TOPLAM SÜRECİNİN KOROVKİN TEORİSİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ

NİSA KÜÇÜK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2014

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

NİSA KÜÇÜK tarafından hazırlanan TOPLAM SÜRECİNİN KOROVKİN TEORİSİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Oktay DUMAN
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR

Üye : Prof. Dr. Oktay DUMAN

Üye : Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nisa KÜÇÜK

Üniversitesi : **TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü : **Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı : **Matematik**
Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Oktay DUMAN**
Tez Türü ve Tarihi : **Yüksek Lisans – Ağustos 2014**

Nisa KÜÇÜK

TOPLAM SÜRECİNİN KOROVKİN TEORİSİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ

ÖZET

Bu tezde, belirli bir sınıfa ait lineer operatörler yardımıyla toplanabilme metodu kullanılarak ağırlıklı uzaylar üzerinde tanımlı bir fonksiyona ve onun türevlerine yaklaşımlar elde edilmiştir. Bulduğumuz sonuçlar, aynı zamanda Efendiev [9] tarafından elde edilen yaklaşım teoremlerini de genelleştirmektedir. Kullanmış olduğumuz toplanabilme metodu, klasik yakınsaklığın yeterli olmadığı durumlarda da yaklaşım yapabilmemize imkan sağlamaktadır. Tezin son kısmında, bu durumu bir örnekle açıklayıp verilen bir pozitif lineer operatörler dizisinin fonksiyon ve türevlerine aritmetik ortalama yakınsadığı, ancak klasik anlamda yakınsamadığı grafikler üzerinde gösterilecektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, istatistiksel yakınsaklık, A-istatistiksel yakınsaklık, toplanabilme metodu gibi bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ağırlıklı uzaylar üzerinde fonksiyon ve türevlerine lineer operatörler dizisi yardımıyla yapılan A-istatistiksel yaklaşım teoremlerinden bahsedilmiştir. Orijinal sonuçlarımızın yer aldığı dördüncü bölümde toplanabilme metodu kullanılarak fonksiyon ve türevlerine ait ağırlıklı yaklaşım sonuçları elde edilmiştir. Son olarak beşinci bölümde elde ettiğimiz sonuçların bazı özel hallerine yer verilmiş ve özel bir lineer operatörler dizisi tanımlanarak onun yaklaşım özellikleri grafiksel gösterimlerle irdelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı Yaklaşım, Ağırlıklı Uzaylar, Toplam Süreci, Hemen Hemen Yakınsaklık, Aritmetik Ortalama Yakınsaklık.

University	:	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	:	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	:	**Mathematics**
Supervisor	:	**Prof. Oktay DUMAN**
Degree Awarded and Date	:	**M.Sc. – August 2014**

Nisa KÜÇÜK

EFFECTS OF SUMMABILITY PROCESS ON KOROVKIN THEORY

ABSTRACT

In this thesis, our aim is to get an approximation to derivatives of functions by class of linear operators on the weighted spaces in the sense of summability process. We also show that these results generalize approximation theorems introduced by Efendiev [9]. At the end of our study we give a sequence of positive linear operators which is arithmetic mean convergent but not ordinary convergent to functions and its derivatives by using graphical illustrations.

This thesis consists of five chapter. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter we give some basic theorems and definitions such as statistically convergence, A-statistically convergence and summability theory. In the third chapter we mention about A-statistical approximation to functions and its derivatives by linear operators on the weighted spaces. In chapter four where our original results are given, we get a weighted approximation to function and its derivatives by using summability method. Finally, in the last chapter we give some special cases of the results obtained in the previous section, and we display a specific sequence of linear operators and investigate their approximation properties via graphical illustrations.

Keywords: Weighted Approximation, Weighted Spaces, Summability Process, Almost Convergence, Arithmetic Mean Convergence.

TEŞEKKÜR

Bu tezin ortaya çıkmasında benden hiçbir desteğini esirgemeyen ve çalışmalarım boyunca her zaman yol gösterip yardımcı olan çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Oktay DUMAN'a göstermiş olduğu özveri ve fedakarlıklarından dolayı en içten saygı ve minnetlerimi sunar sonsuz teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım boyunca karşılaşmış olduğum her türlü zorlukta yardımcı olan ve desteklerini esirgemeyen TOBB ETÜ Matematik Bölümü asistan arkadaşlarıma ve yüksek lisans eğitimim boyunca engin tecrübelerinden faydalandığım TOBB ETÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerine sonsuz teşekkür ederim.

Hayatım boyunca yanımda olup her türlü fedakarlıkta bulunan ve beni bugünlere getiren başta annem ve babam olmak üzere bütün aileme ve destekleriyle her daim yanımda olan İsmail ASLAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans aşamasında vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmektedir.

Simgeler	**Açıklama**
$\lvert A \rvert$	A kümesinin eleman sayısı
$\delta\left(K\right)$	K kümesinin yoğunluğu
$\delta_A(K)$	K kümesinin $A-$yoğunluğu
$st-\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	(x_n) dizisinin istatistiksel limiti
$st_A-\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	(x_n) dizisinin $A-$istatistiksel limiti
$C[a,b]$	[a,b] kapalı aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^{(r)}[a,b]$	[a,b] kapalı aralığındaki r. mertebeden türevi var ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$\lVert g \rVert_\rho$	g fonksiyonunun $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ağırlık normu
$C^{(r)}(\mathbb{R})$	r. mertebeden türevleri var ve sürekli olan $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların uzayı
$C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$	$m_f>0$ olmak üzere $\left\lvert f^{(r)}(x)\right\rvert \leq m_f\rho(x)$ koşulunu sağlayan $C^{(r)}(\mathbb{R})$ uzayına ait fonksiyonların uzayı
$\tilde{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f^{(r)}(x)}{\rho(x)}=k_f$ koşulunu sağlayan $C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ uzayına ait fonksiyonların uzayı
$\hat{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f^{(r)}(x)}{\rho(x)}=0$ koşulunu sağlayan $\tilde{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ uzayına ait fonksiyonların uzayı
$B_\rho(\mathbb{R})$	$m_g>0$ olmak üzere $\lvert g(x)\rvert \leq m_g\rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

A-istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1981 yılında Freedman ve Sember [11] tarafından tanımlanmış ve birçok matematikçi tarafından farklı çalışmalarda kullanılmıştır. 1984 yılında Efendiev [9] ağırlıklı uzaylarda lineer operatörler sınıfı yardımıyla fonksiyon ve türevlerine yaklaşmıştır. Bu yaklaşım reel eksenin kompakt alt kümelerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlar uzayı üzerinde pozitif lineer operatörler kullanılarak yapılan klasik Korovkin teorisini geliştirmiştir. 2009 yılında Anastassiou ve Duman [3] Efendiev'in yapmış olduğu bu çalışmayı genişleterek klasik yakınsaklık için verilen durumu A-istatistiksel yakınsaklık için ispatlamıştır. Biz ise tezimizde Efendiev'in elde etmiş olduğu sonuçları, 1973 yılında Bell [7] tarafından verilen toplanabilme metodu yardımıyla inceleyeceğiz. Bu çalışmanın daha önceden klasik yakınsaklık ile elde edilen sonuçları içerdiği ancak A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak elde edilen sonuçlardan tamamen farklı olduğu görülecektir. Toplanabilme metodu, klasik yakınsaklık ile elde edemediğimiz yaklaşımları yapabilmemize yardımcı olmaktadır. Örneğin, verilen bir fonksiyon ve türevlerine aritmetik ortalama yakınsayan (Cesáro anlamında) fakat klasik anlamda yakınsamayan lineer operatörler inşa etmek mümkündür. Tezin son kısmında böyle bir örnek üzerinde durulacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde bilinen klasik yakınsaklık tanımdan daha genel olan bazı yakınsaklık tanımlarına yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi olmak üzere* $K \subseteq \mathbb{N}$ *verilsin ve* $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ *şeklinde bir küme tanımlansın. Ayrıca* K_n *kümesinin eleman sayısı da* $|K_n|$ *ile gösterilsin. Verilen bir* $K \subseteq \mathbb{N}$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}| \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |K_n|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine "K *kümesinin yoğunluğu" denir ve* $\delta(K)$ *ile gösterilir [20].*

Örnek 2.1.1. *Yukarıdaki tanıma göre*

- $\delta(\{2k-1 : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$*; yani tek sayılar kümesi* $\frac{1}{2}$ *yoğunlukludur. Benzer olarak çift sayılar kümesinin de* $\frac{1}{2}$ *yoğunluğa sahip olduğu görülür.*
- $\delta(\mathbb{N}) = 1$*; yani* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi* 1 *yoğunlukludur.*
- *Asal sayılar kümesi* 0 *yoğunluğa sahiptir.*
- *Doğal sayıların tüm sonlu elemanlı alt kümeleri* 0 *yoğunlukludur.*
- *Tam kareler, tam küpler, vb. kümeler* 0 *yoğunluğa sahiptir.*
- *Bir küme* 0 *yoğunluklu ise onun her alt kümesi de* 0 *yoğunlukludur.*

- *Bir küme 1 yoğunluklu ise onu kapsayan her küme de 1 yoğunlukludur.*

Tanım 2.1.2. *(x_k) reel yada kompleks terimli bir dizi olmak üzere, verilen her $\varepsilon > 0$ için*

$$\delta\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

sağlanıyorsa, bu (x_k) dizisi L sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve

$$st - \lim_{k\to\infty} x_k = L$$

şeklinde gösterilir [10].

Bir (x_k) dizisi L sayısına yakınsak ise herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz sayıda elemanı bulunurken komşuluğun dışında yalnız sonlu sayıda elemanı bulunmalıdır. Ancak istatistiksel yakınsak olan bir dizide komşuluğun dışında da indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak şartıyla sonsuz sayıda eleman bulunabilir. O halde tanımdan da anlaşılacağı üzere istatistiksel yakınsak olan bir dizi klasik anlamda yakınsak olmak zorunda değildir. Ancak bir dizi klasik anlamda yakınsıyorsa istatistiksel yakınsaktır. Aşağıda istatistiksel yakınsak olan bir dizinin klasik anlamda yakınsak olmadığı durumun bir örneği verilecektir.

Örnek 2.1.2.

$$x_k = \begin{cases} \frac{k}{k+1} & ;\ k = m^2 \\ 0 & ;\ k \neq m^2 \end{cases} ,\ m \in \mathbb{N}$$

dizisi yakınsak değildir; ancak 0 a istatistiksel yakınsaktır.

İstatistiksel yakınsak diziler için bir diğer önemli özellik ise aşağıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere yakınsak olan bir dizi sınırlı olmak zorundayken istatisiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir.

Örnek 2.1.3.

$$x_k = \begin{cases} e^k & ;\ k = m^2 \\ 0 & ;\ k \neq m^2 \end{cases} ,\ m \in \mathbb{N}$$

dizisi 0 a istatistiksel yakınsaktır; fakat yakınsak değildir, çünkü dizi üstten sınırsızdır.

2.2 A-İstatistiksel Yakınsaklık

A-istatistiksel yakınsaklık tanımı verilmeden önce ihtiyaç duyulan bazı tanımlara değinilecektir.

Tanım 2.2.1. *$k, n = 1, 2, 3, ...$ için $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ iken $\lim\limits_{n\to\infty} (Ax)_n = L$ sağlanıyorsa, A matrisine "regüler matris" denir; burada*

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

dizisine "A−dönüşüm dizisi" adı verilir [11].

Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması, Silverman-Toeplitz koşulları olarak bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilmektedir.

Teorem 2.2.1. *Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul*

1. $\sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,
2. $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $a_k := \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır [13, 18].

Buradan anlaşılacağı üzere $C_1 = (c_{nk}) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; 1 \leq k \leq n \\ 0 & ; d.d \end{cases}$, Cesàro matrisi

$$C_1 = (c_{nk}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

regüler matrise bir örnektir.

Tanım 2.2.2. *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\epsilon K} a_{nk}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin "A-yoğunluğu" denir ve $\delta_A(K)$ ile gösterilir [11].

A-yoğunluk tanımından faydalanarak A-istatistiksel yakınsaklık tanımı şu şekilde verilebilir.

Tanım 2.2.3. *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:|x_k - L| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

sağlanıyorsa, bu durumda (x_k) dizisi L sayısına "A-istatistiksel yakınsaktır" denir ve

$$st_A - \lim_{k\to\infty} x_k = L$$

ile gösterilir [11].

Kolaylıkla görebiliriz ki $A-$istatistiksel yakınsaklık tanımında A matrisi yerine C_1, Cesàro matrisi seçilirse $A-$istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir. Aynı şekilde $A = I$ birim matrisi alındığında $A-$istatistiksel yakınsaklık, alışılmış anlamdaki yakınsaklığa dönüşür. O halde $A-$istatistiksel yakınsaklık hem istatistiksel yakınsaklığın hem de klasik yakınsaklığın daha genel halidir.

2.3 $\mathcal{A}$-Toplanabilme Metodu

Bu bölümde son olarak, $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramından farklı bir metod olan ve Bell [7] tarafından 1973 yılında verilen $\mathcal{A}-$toplanabilme metodu ele alınacaktır. Daha sonra toplanabilme metodu, aritmetik ortalama yakınsaklık ve hemen hemen yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiler incelenecektir. Öncelikle bu tanımları hatırlatalım.

Tanım 2.3.1. *Verilen bir (x_n) dizisinin aritmetik ortalaması bir L sayısına yakınsıyorsa, yani,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = L$$

gerçekleniyor ise, (x_n) dizisi L sayısına "aritmetik ortalama yakınsaktır" (Cesáro yakınsaktır) denir [17].

Aritmetik ortalama yakınsak olan bir dizi klasik manada yakınsak olmak zorunda değildir. Ancak bir dizi klasik olarak yakınsıyor ise yine bu dizinin aritmetik ortalaması da aynı değere yakınsar. Aşağıdaki örnekte de görebileceğimiz gibi aritmetik ortalama yakınsaklık alışılmış yakınsaklıktan daha genel bir kavramdır.

Örnek 2.3.1. $u_k : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$

$$u_k(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & k \text{ tek}, \\ 1 - \sin x, & k \text{ çitf}, \end{cases} \tag{2.1}$$

fonksiyon dizisinin alt dizileri farklı iki fonskiyona yakınsadığı için (u_k) dizisi ıraksaktır. Fakat dizinin aritmetik ortalaması için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 \text{ (x e göre düzgün)}$$

limit koşulu gerçeklenir. Yani (u_k) dizisi 1 e aritmetik ortalama yakınsaktır.

Yukarıdaki örnekte incelemiş olduğumuz dizi ilerleyen bölümlerde tekrar ele alınacaktır.

Tanım 2.3.2. *$\forall \upsilon, n, k = 1, 2, 3, ...,$ için $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ reel veya kompleks terimli sonsuz matrisler dizisi olsun. $x := (x_k)$ bir dizi olmak üzere*

$$t_n^{\upsilon} := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} x_k$$

serisi $\forall \upsilon, n$ için yakınsaksa, buna x dizisinin "A-dönüşüm dizisi" denir. Eğer $n \to \infty$ için $\{t_n^{\upsilon}\}$ dizisi L sayısına (υ ye göre düzgün) yakınsıyorsa (x_k) dizisi L sayısına "$\mathcal{A}$-toplanabilirdir" denir ve

$$\mathcal{A}x \to L \text{ veya } lim_{\mathcal{A}}x{=}L$$

şekilinde gösterilir [7].

Aşağıda verilmiş olan yakınsaklık tanımı ise $\mathcal{A}-$toplanabilme metodunun özel bir halidir.

Tanım 2.3.3. *Verilen bir* (x_n) *dizisi için,* $t_n^{\upsilon} := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} x_k$ *şeklinde tanımlayalım. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} t_n^{\upsilon} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} x_k = L \quad (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olacak şekilde bir L *sayısı mevcut ise,* (x_n) *dizisi* L *sayısına "hemen hemen yakınsaktır" denir [17].*

Yukarıdaki tanımlardan yola çıkarak görebiliriz ki aritmetik ortalama yakınsaklık hemen hemen yakınsaklığın özel bir halidir. Aşağıdaki teorem ile hemen hemen yakınsak dizilere ait bir özellik şu şekilde verilebilir.

Teorem 2.3.1. (x_n) *dizisi hemen hemen yakınsak ise*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ *reel sayısı vardır, yani hemen hemen yakınsak diziler sınırlıdır [17].*

Ancak bu özellik, aşağıda verilmiş olan örnekten de anlaşılacağı gibi aritmetik ortalama yakınsak diziler için geçerli değildir.

Örnek 2.3.2.

$$x_n = \begin{cases} \sqrt[3]{n} & ; n = m^3 \\ 0 & ; n \neq m^3 \end{cases}$$

dizisi sınırlı olmadığı için hemen hemen yakınsak değildir; ancak şimdi göstereceğiz ki bu dizi aritmetik ortalama yakınsaktır.
$\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $m^3 \leq n < (m+1)^3$ *olacak şekilde bir* $m \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\frac{1+2+\cdots+m}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{1+2+\cdots+(m+1)}{n}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{m(m+1)}{2(m+1)^3} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{(m+1)(m+2)}{2m^3}$$

elde edilir. $n \to \infty$ *için limit alınırsa* $m \to \infty$ *olacağından yukarıdaki eşitsizlik*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

olmasını gerektirir. Yani (x_n) *dizisi* 0 *a aritmetik ortalama yakınsaktır.*

Yukarıdaki örnek açık olarak göstermektedir ki aritmetik ortalama yakınsak diziler sınırlı olmak zorunda değildir.

Tanım 2.3.4. $k, n, \upsilon = 1, 2, 3, ...$ *için* $A^{\upsilon} = (a^{\upsilon}_{nk})$ *matrisler dizisi verilsin. Verilen her* (x_n) *dizisi için* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ *iken*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a^{\upsilon}_{nk} x_k = L \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

sağlanıyorsa, A^{υ} *matrisler dizisine "regüler matrisler dizisi" denir* [7].

$\mathcal{A}$ matrisler dizisinin regülerliği, Silverman-Toeplitz koşullarına benzer bir karakterizasyon ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 2.3.2. $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\}$ *matrisler dizisinin regüler olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki üç koşul gerçeklenir:*

1. *Her* $k = 1, 2, ...,$ *için* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\upsilon}_{nk} = 0$ *(*υ *ye göre düzgün),*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a^{\upsilon}_{nk} = 1$ *(*υ *ye göre düzgün),*
3. $\forall n, \upsilon = 1, 2, ...,$ *için* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a^{\upsilon}_{nk}| < \infty$ *olsun ve* $n \geq N$ *ve* $\upsilon = 1, 2, ...,$ *için* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a^{\upsilon}_{nk}| < M$ *olacak şekilde* N *ve* M *tamsayıları vardır* [7].

Özetle, $\mathcal{A}-$toplanabilme metodunda

- $\forall \upsilon = 1, 2, ...$ için $\{A^{\upsilon}\} = I$ birim matrisi alınırsa, klasik manada yakınsaklığa dönüşür.

- $\forall \upsilon = 1,2,...$ için $\{A^{\upsilon}\} = \{C_1\}$ Cesàro matrisini seçersek, ortalama yakınsaklık elde edilir.

- $\mathcal{A} = \mathcal{F} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\} = \begin{cases} \frac{1}{n}; & \upsilon \leq k < n+\upsilon \\ 0; & d.d \end{cases}$

$$F^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \; F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

matrislerini alırsak, Lorentz [17] tarafından verilen hemen hemen yakınsaklık kavramına indirgenir. Sonuç olarak $\mathcal{A}-$toplanabilme metodu klasik yakınsaklık, ortalama yakınsaklık ve hemen hemen yakınsaklığa göre daha genel bir yakınsaklık kavramıdır. Yani klasik yakınsaklık durumunu kullanarak elde edemediğimiz bazı sonuçlara $\mathcal{A}-$toplanabilme metodu kullanarak ulaşmak mümkündür. Bu yüzdendir ki toplanabilme metodu, yaklaşımlar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Ancak dikkat etmemiz gereken nokta aşağıdaki örneklerde de inceleyeceğimiz gibi $\mathcal{A}-$yakınsaklık ve $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramları, birbirlerini içermeyen kavramlardır.

Örnek 2.3.3. $\{A^{\upsilon}\} = \{C_1\}$ *Cesàro matrisini alırsak*

$$(x_n) = ((-1)^n)$$

dizisinin 0 *a aritmetik ortalama yakınsak olup istatistiksel yakınsak olmadığını görebiliriz. Bu dizi aynı zamanda klasik manada da yakınsak değildir.*

Örnek 2.3.4. *Aynı şekilde yine* $\{A^{\upsilon}\} = \{C_1\}$ *Cesàro matrisini alırsak*

$$(x_n) = \begin{cases} n; & n = m^2 \\ 1; & n \neq m^2 \end{cases}, m \in \mathbb{N},$$

dizisinin 1 *e istatistiksel yakınsak olup aritmetik ortalama yakınsak olmadığını görebiliriz.*

3. LİNEER OPERATÖRLER YARDIMIYLA FONKSİYON VE TÜREVLERİNE İSTATİSTİKSEL AĞIRLIKLI YAKLAŞIM

3.1 Ağırlıklı Uzaylar Kavramı

Bu bölümde 1984 yılında Efendiev [9] tarafından verilmiş olan ağırlıklı uzaylar tanımları hatırlatılacak ve bu ağırlıklı uzaylar üzerinde $A-$istatistiksel yakınsaklık metodu kullanılarak yapılan bazı yaklaşım teoremlerinden bahsedilecektir. Öncelikle ihtiyaç duyulan bazı temel kavramlara yer verelim.

Tanım 3.1.1. *r negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere;*

- *$C^{(r)}(\mathbb{R})$, r. mertebeden türevleri var ve sürekli olan $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı tüm fonksiyonların uzayını gösterir.*
- *$M^{(r)}(\mathbb{R})$, her $x \in \mathbb{R}$ için $f^{(r)}(x) \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ koşulunu sağlayan lineer operatörlerin sınıfını gösterir.*

Burada kolaylıkla görebileceğimiz gibi eğer özel olarak $r = 0$ alınırsa, $M^{(0)}(\mathbb{R})$, tüm pozitif lineer operatörlerin sınıfına karşılık gelir.

Tanım 3.1.2. $\rho : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ *olmak üzere,* ρ *fonksiyonu,*
(a) $\rho(0) = 1$, (b) $(0, +\infty)$ *aralığında artan ve* $(-\infty, 0)$ *aralığında azalan*
(c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \rho(x) = +\infty$ *koşullarını sağlıyorsa, ona ağırlık fonksiyonu adı verilir. Bu durumda, aşağıdaki ağırlıklı uzayları göz önüne alacağız:*

- $C_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^{(r)}(\mathbb{R}) : \left| f^{(r)}(x) \right| \leq m_f \rho(x)\ ,\ m_f > 0,\ x \in \mathbb{R} \right\}$,
- $\tilde{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) : \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f^{(r)}(x)}{\rho(x)} = k_f \right\}$,
- $\hat{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \tilde{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) : \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f^{(r)}(x)}{\rho(x)} = 0 \right\}$,
- $B_\rho(\mathbb{R}) = \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ \ |g(x)| \leq m_g \rho(x),\ m_g > 0,\ x \in \mathbb{R} \}$.

Burada $B_\rho(\mathbb{R})$ *uzayı için ağırlıklı normu,*

$$\|g\|_\rho := \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{\rho(x)}\ ;\ g \in B_\rho(\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanır [9].

Yukarıdaki tanımlarda $r = 0$ olması durumunda $C_\rho^{(0)}(\mathbb{R})$, $\tilde{C}_\rho^{(0)}(\mathbb{R})$, $\hat{C}_\rho^{(0)}(\mathbb{R})$ uzayları $C_\rho(\mathbb{R})$, $\tilde{C}_\rho(\mathbb{R})$, $\hat{C}_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir.

3.2 İstatistiksel Yaklaşım Teoremleri

İlk olarak Tchebyshev sistemini hatırlatalım.

Tanım 3.2.1. $[a, b]$ *aralığı üzerinde tanımlı* $f_0, f_1, \cdots, f_n$ *sürekli fonksiyonları verilsin. Eğer*

$$P(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)$$

polinomu, $a_i \neq 0$ *için* $(0 \leq i \leq n)$ *en fazla* n *tane köke sahip ise* $\{f_0, f_1, \cdots, f_n\}$ *fonksiyonlar sistemine "n. dereceden Tchebyshev sistemi" veya kısaca "T-sistem" denir [16].*

Örnek 3.2.1. *Klasik Korovkin teorisinde kullanılan*

$$e_0 = 1, \quad e_1 = x, \quad e_2 = x^2$$

test fonksiyonları Tchebyshev sisteme bir örnektir. Benzer olarak, trigonometrik fonksiyonlar için bilinen 1, $cosx$, $sinx$ *fonksiyonları da bir* $T-$*sistem örneğidir.*

Teorem 3.2.1. $A = (a_{nk})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi ve* $L_k : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ *pozitif lineer operatörler olsun.* $\{f_0, f_1, f_2\}$, $[a,b]$ *aralığında tanımlı bir* T*-sistem olmak üzere eğer*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \|L_k(f_i) - f_i\|_{C[a,b]} = 0, \; i = 0, 1, 2,$$

sağlanıyorsa, $\forall f \in C[a,b]$ *için*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \|L_k(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

olur.

Şimdi yukarıda verilen bilgileri göz önüne alarak Anastassiou ve Duman [3] tarafından ağırlıklı uzaylar üzerinde $A-$istatistiksel yakınsaklık metodu kullanılarak ispatlanmış olan yaklaşım teoremleri ifade edilecektir.

Teorem 3.2.2. $A = (a_{nk})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun ve* $M^{(r)}(\mathbb{R})$ *sınıfına ait* $L_k : C_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ *lineer operatörleri verilsin. Eğer*

1. $\{f_0^{(r)}, f_1^{(r)}\}$ *ve* $\{f_0^{(r)}, f_1^{(r)}, f_2^{(r)}\}$ $\mathbb{R}$*'de tanımlı* T*-sistemler,*
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f_i^{(r)}(x)}{1 + \left|f_2^{(r)}(x)\right|} = 0, \; i = 0, 1,$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f_2^{(r)}(x)}{\rho(x)} = m_{f_2}^{(r)} \neq 0,$
4. $st_A - \lim\limits_{k\to\infty} \left\|L_k(f_i) - f_i^{(r)}\right\|_\rho = 0, \; i = 0, 1, 2,$

koşulları sağlanıyorsa,

$$\forall f \in \tilde{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) \text{ için } st_A - \lim_{k\to\infty} \left\|L_k(f) - f^{(r)}\right\|_\rho = 0$$

olur [3].

Yani $(L_k(f))$ operatörler dizisi f fonksiyonuna ve türevlerine ağırlıklı uzaylar üzerinde $A-$istatistiksel yakınsaktır. $r = 0$ durumunda fonksiyonun kendisine, $r > 0$ durumunda ise lineer operatörler dizisi yardımıyla fonksiyonun türevlerine $A-$istatistiksel yaklaşım elde edilir. Şimdi bu yaklaşımı $C_\rho^{(r)}$ uzayına taşıyan aşağıdaki teorem incelenecektir.

Teorem 3.2.3. *Yukarıdaki teoremde verilen* $(1), (2)$ *ve* (4) *koşulları sağlansın. Ayrıca* $\rho_1 : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty)$ *fonksiyonu* $(0, +\infty)$ *aralığında artan,* $(-\infty, 0)$ *aralığında azalan ve* $\rho_1(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \rho_1(x) = \infty$ *koşullarını sağlayan bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere, eğer*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\rho(x)}{\rho_1(x)} = 0$$

ve

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_2^{(r)}(x)}{\rho_1(x)} = m_{f_2}^{(r)} > 0$$

sağlanıyorsa, $\forall f \in C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ *için*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \left|\left|L_k(f) - f^{(r)}\right|\right|_{\rho_1} = 0$$

olur [3].

Yukarıda verilmiş olan Teorem 3.2.2 ve 3.2.3 de A matrisi yerine birim matris seçildiğinde Efendiev'in elde etmiş olduğu sonuçlara ulaşılır [9].

4. TOPLAM SÜRECİNİN KOROVKİN TEORİSİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ

4.1 Ağırlıklı Uzaylarda Foksiyonlara Toplanabilme Metoduyla Yaklaşım

Bu bölümde toplanabilme metodunu kullanarak, uygun bir ağırlıklı uzayda tanımlı lineer operatörler yardımıyla, bu uzaylardan birinden seçilen f fonksiyonuna ve türevlerine ait bir yaklaşım elde edilmeye çalışılacaktır. Öncelikle bu bölüm boyunca kullanacağımız bazı kavramları verelim.
$\mathcal{A} = (a_{nk}^{\upsilon})$ $(k, n, \upsilon \in \mathbb{N})$ negatif olmayan regüler toplanabilme metodu ve $\{L_k\}$ ağırlıklı uzaylarda tanımlı lineer operatör dizisi olsun. Uygun bir ağırlıklı uzaydan seçilen f fonksiyonu için,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f \right\|_{\rho} = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}),$$

sağlanıyorsa, $\{L_k\}$ dizisi f ye ağırlıklı norma göre *" (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilirdir"* denir.

Bilindiği üzere klasik Korovkin teoremindeki $e_i = x^i$ $(i = 0, 1, 2)$ test fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde $\{f_0, f_1, f_2\}$ T-sistemi ile değiştirilebilir [16]. Ayrıca, Swetits tarafından, $[a, b]$ aralığı üzerindeki klasik Korovkin teoremi, toplanabilme metodu yardımıyla geliştirilmiştir [23]. Swetits'in bu sonucunu takip ederek aşağıdaki teoreme ulaşmak zor değildir.

Teorem 4.1.1. *$\mathcal{A} = (a_{nk}^{\upsilon})$ $(n, k, \upsilon \in \mathbb{N})$ negatif olmayan regüler toplanabilme metodu ve $L_k : C[a, b] \to C[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. $\{f_0, f_1, f_2\}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde T-sistem olmak üzere, eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_i) - f_i \right\|_{C[a,b]} = 0, (i = 0, 1, 2,) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

sağlanıyorsa, $\forall f \in C[a, b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f \right\|_{C[a,b]} = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur. Yani $\{L_k(f)\}$ operatörler dizisi f ye (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilirdir.

Şimdi toplanabilme metodu kullanılarak, lineer operatörler sınıfı yardımıyla fonksiyon ve türevlerine ağırlıklı yaklaşım elde edeceğiz. Öncelikle $r = 0$ durumu incelenecektir.

Teorem 4.1.2. *$\mathcal{A} = (a_{nk}^{\upsilon})$ negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun ve $M(\mathbb{R})$ sınıfına ait $L_k : C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$, lineer operatörleri verilsin (bir başka ifadeyle, L_k'lar pozitif lineer operatörler olsun). Aşağıda verilen*

1. $\{f_0, f_1\}$ *ve* $\{f_0, f_1, f_2\}$ $\mathbb{R}$ *de tanımlı* $T-$*sistemler,*
2. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f_i(x)}{1 + |f_2(x)|} = 0,\ i = 0, 1,$
3. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f_2(x)}{\rho(x)} = m_{f_2} \neq 0,$
4. $\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_i) - f_i \right\|_{\rho} = 0, \ \ i = 0, 1, 2,$ *(υ ye göre düzgün)*

koşulları sağlanıyorsa, $\forall f \in \tilde{C}_\rho(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f \right\|_{\rho} = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur. Yani $\{L_k(f)\}$ dizisi f ye ağırlıklı norma göre $\mathcal{A}-$toplanabilirdir.

İspat. $f \in \tilde{C}_\rho(\mathbb{R})$ olmak üzere, Efendiev'in çalışmasındaki Teorem 1'den [9] (veya [3]'deki Teorem 2.2'ye bakınız) $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı

$$g(y) = m_{f_2} f(y) - k_f f_2(y)$$

şeklinde ve k_f, m_{f_2} katsayıları ağırlıklı uzaylardaki gibi olacak şekilde bir g fonksiyonu tanımlansın. $\tilde{C}_\rho(\mathbb{R})$ uzayının tanımından, $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ olmak üzere $\lim\limits_{y \to \pm\infty} \frac{f(y)}{\rho(y)} = k_f$ olur. Ayrıca hipotez (3) ü kullanarak

$$\lim_{y \to \pm\infty} \frac{g(y)}{\rho(y)} = \lim_{y \to \pm\infty} \left(m_{f_2} \frac{f(y)}{\rho(y)} - k_f \frac{f_2(y)}{\rho(y)} \right) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Buradan kolaylıkla $g \in \hat{C}_\rho(\mathbb{R})$ olduğu söyleyenebilir. Öncelikle

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(g) - g \right\|_\rho = 0$$

olduğunu ispatlamaya çalışalım. $\{f_0, f_1\}$ fonksiyonlar sistemi reel sayılar üzerinde tanımlı T-sistemdir; dolayısıyla [9]'daki Lemma 2'den görebiliriz ki, verilen bir $a \in \mathbb{R}$ için $f_i(a) \neq 0$, $i = 0, 1$ olmak üzere; $\phi_a(a) = 0$ ve $y < a$ için $\phi_a(y) > 0$ koşullarını sağlayan öyle bir ϕ_a fonksiyonu vardır ki, $|\gamma_0(a)| = \left| \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \right|$ ve $|\gamma_1(a)| = 1$ olduğunda bu fonksiyon,

$$\phi_a(y) = \gamma_0(a) f_0(y) + \ \gamma_1(a) f_1(y)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ϕ_a fonksiyonu

$$F(y) = \frac{f_1(a)}{f_0(a)} f_0(y) - f_1(y)$$

olmak üzere

$$\phi_a(y) = \begin{cases} F(y), \text{ if } F(y) > 0 \text{ for } y < a \\ -F(y), \text{ if } F(y) < 0 \text{ for } y < a \end{cases}$$

şeklinde de yazılabilir. $\{f_0, f_1\}$ bir T-sistem olduğuna göre $y = a$ fonksiyonumuzun tek kökü vardır. Ayrıca hipotez (2) ve (3) ten

$$\lim_{y \to \pm\infty} \frac{f_i(y)}{\rho(y)} = \lim_{y \to \pm\infty} \frac{f_i(y)}{1 + |f_2|} \left(\frac{1}{\rho(y)} + \frac{|f_2|}{\rho(y)} \right) = 0, \ i = 0, 1, \tag{4.1}$$

olduğu görülür. Sırasıyla $g \in \hat{C}_\rho(\mathbb{R})$, (4.1) ve hipotez (3) ten faydalanarak, $\epsilon > 0$ için öyle bir $u_0 > 0$ katsayısı bulabiliriz ki

$$|g(y)| < \epsilon \rho(y), \tag{4.2}$$

$$|f_i(y)| < \epsilon\rho(y), \ i = 0, 1, \tag{4.3}$$

$$\rho(y) < s_0 f_2(y) \ (s_0 > 0 \text{ sabiti için}) \tag{4.4}$$

koşulları $|y| > u_0$ için sağlanır. (4.2)-(4.4)'ü kullanarak, her $|y| > u_0$ için

$$|g(y)| < s_0 \epsilon f_2(y) \tag{4.5}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, $|y| \leq u_0$ için $a > u_0$ ve $f_i(y) \neq 0, \ i = 0, 1,$ olmak üzere

$$M := \sup_{|y| \leq u_0} |g(y)| \quad \text{ve} \quad m_a := \min_{|y| \leq u_0} \phi_a(y)$$

sabitlerini kullanarak

$$|g(y)| \leq \frac{M}{m_a} \phi_a(y) \tag{4.6}$$

bulunur. (4.5) ve (4.6) eşitsizliklerini birlikte kullanarak $\forall y \in \mathbb{R}$ için

$$|g(y)| \leq \frac{M}{m_a} \phi_a(y) + s_o \epsilon f_2(y) \tag{4.7}$$

eşitsizliği elde edilir. L_k operatörünün monotonluk ve lineerlik özelliğinden yararlanarak ve ayrıca (4.4) ve $|\gamma_1(a)| = 1$ bilgilerini göz önüne aldığımızda aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v L_k(g; x) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v L_k(|g(y)|; x) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v \left\{ \frac{M}{m_a} L_k(\phi_a(y); x) + \epsilon s_0 L_k(f_2(y); x) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v \ \left\{ \frac{M}{m_a} L_k((\gamma_0(a) f_0(y) + \ \gamma_1(a) f_1(y)); x) \right. \\
&+ \ \left. \epsilon s_0 L_k(f_2(y); x) \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(g;x)\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} \left\{ \frac{M}{m_a}\gamma_0(a) L_k(f_0(y);x) + \frac{M}{m_a}\gamma_1(a) L_k(f_1(y);x) \right. \\
&\left. + \, \epsilon s_0 L_k(f_2(y);x) \right\} \\
&= \frac{M}{m_a}\gamma_0(a) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_0(y);x) \ + \frac{M}{m_a}\gamma_1(a) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_1(y);x) \\
&+ \epsilon s_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_2(y);x) \\
&= \frac{M}{m_a}\gamma_0(a) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_0(y);x) \ + f_0(x) - f_0(x) \right\} \\
&+ \frac{M}{m_a}\gamma_1(a) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_1(y);x) + f_1(x) - f_1(x) \right\} \\
&+ \epsilon s_0 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_2(y);x) + f_2(x) - f_2(x) \right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(g;x)\right| &\leq \frac{M}{m_a} \left|\gamma_0(a)\right| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_0(y);x) \ - f_0(x) \right| \\
&+ \frac{M}{m_a} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_1(y);x) \ - f_1(x) \right| \\
&+ \epsilon s_0 \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_2(y);x) \ - f_2(x) \right| \\
&+ \frac{M}{m_a} \left|\gamma_0(a) f_0(x) + \ \gamma_1(a) f_1(x)\right| + \epsilon s_0 \left|f_2(x)\right|
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

Burada $|x| > u_0$ iken supremum alındığında,

$$\begin{aligned}
\sup_{|x|>u_0} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(g(y);x)\right|}{\rho(x)} \leq \frac{M}{m_a} & \left\{ |\gamma_0(a)| \sup_{|x|>u_0} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_0(y);x) - f_0(x)\right|}{\rho(x)} \right. \\
& \left. + \sup_{|x|>u_0} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_1(y);x) - f_1(x)\right|}{\rho(x)} \right\} \\
& + \epsilon s_0 \sup_{|x|>u_0} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_2(y);x) - f_2(x)\right|}{\rho(x)} \\
& + \frac{M}{m_a} \left\{ |\gamma_0(a)| \sup_{|x|>u_0} \frac{|f_0(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x|>u_0} \frac{|f_1(x)|}{\rho(x)} \right\} \\
& + \epsilon s_0 \sup_{|x|>u_0} \frac{|f_2(x)|}{\rho(x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) ve hipotez (3)'ü kullanarak, her $\epsilon > 0$ için

$$A(\epsilon) := \frac{M}{m_a} \left\{ |\gamma_0(a)| \sup_{|x|>u_0} \frac{|f_0(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x|>u_0} \frac{|f_1(x)|}{\rho(x)} \right\} + \epsilon s_0 \sup_{|x|>u_0} \frac{|f_2(x)|}{\rho(x)}$$

ve

$$B(\epsilon) := \max \left\{ \frac{M\,|\gamma_0(a)|}{m_a}, \frac{M}{m_a}, s_0 \epsilon \right\}$$

şeklinde tanımlanan $A(\epsilon)$ ve $B(\epsilon)$ değerlerinin sonlu olduğu görülür. Buradan

$$\sup_{|x|>u_0} \frac{|L_k(g(y);x)|}{\rho(x)} \leq A(\epsilon) + B(\epsilon) \sum_{i=0}^{2} \sup_{|x|>u_0} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_i(y);x) - f_i(x)\right|}{\rho(x)};$$

yani

$$\sup_{|x|>u_0} \frac{|L_k(g(y);x)|}{\rho(x)} \leq A(\epsilon) + B(\epsilon) \sum_{i=0}^{2} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f_i) - f_i \right\|_{\rho} \qquad (4.8)$$

eşitsizliği elde edilir.

Norm tanımından ve üçgen eşitsizliğinden

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(g)-g\right\|_{\rho} \leq \sup_{|x|\leq u_0} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(g(y);x)-g(x)\right|}{\rho(x)} + \sup_{|x|>u_0} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(g(y);x)\right|}{\rho(x)} + \sup_{|x|>u_0} \frac{|g(x)|}{\rho(x)}$$

bulunur. (4.2) ve (4.8)'i kullanarak ve $B_1 = \sup\limits_{x\in[-u_0,u_0]} \frac{1}{\rho(x)}$ olarak alındığında, her $\epsilon > 0$ ve $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(g)-g\right\|_{\rho} &\leq \epsilon + A(\epsilon) + B(\epsilon) \sum_{i=0}^{2} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_i)-f_i\right\|_{\rho} \\ &+ B_1 \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(g)-g\right\|_{C[-u_0,u_0]}\end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_i)-f_i\right|}{\rho(x)} &\geq \frac{1}{\rho(x)} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_i)-f_i\right| \\ &\geq \frac{1}{\rho(x)} \sup_{x\in[-u_0,u_0]} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_i)-f_i\right|\end{aligned}$$

eşitsizliğini kullanarak $n \to \infty$ için limit alırsak hipotez (4) ten

$$(i=0,1,2,)\ \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_i)-f_i\right\|_{C[-u_0,u_0]} = 0 \ \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.10}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\{f_0, f_1, f_2\}$ T-sistem olmasından dolayı Teorem 4.1.1 ve (4.10)'dan,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(g)-g\right\|_{C[-u_0,u_0]} = 0, \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}),$$

sonucuna ulaşılır. (4.9)'daki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alındığında $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(g)-g\right\|_{\rho} = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.11}$$

elde edilir.

İspatımızın son aşamasında daha önceden tanımlanmış olan $g(y)$ fonksiyonu kullanılarak

$$f(y) = \frac{1}{m_{f_2}} g(y) + \frac{k_f}{m_{f_2}} f_2(y)$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f \right\|_{\rho} &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \left(L_k \left(\tfrac{1}{m_{f_2}} g + \tfrac{k_f}{m_{f_2}} f_2 \right) - \left(\tfrac{1}{m_{f_2}} g + \tfrac{k_f}{m_{f_2}} f_2 \right) \right) \right\|_{\rho} \\ &\leq \tfrac{1}{m_{f_2}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(g) - g \right\|_{\rho} + \tfrac{k_f}{m_{f_2}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_2) - f_2 \right\|_{\rho} \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. Son olarak (4.12)'de $n \to \infty$ için limit aldığımızda (4.11) ve hipotez (4) ten

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f \right\|_{\rho} = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

bulunur, yani $\{L_k(f)\}$ operatörler dizisi f ye ağırlıklı norma göre (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilirdir ve $r = 0$ için ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.1.2'de dikkat edersek $m_{f_2} = 0$ alınırsa, $\tilde{C}_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayı yerine $\hat{C}_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayından seçilen fonksiyona bir yaklaşım elde edilir.

4.2 Ağırlıklı Uzaylarda Foksiyonların Türevlerine Toplanabilme Metoduyla Yaklaşım

Şimdi $r = 1, 2, ...,$ için $f \in C_{\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ fonksiyonunun türevlerine yaklaşmaya çalışacağız.

Teorem 4.2.1. *$\mathcal{A} = (a_{nk}^{\upsilon})$ negatif olmayan regüler toplanabilme metodu, $L_k : C_{\rho}^{(r)}(\mathbb{R}) \to B_{\rho}(\mathbb{R})$, $M^{(r)}(\mathbb{R})$ sınıfına ait lineer operatörler ve $f_0, f_1, f_2 \in C_{\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ olsun.*

1. *$\{f_0^{(r)}, f_1^{(r)}\}$ ve $\{f_0^{(r)}, f_1^{(r)}, f_2^{(r)}\}$ $\mathbb{R}$ de tanımlı $T-$sistemler,*

2. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f_i^{(r)}(x)}{1+\left|f_2^{(r)}(x)\right|} = 0,\ (i=0,1),$

3. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f_2^{(r)}(x)}{\rho(x)} = m_{f_2} \neq 0,$

4. $\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_{\rho} = 0\ (i=0,1,2)$ *(υ ye göre düzgün),*

koşulları sağlanıyorsa, $\forall f \in \tilde{C}_{\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ *için,*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f^{(r)} \right\|_{\rho} = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur. Yani $\{L_k(f)\}$ *operatörler dizisi* $f^{(r)}$ *ye (düzgün)* $\mathcal{A}-$*toplanabilirdir denir.*

İspat. [9]'daki Teorem 1'in ispatında olduğu gibi (veya [3]'e bakınız), D^{-r}, r. dereceden ters türev operatörü olmak üzere,

$$L_k^* := L_k \circ D^{-r}$$

şeklinde bir operatör tanımlayalım. L_k, $M^{(r)}(\mathbb{R})$ sınıfına ait olduğuna göre,

$$L_k^* : C_{\rho}(\mathbb{R}) \to B_{\rho}(\mathbb{R})$$

operatörleri, pozitif lineer operatörler sınıfına ait olur. Çünkü, $f \in C_{\rho}^{(r)}$ için

$$L_k^*(f^{(r)}) = L_k(D^{-r}(f^{(r)})$$

eşitliğine bakarsak,

$$f^{(r)} \geq 0 \text{ olduğunda } L_k(f) \geq 0, \text{ yani, } L_k^*(f^{(r)}) \geq 0$$

gerçeklenir. $\psi_i := f_i^{(r)}$ $(i=0,1,2)$ olarak tanımlamış olduğumuz fonksiyonu göz önüne alırsak, $\{L_k(f_i)\}$ operatörler dizisinin $f_i^{(r)}$ ye (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilir olmasından dolayı, $B_{\rho}(\mathbb{R})$ uzayındaki ağırlıklı norm üzerinde, $\{L_k^*(\psi_i)\}$ operatörler dizisinin de, ψ_i ye $\mathcal{A}$-toplanabilir olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda bir önceki teoremdeki tüm koşullar L_k^* operatörleri için gerçeklenmiş olur. O halde $\forall\psi \in \tilde{C}_\rho(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k^*(\psi) - \psi\right\|_\rho = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

yani $\forall f \in \tilde{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f^{(r)}\right\|_\rho = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir. Böylece $r > 0$ durumu için ispat tamamlanmış olur. □

Önceden de belirtmiş olduğumuz üzere A-istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{A}-$toplanabilme metodları birbirlerini içermeyen yakınsaklık metodlarıdır. Bu yüzden yukarıda elde etmiş olduğumuz sonuçlar [3]' teki sonuçlardan tamamen farklıdır. Fakat aşağıda inceleyeceğimiz sonuç yine de ilginç bir durum ortaya koymaktadır.

Sonuç 4.2.1. *$\upsilon = 1, 2, \cdots$, için $\mathcal{A} = (A^\upsilon) = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme metodu ve $L_k : C_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$ düzgün sınırlı operatörler dizisi olsun. $f_0^{(r)}, f_1^{(r)}, f_2^{(r)}$ Teorem 4.2.1'deki koşulları sağlasın. Eğer*

$$i = 0, 1, 2 \text{ için } st_A - \lim_k \left\|L_k(f_i) - f_i^{(r)}\right\|_\rho = 0 \tag{4.13}$$

sağlanıyorsa, $\forall f \in \tilde{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} L_k(f) - f^{(r)}\right\|_\rho = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur.

İspat. Eğer $i = 0, 1, 2$ için

$$K_i(\epsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : \left\|L_k(f_i) - f_i^{(r)}\right\|_\rho \geq \epsilon\right\}$$

şeklinde bir $K_i(\epsilon)$ kümesi tanımlanırsa, (4.13) koşulundan

$$\forall \epsilon > 0 \text{ için } \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K_i(\epsilon)} a_{nk} = 0$$

olduğu açıktır. $\{L_k\}$ operatörler dizisinin düzgün sınırlılığını kullanarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \left\| L_k(f_i - f_i^{(r)} \right\|_\rho \leq \sum_{k \in K_i(\epsilon)} a_{nk} \left\| L_k(f_i - f_i^{(r)} \right\|_\rho + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus K_i(\epsilon)} a_{nk} \left\| L_k(f_i - f_i^{(r)} \right\|_\rho$$
$$\leq (MD_i + E_i) \sum_{k \in K_i(\epsilon)} a_{nk} + \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $M := \|L_k\|_{C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})} = \sup \frac{\|L_k(f)\|_\rho}{\|f\|_\rho} = \sup\limits_{\|f\|_\rho = 1} \|L_k(f)\|_\rho$, $D_i := \|f_i\|_\rho$ ve $E_i := \left\| f_i^{(r)} \right\|_\rho$ $(i = 0, 1, 2)$ şeklinde tanımlıdır.

$\mathcal{A}$ matrisinin regüler olması özelliğini kullanarak

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \left\| L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_\rho = 0$$

bulunur. Ayrıca $C_i := \left\| f_i^{(r)} \right\|_\rho$ olmak üzere

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_\rho \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} L_k(f_i) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f_i^{(r)} \right\|_\rho + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f_i^{(r)} - f_i^{(r)} \right\|_\rho$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \left\| L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_\rho + C_i \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - 1 \right|$$

eşitsizliğinin her iki tarafında $n \to \infty$ için limit aldığımızda

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_\rho = 0, \ (i = 0, 1, 2)$$

sonucuna ulaşılır. Yani $\{L_k(f_i)\}$ dizisi $i = 0, 1, 2$ için f_i ye ağırlıklı norma göre (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilirdir. Böylece Teorem 4.2.1'den ispat tamamlanır. □

Teorem 4.2.1'de $\tilde{C}_\rho^{(r)}$ uzayından seçilen fonksiyon ve türevlerine ait bir yaklaşım elde etmiştik. $C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ uzayında bir yaklaşım elde edebilmek için yeni bir ağırlık fonksiyonu tanımlamamız gerekmektedir. Aşağıdaki teorem $C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde bir yaklaşım vermektedir.

Teorem 4.2.2. $\mathcal{A} = (a_{nk}^{\upsilon})$ $(k, n, \upsilon \in \mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme metodu ve* $L_k : C_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) \to B_{\rho_1}(\mathbb{R})$, $M^{(r)}(\mathbb{R})$ *sınıfına ait lineer operatörler* *dizisi olsun.* $f_0^{(r)}, f_1^{(r)}, f_2^{(r)}$, *Teorem 4.2.1'deki* $(1),(2),(4)$ *koşullarını sağlasın.* $\rho_1 : \mathbb{R} \to [1,\infty)$ *ağırlık fonksiyonu olmak üzere eğer*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\rho(x)}{\rho_1(x)} = 0 \tag{4.14}$$

ve

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_2^{(r)}}{\rho_1(x)} = m_{f_2}^{(r)} \neq 0, \tag{4.15}$$

koşulları gerçekleniyorsa, $\forall f \in C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f^{(r)} \right\|_{\rho_1} = 0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olur.

İspat. $f \in C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $\dfrac{\left|f^{(r)}(x)\right|}{\rho(x)} \leq m_f$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left|f^{(r)}(x)\right|}{\rho_1(x)} \leq \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left|f^{(r)}(x)\right|}{\rho(x)} \frac{\rho(x)}{\rho_1(x)}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla yukarıda verilen eşitsizliklerden

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left|f^{(r)}(x)\right|}{\rho_1(x)} \leq m_f \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\rho(x)}{\rho_1(x)}$$

olduğunu görürüz. (4.14) koşulunu kullanarak

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left|f^{(r)}(x)\right|}{\rho_1(x)} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Önceden verilmiş olan ağırlıklı uzay tanımları göz önünde bulundurulursa $f \in \hat{C}_{\rho_1}^{(r)}(\mathbb{R}) \subset \tilde{C}_{\rho_1}^{(r)}(\mathbb{R})$ olduğu görülür.

Ayrıca (4.14) ifadesini kullanarak Teorem 4.2.1'deki (4) koşulu ρ_1 ağırlıklı fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_{\rho_1} = 0 \ (i = 0,1,2) \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

sağlanmış olur. (4.15) hipotezi ile birlikte ρ_1 fonksiyonu için bütün koşullar gerçeklendiğine göre ispatımız Teorem 4.2.1'in doğrudan bir sonucudur. □

5. SONUÇLAR VE UYGULAMALAR

Bu bölümde öncelikle Bölüm 4 te elde edilmiş olan yaklaşım teoremlerinin bazı sonuçları verilecektir. Daha sonra ise yapmış olduğumuz çalışmalar örnek ve grafikler üzerinde incelenecektir.

5.1 Fonksiyon ve Türevlerine Ağırlıklı Yaklaşım Sonuçları

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2'de her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = (a_{nk}^{\upsilon}) = \{I\}$ birim matrisi olarak seçildiğinde, sırasıyla Efendiev tarafından ispatlanan iki sonuca ulaşılır.

Sonuç 5.1.1. *$L_k : C_{\rho}^{(r)}(\mathbb{R}) \to B_{\rho}(\mathbb{R})$, $M^{(r)}(\mathbb{R})$ sınıfına ait lineer operatörler ve $f_0, f_1, f_2 \in C_{\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ olsun. Teorem 4.2.1'deki $(1), (2)$ ve (3) koşullarının gerçeklendiğini kabul edelim. Eğer*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_{\rho} = 0 \ (i = 0, 1, 2)$$

oluyorsa, $\forall f \in \tilde{C}_{\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{k\to\infty} \left\| L_k(f) - f^{(r)} \right\| = 0$$

elde edilir [9].

Sonuç 5.1.2. *$L_k : C_{\rho}^{(r)}(\mathbb{R}) \to B_{\rho_1}(\mathbb{R})$, $M^{(r)}(\mathbb{R})$ sınıfına ait operatörler dizisi olsun. $f_0^{(r)}, f_1^{(r)}, f_1^{(r)}$ Teorem 4.2.1'de $(1), (2)$ koşullarıyla*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_{\rho} = 0 \ (i = 0, 1, 2)$$

koşulunu sağlasın. $\rho_1 : \mathbb{R} \to [1,\infty)$ *ağırlık fonksiyonu olmak üzere, eğer (4.14) ve (4.15) sağlanıyor ise* $\forall f \in C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ *için*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| L_k(f) - f^{(r)} \right\|_{\rho_1} = 0$$

olur [9].

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2'de $A = \mathcal{F} = (F^v)$ matrisi olarak seçildiğinde, sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.1.3. $L_k : C_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$, $M^{(r)}(\mathbb{R})$ *sınıfına ait lineer operatörler ve* $f_0, f_1, f_2 \in C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ *olsun. Teorem 4.2.1'deki* $(1),(2)$ *ve* (3) *koşullarının gerçeklendiğini kabul edelim. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=v}^{n+v-1} L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_\rho = 0 \ (i = 0,1,2)$$

oluyorsa, $\forall f \in \tilde{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=v}^{n+v-1} L_k(f) - f^{(r)} \right\|_\rho = 0$$

elde edilir; yani $\{L_k(f)\}$ dizisi $f^{(r)}$ ye ρ normuna göre hemen hemen yakınsaktır.

Sonuç 5.1.4. $L_k : C_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) \to B_{\rho_1}(\mathbb{R})$, $M^{(r)}(\mathbb{R})$ *sınıfına ait operatörler dizisi olsun.* $f_0^{(r)}, f_1^{(r)}, f_1^{(r)}$ *Teorem 4.2.1'de* $(1),(2)$ *koşullarıyla*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=v}^{n+v-1} L_k(f_i) - f_i^{(r)} \right\|_\rho = 0 \ (i = 0,1,2)$$

koşulunu sağlasın.

$\rho_1 : \mathbb{R} \to [1,\infty)$ *ağırlık fonksiyonu olmak üzere, eğer (4.14) ve (4.15) sağlanıyor ise, her* $f \in C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=v}^{n+v-1} L_k(f) - f^{(r)} \right\|_{\rho_1} = 0$$

olur.

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2'de her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = (A^{\upsilon}) = (C_1)$, Cesàro matrisi, olarak seçildiğinde sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.1.5. *$L_k : C_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$, $M^{(r)}(\mathbb{R})$ sınıfına ait lineer operatörler ve $f_0, f_1, f_2 \in C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ olsun. Teorem 4.2.1'deki $(1),(2)$ ve (3) koşullarının gerçeklendiğini kabul edelim. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f_i) - f_i^{(r)}\right\|_\rho = 0 \ (i = 0, 1, 2)$$

oluyorsa, $\forall f \in \tilde{C}_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f) - f^{(r)}\right\|_\rho = 0$$

elde edilir; yani $\{L_k(f)\}$ operatörler dizisinin aritmetik ortalaması ağırlıklı norma göre $f^{(r)}$ ye yakınsar.

Sonuç 5.1.6. *$L_k : C_\rho^{(r)}(\mathbb{R}) \to B_{\rho_1}(\mathbb{R})$, $M^{(r)}(\mathbb{R})$ sınıfına ait operatörler dizisi olsun. $f_0^{(r)}, f_1^{(r)}, f_1^{(r)}$ Teorem 4.2.1'de $(1),(2)$ koşullarıyla*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f_i) - f_i^{(r)}\right\|_\rho = 0 \ (i = 0, 1, 2)$$

koşulunu sağlasın.
$\rho_1 : \mathbb{R} \to [1,\infty)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere, eğer (4.14) ve (4.15) sağlanıyor ise her $f \in C_\rho^{(r)}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f) - f^{(r)}\right\|_{\rho_1} = 0$$

olur.

5.2 Uygulamalar

Aşağıdaki örnekten de görülebileceği gibi, fonksiyon ve türevlerine Cesàro anlamında (aritmetik ortalama) yakınsak olup klasik anlamda yakınsak olmayan lineer operatör dizisi inşa etmek mümkündür.

Öncelikle Örnek 2.3.1'de (2.1) eşitliği ile tanımlanan (u_k) fonksiyon dizisini göz önüne alalım. Ağırlık fonksiyonu $\rho(x) = 1 + x^2$, test fonksiyonları ise

$$f_i(x) = \frac{x^{i+1}\rho(x)}{(i+1)(1+x^2)} = \frac{x^{i+1}}{(i+1)} \quad (i = 0, 1, 2)$$

olarak seçilsin. Bu durumda $C_\rho[0, +\infty)$ uzayında tanımlı aşağıda verilen pozitif lineer operatörler

$$L_k(f; x) = u_k(x)e^{-kx} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{j}{k}\right) \frac{k^j}{j!} \left(jx^{j-1} - kx^j\right), \tag{5.1}$$

$r = 1$ durumu için, Teorem 4.2.1'deki tüm koşulları sağlar. Burada dikkat etmeliyiz ki daha önce elde ettiğimiz tüm sonuçlar, $\mathbb{R}$ yerine $[0, +\infty)$ üzerinde tanımlanan ağırlıklı uzaylarda da geçerlidir. S_k, Szász-Mirakjan operatorünün

$$S_k(f; x) = e^{-kx} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{j}{k}\right) \frac{k^j x^j}{j!}$$

şeklinde tanımlandığı bilinmektedir [24]. $S_k(f; x)$ operatörünün x e göre türevini ise $S'_k(f; x)$ olarak gösterilsin. Bu durumda $L_k(f; x)$ opeatörler dizisini her $k \in \mathbb{N}$ için

$$L_k(f; x) = u_k(x) S'_k(f; x) \tag{5.2}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $\mathcal{A} = \{C_1\} = \{(c_{nk})\}\ (k, n \in \mathbb{N})$, Cesàro matrisi alınırsa, (2.1)'den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = 1 \text{ (x'e göre düzgün)},\ x \in [0, b]\ (b > 0), \tag{5.3}$$

olur. Ayrıca her $f \in C_\rho^{(1)}[0, +\infty)$ için

$$\lim_{k\to\infty} S'_k(f; x) = f'(x) \text{ (x'e göre düzgün)},\ x \in [0, b] \tag{5.4}$$

olduğu bilinmektedir. (5.4) eşitliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |S'_k(f) - f'(x)| = 0 \text{ (x'e göre düzgün)} \tag{5.5}$$

bulunur. Diğer taraftan (5.2) yardımıyla

$$\begin{aligned} L_k(f;x) - f'(x) = {} & (u_k(x)-1)\left(S_k'(f;x) - f'(x)\right) + f'(x)\left((u_k(x)-1)\right) \\ & + S_k'(f;x) - f'(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f;x) - f'(x) = {} & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (u_k(x)-1)\left(S_k'(f;x) - f'(x)\right) \\ & + f'(x)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - 1\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(S_k'(f;x) - f'(x)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $|u_k(x)-1| \leq 1$ olmasından dolayı her $k \in \mathbb{N}$ ve $x \geq 0$ için,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f;x) - f'(x)\right| \leq \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} |S_k'(f;x) - f'(x)| + |f'(x)| \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - 1\right| \tag{5.6}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.6) eşitsizliğinde her iki taraftan $n \to \infty$ için limit alınırsa, (5.3) ve (5.5) uyarınca

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f;x) - f'(x)\right| = 0$$

elde edilir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f;x) = f'(x) \ (x \text{ e göre düzgün}) \ x \in [0,b] \ (b>0) \tag{5.7}$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$T_n(f;x) := \frac{L_1(f;x) + L_2(f;x) + ... + L_n(f;x)}{n} \tag{5.8}$$

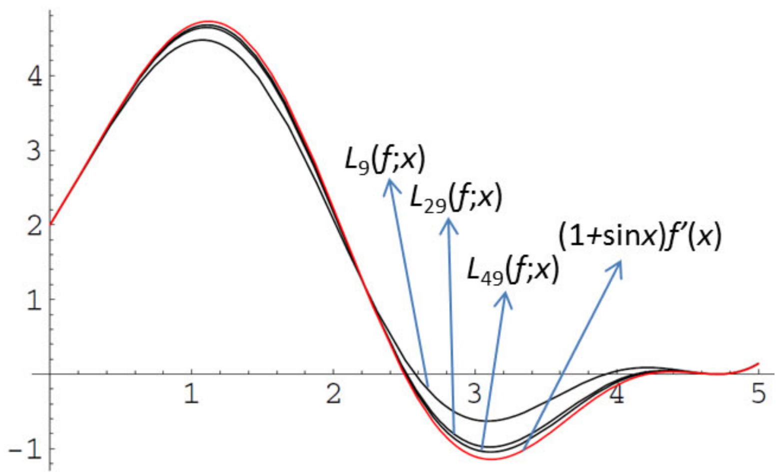
operatörü, $L_k(f;x)$ operatörünün aritmetik ortalamasıdır. Dolayısıyla $L_k(f;x)$ operatörleri ile (5.7)'de elde etmiş olduğumuz aritmetik ortalama yaklaşım, Teorem 4.2.1'i $[0,+\infty)$ aralığının kompakt alt aralıklarında doğrular.

Fakat (5.1)'de tanımlanan $L_k(f)$ operatörleriyle $f'(x)$ fonksiyonuna yaklaşım elde etmemiz mümkün değildir. Çünkü $(u_k(x))$ fonksiyonlar dizisi $[0,+\infty)\backslash\{k\pi : k = 0,1,...\}$ aralığında yakınsak değildir.

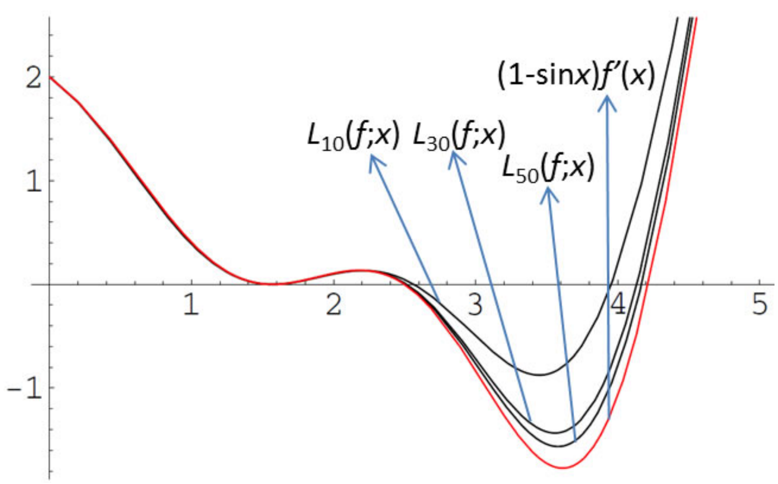
Bunun yanı sıra negatif olmayan regüler bir A matrisi için $(u_k(x))$ dizisi A-istatistiksel yakınsak da değildir. Dolayısıyla, $L_k(f)$ operatörleriyle $f(x)$

fonksiyonuna ve türevlerine istatistiksel olarak bir yaklaşım da elde etmek mümkün değildir.

$f(x) = 2x + \cos x + x\sin x$ fonksiyonunu ele alalım. $f'(x) = 2 + x\cos x$ olmak üzere Şekil 5.1'den görebiliriz ki $[0, 5]$ aralığında $L_{2k+1}(f; x)$ operatörler dizisi $(1 + \sin x)f'(x)$ fonksiyonuna yakınsar.



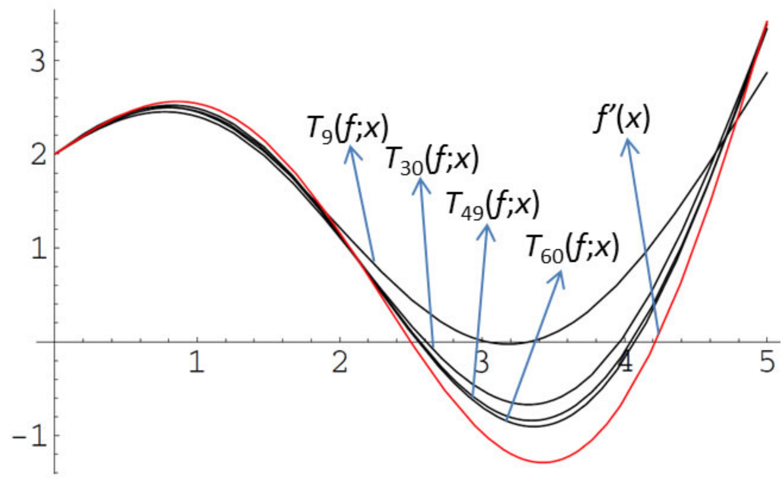
Şekil 5.1: $(L_{2k+1}(f; x))$ *operatör dizisi* $[0, 5]$ *aralığında yeterince büyük k değerleri için* $(1 + \sin(x))f'(x)$ *fonksiyonuna yaklaşmaktadır. Burada* $f(x) = 2x + \cos x + x\sin x$ *şeklinde tanımlıdır.*



Şekil 5.2: $(L_{2k}(f; x))$ *operatör dizisi* $[0, 5]$ *aralığında yeterince büyük k değerleri için* $(1 - \sin(x))f'(x)$ *fonksiyonuna yakınsamaktadır.*

Ancak Şekil 5.2'yi incelediğimizde $[0, 5]$ aralığında, $L_{2k}(f; x)$ operatörler dizisinin

$(1-\sin x)f'(x)$ e yaklaştığını görürüz. Yani $L_k(f)$ operatörler dizisi $f'(x)$ türevine $[0,5]$ aralığında yakınsayamaz.
Fakat Şekil 5.3 bize gösteriyor ki $[0,5]$ aralığında, $(L_k(f))$ operatörler dizisinin aritmetik ortalaması olan $(T_n(f))$ dizisi, $f'(x)$ fonksiyonuna yakınsamaktadır.



Şekil 5.3: *$L_k(f;x)$'nın aritmetik ortalaması olarak (5.8)'de tanımladığımız $(T_n(f;x))$ dizisi, yeterince büyük k değerleri için $[0,5]$ aralığında $f'(x)$ fonksiyonuna yaklaşmaktadır.*

Bu örnek bize klasik olarak yakınsamayan hatta aynı zamanda ististiksel yakınsak olmayan operatörler dizisinin $\mathcal{A}-$toplanabilme metoduyla fonksiyon ve türevlerine yakınsadığını göstermektedir. Böylece yaklaşımlar teorisinde $\mathcal{A}-$toplanabilme metodu kullanmanın ne denli önemli olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] Aguilera, F., Cárdenas-Morales, D., Garrancho, P., Optimal simultaneous approximation via A-summability, *Abstr. Appl. Anal. Art. ID* 824058, 5 pp, 2013.

[2] Altomare, F., Campiti, M., Korovkin-type Approximation Theory and Its Applications, *de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 17, Walter de Gruyter & Co., Berlin,* 1994.

[3] Anastassiou, G. A., Duman, O., Statistical weighted approximation to derivatives of functions by linear operators, *J. Comput. Anal. Appl.* 11 20–30, 2009.

[4] Anastassiou, G. A., Duman, O., Towards Intelligent Modeling: Statistical Approximation Theory, *Intelligent Systems Reference Library, vol. 14, Springer-Verlag, Berlin*, 2011.

[5] Atlihan, Ö. G., Orhan, C., Matrix summability and positive linear operators, Positivity 11 387–398, 2007.

[6] Atlihan, Ö. G., Orhan, C., Summation process of positive linear operators, *Comput. Math. Appl.* 56 1188–1195, 2008.

[7] Bell, H. T., Order summability and almost convergence, *Proc. Amer. Math. Soc.* 38 548–552, 1973.

[8] Duman, O., Orhan, C., An abstract version of the Korovkin approximation theorem, *Publ. Math. Debrecen* 69 33–46, 2006.

[9] Èfendiev, R. O., Conditions for convergence of linear operators to derivatives, *Akad. Nauk Azerbaĭdzhan, SSR Dokl.* 40 3–6, 1984.

[10] Fast, H., Sur la convergence statistique. *Colloq. Math*, 2; 241-244, 1951.

[11] Freedman, A. R., Sember, J. J., Densities and summability, *Pacific J. Math.* 95 293–305, 1981.

[12] Garrancho, P., D. Cárdenas-Morales and F. Aguilera, On asymptotic formulae via summability. *Math. Comput. Simulation* 81 2174–2180, 2011.

[13] Hardy, G.H., Divergent Series, *Oxford Univ. Press, London*, 1949.

[14] Jurkat, W. B., Peyerimhoff, A., Fourier effectiveness and order summability, *J. Approx. Theory* 4 231–244, 1971.

[15] Jurkat, W. B., Peyerimhoff, A., Inclusion theorems and order summability,*J. Approx. Theory* 4 245–262, 1971.

[16] Korovkin, P. P., Linear Operators and Approximation theory, *Hindustan Publishing Corp., Delhi,* 1960.

[17] Lorentz, G. G., A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Math.* 80 167–190, 1948.

[18] Maddox, I. J., Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press,* 1970.

[19] Mohapatra, R. N., Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators, *J. Approx. Theory* 20 239–250, 1977.

[20] Niven, I., Zuckerman, H.S., An Introduction to the Theory of Numbers. *John Wiley&Sons,*4^{th}*ed. New York,* 1980.

[21] Radu, C., A-summability and approximation of continuous periodic functions, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 52 155–161, 2007.

[22] Sakaoğlu, İ., Orhan, C., Cihan Strong summation process in Lp spaces. *Nonlinear Anal.* 86 89–94, 2013.

[23] Swetits, J. J., On summability and positive linear operators, *J. Approx. Theory* 25 186–188, 1979.

[24] Szász, O., Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval, *J. Research Nat. Bur. Standards* 45 239–245, 1950.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	KÜÇÜK, Nisa
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	14.08.1989 Eskişehir
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0546 584 19 89
e-mail	:	nkucuk@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Y. Lisans	TOBB ETÜ	2014
Lisans	İzmir Ekonomi Üniversitesi	2012

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012-2014	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Y. L. Öğrencisi

Yabancı Dil

İngilizce (İyi)

Yayınlar

- N. Küçük and O. Duman, "Summability methods in weighted approximation to derivatives of functions", (submitted for publication).

Uluslararası Konferans Bildirileri

- N. Küçük and O. Duman, "Summability methods in weighted approximation to derivatives of functions", *Mathematics Days in Sofia MDS 2014*, July 7-10, 2014, Sofia, Bulgaria.