$$(p+1)\,|z_2|^k \leq |z_2|^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1}(p_i - p_{i+1})\,|z_2|^{k-i} + p_k$$

eşitsizliğini yazarız. Buradan $g(|z_2|) \geq 0$ olarak bulunur. Bu durum (4.4) ile verilen eşitsizlikle çeliştiğinden böyle bir $z_2$ kökü yoktur.

**İddia 3:** $f(x)$'in $|z_3| = \alpha$ ve $|z_3| = 1$ çemberleri üzerindeki tek kökü $\alpha$ dır.

$z_3 \neq \alpha$ olmak üzere ya $|z_3| = \alpha$ ya da $|z_3| = 1$ ve $f(z_3) = 0$ olarak kabul edelim. Bu durumda

$$g(z_3) = z_3^{k+1} - (p_1+1)\,z_3^k + \sum_{i=1}^{k-1}(p_i - p_{i+1})\,z_3^{k-i} + p_k = 0$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$(p_1+1)\,|z_3|^k \leq |z_3|^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1}(p_i - p_{i+1})\,|z_3|^{k-i} + p_k$$

yazılır. $\alpha$ ve 1, $g(z)$'in kökleri olduğundan

$$\begin{aligned}&\left|z_3^{k+1} - (p_1+1)\,z_3^k + \sum_{i=1}^{k-1}(p_i - p_{i+1})\,z_3^{k-i} + p_k\right| \\ &= |z_3|^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1}(p_i - p_{i+1})\,|z_3|^{k-i} + p_k\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin elde edilebilmesi için gerek ve yeter şart her bir terimin orijin merkezli uzanan aynı ışının üzerinde olmasıdır (Bakınız [27]). Son terim $p_k > 0$ olduğundan, diğer $z_3^{k+1}$ ve her $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ için $(p_i - p_{i+1})\, z_3^{k-i}$ terimleri de pozitif reel sayılar olmaldırlar. $(p_i - p_{i+1}) \in \mathbb{R}^+$ olacağından, $1 \leq i \leq k-1$ için $z_3^{k+1}$ ve $z_3^{k-i}$ değerleride pozitif reel sayılar olacaktır. Bu durumda $z_3$'ünde bir pozitif reel sayı olduğu görülür. Bundan dolayı $z_3$ ya 1 ya da $\alpha$ olabilir. $f(1) \neq 0$ olduğundan $z_3 = 1$ durumu doğru olmayacaktır. Lemma (i)'den, $f(x)$'in tam olarak bir tane pozitif reel kökü olduğunu biliyoruz. Yani $z_3 = \alpha$ durumu zaten elimizde mevcut olan bir durumdur. Descartes İşaret Kuralı katlı kökleri ayrı ayrı saydığından dolayı, $\alpha$, $f(x)$'in tek katlı pozitif reel köküdür ve başka bir pozitif reel kökü yoktur. Bu üç iddiadan, Lemma (ii)'nin ispatı tamamlanır. □

**Lemma 4.1.2.** *$\alpha$, $f(x)$ polinomunun pozitif kökü ve $k \geq 2$ olsun. Her $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ için $p_i \geq p_{i+1}$ şartı altında (4.1) kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ dizisinin Binet formülü $c > 1$ olmak üzere*

$$u_n = a\alpha^n + O(c^{-n}), \qquad (n \to \infty)$$

*olarak yazılır.*

**İspat.** $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$ değerleri $f(x)$'in, $1 \leq i \leq t$ için $|\alpha_i| < 1$ şartını sağlayan farklı kökleri olsun ve $1 \leq j \leq t$ için $r_j$, $\alpha_j$'nın katlılığını göstersin. Açık bir şekilde $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = k - 1$ dır. Binet formülü bulma 3. adımından $u_n$ terimini

$$u_n = a\alpha^n + \sum_{i=1}^{t} P_i(n)\alpha_i^n$$

şeklinde yazarız. Burada $P_i(n)$, $\deg P_i = r_i - 1$ olacak şekilde $n$'nin bir polinomudur ve $a$ bir pozitif reel sayıdır. Her $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ için $|\alpha_i| < 1$ olduğundan, $n \to \infty$ iken toplam içerisindeki her bir terim ayrı ayrı 0'a yaklaşacaktır. Dolayısıyla $n > n_0$ doğal sayısı için

$$\sum_{i=1}^{t} P_i(n)\alpha_i^n \leq Kc^{-n}$$

şartını sağlayan $K$ ve $c > 1$ olacak şekildeki $K$ ve $c$ pozitif reel sabitlerini bulabiliriz. Büyük $O$ notasyonunun tanımından ispat tamamlanır. □

Örneğin, eğer $\{u_n\}$ dizisinin karakteristik polinomunun tüm kökleri birbirinden farklı ise $c^{-1} = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, ..., |\alpha_{k-1}|\}$ ve $K = k-1$ olarak seçilebilir.

Şimdi yukarıdaki lemmaların yardımıyla Teorem 4.1.1'in ispatını verebiliriz.

**Teorem 4.1.1'in İspatı.** $\epsilon \to 0$ iken geometrik seri açılımı ve asimptotik yaklaşım kurallarından

$$\frac{1}{1 \pm \epsilon} = 1 \mp \epsilon + O(\epsilon^2) = 1 + O(\epsilon)$$

eşitliğini elde ederiz. Lemma 4.1.2 den $\{u_n\}$ dizisinin $(tk+r)$ . teriminin çarpımsal tersini

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_{tk+r}} &= \frac{1}{a\alpha^{tk+r} + O(c^{-tk-r})} = \frac{1}{a\alpha^{tk+r}\left(1 + O((\alpha c)^{-tk})\right)} \\
&= \frac{1}{a\alpha^{tk+r}}\left(1 + O((\alpha c)^{-tk})\right) = \frac{1}{a\alpha^{tk+r}} + O\left(\left(\alpha^2 c\right)^{-tk}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{tk+r}} &= \frac{1}{a\alpha^r}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{tk}} + O\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\alpha^2 c\right)^{-tk}\right) \\
&= \frac{\alpha^t}{a\left(\alpha^t - 1\right)}\alpha^{-tn-r} + O\left(\left(\alpha^2 c\right)^{-tn}\right)
\end{aligned}$$

toplamını buluruz. Bu kısmi ters toplamın çarpımsal tersini alırsak

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{u_k}\right)^{-1} &= \frac{1}{\left(\frac{\alpha^t}{a\left(\alpha^t - 1\right)}\alpha^{-tn-r} + O\left((\alpha^2 c)^{-tn}\right)\right)} \\
&= \frac{\alpha^t - 1}{\alpha^t} a\alpha^{tn+r}\left(1 + O\left((\alpha c)^{-tn}\right)\right) \\
&= \frac{\alpha^t - 1}{\alpha^t} a\alpha^{tn+r} + O\left(c^{-tn}\right) \\
&= u_{tn+r} - u_{tn-t+r} + O\left(c^{-tn}\right)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla, $c > 1$ ve $t$ pozitif olduğundan sondaki hata payını $1/2$ den küçük yapacak bir $n_0$ doğal sayısı vardır. Sonuç olarak en yakın tamsayı normunu aldığımızda istenilen sonucu elde ederiz. $\square$

Bu sonucumuzu, 4. mertebeden bir indirgeme dizisi üzerinde örneklendirelim. $\{u_n\}$ dizisi, $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 1$ ve $u_3 = 2$ başlangıç koşulları ve $n \geq 4$ için

$$u_n = 4u_{n-1} + 3u_{n-2} + 3_{n-3} + u_{n-4}$$

indirgeme kuralı ile tanımlanan 4. mertebeden bir indirgeme dizisi olsun. $\{u_n\}$ dizisinin ilk bir kaç terimi aşağıda listelenmiştir.

$$1, 2, 11, 53, 252, 1202, \ldots.$$

Burada $t = 5$ ve $r = 3$ için Teorem 4.1.1'i $\{u_n\}$ dizisine uygularsak, belli bir $n_0$ doğal sayısı vardır öyle ki $n > n_0$ için

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{5k+3}} \right)^{-1} \right\| = u_{5n+3} - u_{5n-5+3}$$

eşitliği gerçeklenir. Bu $n_0$ doğal sayısı, $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarına, $t = 5$ ve $r = 3$ seçimine ve indirgeme kuralıdaki katsayılara bağlıdır.

**Sonuç 4.1.2.** *Her $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ için $p_i \geq p_{i+1}$ olmak üzere (4.1) kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ indirgeme dizisini göz önüne alalım. Bu durumda belli bir $n_1$ pozitif tamsayısı vardır öyle ki her $n > n_1$ için*

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_k} \right)^{-1} \right\| = u_n - u_{n-1}$$

*eşitliği sağlanır.*

**İspat.** Teorem 4.1.1 de $t = 1$ ve $r = 0$ olarak seçilirse istenilen toplam elde edilir. $\square$

Şimdi yüksek mertebeden indirgeme dizilerinin alterne kısmi ters toplamlarına dair elde ettiğimiz sonucu verelim.

**Teorem 4.1.2.** *Her $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ için $p_i \geq p_{i+1}$ olmak üzere (4.1) kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ indirgeme dizisini göz önüne alalım. Bu durumda $0 \leq r < t$*

*şartını sağlayan $t$ ve $r$ tamsayıları için belli bir $n_2$ pozitif tamsayısı vardır öyle ki her $n > n_2$ için*

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = (-1)^{tn+r} \left( u_{tn+r} + u_{tn-t+r} \right)$$

*eşitliği sağlanır.*

**İspat.** İspata toplanan terimi hesaplamak ile başlayalım

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^k}{u_{tk+r}} &= \frac{(-1)^k}{a\alpha^{tk+r} + O(c^{-tk-r})} = \frac{(-1)^k}{a\alpha^{tk+r}} \frac{1}{\left(1 + O\left((\alpha c)^{-tk}\right)\right)} \\ &= \frac{(-1)^k}{a\alpha^{tk+r}} \left(1 + O\left((\alpha c)^{-tk}\right)\right). \end{aligned}$$

Bu terimi $k = n$ den $k = \infty$ a toplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{tk+r}} &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a\alpha^{tk+r}} \left(1 + O\left((\alpha c)^{-tk}\right)\right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a\alpha^{tk+r}} + O\left( \sum_{k=n}^{\infty} \left(\alpha^2 c\right)^{-tk} \right) \\ &= \frac{\alpha^t}{a(-\alpha)^{tn+r} \left(\alpha^t + 1\right)} + O\left( \left(\alpha^2 c\right)^{-tn} \right) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Her iki tarafın çarpımsal tersini alırsak

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_k} \right)^{-1} &= \frac{1}{\left( \frac{\alpha^t}{a(-\alpha)^{tn+r} \left(\alpha^t + 1\right)} + O\left((\alpha^2 c)^{-tn}\right) \right)} \\ &= \frac{a\left(-\alpha\right)^{tn+r} \left(\alpha^t + 1\right)}{\alpha^t} \left(1 + O\left((\alpha c)^{-tn}\right)\right) \\ &= (-1)^{tn+r} \left( a\alpha^{tn+r} + a\alpha^{tn-t+r} \right) + O\left(c^{-tn}\right) \\ &= (-1)^{tn+r} \left( u_{tn+r} + u_{tn-t+r} \right) + O\left(c^{-tn}\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Öyleyse $c > 1$ ve $t$ pozitif olduğundan sondaki hata terimini $1/2$ den küçük yapacak bir $n_2$ pozitif tamsayısı vardır. Böylece en yakın tamsayı normu alınırsa ispat tamamlanır. $\square$

Benzer şekilde buradaki $n_2$ pozitif tamsayısı, $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarına, $t$ ve $r$ tamsayılarına ve her $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $p_i$ katsayılarına bağlı olarak belirlenir.

Alterne toplamlar için elde ettiğimiz bu sonucu örnek bir dizi üzerinde görelim. Başlangıç koşulları $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ ve $u_3 = u_4 = 1$ olan ve $n \geq 5$ için

$$u_n = 5u_{n-1} + 3u_{n-2} + 3u_{n-3} + 2u_{n-4} + 2u_{n-5}$$

rekürans kuralı ile tanımlanan 5. mertebeden lineer indirgeme dizisi $\{u_n\}$'i göz önüne alalım. $\{u_n\}$ dizinin ilk bir kaç terimi

$$1, 1, 8, 46, 259, 1461, \ldots.$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.2 de eğer $t = 3$ ve $r = 2$ olarak seçilirse

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{3k+2}} \right)^{-1} \right\| = (-1)^n \left( u_{3n+2} + u_{3n-1} \right), \quad n > n_0$$

toplamı elde edilir. Eğer $t = 5$ ve $r = 1$ olarak seçilirse

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{5k+1}} \right)^{-1} \right\| = (-1)^{n+1} \left( u_{5n+1} + u_{3n-4} \right), \quad n > n_1$$

toplamı bulunur. Eğer $t = 2$ ve $r = 0$ olarak seçilirse

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{2k}} \right)^{-1} \right\| = u_{2n} + u_{2n-2}, \quad n > n_2$$

eşitliği elde edilir. Buradaki $n_0, n_1$ ve $n_2$ pozitif tamsayıları, $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç değelerine, $t$ ve $r$ değerlerinin seçimlerine ve rekürans kuralındaki katsayılara bağlıdır.

**Sonuç 4.1.3.** *Her $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ için $p_i \geq p_{i+1}$ olmak üzere (4.1) kuralı ile tanımlanan $\{u_n\}$ indirgeme dizisini göz önüne alalım. Bu durumda belli bir $n_3$ pozitif tamsayısı vardır öyle ki her $n > n_3$ için*

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_k} \right)^{-1} \right\| = (-1)^n \left( u_n + u_{n-1} \right)$$

*eşitliği sağlanır.*

**İspat.** Teorem 4.2.1 de $t = 1$ ve $r = 0$ olarak seçilirse istenilen toplam ispatlanmış olur. $\square$

Şimdiye kadar her $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ için $p_i \geq p_{i+1}$ kısıtı altında $k$. mertebeden indirgeme dizileri için kısmi ters toplamları elde ettik. Bu sonuçlarımız $\{F_n\}$, $\{P_n\}$, $\{T_n\}$, $\{U_n(p, 1)\}$ ve yüksek mertebeden indirgeme dizileri için daha önceden elde edilen sonuçların daha genel durumlarını içermektedir.

Fakat $\{J_n\}$ dizisi için [15] nolu çalışmada verilmiş olan sonucu içermemektedir. Bu çalışmada, yazarların elde ettiği durumun bir genellemesi olarak aşağıdaki sonuçları elde ettik.

Başlangıç koşulları $h_0 = 0$ ve $h_1 = 1$ olan ve $p$ bir pozitif tamsayı olmak üzere $n \geq 2$ için

$$h_n = ph_{n-1} + (p+1)\, h_{n-2} \tag{4.5}$$

rekürans kuralı ile tanımlanan $\{h_n\}$ dizisini göz önüne alalım.

**Teorem 4.1.3.** *$0 \leq r < t$ şartını sağlayan $t$ ve $r$ tamsayıları için belli $n_4$ ve $n_5$ pozitif tamsayıları vardır öyle ki her $n > n_4$ için*

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{h_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = h_{tn+r} - h_{tn-t+r}$$

*ve her $n > n_5$ için*

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{h_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = (-1)^{tn+r} \left( h_{tn+r} + h_{tn-t+r} \right)$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**İspat.** İspata $\{h_n\}$ dizisinin Binet formülünü bularak başlayalım. $\{h_n\}$ indirgeme dizisinin karakteristik polinomu

$$x^2 - px - (p+1)$$

şeklindedir. Bu polinomun kökleri $(p+1)$ ve $-1$ dir. Başlangıç koşulları yardımıyla $\{h_n\}$ dizisinin Binet formülü

$$h_n = \frac{(p+1)^n - (-1)^n}{p+2}$$

olarak bulunur. Elde etmek istediğimiz kısmi ters toplamdaki toplanan terim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_{tk+r}} &= \frac{p+2}{(p+1)^{tk+r} - (-1)^{tk+r}} = \frac{p+2}{(p+1)^{tk+r}\left(1 - \left(\frac{-1}{p+1}\right)^{tk+r}\right)} \\
&= \frac{p+2}{(p+1)^{tk+r}}\left(1 + \left(\frac{-1}{p+1}\right)^{tk+r} + \left(\frac{-1}{p+1}\right)^{2(tk+r)} + \cdots\right) \\
&= \frac{p+2}{(p+1)^{tk+r}}\left(1 + O\left(\frac{1}{p+1}\right)^{tk}\right) \\
&= \frac{p+2}{(p+1)^{tk+r}} + O\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{2tk}\right)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{h_{tk+r}} &= \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+2}{(p+1)^{tk+r}} + O\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{2tk}\right)\right) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p+2}{(p+1)^{tk+r}} + O\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{2tn}\right) \\
&= \frac{(p+2)(p+1)^t}{(p+1)^{tn+r}\left((p+1)^t - 1\right)} + O\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{2tn}\right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Son olarak her iki tarafın çarpımsal tersini alırsak

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{h_{tk+r}}\right)^{-1} &= \frac{1}{\left(\frac{(p+2)(p+1)^t}{(p+1)^{tn+r}\left((p+1)^t - 1\right)} + O\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{2tn}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{(p+2)(p+1)^t}{(p+1)^{tn+r}\left((p+1)^t - 1\right)}\right)\left(1 + O\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{tn}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{p+2}\left((p+1)^{tn+r} - (p+1)^{tn-t+r}\right) \\
&\times \left(1 - \left(\frac{1}{p+1}\right)^{tn+r} + O\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{2tn}\right)\right) \\
&= \frac{(p+1)^{tn+r} - (p+1)^{tn-t+r}}{p+2} - \frac{\left(-1 + (-1)^t\right)}{p+2} \\
&+ O\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{tn}\right)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Aynı zamanda

$$h_{tn+r} - h_{tn-t+r} = \frac{(p+1)^{tn+r} - (p+1)^{tn-t+r} + (-1)^{tn+r}\left(-1+(-1)^t\right)}{p+2}$$

olduğunu biliyoruz. Burada $p \geq 1$ olduğundan dolayı her pozitif $n$ tamsayısı için $\dfrac{(-1)^{tn+r}\left(-1+(-1)^t\right)}{p+2}$ ifadesi birden küçük bir değerdir. O halde yukarıdaki toplamdaki son hata terimi için belli bir $n_4$ pozitif tamsayısı bulunabilir ki bu terim istenildiği kadar küçük bırakılabilir ve en yakın tamsayı normu alındığında

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{h_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = h_{tn+r} - h_{tn-t+r}$$

eşitliği ispatlanmış olur.

Alterne kısmi ters toplam için verilen eşitlik de benzer şekilde ispatlanabilir. □

**Not 4.1.1.** *Benzer sonuç Jakobsthal-Lucas dizisi $\{j_n\}$ için geçerli değildir. $\{j_n\}$ dizisinin Binet formülü*

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

*şeklindedir. Burada $(-1)^n$ değeri mutlak olarak 1 den küçük olmadığından aynı argümanlar burada çalışmayacaktır. Dolayısıyla bu sonuç keyfi başlangıç koşullarına sahip olan ve (4.5) kuralıyla tanımlanan diziye genellenemez. Fakat uygun başlangıç koşulları seçimine göre benzer sonuç farklı diziler için de elde edilebilir.*

Şimdiye kadar indirgeme bağıntısındaki katsayıların tümünün pozitif olduğu durumları inceledik. Bu çalışmamızda son olarak, daha önceki çalışmalarda göz önüne alınmayan rekürans kuralında negatif bir katsayı bulunan ikinci dereceden indirgeme dizileri için elde ettiğimiz sonuçları vereceğiz.

Hatırlatalım ki Horadam dizisi $\{W_n\}$, keyfi başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ için

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2} \tag{4.6}$$

indirgeme kuralı ile tanımlanır.

**Teorem 4.1.4.** *$p$ ve $q$, $p > q + 1$ şartını sağlayan pozitif tamsayılar olmak üzere $\{W_n\}$ indirgeme dizisini göz önüne alalım. Bu durumda $0 \leq r < t$ şartını sağlayan $t$ ve $r$ tamsayıları için belli $n_6$ ve $n_7$ pozitif tamsayıları vardır öyle ki her $n > n_6$ için*

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{W_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = W_{tn+r} - W_{tn-t+r}$$

*ve her $n > n_7$ için*

$$\left\| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{W_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = (-1)^{tn+r} \left( W_{tn+r} + W_{tn-t+r} \right)$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Lemma 4.1.3.** *$p$ ve $q$, $p > q + 1$ şartını sağlana pozitif tamsayılar olsun. Bu durumda (4.6) kuralı ile tanımlanan $\{W_n\}$ dizinin Binet formülü $c > 1$ ve $\alpha > 1$ olmak üzere*

$$u_n = a\alpha^n + O(c^{-n}) \qquad (n \to \infty),$$

*olarak yazılabilir.*

**İspat.** $\{W_n\}$ dizisinin karakteristik polinomu

$$f(x) = x^2 - px + q$$

şeklindedir ve açıkça $f(0) = q > 0$ dır. Ayrıca $p > q + 1$ olduğundan dolayı

$$f(1) = 1 - p + q < 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde ara değer teoremi gereğince $f(x)$'in köklerinden biri $(0, 1)$ aralığındadır. Bunun yanında

$$f(p) = p^2 - p^2 + q = q > 0$$

olacağından dolayı ara değer teoreminden $f(x)$ polinomunun diğer kökü $(1, p)$ aralığında olacaktır. $\alpha \in (1, p)$ ve $c^{-1} \in (0, 1)$ olacak şekildeki kökler olsunlar. O halde $\{W_n\}$ dizisinin Binet formülü

$$W_n = a\alpha^n + bc^{-n}$$

şeklindedir. $n \to \infty$ iken $c^{-n}$ değeri 0 a yaklaşacağından dolayı istenilen eşitlik ispatlanmış olur. □

**Teorem 4.1.4'ün İspatı.** Lemma 4.1.3 ten $\{W_n\}$ dizisinin $(tk+r)$. teriminin çarpımsal tersi

$$\frac{1}{W_{tk+r}} = \frac{1}{a\alpha^{tk+r} + O(c^{-tk-r})} = \frac{1}{a\alpha^{tk+r}\left(1 + O((\alpha c)^{-tk})\right)}$$
$$= \frac{1}{a\alpha^{tk+r}}\left(1 + O((\alpha c)^{-tk})\right) = \frac{1}{a\alpha^{tk+r}} + O\left(\left(\alpha^2 c\right)^{-tk}\right)$$

olarak yazılır. Dolayısıyla

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{W_{tk+r}} = \frac{1}{a\alpha^r}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{tk}} + O\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\alpha^2 c\right)^{-tk}\right)$$
$$= \frac{\alpha^t}{a\left(\alpha^t - 1\right)}\alpha^{-tn-r} + O\left(\left(\alpha^2 c\right)^{-tn}\right)$$

sonucuna ulaşırız. Her iki tarafın çarpımsal tersini alırsak

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{W_k}\right)^{-1} = \frac{\alpha^t - 1}{\alpha^t} a\alpha^{tn+r}\left(1 + O\left((\alpha c)^{-tn}\right)\right)$$
$$= \frac{\alpha^t - 1}{\alpha^t} a\alpha^{tn+r} + O\left(c^{-tn}\right)$$
$$= W_{tn+r} - W_{tn-t+r} + O\left(c^{-tn}\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla, $c > 1$ ve $t$ pozitif olduğundan, sondaki hata payını $1/2$ den küçük yapacak bir $n_6$ doğal sayısı vardır. Sonuç olarak en yakın tamsayı normunu aldığımızda istenilen sonucu elde ederiz.

Alterne kısmi ters toplam için verilen eşitlik de benzer şekilde ispatlanabilir. $\square$

# Kaynakça


[1] André-Jeannin, R. , Lambert series and the summation of reciprocals in certain Fibonacci-Lucas-type sequences, Fibonacci Quart. 28 (1990) 223-226.

[2] André-Jeannin, R. , A note on the irrationality of certain Lucas infinite series, Fibonacci Quart. 29 (1991) 132-136.

[3] André-Jeannin, Summation of reciprocals in certain second-order recurring sequences, Fibonacci Quart. 35.1 (1997) 68-74.

[4] Aslan, İ. , Descartes işaret kuralı, Matematik Dünyası, 3 (2001) 23-27.

[5] Backstrom, Robert P. , On reciprocal series related to Fibonacci numbers with subscripts in arithmetic progression, Fibonacci Quart. 19 (1981), 14-21.

[6] Bergum, G.E. and Hoggatt Jr., V.E. , Infinite Series with Fibonacci and Lucas Polynomials, Fibonacci Quart. 77 (1979) 147-151.

[7] Brousseau, B. A. , Summation of infinite Fibonacci series. Fibonacci Quart. 7 (1969), 143-168.

[8] Brousseau, B. A. , Fibonacci and Related Number Theoretic Tables, Santa Clara, Calif.: The Fibonacci Association (1972).

[9] Carlitz, L. , A note on Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quart. 2 (1964), 15-28.

[10] Carlitz, L. , Some Fibonacci and Lucas identities, The Fibonacci Quart. 8 (1970), 61-73.

[11] Good, I.J. , A reciprocal series of Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. 12 (1974) 346.

[12] Graham, R.L. , Knuth, D.E. and Patashnik, L. , Concrete Mathematics, Addison-Wesley, (1994).

[13] Hoggatt Jr., V.E. and Bicknell, M. , A reciprocal series of Fibonacci numbers with subscript $2^n k$, Fibonacci Quart. 14 (1976), 453-455.

[14] Hoggatt Jr., V.E. and Bicknell, M. , A Primer for the Fibonacci Numbers, Part XV: Variations on Summing a Series of Reciprocals of Fibonacci Numbers", Fibonacci Quart. 14.3 (1976) 272-276.

[15] Holliday, S. H. and Komatsu, T. , On the sum of reciprocal generalized Fibonacci numbers, Integers 11 (2011) No. 4, 441-455.

[16] Horadam, A. F. , Basic Properties of a Certain Generalised Sequence of Numbers, Fibonacci Quart. 3 (1965) 161-176.

[17] Horadam, A. F. , Special Properties of the Sequence $W_n(a, b; p, q)$, Fibonacci Quart. 5.5 (1967) 424-434.

[18] Horadam, A. , Elliptic functions and Lambert series in the summation of reciprocals in certain recurrence-generated sequences, Fibonacci Quart. 26 (1988), 98-114.

[19] Kılıç, E. and Irmak, N. , Reciprocal sums of l-th power of generalized binary sequences with indices, Ars Combin. 88 (2008) 407-413.

[20] Kiliç, E. and Arıkan, T. , More on the infinite sum of reciprocal usual Fibonacci, Pell and higher order recurrences, Appl. Math. Comput. 219 (2013) 7783-7788.

[21] Komatsu, T. and Laohakosol, V. , On the sum of reciprocals of numbers satisfying a recurrence relation of order s, J. Integer Seq. 13 (2010), no. 5, Article 10.5.8, 1-9.

[22] Komatsu, T. , On the sum of reciprocal Tribonacci numbers, Ars Combin. 98 (2011), 447-459.

[23] Komatsu, T. , On the nearest integer of the sum of reciprocal Fibonacci numbers, Aportaciones Matematicas Investigacion 20 (2011) 171-184.

[24] Koshy, T. , Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley and Sons, New York, (2001).

[25] Landau, E. , Sur la serie des inverses des nombres de Fibonacci, Bulletinde la Societe Mathematique de France Vol. 27 (1899), 298-300.

[26] Melham, R. S. and Shannon, A. G. , On reciprocal sums of Chebyshev related sequences, Fibonacci Quart. 33 (1995), 194-202.

[27] Mitrinović, D. S. , Analytic inequalities, Springer-Verlag, New York (1970).

[28] Ohtsuka, H. and Nakamura, S. , On the sum of reciprocal Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. 46/47 (2008/2009), 153-159.

[29] Popov, Blagoj S. , Summation of reciprocal series of numerical functions of second order, Fibonacci Quart. 24 (1986), 17-21.

[30] Rabinowitz, S. , Algorithmic Summation of Reciprocals of Products of Fibonacci Numbers, Fibonacci Quart. 37.2 (1999) 122-127.

[31] Rabinowitz, S. , Algorithmic Simplification of Reciprocal Sums, Applications of Fibonacci Numbers (1999) 277-292.

[32] Wenpeng, Z. and Tingting, W. , The infinite sum of reciprocal of the square of the Pell numbers, Journal of Weinan Teacher's University 26 (2011), 39-42.

[33] Wenpeng, Z. and Tingting, W. , The infinite sum of reciprocal Pell numbers, Appl. Math. Comput. 218.10 (2012) 6164-6167.

[34] Xi, G. , Summation of reciprocals related to l-th power of generalized Fibonacci sequences, Ars Combin. 83 (2007) 179-191.

[35] Vajda, S. , Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications, John Wiley and Sons, New York, (1989).

# ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

| | |
|---|---|
| Soyadı, Adı | : ARIKAN, Talha |
| Uyruğu | : T.C. |
| Doğum tarihi ve yeri | : 13.07.1987 Ankara |
| Medeni hali | : Evli |
| Telefon | : 0505 449 83 44 |
| e-mail | : tarikan@etu.edu.tr |

### Eğitim

| **Derece** | **Eğitim Birimi** | **Mezuniyet Tarihi** |
|---|---|---|
| Y. Lisans | TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi | 2013 |
| Lisans | TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi | 2011 |
| Lise | Ankara Anadolu Lisesi | 2005 |

### İş Deneyimi

| **Yıl** | **Yer** | **Görev** |
|---|---|---|
| 2011-2013 | TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi | Asistan |
| 2010 (3,5 ay) | Kredi Garanti Fonu | Stajyer |
| 2009 (3,5 ay) | TEPAV | Stajyer |
| 2008 (3,5 ay) | Asya KAtılım Bankası A.Ş. | Stajyer |

### Yabancı Dil

İngilizce (İyi)

Almanca (Orta)

**Yayınlar**

1. E. Kılıç and T. Arıkan, More on the infinite sum of reciprocal usual Fibonacci, Pell and higher order recurrences, Appl. Mat. Comput., 219 (14) 2013,7783-7788.
2. E. Kılıç and T. Arıkan, Triangular terms in Certain second order number sequences, "yayın için gönderildi. "

**Uluslar Arası Bildiriler**

1. Some further results on the sums of reciprocals of terms of a order-k recurring sequence", 15th International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, Eger, Macaristan, 2012 Haziran