TOPLAM SÜRECİNİN BASKAKOV TİPİNDEKİ KOROVKİN TEORİSİNE UYGULANMASI

İSMAİL ASLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2014

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

İSMAİL ASLAN tarafından hazırlanan TOPLAM SÜRECİNİN BASKAKOV TİPİNDEKİ KOROVKİN TEORİSİNE UYGULANMASI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Oktay DUMAN
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR

Üye : Prof. Dr. Oktay DUMAN

Üye : Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İsmail ASLAN

Üniversitesi	**:**	**TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Oktay DUMAN**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans – Ağustos 2014**

İsmail ASLAN

TOPLAM SÜRECİNİN BASKAKOV TİPİNDEKİ KOROVKİN TEORİSİNE UYGULANMASI

ÖZET

Bu tezde, Bell [7] tarafından ortaya konan toplanabilme metodunu kullanarak, sürekli fonksiyonlara ve türevlerine, pozitif lineer operatörler sınıfından daha geniş bir sınıf ile yaklaşılmaya çalışılacaktır. Sonuçlarımız sadece Baskakov'un düşüncelerini değil [5], aynı zamanda pozitif lineer operatörlere dayanan Korovkin teorisini de [17] geliştirecektir. Son olarak böyle bir çalışmaya neden ihtiyaç duyduğumuzu daha somut bir şekilde gösterebilmek için seçtiğimiz özel bir operatör dizisinin, sürekli bir fonksiyonun türevine toplanabilme metoduyla yaklaşabildiği, ancak klasik manada yakınsayamadığı, grafikleri çizilerek gösterilecektir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Yakınsaklık, $A-$İstatistiksel Yakınsaklık, Toplanabilme Metodu, Hemen Hemen Yakınsaklık, Aritmetik Ortalama Yakınsaklık, Pozitif Lineer Operatör.

University	:	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	:	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	:	**Mathematics**
Supervisor	:	**Prof. Dr. Oktay DUMAN**
Degree Awarded and Date	:	**M.Sc. – AUGUST 2014**

İsmail ASLAN

APPLICATION OF SUMMABILITY PROCESS ON BASKAKOV-TYPE KOROVKIN THEORY

ABSTRACT

In this thesis, using the summability process given by Bell [5] we study on the approximation to a function and its derivatives by means of a wider class of linear operators than a family of positive linear operators. Our results improve not only Baskakov's idea [5], but also the Korovkin theory [17] based on positive linear operators. Finally, in order to show why we need such a study, we display a specific sequence of approximating operator to derivative of a function by the summability method but not in the classical sense, by plotting their graphs.

Keywords: Statistical Convergence, $A-$Statistical Convergence, Summability Method, Almost Convergence, Arithmetic Mean Convergence, Positive Linear Operator.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca göstermiş olduğu ilgi ve katkılarıyla her anlamda bana yardımcı olan ve benden hiçbir desteğini esirgemeyen çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Oktay DUMAN'a vermiş olduğu emeklerden dolayı en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım boyunca her zaman yanımda olan ve karşılaştığım zorluklarda yardımlarını esirgemeyen TOBB ETÜ Matematik Bölümü asistan arkadaşlarıma ve tecrübeleriyle bana yol gösteren TOBB ETÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerine en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde büyük emek gösteren anne babama ve bütün aileme ve her daim yanımda olan Nisa KÜÇÜK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak yüksek lisans eğitimimdeki maddi desteğinden dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmektedir.

Simgeler	**Açıklama**
$C[a,b]$	[a,b] kapalı aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^k[a,b]$	[a,b] kapalı aralığındaki k ıncı mertebeden türevi var ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\|A\|$	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin yoğunluğu
$\delta_A(K)$	K kümesinin $A-$yoğunluğu
$st-\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	(x_n) dizisinin istatistiksel limiti
$st_A-\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	(x_n) dizisinin $A-$istatistiksel limiti
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} x_k$	(x_n) dizisinin $\mathcal{A}-$limiti
$st_A-\lim\limits_{k\to\infty}\sup x_k$	(x_k) dizisinin üst $A-$istatistiksel limiti
$st_A-\lim\limits_{k\to\infty}\inf x_k$	(x_k) dizisinin alt $A-$istatistiksel limiti

1. GİRİŞ

1960 yılında Korovkin [17], pozitif lineer operatörler dizisinin kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsamasını incelemiştir. Literatürde Korovkin teorisi olarak geçen bu teoriyi 1973 yılında Rus matematikçi Baskakov [5], pozitif lineer operatörler sınıfından daha geniş bir sınıf tanımlayarak, bu operatörler sınıfına ait lineer operatörler dizisinin fonksiyonlara ve türevlerine düzgün yakınsaklığını incelemiştir. Son yıllarda klasik manada yakınsaklığın eksiklerinin üstesinden gelebilmek için Korovkin teorisi üzerinde, hemen hemen yakınsaklık, aritmetik ortalama yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilme metodu gibi birçok yakınsaklık metodları kullanılmıştır [3, 4, 13, 21, 24]. 2008 yılında Anastassiou ve Duman [2], Baskakov'un sonuçlarını Freedman ve Sember [11] tarafından tanımlanan $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramı için incelemiştir. Fakat bizim çalışmamızda teori Bell tarafından verilen toplanabilme metodu [7] kavramı yardımıyla ele alınacaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklığa, $A-$istatistiksel yakınsaklığa ve toplanabilme metoduna ilişkin temel tanım ve teoremlerle birlikte, bu kavramların birbirleriyle olan ilişkilerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, lineer operatörler yardımıyla sürekli fonksiyonlara ve bu fonksiyonların türevlerine $A-$istatistiksel yaklaşımdan bahsedilmiştir. Orjinal sonuçlarımızın bulunduğu dördüncü bölümde, sürekli fonksiyonlara ve türevlerine, toplanabilme metodu ile yaklaşımlar elde edilmiştir. Son bölümde ise bu tezden elde edilen sonuçlara ve uygulamalarına değinilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ihtiyacımız olan bazı temel tanım ve teoremlerden bahsedilecektir. İlk olarak "*İstatistiksel yakınsaklık*" tanımı daha sonra ise bu yakınsaklığın daha genel hali olan "*$A-$İstatistiksel yakınsaklık*" tanımı verilecektir. Son olarak çalışmamızda esas aldığımız ve diğer yakınsaklık metodlarından farklı olan "*toplanabilme metodu*" kavramından bahsedilecektir.

2.1 İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere $K \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi verilsin ve ayrıca $\{k \leq n : k \in K\}$ kümesi K_n ile, K kümesinin eleman sayısı da $|K|$ ile gösterilsin.

Tanım 2.1.1. *Bir $K \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |K_n|$$

limiti mevcut ise bu limit değerine K kümesinin "yoğunluğu" denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir [22].

Örnek 2.1.1. *Yukarıdaki tanımdan hareketle*

- $\delta(\mathbb{N}) = 1,$
- $\delta(\{2k : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$

olduğu görülebilir. Yine sonlu elemanlı bir B kümesi için $\delta(B) = 0$ olacağı gibi sonsuz elemana sahip olan $\{m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ kümesi için de $\delta(\{m^2 : m \in \mathbb{N}\}) = 0$ olur. Ayrıca asal sayılar kümesinin de sıfır yoğunluklu olduğu bilinmektedir [22].

Yoğunluk tanımından yararlanarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 2.1.2. *Verilen kompleks ya da reel terimli bir (x_k) dizisi, her $\epsilon > 0$ için*

$$\delta(\{k : |x_k - L| \geq \epsilon\}) = 0$$

koşulunu sağlıyorsa, (x_k) dizisi L sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve

$$st - \lim_{k\to\infty} x_k = L$$

şeklinde gösterilir [10].

İstatistiksel yakınsaklık tanımından anlaşılacağı gibi, eğer bir (x_k) dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunabilirken bu komşuluğun dışında da, indis kümesi sıfır yoğunluklu olmak koşuluyla, dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunabilir.

Şunu da belirtelim ki bir (x_k) dizisi L sayısına yakınsak ise, bu durumda L nin her komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken, bu komşuluğun dışında diziye ait en fazla sonlu adette terim bulunabilir. Dolayısıyla bu sonlu adetteki terimlerin indislerinin oluşturacağı kümenin yoğunluğu sıfırdır, yani (x_k) dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olur. Aşağıdaki örnek ise tersinin her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 2.1.2. *x_n dizisinin genel terimi*

$$x_n = \begin{cases} 1 & ;\ n = m^2 \\ 0 & ;\ n \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $st - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olur. Ancak (x_n) dizisi yakınsak değildir.

Klasik anlamda yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki bir diğer önemli fark ise bilindiği üzere yakınsak olan her dizi aynı zamanda sınırlı olmasına rağmen istatistiksel yakınsak her dizi için bu durum geçerli değildir.

Örnek 2.1.3.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & ;\ k \text{ asal} \\ 0 & ;\ d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $st - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olur, fakat bu dizi sınırlı değildir.

2.2 $A-$İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda regüler matris, $A-$yoğunluk, ve $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramlarından söz edilecektir.

Tanım 2.2.1. *$A = (a_{nk})$ k, n =1,2,3,... sonsuz bir matris olmak üzere eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ iken, $\lim_{n\to\infty} (Ax)_n = L$ koşulu sağlanıyorsa, A matrisine "regüler matris" denir. Burada*

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için yakınsaksa, $(Ax)_n$ dizisine (x_k) dizisinin "$A-$dönüşüm dizisi" denir [7].

Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması, Silverman-Toeplitz koşulları olarak bilinen aşağıdaki üç koşulla karakterize edilmektedir.

Teorem 2.2.1. *Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart*

1. $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k := \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$,
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$,

koşullarının sağlanmasıdır [14, 20].

Örnek 2.2.1. *Yukarıdaki teoremden hareketle $C_1 = (c_{nk}) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; 1 \leq k \leq n \\ 0 & ; d.d \end{cases}$ Cesàro matrisi ve I birim matrisinin regüler oldukları kolayca görülebilir. Burada*

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

$A-$yoğunluk tanımı aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Tanım 2.2.2. *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\epsilon K} a_{nk}$$

limiti mevcutsa, bu limit değerine K kümesinin "A-yoğunluğu" denir ve $\delta_A(K)$ ile gösterilir [11].

$A-$yoğunluk tanımı verildiğine göre artık $A-$istatistiksel yakınsaklık tanımından bahsedilebilir.

Tanım 2.2.3. *A=(a_{nk}) negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için $K(\epsilon) := \{k : |x_k - L| \geq \epsilon\}$ olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\chi_{K(\epsilon)}(k) = 0$$

ise, ya da buna denk olarak, her $\epsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:|x_k - L|\geq\epsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa, bu durumda (x_k) dizisi L sayısına "A-istatistiksel yakınsaktır" denir ve

$$st_A - \lim_{k\to\infty} x_k = L$$

şeklinde gösterilir [11].

Burada A matrisi yerine özel olarak C_1 Cesàro matrisi alınırsa $A-$istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir. Bu da bize istatistiksel yakınsaklığın, $A-$istatistiksel yakınsaklığın bir özel hali olduğunu göstermektedir. Eğer A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa, $A-$istatistiksel yakınsaklık klasik manada yakınsaklığa indirgenir. Dolayısıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık için geçerli olan bütün durumlar istatistiksel yakınsaklık ve klasik anlamda yakınsaklık için de geçerlidir.

2.3 Toplanabilme Metodu

Bu kısımda aritmetik ortalama yakınsaklık (Cesàro mean convergence), hemen hemen yakınsaklık (almost convergence) ve toplanabilme metodundan bahsedilecektir. İlk olarak aritmetik ortalama yakınsaklık kavramı üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.3.1. *(x_n) reel terimli bir dizi olmak üzere $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ dizisi için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = L$$

olacak şekilde $L \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisi L sayısına "aritmetik ortalama yakınsaktır" (ya da Cesàro ortalama yakınsaktır) denir [18].

Aritmetik ortalama yakınsaklığın, klasik anlamdaki yakınsaklıktan daha genel bir yakınsaklık olduğu sıradaki teoremle söylenilebilir.

Teorem 2.3.1. *(x_n) reel bir dizi olmak üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ ise*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = L$$

olur; yani yakınsak her (x_n) dizisi aynı sayıya aritmetik ortalama yakınsaktır.

Ancak Teorem 2.3.1 in tersi her zaman doğru değildir. Bu da aritmetik ortalama yakınsaklığın, klasik manada yakınsaklığın aşikar olmayan bir genelleştirmesi olduğunu gösterir.

Örnek 2.3.1. *$(x_n) = ((-1)^n)$ dizisine bakacak olursak, dizinin alt dizileri farklı iki noktaya yakınsadığı için (x_n) dizisi ıraksaktır. Fakat dizinin aritmetik ortalaması*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} \frac{-1}{n} & ; \ n \text{ tek ise} \\ 0 & ; \ n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = 0$$

olur. Yani (x_n) dizisi 0 sayısına aritmetik ortalama yakınsaktır.

Hemen hemen yakınsaklığın tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 2.3.2. *(x_n) reel terimli bir dizi olmak üzere $c_n^{\upsilon} := \frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} x_k$ $(\upsilon, n \in \mathbb{N})$ şeklinde tanımlansın. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{\upsilon} = L \quad (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olacak şekilde $L \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisi L sayısına "hemen hemen yakınsaktır" denir [18].

Hemen hemen yakınsak dizilerin önemli bir özelliği aşağıdaki teoremle gösterilecektir.

Teorem 2.3.2. *(x_n) reel terimli bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi hemen hemen yakınsak ise*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı vardır; yani hemen hemen yakınsak diziler sınırlıdır [18].

Fakat bu teorem aritmetik ortalama yakınsaklık için geçerli değildir. Bu durum aşağıdaki örnek üzerinden açık bir şekilde gösterilebilir.

Örnek 2.3.2. *(x_n) dizisini*

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{n} & ; n = m^2 \\ 0 & ; d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için $m^2 \leq n < (m+1)^2$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$\frac{1+2+\cdots+m}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{1+2+\cdots+m+1}{n}$$

eşitliği kolaylıkla görülebilir. $1+2+\cdots+m = \dfrac{m(m+1)}{2}$ olduğu kullanılırsa

$$\frac{m(m+1)}{2n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{(m+1)(m+2)}{2n}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $m^2 \leq n < (m+1)^2$ olduğu kullanılarak

$$\frac{m(m+1)}{2(m+1)^2} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{(m+1)(m+2)}{2m^2}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2}$$

olduğu görülür. Yani (x_n) dizisi $\frac{1}{2}$ sayısına aritmetik ortalama yakınsaktır fakat sınırlı olmadığı için hemen hemen yakınsak değildir. Dolayısıyla aritmetik ortalama yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklığı gerektirmez.

Dikkat edilirse hemen hemen yakınsaklığın, aritmetik ortalama yakınsaklığı gerektirdiği görülebilir. Çünkü tanımında $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} 1/n\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} x_k$ limiti yakınsak olacağından $\upsilon = 1$ seçildiğinde $\lim_{n\to\infty} 1/n\sum_{k=1}^{n} x_k$ limiti de yakınsak olacaktır.

Toplanabilme metodunun tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 2.3.3. $\mathcal{A} = \{A^\upsilon\} = \{(a_{nk}^\upsilon)\}$ $(k, n, \upsilon \in \mathbb{N})$ *reel terimli matrislerin bir dizisi olsun. $x := (x_k)$ dizisi için*

$$t_n^\upsilon := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^\upsilon x_k$$

dizisi $n \to \infty$ iken bir L sayısına υ ye göre düzgün yakınsıyorsa x_k dizisi L sayısına "$\mathcal{A}$-toplanabilirdir" denir ve

$$\mathcal{A}x \to L \text{ veya } lim_{\mathcal{A}} x = L$$

şeklinde gösterilir [6]. Burada yukarıdaki serinin her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için yakınsak olduğu kabul edilmektedir. Bu nedenle $\mathcal{A}$ matrisler dizisine bundan sonra "toplanabilme metodu" adı verilecektir.

Bu tanımda $\forall \upsilon = 1, 2, ...$ için A^υ yerine I birim matrisi alındığında $\mathcal{A}$-toplanabilirliğin klasik manada yakınsaklığa dönüştüğü görülür. Benzer şekilde A^υ yerine C_1 Cesàro matrisini alındığında $\mathcal{A}-$toplanabilmenin; dizinin artimetik ortalama yakınsaklığına; F^υ matris ailesi alındığında hemen hemen yakınsaklığa dönüştüğü kolaylıkla görülebilir. Buradaki F^υ matris ailesi şu şekilde tanımlıdır:

$$F^\upsilon = (c_{nk}^\upsilon) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; \upsilon \le k \le n + \upsilon - 1 \\ 0 & ; d.d. \end{cases}$$

Sonuç olarak toplanabilme metodu için geçerli olan durumlar klasik yakınsaklık, ortalama yakınsaklık ve hemen hemen yakınsaklık için de geçerlidir. Dikkat edilirse toplanabilme metodunun Jurkat ve Peyerimhoff [15, 16] tarafından tanımlanan dereceli yakınsaklık (order summability) metodunu da içerdiği görülebilir. Şunu da belirtelim ki Swetits toplanabilme metodunu fonksiyonlara pozitif lineer operatörlerle yaklaşırken kullanmıştır [24]. Fakat tezimizde pozitif lineer operatörlerden daha geniş bir sınıf için yaklaşım teoremleri elde edilecektir.

$\mathcal{A}-$toplanabilirlik ve A-istatistiksel yakınsaklık kavramları birbirlerini gerektirmeyen kavramlardır. Bu durum aşağıda, örnekler üzerinden görülebilir. $\mathcal{A}-$toplanabilirliğin A-istatistiksel yakınsaklığı gerektirmediğini gösteren bir örnek aşağıdaki şekilde verilebilir.

Örnek 2.3.3. *$\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için A^{υ} matrisi $A^{\upsilon} = C_1$ Cesàro matrisi alınırsa $(x_n) = \left((-1)^n \dfrac{2n}{n+1}\right)$ dizisinin 0 a C_1-toplanabilir yani aritmetik ortalama yakınsak olduğu kolayca görülebilir. Fakat C_1-istatistiksel yakınsak değildir yani istatistiksel yakınsak değildir. Çünkü (x_n) dizisi n ler tek iken -2 ye çift iken 2 ye yakınsadığından dolayı -2 ve 2 noktalarının ϵ komşulukları dışındaki indis kümesinin yoğunluğu $\frac{1}{2}$ olup sıfırdan farklıdır.*

A-istatistiksel yakınsaklığın $\mathcal{A}-$toplanabilirliği gerektirmediği aşağıdaki örnek üzerinden görülebilir.

Örnek 2.3.4. *Yine bir önceki örnekte olduğu gibi $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için A^{υ} matrisi $A^{\upsilon} = C_1$ Cesàro matrisi alınsın. Bu durumda*

$$x_n = \begin{cases} n & ; n = m^2 \\ 0 & ; n \neq m^2 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}$$

dizisine bakılacak olunursa bu dizinin 0 a C_1-istatistiksel yakınsak (ya da istatistiksel yakınsak) olduğu kolayca görülebilir. Çünkü $\{n \in \mathbb{N} : n = m^2,\ m \in \mathbb{N}\}$ kümesi 0 yoğunluklu bir kümedir.
Ancak, $m^2 \leq n < (m+1)^2$ olduğundan $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ dizisi için

$$\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

eşitsizliği yazılabilir. $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ *sağlandığından*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{k=1}^{n} x_k = \infty$$

olur. $m \to \infty$ *iken* $n \to \infty$ *olacağından karşılaştırma testinden*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \infty$$

olur. Dolayısıyla x_k *dizisi aritmetik ortalama yakınsak değildir.*

Çalışmalarımızda $\mathcal{A}$ matrisler ailesi regüler olarak alınacağından ihtiyaç duyulan bir başka tanım da $\mathcal{A}$ matrisler dizisinin regülerliğidir.

Tanım 2.3.4. $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ $(k, n, \upsilon \in \mathbb{N})$ *toplanabilme metodu verilsin. Eğer* $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ *iken* (x_n) *dizisi* L *ye* $\mathcal{A}-$*toplanabiliyorsa;* $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\}$ *metoduna "regülerdir" denir* [7].

$\mathcal{A}$ metodunun regülerliğinin karakterizasyonu da aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.3. $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ *metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul*

1. $\forall k = 1, 2, ...,$*için* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}^{\upsilon} = 0$ *(*υ *ye göre düzgün);*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} = 1$ *(*υ *ye göre düzgün);*
3. $\forall n, \upsilon = 1, 2, ...,$*için* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{\upsilon}| < \infty$, *ve* $n \geq N$ *için ve* $\forall \upsilon = 1, 2, ...,$*için* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{\upsilon}| < M$, *olacak şekilde* N, M *pozitif tamsayıları vardır;*

koşullarının sağlanmasıdır [7].

Örnek 2.3.5. *Yukarıdaki teoremden hareketle* F^{υ} *matrisler dizisinin regüler olduğu kolayca görülmektedir.*

3. BASKAKOV TİPİNDE İSTATİSTİKSEL KOROVKİN TEORİSİ

Bu bölümde daha önce Anastassiou ve Duman [2] tarafından incelenen Korovkin tipi yaklaşımlarda Baskakov'un elde ettiği sonuçların [5] istatistiksel versiyonları hatırlatılacaktır. Bir başka deyişle sürekli fonksiyonlara ve çift ve tek mertebeli türevlerine lineer operatörler yardımıyla $A-$istatistiksel yaklaşım teoremleri gösterilecektir.

3.1 İstatistiksel Korovkin Teorisi

Bu kısımda $A-$istatistiksel yakınsaklık yardımıyla belli bir sınıfa ait lineer operatörlerin sürekli fonksiyonlara yaklaşımı incelenecektir.
Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle birkaç tanım verilmesi gerekmektedir.

Tanım 3.1.1. *f, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.$\mathcal{P} = \{P = \{x_0, x_1, ..., x_p\} |\ P,\ [a,b]$ aralığının bir parçalanması$\}$ iken*

$$V_b^a(f) := \sup_{P \epsilon \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

şeklinde tanımladığında

$$V_b^a(f) \leq M$$

olacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa, f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında "sınırlı salınımlıdır" denir. Eğer f türevlenebilirse $V_b^a(f) := \int_a^b |f'(x)|\, dx \leq M$ olacak *şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ sayısı olması yeterlidir.*

Çalışmalarımızda, aşağıdaki lineer operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenecektir:

$$L_k(f;x) := \int_a^b f(y)d\varphi_k(x,y),\ f \in C[a,b],\ x \in [a,b],\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Burada $\varphi_k(x,y)$ fonksiyonu her $k \in \mathbb{N}$ ve her sabit $x \in [a,b]$ için y ye göre $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlıdır. Ayrıca dikkat edilirse $\varphi_k(x,y)$, y ye göre azalmayan bir fonksiyon ise, L_k operatörünun de pozitif olduğu görülür. Çünkü L_k operatörü incelendiğinde, $f(y) \geq 0$ iken $\varphi_k(x,y)$ fonksiyonu azalmayan olduğundan $L_k(f;x) = \int_a^b f(y)d\varphi_k(x,y) \geq m\int_a^b d\varphi_k(x,y) \geq m(d\varphi_k(x,b) - d\varphi_k(x,a))$ eşitsizliği elde edilir. Burada $m := \inf\{f(y) : y \in [a,b]\}$ olarak tanımlıdır. f fonksiyonu pozitif olduğundan $m \geq 0$ olur. Ayrıca $\varphi_k(x,y)$ fonksiyonu y ye göre azalmayan olduğundan $d\varphi_k(x,b) - d\varphi_k(x,a) \geq 0$ olur. Dolayısıyla $L_k(f;x) \geq 0$ yani pozitif lineer operatördür.

Yaklaşımlar için Baskakov tarafından tanımlanan aşağıdaki operatör ailesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 3.1.2. *$\forall\ x \in [a,b]$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için;*

$$I^{(1)}_{2m,k}(y) := \int_a^y \int_a^{y_1} ... \int_a^{y_{2m-1}} d\varphi_k(x,y_{2m})...dy_2dy_1 \quad ;\ a \leq y \leq x,$$
$$I^{(2)}_{2m,k}(y) := \int_y^b \int_{y_1}^b ... \int_{y_{2m-1}}^b d\varphi_k(x,y_{2m})...dy_2dy_1 \quad ;\ x \leq y \leq b,$$

integrallerin işaretleri $\forall y \in [a,b]$ için aynı ve sabit ancak $k \in \mathbb{N}$ ye bağlı olarak değişebiliyorsa, bu şekilde (3.1) deki L_k operatörlerinin sınıfını E_{2m} $(m \geq 1)$ ile gösteririz [5].

Anastassiou ve Duman [2] tarafından ispatlanan iki yaklaşım teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.1. *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. Eğer (3.1) operatörü E_{2m}, $m \geq 1$ sınıfına aitse ve*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \|L_k(e_i) - e_i\| = 0,\ i = 0,1,...,2m; \quad e_i(x) = x^i, (i = 0,1,...,2m)$$

koşulunu sağlıyorsa, $\forall f \in C^{2m}[a,b]$ *için,*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \|L_k(f) - f\| = 0$$

olur [2].

Teorem 3.1.2. $A = (a_{nk})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi ve* (3.1) *operatörü* E_{2m}, $m \geq 1$ *sınıfına ait olsun. Eğer*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \|L_k(e_i) - e_i\| = 0, \ (i = 0, 1, ..., 2m)$$

koşulunu sağlıyorsa ve

$$\delta_A\left(\left\{k : \int_a^b |d\varphi_k(x,y)| \geq M\right\}\right) = 0$$

olacak şekilde $M > 0$ *sayısı varsa,* $\forall f \in C[a,b]$ *için*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \|L_k(f) - f\| = 0$$

elde edilir [2].

Yukarıdaki teoremlerde $A = C_1$ Cesàro matrisi alınırsa, teoremlerin istatistiksel yakınsaklık için de gerçeklendiği görülebilir. Hatta $A = I$ birim matrisi alındığında daha önce Baskakov'un elde etmiş olduğu klasik anlamda yakınsaklık için de sağlandığı sonucuna kolaylıkla ulaşılabilir.

3.2 Fonksiyonların Türevlerine İstatistiksel Yaklaşım

Bu bölümde Anastassiou ve Duman [2] tarafından verilen sürekli fonksiyonların tek ve çift mertebeli türevlerine $A-$istatistiksel yaklaşım teoremleri hatırlatılacaktır.

İlk olarak çift mertebeli türevlere yaklaşım teoremleri aşağıdaki şekilde verilecektir.

Teorem 3.2.1. *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. Eğer (3.1) operatörü E_{2m}, $m > 1$ sınıfına ait ise ve*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \left\| L_k(e_i) - e_i^{(2r)} \right\| = 0, \ (i = 0, 1, ..., 2m), \ r < m$$

koşulu sağlanıyorsa, $\forall f \in C^{2m}[a,b]$ için

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \left\| L_k(f) - f^{(2r)} \right\| = 0$$

olur [2].

Teorem 3.2.2. *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. Eğer (3.1) operatörü E_{2m}, $m > 1$ sınıfına ait ise ve*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \left\| L_k(e_i) - e_i^{(2r)} \right\| = 0, \ (i = 0, 1, ..., 2m)$$

olduğunda ve de

$$\delta_A \left(\left\{ k : \int_a^x \left| I_{2r,k}^{(1)}(y) \right| dy + \int_x^b \left| I_{2r,k}^{(2)}(y) \right| dy \geq M \right\} \right) = 0$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa, $\forall f \in C^{2r}[a,b]$ $(r < m)$ için

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \left\| L_k(f) - f^{(2r)} \right\| = 0$$

olur [2].

Tek mertebeli türevlere yaklaşabilmek için E_{2k+1} sınıfının tanımına ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 3.2.1. *Sabit her $x \in [a.b]$, ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için*

$$\begin{array}{l} I_{2m+1,k}^{(1)}(y) := \int\limits_a^y \int\limits_a^{y_1} ... \int\limits_a^{y_{2m}} d\varphi_k(x, y_{2m+1}) ... dy_2 dy_1 \quad ; \ a \leq y \leq x, \\ I_{2m+1,k}^{(1)}(y) := \int\limits_y^b \int\limits_{y_1}^b ... \int\limits_{y_{2m}}^b d\varphi_k(x, y_{2m+1}) ... dy_2 dy_1 \quad ; \ x \leq y \leq b, \end{array},$$

integrallerin işaretleri $\forall y \in [a,b]$ için sabit ve zıt ise, bu şekilde (3.1) deki L_k operatörlerinin sınıfını E_{2m+1} $(m \geq 1)$ ile gösteririz [5].

Teorem 3.2.3. *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. Eğer (3.1) operatörü E_{2m+1}, $m \geq 1$ sınıfına ait ise ve*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \left\| L_k(e_i) - e_i^{(2r+1)} \right\| = 0, \ (i = 0, 1, ..., 2m), \ r < m,$$

koşulu sağlanıyorsa $\forall f \in C^{2m+1}[a,b]$ için

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \left\| L_k(f) - f^{(2r+1)} \right\| = 0$$

olur [2].

Teorem 3.2.4. *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. Eğer (3.1) operatörü E_{2m+1}, $m \geq 1$ sınıfına ait ise ve*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \left\| L_k(e_i) - e_i^{(2r+1)} \right\| = 0, \ (i = 0, 1, ..., 2m), \ r < m,$$

olduğunda ve de

$$\delta_A \left(\left\{ k : \int_a^x \left| I_{2r+1,k}^{(1)}(y) \right| dy + \int_x^b \left| I_{2r+1,k}^{(2)}(y) \right| dy \geq M \right\} \right) = 0$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa, $\forall f \in C^{2r+1}[a,b]$ $(r < m)$ için

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \left\| L_k(f) - f^{2r+1} \right\| = 0$$

olur [2].

Benzer şeklide yukarıdaki teoremlerde $A = C_1$ Cesàro matrisi ve $A = I$ birim matrisi alındığında, teoremlerin istatistiksel yakınsaklık ve klasik manada yakınsaklık için de sağlandığı görülebilir.

4. TOPLAM SÜRECİNİN BASKAKOV TİPİNDEKİ KOROVKİN TEORİSİNE UYGULANMASI

4.1 Toplanabilme Metoduyla Fonksiyonlara Yaklaşım

Bu kısımda, sürekli fonksiyonlara (3.1) deki lineer operatörler yardımıyla, toplanabilme metodu kullanılarak yaklaşılacaktır. Teoremlere başlamadan önce verilen bir L_k operatör dizisinin $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilir olması

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(f)-f\right\|=0 \quad (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

şeklinde gösterileceğini belirtelim. Burada $\|f\|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$ normu göz önüne alınmaktadır. Yaklaşımlar için ihtiyaç duyulan operatör sınıfının tanımı aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Tanım 4.1.1. $\mathcal{A}=\{A^{\upsilon}\}=\{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ $(k,n,\upsilon\in\mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun. Sabit* $\forall x\in[a,b]$ *için;*

$$I_{2m,n,\upsilon}^{(1)}(y):=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_a^y\int_a^{y_1}\ldots\int_a^{y_{2m-1}}d\varphi_k(x,y_{2m})\ldots dy_2dy_1;\quad a\le y\le x,$$
$$I_{2m,n,\upsilon}^{(2)}(y):=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_y^b\int_{y_1}^{b}\ldots\int_{y_{2m-1}}^{b}d\varphi_k(x,y_{2m})\ldots dy_2dy_1;\quad x\le y\le b$$

integrallerinin işaretleri $\forall y\in[a,b]$ *için aynı ve sabit ancak* $n,\upsilon\in\mathbb{N}$ *ye bağlı olarak değişebiliyorsa, bu şekilde (3.1) deki* L_k *operatörlerinin sınıfını* $E_{2m}^{\mathcal{A}}$ $(m\ge1)$ *ile* *göstereceğiz. Dikkat edersek $E_{2m}^{\mathcal{A}}$ sınıfı sadece pozitif lineer operatörleri değil, aynı zamanda Baskakov tarafından verilen E_{2m} sınıfını da kapsamaktadır.*

Sürekli fonksiyonlara yaklaşılan ilk teorem aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Teorem 4.1.1. $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ $(k, n, \upsilon \in \mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun. Eğer* (3.1) *operatörleri* $E_{2m}^{\mathcal{A}}$ $(m \geq 1)$ *sınıfına aitse ve her* $i = 0, 1, 2, ..., 2m$ $(m > 0)$ *için*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k\left(e_i\right) - e_i \right\| = 0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

koşulu sağlanıyorsa, her $f \in C^{2m}[a, b]$ *için*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k\left(f\right) - f \right\| = 0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olur; yani $\{L_k(f)\}$ *operatör dizisi* $[a, b]$ *aralığında* f *ye (düzgün)* $\mathcal{A}-$*toplanabilirdir.*

İspat. Benzerlikten dolayı ispatın $m = 1$ için yapılması yeterlidir. $\psi\left(y\right) := y - x$ $(x \in [a, b])$ olarak tanımlansın. $\psi\left(y\right)$ nin tanımından ve lineerlikten

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(\psi^2; x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_2; x) - 2x \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_1; x) \\ &\quad + x^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_0; x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

eşitliği elde edilir. Burada $e_2(x) - 2xe_1(x) + x^2 e_0(x) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(\psi^2; x) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_2; x) - e_2 \right) - 2x \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_1; x) - e_1 \right) \\ &\quad + x^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_0; x) - e_0 \right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitliğine ulaşılır. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k\left(\psi^2\right) \right\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k\left(e_2\right) - e_2 \right\| + 2c \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k\left(e_1\right) - e_1 \right\| \\ &\quad + c^2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k\left(e_0\right) - e_0 \right\| \end{aligned} \tag{4.3}$$

olduğu kolayca görülebilir; burada $c \in \max\{|a|, |b|\}$ dir. Eşitsizliğin iki tarafında n üzerinden limit alınırsa, hipotezden

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k\left(\psi^2\right)\right\| = 0 \quad (v \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.4}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $\psi(y)$ nin tanımından ve lineerlikten

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(\psi;x) = \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(e_1;x) - x\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(e_0;x)$$

eşitliği elde edilir. Burada $e_1(x) - xe_0(x) = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(\psi;x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(e_1;x) - e_1\right) - x\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(e_0;x) - e_0\right)$$

bulunur. Yine üçgen eşitsizliğinden

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(\psi)\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(e_1) - e_1\right\| + c\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(e_0) - e_0\right\| \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) te n üzerinden limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(\psi)\right\| = 0 \quad (v \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.6}$$

olur. Diğer taraftan

$$L_k(\psi^2;x) = \int_a^b (y-x)^2 d\varphi_k(x,y)$$

integrali $[a,x]$ ve $[x,b]$ aralığında ikiye parçalandığında

$$L_k\left(\psi^2;x\right) = \int_a^x (y-x)^2 d\varphi_k(x,y) + \int_x^b (y-x)^2 d\varphi_k(x,y)$$

eşitliği elde edilir. Birinci integrale kismi integrasyon yapılırsa

$$\begin{pmatrix} u := (y-x)^2 & \Longrightarrow du = 2(y-x)dy \\ dv := d\varphi_k(x,y) & \Longrightarrow v = \int_a^y d\varphi_k(x,y_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int_a^x (y-x)^2 d\varphi_k(x,y) &= \left((y-x)^2\int_a^y d\varphi_k(x,y_1)\right)\Bigg|_a^x - 2\int_a^x\int_a^y d\varphi_k(x,y_1)(y-x)dy \\ &= -2\int_a^x\int_a^y d\varphi_k(x,y_1)(y-x)dy\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Tekrar kısmi integrasyon uygulanacak olursa

$$\begin{pmatrix} u_1 := (y-x) & \Longrightarrow du_1 = dy \\ dv_1 := \int\limits_a^y d\varphi_k(x,y_1)\,dy & \Longrightarrow v_1 = \int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_a^x (y-x)^2 d\varphi_k(x,y) &= -2\int\limits_a^x\int\limits_a^y d\varphi_k(x,y_1)(y-x)dy \\ &= -2\left((y-x)\int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1\Bigg|_a^x - \int\limits_a^x\int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1dy\right) \\ &= 2\int\limits_a^x\int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1dy\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde ikinci integrale de iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int\limits_x^b (y-x)^2 d\varphi_k(x,y) = 2\int\limits_x^b\int\limits_y^b\int\limits_{y_1}^b d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1dy$$

eşitliği kolayca görülür. Buradan da

$$L_k\left(\psi^2;x\right) = 2\left(\int\limits_a^x\int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1dy + \int\limits_x^b\int\limits_y^b\int\limits_{y_1}^b d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1dy\right) \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7) den

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v L_k(\psi^2)\right\| &= 2\sup_{x\in[a,b]}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v\int\limits_a^x\int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1dy\right. \\ &\qquad\left. + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v\int\limits_x^b\int\limits_y^b\int\limits_{y_1}^b d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1dy\right|\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. $\mathcal{A}$ nın regülerliğinden

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v L_k(\psi^2)\right\| &= 2\sup_{x\in[a,b]}\left|\int\limits_a^x\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v\int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1\right)dy\right. \\ &\qquad\left. + \int\limits_x^b\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{nk}^v\int\limits_y^b\int\limits_{y_1}^b d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1\right)dy\right|\end{aligned}$$

bulunur ve operatör $E_2^{\mathcal{A}}$ sınıfına ait olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v L_k(\psi^2)\right\| &= 2\sup_{x\in[a,b]}\left\{\int\limits_a^x\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v\int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1\right|dy\right. \\ &\qquad\left. + \int\limits_x^b\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^v\int\limits_y^b\int\limits_{y_1}^b d\varphi_k(x,y_2)\,dy_1\right|dy\right\}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (4.4) uyarınca

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left\{\int\limits_a^x\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}\int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1}d\varphi_k\left(x,y_2\right)dy_1\right|dy + \int\limits_x^b\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}\int\limits_y^b\int\limits_{y_1}^b d\varphi_k\left(x,y_2\right)dy_1\right|dy\right\}=0 \tag{4.8}$$

olur. Taylor formülünden

$$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\int\limits_x^y f''(t)(y-t)dt$$

eşitliğindeki $f(y)$ fonksiyonu, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(f;x)$ ifadesinde yerine koyulursa, operatörlerin lineerliğinden

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(f;x) &= f(x)\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(e_0;x)+f'(x)\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(\psi;x)\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}R_k(x)\end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur. Burada $R_k(x)$ kalan terimi

$$R_k(x):=\int\limits_a^b\int\limits_x^y f''(t)(y-t)dtd\varphi_k(x,y)$$

olarak verilmektedir. (4.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(f;x)-f(x) &= f(x)\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(e_0;x)-e_0\right)\\ &+f'(x)\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}L_k(\psi;x)+\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}R_k(x)\end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $R_k(x)$ integrali de yukarıdaki gibi benzer şekilde $[a,x]$ ve $[x,b]$ aralığında ikiye parçalanırsa,

$$\begin{aligned}R_k(x) &= \int\limits_a^b\int\limits_x^y f''(t)(y-t)dtd\varphi_k(x,y)\\ &= \int\limits_a^x\int\limits_x^y f''(t)(y-t)dtd\varphi_k(x,y)+\int\limits_x^b\int\limits_x^y f''(t)(y-t)dtd\varphi_k(x,y)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer yöntemle, birinci integrale kismi integrasyon uygulanırsa

$$\left(\begin{array}{ll} u_2:=\int\limits_x^y f''(t)(y-t)dt & \Longrightarrow du_2=\left(f'(y)-f'(x)\right)dy\\ dv_2:=d\varphi_k(x,y) & \Longrightarrow v_2=\int\limits_a^y d\varphi_k(x,y_1)\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}\int_a^x\int_x^y f''(t)(y-t)dtd\varphi_k(x,y) &= \int_x^y f''(t)(y-t)dt\int_a^y d\varphi_k(x,y_1)\Bigg|_a^x \\ &\quad-\int_a^x\int_a^y d\varphi_k(x,y_1)\left(f'(y)-f'(x)\right)dy \\ &= -\int_a^x\int_a^y d\varphi_k(x,y_1)\left(f'(y)-f'(x)\right)dy\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. İkinci kez kısmi integrasyon uygulandığında ise

$$\begin{pmatrix} u_3=f'(y)-f'(x) & \Longrightarrow du_3=f''(y)dy \\ dv_3=\int_a^y d\varphi_k(x,y_1)dy & \Longrightarrow v_3=\int_a^y\int_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)dy_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int_a^x\int_x^y f''(t)(y-t)dtd\varphi_k(x,y) &= -(f'(y)-f'(x))\int_a^y\int_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)dy_1\Bigg|_a^x \\ &\quad+\int_a^x\int_a^y\int_a^{y_1} f''(y)d\varphi_k(x,y_2)dy_1dy \\ &= \int_a^x\int_a^y\int_a^{y_1} f''(y)d\varphi_k(x,y_2)dy_1dy\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Aynı şekilde ikinci integrale de iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$R_k\left(x\right)=\int_a^x\int_a^y\int_a^{y_1} f''(y)d\varphi_k(x,y_2)dy_1dy+\int_x^b\int_y^b\int_{y_1}^b f''(y)d\varphi_k(x,y_2)dy_1dy \tag{4.11}$$

olduğu görülür. $\mathcal{A}$ nın regülerliğinden

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}R_k\right\| &= \sup_{x\in[a,b]}\Bigg|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}\int_a^x\int_a^y\int_a^{y_1} f''(y)d\varphi_k(x,y_2)dy_1dy \\ &\quad+\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}\int_x^b\int_x^b\int_y^b\int_{y_1}^b f''(y)d\varphi_k(x,y_2)dy_1dy\Bigg| \\ &= \sup_{x\in[a,b]}\Bigg|\int_a^x\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}\int_a^y\int_a^{y_1} f''(y)d\varphi_k(x,y_2)dy_1dy \\ &\quad+\int_x^b\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}\int_y^b\int_{y_1}^b f''(y)d\varphi_k(x,y_2)dy_1dy\Bigg|\end{aligned}$$

eşitliği ve operatörün $E_2^{\mathcal{A}}$ sınıfının elmanı olmasından da

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}R_k\right\| &= \sup_{x\in[a,b]}\Bigg\{\int_a^x|f''(y)|\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}\int_a^y\int_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2)dy_1\right|dy \\ &\quad+\int_x^b|f''(y)|\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{v}\int_y^b\int_{y_1}^b d\varphi_k(x,y_2)dy_1\right|dy\Bigg\}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} R_k\right\| \leq M_1 \sup_{x\in[a,b]} \left\{ \int_a^x \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} \int_a^y \int_a^{y_1} d\varphi_k(x,y_2) dy_1\right| dy + \int_x^b \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} \int_y^b \int_{y_1}^b d\varphi_k(x,y_2) dy_1\right| dy \right\}$$

bulunur; burada $M_1 = ||f''||$ dir. Son eşitsizlikte (4.8) limiti göz önüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} R_k\right\| = 0, \quad (v \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.12}$$

olduğu kolaylıkla görülür. (4.10) daki eşitlikten

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f) - f\right\| \leq M_2 \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(e_0) - e_0\right\| + M_3 \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(\psi)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} R_k\right\| \tag{4.13}$$

elde edilir; burada $M_2 = \|f\|$ ve $M_3 = \|f'\|$ şeklinde tanımlıdır. (4.13) teki eşitsizliğin iki tarafında n üzerinden limit alınırsa, hipotez, (4.6) ve (4.12) dikkate alındığında

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f) - f\right\| = 0 \quad (v \text{ ye göre düzgün})$$

sonucuna ulaşılır. Bu da bize $\{L_k(f)\}_{k\in\mathbb{N}}$ operatörler dizisinin $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna $\mathcal{A}-$toplanabilir olduğunu gösterir (ispatı herhangi bir pozitif tamsayısı için yaparken $L_k(\psi^{2m};x)$ operatörünü incelemek yeterlidir). □

Sürekli fonksiyonlara yaklaşırken elde edilen bir diğer teorem şu şekildedir.

Teorem 4.1.2. $\mathcal{A} = \{A^v\} = \{(a_{nk}^v)\}$ $(k,n,v \in \mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler matrisler dizisi ve* L_k *operatörleri* $E_{2m}^{\mathcal{A}}$ *sınıfına ait olsun. Eğer her* $i = 0,1,2,...,2m$ $(m>0)$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(e_i) - e_i\right\| = 0 \quad (v \text{ ye göre düzgün})$$

koşulu sağlanıyorsa ve her $x \in [a,b]$ *ve her* $k \in \mathbb{N}$ *için*

$$\int_a^b |d\varphi_k(x,y)| \leq M$$

olacak şekilde $M>0$ sayısı varsa, her $f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f\right\| = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur; yani $\{L_k(f)\}$ operatör dizisi $[a,b]$ aralığında f ye (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilirdir.

İspat. Biliyoruz ki $\{e_0, e_1, e_2, ...\}$ sistemi $C[a,b]$ uzayının temel sistemidir. Bu yüzden verilen bir $f \in C[a,b]$ için Weierstrasss teoreminden öyle bir $P(y) = a_0 e_0(y) + a_1 e_1(y) + \cdots + a_{2m} e_{2m}(y)$ polinomu bulunabilir ki her $\epsilon > 0$ için

$$\|f-P\| < \epsilon \tag{4.14}$$

olur. Hipotezden, her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f-P)\right\| \leq \|f-P\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_a^b |d\varphi_k(x,y)| \leq \epsilon M \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \tag{4.15}$$

eşitsizliğine kolaylıkla ulaşılabilir. Burada $\mathcal{A}$ nın regülerliğinden dolayı $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}$ serisi, her $\upsilon, n \in \mathbb{N}$ için sonludur. Diğer taraftan L_k nın lineerliğinden

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(P;x) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_0;x) + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_1;x) + \cdots + \\ + a_{2m} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_{2m};x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(P) - P\right\| = & \left\| a_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_0;x) - e_0\right)\right. \\ & + a_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_1;x) - e_1\right) \\ & \left. + \cdots + a_{2m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_{2m};x) - e_{2m}\right)\right\|\end{aligned}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(P) - P\right\| \leq & |a_0| \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_0;x) - e_0\right\| \\ & + |a_1| \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_1;x) - e_1\right\| \\ & + \cdots + |a_{2m}| \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_{2m};x) - e_{2m}\right\|\end{aligned}$$

olduğu görülür. Eğer $C := \max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_{2m}|\}$ olarak tanımlanırsa

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(P) - P \right\| \leq C \sum_{i=0}^{2m} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(e_i; x) - e_i \right\| \tag{4.16}$$

bulunur. Son olarak (4.14), (4.15) ve (4.16) dikkate alınırsa $\forall v, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f) - f \right\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(P) \right\| \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(P) - P \right\| + \|f - P\| \\ &\leq \epsilon \left(M \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} + 1 \right) + C \sum_{i=0}^{2m} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(e_i) - e_i \right\| \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu son eşitsizliğin her iki yanında $n \to \infty$ iken limit alınırsa, $\mathcal{A}$ nın regülerliğinden dolayı her $v \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f) - f \right\| = 0 \ (v \text{ ye göre düzgün})$$

olduğu görülür . Bu da bize $\{L_k(f)\}_{k\in\mathbb{N}}$ operatörler dizisinin f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde $\mathcal{A}-$toplanabilir olduğunu gösterir. □

Bu bolümdeki Teorem 4.1.1 ve 4.1.2 den elde edilen tüm sonuçlar daha sonra 5. Bölüm'de incelenecektir.

4.2 Toplanabilme Metoduyla Fonksiyonların Türevlerine Yaklaşım

Bu kısımda, fonksiyonların türevlerine toplanabilme metodu kullanılarak yaklaşılacaktır. Burada fonksiyonların türevleri tek ve çift mertebeli olarak ayrı ayrı incelenmek zorundadır. Çünkü tek mertebeli türevlere yaklaşabilmek için farklı bir sınıf tanımlanması gerekmektedir.
Sıradaki teoremde çift mertebeli türevlere yaklaşımlar incelenecektir.

Teorem 4.2.1. $\mathcal{A} = \{A^v\} = \{(a_{nk}^v)\}$ $(k, n, v \in \mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun. Eğer* L_k *operatörleri* $E_{2m}^{\mathcal{A}}$ $(m > 1)$ *sınıfına aitse* *ve her $i = 0, 1, ..., 2m$ $(r < m)$ için*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k\left(e_i\right)-e_i^{(2r)}\right\|=0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

koşulunu sağlıyorsa, her $f \in C^{2m}[a,b]$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k\left(f\right)-f^{(2r)}\right\|=0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olur; yani $\{L_k(f)\}$ operatör dizisi $[a,b]$ aralığında $f^{(2r)}$ ye (düzgün) $\mathcal{A}-$ toplanabilirdir.

İspat. Benzerlikten dolayı ispatın $r = 1$ için yapılması yeterlidir. (4.9) dan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(f;x) &= f(x)\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(e_0;x)+f'(x)\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(\psi;x)\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k^*(f'';x)\end{aligned}\tag{4.17}$$

eşitliği biliniyor. Burada L_k^* operatörü (4.11) den

$$L_k^*(f'';x) := R_k(x) = \int_a^b f''(y)d\varphi_{k,2}^*(x,y);$$

$$d\varphi_{k,2}^*(x,y) := \begin{cases}(\int_a^y\int_a^{y_1}d\varphi_k(x,y_2)dy_1)dy; & a \leq y \leq x,\\ (\int_y^b\int_{y_1}^b d\varphi_k(x,y_2)dy_1)dy; & x \leq y \leq b\end{cases}\tag{4.18}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda $L_k^*\ (f'')$ operatörünün $d\varphi_{k,2}^*(x,y)$ nin tanımından dolayı $E_{2m-2}^{\mathcal{A}}$ $(m > 1)$ sınıfına ait olduğu görülebilir. Ayrıca (4.17) de f fonksiyonu yerine $e_i(y)$ $(i = 0, 1, \cdots, 2m)$ test fonksiyonları yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k\left(e_i;x\right) &= f(x)\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(e_0;x)+f'(x)\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(\psi;x)\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k^*(e_i'';x)\end{aligned}\tag{4.19}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan $e_0''\ (x) = 0$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(e_0;x)-e_0''(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(e_0;x)\tag{4.20}$$

bulunur. Ayrıca ψ nin tanımı göz önüne alınırsa (4.20) den ve $e_1''(x) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(\psi;x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(e_1;x) - x\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(e_0;x) \\ &= (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(e_1;x) - e_1'') - x(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(e_0;x) - e_0'')\end{aligned} \tag{4.21}$$

eşitliği elde edilir. (4.19) daki eşitlikte (4.20) ve (4.21) göz önüne alınarak, n üzerinden limit alındığında

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k^*(e_i'';x) = e_i''(x) \ (v \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.22}$$

olur. Ya da bir başka deyişle $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k^*(e_i'') - e_i'' \right\| = 0$ (v ye göre düzgün) olur. $i \geq 2$ iken $e_i'' = i(i-1)e_{i-2}$ olduğundan lineerlikten

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k^*(i(i-1)e_{i-2}) - i(i-1)e_{i-2} \right\| = i(i-1) \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k^*(e_{i-2}) - e_{i-2} \right\|$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda her $i = 0, 1, \cdots, 2m-2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k^*(e_i) - e_i \right\| = 0 \tag{4.23}$$

sonucuna ulaşılır. $f'' \in C^{2m-2}[a,b]$ olduğundan Teorem 4.1.1 uyarınca

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k^*(f'') - f'' \right\| = 0 \tag{4.24}$$

olur. Son olarak (4.17) de üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f) - f'' \right\| &\leq M_1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(e_0) \right\| + M_2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(\psi) \right\| \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k^*(f'') - f'' \right\|\end{aligned} \tag{4.25}$$

olup (4.20), (4.21) ve (4.24) ten

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f) - f'' \right\| = 0 \ (v \text{ ye göre düzgün})$$

sonucuna ulaşılır; burada $M_1 = \|f\|$, $M_2 = \|f'\|$ şeklinde tanımlıdır. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Çift mertebeli türevlere yakınsamayla ilgili bir diğer teorem ise şu şekilde verilebilir.

Teorem 4.2.2. *$\mathcal{A}=\{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ $(k,n,\upsilon \in \mathbb{N})$ negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun. Eğer L_k operatörü $E_{2m}^{\mathcal{A}}$ $(m>1)$ sınıfına aitse ve her $i=0,1,...,2m$ $(r<m)$ için*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k\left(e_i\right)-e_i^{(2r)}\right\|=0 \text{ (}\upsilon\text{ ye göre düzgün)}$$

koşuluyla birlikte, her $x\in[a,b]$ ve her $k,r\in\mathbb{N}$ için

$$\int_a^b\left|d\varphi_{k,2r}^{*}(x,y)\right|\leq M$$

olacak şekile $M>0$ reel sayısı varsa, her $f\in C^{2r}[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k\left(f\right)-f^{(2r)}\right\|=0 \text{ (}\upsilon\text{ ye göre düzgün)}$$

olur; yani $\{L_k(f)\}$ operatör dizisi $[a,b]$ aralığında $f^{(2r)}$ ye (düzgün) $\mathcal{A}-$ toplanabilirdir. Buradaki $d\varphi_{k,2r}^{*}(x,y)$

$$d\varphi_{k,2r}^{*}(x,y):=\begin{cases}\left(\int_a^y\int_a^{y_1}\cdots\int_a^{y_{2r-1}}d\varphi_k(x,y_{2r})...dy_2dy_1\right)dy; & \text{eğer } a\leq y\leq x,\\ \left(\int_y^b\int_{y_1}^b\cdots\int_{y_{2r-1}}^b d\varphi_k(x,y_{2r})...dy_2dy_1\right)dy; & \text{eğer } x\leq y\leq b,\end{cases}$$

şeklinde verilmektedir.

İspat. Benzerlikten dolayı ispatın $r=1$ için yapılması yeterlidir. (4.25) ten her $\upsilon\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(f)-f''\right\| &\leq M_1\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(e_0)\right\|+M_2\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(\psi)\right\|\\ &+\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k^{*}(f'')-f''\right\|\end{aligned}\tag{4.26}$$

eşitliği ve (4.23) ten de her $i=0,1,2,\cdots,2m-2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k^{*}(e_i)-e_i\right\|=0 \text{ (}\upsilon\text{ ye göre düzgün)}$$

olduğu biliniyor ($M_1 = \|f\|$, $M_2 = \|f'\|$). Ayrıca $L_k^*(e_i) \in E_{2m-2}^{\mathcal{A}}$ olduğu Teorem 4.2.1 in ispatından elde edilebilir. Diğer taraftan hipotezden her $k, \upsilon \in \mathbb{N}$ ve her $x, y \in [a, b]$ için

$$\int_a^b \left| d\varphi_{k,2}^*(x, y) \right| \leq M$$

koşulu gerçeklenir. $f'' \in C[a, b]$ olduğundan Teorem 4.1.2 den $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k^*(f'') - f'' \right\| = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.27}$$

olur. Dolayısıyla (4.26) da (4.27) göz önüne alınıp eşitsizliğin iki yanında $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f'' \right\| = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir. Yani $L_k(f)$ operatörü $[a, b]$ aralığında f'' ne (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilirdir.

□

Tek mertebeli türevlere yaklaşabilmek içinde aşağıdaki operatörler sınıfına gerek duyulmaktadır.

Tanım 4.2.1. $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ $(k, n, \upsilon \in \mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun.* $\forall\, x \in [a, b]$ *ve* $\forall n, \upsilon \in \mathbb{N}$ *için;*

$$I_{2m+1,n,\upsilon}^{(1)}(y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_a^y \int_a^{y_1} \ldots \int_a^{y_{2m}} d\varphi_k(x, y_{2m+1}) \ldots dy_2 dy_1 \quad ; \ a \leq y \leq x,$$
$$I_{2m+1,n,\upsilon}^{(2)}(y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_y^b \int_{y_1}^b \ldots \int_{y_{2m}}^b d\varphi_k(x, y_{2m+1}) \ldots dy_2 dy_1 \quad ; \ x \leq y \leq b,$$

integrallerin işaretleri $\forall y \in [a, b]$ *için sabit ve zıt ise bu şekilde (3.1) deki* L_k *operatörlerin sınıfını* $E_{2m+1}^{\mathcal{A}}$ $(m \geq 1)$ *ile göstereceğiz.*

Tek mertebeli türevlere toplanabilme metoduyla yaklaşabilmek için ilk teorem aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Teorem 4.2.3. $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ $(k, n, \upsilon \in \mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun. Eğer* L_k *operatörleri* $E_{2m+1}^{\mathcal{A}}$ $(m \geq 1)$ *sınıfına aitse ve her* $i = 0, 1, \cdots, 2m+1$ $(r < m)$ *için*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_i) - e_i^{(2r+1)} \right\| = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

koşulunu sağlıyorsa, her $f \in C^{2m+1}[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{v} L_k(f) - f^{(2r+1)}\right\| = 0 \text{ } (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur; yani $\{L_k(f)\}$ operatör dizisi $[a,b]$ aralığında $f^{(2r+1)}$ e $\mathcal{A}-$toplanabilirdir.

İspat. Benzerlikten dolayı ispatın $m = 1$ ve $r = 0$ için yapılması yeterlidir. Dolayısıyla $f \in C^3[a,b]$ olacaktır. Taylor formülünden

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(t)dt \tag{4.28}$$

eşitliği yazılabilir. Bu taktirde L_k nın tanımından

$$\begin{aligned} L_k(f;x) &= L_k(f(x) + \int_x^y f'(t)dt; x) \\ &= f(x)L_k(e_0;x) + \int_a^b\int_x^y f'(t)dtd\varphi_k(x,y) \end{aligned} \tag{4.29}$$

olduğu görülebilir. $\int_a^b\int_x^y f'(t)dtd\varphi_k(x,y)$ integrali $[a,x]$ ve $[x,b]$ aralığında ikiye parçalanıp

$$\int_a^b\int_x^y f'(t)dtd\varphi_k(x,y) = \int_a^x\int_x^y f'(t)dtd\varphi_k(x,y) + \int_x^b\int_x^y f'(t)dtd\varphi_k(x,y) \tag{4.30}$$

daha sonra $\int_a^x\int_x^y f'(t)dtd\varphi_k(x,y)$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} u = \int_x^y f'(t)dt & \Longrightarrow du = f'(y)dy \\ dv = d\varphi_k(x,y) & \Longrightarrow v = \int_a^y d\varphi_k(x,y_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_a^x\int_x^y f'(t)dtd\varphi_k(x,y) &= \int_x^y f'(t)dt\int_a^y d\varphi_k(x,y_1)\bigg|_a^x - \int_a^x\int_a^y f'(y)d\varphi_k(x,y_1)dy \\ &= -\int_a^x\int_a^y f'(y)d\varphi_k(x,y_1)dy \end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\int_x^b\int_x^y f'(t)dtd\varphi_k(x,y)$ integraline de kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_x^b\int_x^y f'(t)dtd\varphi_k(x,y) = \int_x^b\int_y^b f'(y)d\varphi_k(x,y_1)dy \tag{4.32}$$

bulunur. (4.30) da (4.31) ve (4.32) göz önüne alınırsa

$$\int_a^b \int_x^y f'(t)dt d\varphi_k(x,y) = -\int_a^x \int_a^y f'(y) d\varphi_k(x,y_1)dy + \int_x^b \int_y^b f'(y) d\varphi_k(x,y_1)dy \tag{4.33}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.29) da operatörümüz

$$L_k(f;x) = f(x)L_k(e_0;x) + L_k^{**}(f';x) \tag{4.34}$$

şeklinde yazılırsa

$$L_k^{**}(f';x) := \int_a^b f'(y) d\varphi_{k,1}^{**}(x,y) \tag{4.35}$$

olur, burada

$$d\varphi_{k,1}^{**}(x,y) := \begin{cases} -(\int_a^y d\varphi_k(x,y_1))dy & ;\ a \leq y \leq x, \\ (\int_y^b d\varphi_k(x,y_1))dy & ;\ x \leq y \leq b. \end{cases} \tag{4.36}$$

şeklinde tanımlıdır. Dikkat edilirse $d\varphi_{k,1}^{**}(x,y)$ nin tanımından $L_k^{**}(f';x)$ operatörünün $E_2^{\mathcal{A}}$ sınıfına ait olduğu kolayca görülür. $e_0' = 0$ olduğu dikkate alınırsa hipotezden

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_0;x) = 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.37}$$

olur. Ayrıca (4.34) te f yerine e_i $(i = 0,1,2,3)$ yazılırsa, hipotezden $\lim\limits_{n\to\infty} L_k(e_i;x) = e_i'$ olacağından

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k^{**}(e_i';x) = e_i' \tag{4.38}$$

elde edilir. (4.38) de $i \neq 0$ iken $e_i'(y) = ie_{i-1}(y)$ olduğu dikkate alınırsa $i = 1,2,3$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k^{**}(ie_{i-1};x) - ie_{i-1} = 0$$

olur. Lineerlikten dolayı

$$i \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k^{**}(e_{i-1};x) - e_{i-1} \right) = 0$$

eşitliği elde edilir; ya da başka bir deyişle $i = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k^{**}(e_i;x) - e_i \right\| = 0 \tag{4.39}$$

sonucuna ulaşılır. $f' \in C^2[a,b]$ olduğundan Teorem 4.1.1 den

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k^{**}(f;x) - f\right\| = 0 \text{ } (\upsilon \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.40}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.34) ten

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f;x) - f'(x) = f(x)\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_0;x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k^{**}(f';x) - f'(x)$$

eşitliği görülebilir. Üçgen eşitsizliğinden $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f'\right\| \leq M_1 \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_0)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k^{**}(f') - f'\right\| \tag{4.41}$$

eşitsizliğine ulaşılabilir; burada $M_1 = \|f\|$ dir. Son olarak (4.41) de (4.37) ve (4.40) göz önüne alınıp $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f'\right\| = 0 \text{ } (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

sonucuna ulaşılır. Bu da $L_k(f)$ operatörünün $[a,b]$ aralığında f' ne (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilir olduğunu gösterir. □

Tek mertebeli türevler için diğer bir yaklaşım teoremi de aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 4.2.4. $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ $(k,n,\upsilon \in \mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun. Eğer* L_k *operatörü* $E_{2m+1}^{\mathcal{A}}$ $(m \geq 1)$ *sınıfına aitse ve her* $i = 0,1,...,2m+1$ $(r < m)$ *için*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_i) - e_i^{(2r+1)}\right\| = 0 \text{ } (\upsilon \text{ ye göre düzgün}),$$

koşuluyla birlikte, her $x \in [a,b]$ *ve her* $k, r \in \mathbb{N}$ *için*

$$\int_a^b \left|d\varphi_{k,2r+1}^{**}(x,y)\right| \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ *sayısı varsa, her* $f \in C^{2r+1}[a,b]$ *için*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f^{(2r+1)}\right\| = 0 \text{ } (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur; yani $\{L_k(f)\}$ operatör dizisi $[a,b]$ aralığında $f^{(2r+1)}$ e (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilirdir. Burada $d\varphi^{**}_{k,2r+1}(x,y)$

$$d\varphi^{**}_{k,2r+1}(x,y) := \begin{cases} -\left(\int\limits_a^y\int\limits_a^{y_1}\cdots\int\limits_a^{y_{2r}} d\varphi_k(x,y_{2r+1})...dy_2dy_1\right)dy; & \text{eğer } a\le y\le x, \\ \left(\int\limits_y^b\int\limits_{y_1}^b\cdots\int\limits_{y_{2r}}^b d\varphi_k(x,y_{2r+1})...dy_2dy_1\right)dy \;; & \text{eğer } x\le y\le b, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. İspatın $m=1$, $r=0$ için yapılması yeterlidir. Taylor formülünden $f(y)=f(x)+\int\limits_x^y f'(t)dt$ eşitliği biliniyor. Bu eşitlikteki $f(y)$ fonksiyonu $L_k(f;x)$ te yerine koyulursa lineerlikten

$$L_k(f;x)=f(x)L_k(e_0;x)+L_k^{**}(f';x) \tag{4.42}$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca (4.39) da $i=0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k^{**}(e_i)-e_i\right\|=0 \tag{4.43}$$

olduğu gösterilmiştir. Hipotezden dolayı $f'\in C[a,b]$ olduğu da bilinmektedir. $d\varphi^{**}_{k,1}(x,y)$ nin tanımından $L_k^{**}(f)$ operatörü, $E_2^{\mathcal{A}}$ sınıfıa aittir. Hipotez dikkate alındığında Teorem 4.1.1 in bütün koşulları sağlanır. Dolayısıyla Teorem 4.1.1 den

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k^{**}(f')-f'\right\|=0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca (4.42) den

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(f)-f'\right\|\le M_1\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(e_0)\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k^{**}(f')-f'\right\| \tag{4.44}$$

yazılabilir. Bir önceki teoremin ispatında (4.37) göz önüne alınıp (4.44) te n üzerinden limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}L_k(f)-f'\right\|=0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

elde edilir. Bu da $L_k(f)$ operatörünün f' ne (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilir olduğunu gösterir. □

Bu bölümde elde edilen teoremlerin tüm sonuçları beşinci bölümde tartışılacaktır.

5. SONUÇLAR VE UYGULAMALAR

Bu bölümde, tezde ispatlanan yaklaşım teoremlerinin çeşitli sonuçları üzerinde durulacak ve bazı grafiksel gösterimler verilecektir. Son olarak da elde edilen sonuçların değerlendirmelerinden bahsedilip gelecek çalışmalar için bir yön belirlenmeye çalışılacaktır.

5.1 Fonksiyonlara Yaklaşımlarda Elde Edilen Sonuçlar

Sürekli fonksiyonlara yaklaşırken elde edilen teoremlerin sonuçları iki başlık altında incelenecektir.

5.1.1 Teorem 4.1.1 in Sonuçları

- Operatörlerimizin sınıfı, pozitif lineer operatörleri de kapsadığından dolayı çalışmamız Swetits'in pozitif lineer operatörleri kullanarak [24] te Teorem 1 de yapmış olduğu yaklaşım teoremini kapsamaktadır.

- Teorem 4.1.1 de $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f;x) = L_n(f;x)$$

  olduğundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\| = 0$$

  sonucuna ulaşılır. Yani Teorem 4.1.1, ilk olarak Baskakov'un ulaşmış olduğu klasik yaklaşım sonuçlarına indirgenir [5].

- Benzer şekilde Teorem 4.1.1 de $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ birim matrisi seçilsin. Eğer $\varphi_k(x,y)$ fonksiyonu $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [a,b]$ için y ye göre azalmayan bir fonksiyon alınırsa, teoremimiz pozitif lineer operatörler için bilinen klasik Korovkin teoremine dönüşür [17].

- Eğer $\mathcal{A} = \mathcal{F} = \{F^{\upsilon}\}$ seçilirse,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} L_k(f;x)$$

  olduğundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} L_k(f) - f \right\| = 0$$

  sonucuna ulaşılır. Yani operatörümüz f fonksiyonuna hemen hemen yakınsaktır. Bu da çalışmamızın Mohapatra'nın [21] deki sonucunu da kapsadığını gösterir.

- Eğer $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = \{C_1\}$ seçilirse,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} L_k(f;x)$$

  olacağından operatörlerimizin aritmetik ortalaması f fonksiyonuna yakınsar.

Teorem 4.1.1 den elde edilen bir başka sonuç ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Sonuç 5.1.1. $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ $(k,n,\upsilon \in \mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun. Eğer* (3.1) *operatörleri* $E_{2m}^{\mathcal{A}}$ $(m \geq 1)$ *sınıfına aitse ve her* $i = 0,1,2,...,2m$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \left\| L_k(e_i) - e_i \right\| = 0 \text{ } (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

koşulu sağlanıyorsa, her $f \in C^{2m}[a,b]$ *için,*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f \right\| = 0 \text{ } (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur, yani $\{L_k(f)\}$ *operatör dizisi* $[a,b]$ *aralığında* f *fonksiyonuna (düzgün)* $\mathcal{A}-$*toplanabilirdir.*

İspat. Üçgen eşitsizliğinden $\forall n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_i) - e_i \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \| L_k(e_i) - e_i \| + c_i \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} - 1 \right| \tag{5.1}$$

olur; burada $c_i := \max\{|a|^i, |b|^i\}$ $(i = 0, 1, \cdots, 2m)$ şeklinde tanımlıdır. $\mathcal{A}$ nın regülerliğinden dolayı $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} = 1$ (υ ye göre düzgün) olacağından hipotez uyarınca

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(e_i) - e_i \right\| = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.1.1 in tüm koşulları sağlandığından $\{L_k(f)\}$ operatör dizisi $[a, b]$ aralığında f fonksiyonuna (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilirdir. □

5.1.2 Teorem 4.1.2 in Sonuçları

Bir önceki kısımda olduğu gibi aşağıdaki sonuçlar gözlemlenebilir:

- $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa, $L_k(f; x)$ operatörü f fonksiyonuna (klasik anlamda) düzgün yakınsar.
- Yine $\mathcal{A} = \mathcal{F} = \{F^{\upsilon}\}$ matrisler dizisi alındığında $L_k(f; x)$ operatörü f fonksiyonuna hemen hemen yakınsar.
- Son olarak da $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = \{C_1\}$ matrisi alınırsa, $L_k(f; x)$ operatörü f fonksiyonuna aritmetik ortalama yakınsar.

Burada Teorem 4.1.1 ile Teorem 4.1.2 arasındaki fark, ilk teoremdeki $f \in C^{2m}[a, b]$ koşulunun hafifletilerek $f \in C[a, b]$ olması ve bunun yerine L_k operatörünün düzgün sınırlılığı koşulunun gelmesidir.

$A-$istatistiksel yakınsaklık ile toplanabilme metodunun tamamen farklı kavramlar olduğu daha önce söylenmişti. Fakat operatörün düzgün sınırlılığı verildiğinde aşağıdaki ilginç sonucun elde edilmesi mümkündür.

Sonuç 5.1.2. *$\mathcal{A} = \{A\} = \{(a_{nk})\}$ $(k, n \in \mathbb{N})$ negatif olmayan regüler toplanabilme metodu ve (3.1) operatörleri E_{2m}^{A} $(m \geq 1)$ sınıfına ait olsun. Farzedelim ki her $x \in [a,b]$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$\int_a^b |d\varphi_k(x,y)| \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı mevcut olsun. Eğer her $i = 0, 1, 2, ..., 2m$ için

$$st_A - \lim_{k\to\infty} \|L_k(e_i) - e_i\| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa, her $f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k(f) - f \right\| = 0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olur; yani $\{L_k(f)\}$ operatör dizisi $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna (düzgün) $\mathcal{A}-$toplanabilirdir.

İspat. $K_i(\epsilon) := \{k \in \mathbb{N} : \|L_k(e_i) - e_i\| \geq \epsilon\}$ $(i = 0, 1, \cdots 2m)$ olarak tanımlanırsa, $A-$istatistiksel yakınsaklığın tanımından biliniyor ki

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K_i(\epsilon)} a_{nk} = 0$$

olur. Dolayısıyla üçgen eşitsizliğinden $\forall i = 0, 1, \cdots, 2m$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \|L_k(e_i) - e_i\| \leq \sum_{k\in K_i(\epsilon)} a_{nk} \|L_k(e_i) - e_i\| + \sum_{k\in \mathbb{N}\setminus K_i(\epsilon)}^{\infty} a_{nk} \|L_k(e_i) - e_i\| \quad (5.2)$$

eşitsizliği sağlanır. Hipotezdeki L_k operatörünün düzgün sınırlılığından da

$$\sum_{k\in K_i(\epsilon)} a_{nk} \|L_k(e_i) - e_i\| \leq (M+1)c_i \sum_{k\in K_i(\epsilon)} a_{nk} \quad (5.3)$$

eşitsizliğine ulaşılır; burada $c_i := \max\left\{|a|^i, |b|^i\right\}$ $(i = 0, 1, \cdots, 2m)$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $K_i(\epsilon)$ un tanımından $k \in \mathbb{N}\setminus K_i(\epsilon)$ iken $\|L_k(e_i) - e_i\| < \epsilon$ olduğu için

$$\sum_{k\in \mathbb{N}\setminus K_i(\epsilon)}^{\infty} a_{nk} \|L_k(e_i) - e_i\| < \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad (5.4)$$

eşitsizliği kolayca görülebilir. (5.2) de (5.3) ve (5.4) göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \|L_k(e_i) - e_i\| < (M+1)c_i \sum_{k\in K_i(\epsilon)} a_{nk} + \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad (5.5)$$

eşitsizliği elde edilir. $\mathcal{A}$ nın regülerliği ve hipotez dikkate alınıp (5.5) te n üzerinden limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left\|L_k(e_i)-e_i\right\|=0 \tag{5.6}$$

olduğu görülür. Diğer yandan $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}L_k\left(e_i\right)-e_i\right\|\leq\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left\|L_k\left(e_i\right)-e_i\right\|+c_i\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}-1\right| \tag{5.7}$$

gerçeklenir. $\mathcal{A}$ nın regülerliğinden dolayı $\lim_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}=1$ (υ ye göre düzgün) olacağından (5.7) de (5.6) dikkate alınıp eşitsizliğinin iki tarafında $n\to\infty$ için limit alınırsa hipotezden $\forall i=0,1,\cdots,2m$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}L_k\left(e_i\right)-e_i\right\|=0$$

olur. Teorem 4.1.2 nin tüm koşulları sağlandığından dolayı $\{L_k(f)\}$ operatör dizisi $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna $\mathcal{A}-$toplanabilirdir. □

Sonuç 5.1.2 de $A=C_1$ Cesàro matrisi alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.3. *Farzedelem ki (3.1) operatörleri $E_{2m}^{C_1}$ $(m\geq 1)$ sınıfına ait olsun ve her $x\in[a,b]$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için*

$$\int_a^b\left|d\varphi_k(x,y)\right|\leq M$$

olacak şekilde $M>0$ reel sayısı var olsun. Eğer her $i=1,2,\cdots,2m$ için

$$st-\lim_{k\to\infty}\left\|L_k\left(e_i\right)-e_i\right\|=0$$

koşulu sağlanıyorsa, her $f\in C[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_1(f;x)+L_2(f;x)+\cdots+L_n(f;x)}{n}=f(x)\ (\textit{düzgün})$$

olur; yani $\{L_k(f)\}$ operatör dizisi $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna (düzgün) aritmetik ortalama yakınsaktır.

5.2 Fonksiyonların Türevlerine Yaklaşımlarda Elde Edilen Sonuçlar

Teoremlerin sonuçları ayrı ayrı incelemeden önce ilk olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.1. $\mathcal{A}=\{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ $(k,n,\upsilon \in \mathbb{N})$ *negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun. Eğer her* $i=0,1,...,2m$ *için*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\left\| L_k\left(e_i\right)-e_i^{(j)}\right\| = 0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

koşulu sağlanıyorsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k\left(e_i\right)-e_i^{(j)}\right\| = 0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olur.

İspat. Doğrudan hesaplamayla

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k\left(e_i\right)-e_i^{(j)}\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\left\| L_k\left(e_i\right)-e_i^{(j)}\right\| + k_i\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}-1\right\| \qquad (5.8)$$

olduğu görülebilir; burada $k_i := \sup_{x\in[a,b]}\{|d^j x^i/(dx)^j|\}$ şeklinde tanımlıdır. (5.8) de n üzerinden limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} L_k\left(e_i\right)-e_i^{(j)}\right\| = 0$ sonucuna ulaşılır. □

Teorem 4.2.1 in sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir.

5.2.1 Teorem 4.2.1 in Sonuçları

Teorem 4.2.1 de aşağıdaki özel haller gerçeklenir:

- $\forall\upsilon\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{A}=\{A^{\upsilon}\}=\{I\}$ birim matrisi alınırsa, $L_k(f;x)$ operatörü $f^{(2r)}$ türevine düzgün yakınsar.

- $\mathcal{A} = \mathcal{F} = \{F^{\upsilon}\}$ matrisler dizisi alındığında $L_k(f;x)$ operatörü $f^{(2r)}$ türevine hemen hemen yakınsar.

- $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = \{C_1\}$ matrisi alınırsa, $L_k(f;x)$ operatörü $f^{(2r)}$ türevine aritmetik ortalama yakınsak olur.

5.2.2 Teorem 4.2.2 nin Sonuçları

Burada Teorem 4.2.1 deki $f \in C^{2m}[a,b]$ koşulunun hafifletilerek $f \in C^{2r}[a,b]$ olması ve onun yerine Teorem 4.2.2 nin ispatı yapılırken tanımlanan L_k^* operatörünün düzgün sınırlılığı koşulu getirilmesiyle elde edilen Teorem 4.2.2 nin sonuçları da benzer şekilde verilebilir.

- $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa, $L_k(f;x)$ operatörü $f^{(2r)}$ türevine düzgün yakınsar.

- $\mathcal{A} = \mathcal{F} = \{F^{\upsilon}\}$ matrisler dizisini alındığında $L_k(f;x)$ operatörü $f^{(2r)}$ türevine hemen hemen yakınsak olur.

- $\forall \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A} = \{C_1\}$ matrisi alındığında, $L_k(f;x)$ operatörü $f^{(2r)}$ türevine aritmetik ortalama yakınsak olur.

5.2.3 Teorem 4.2.3 ün Sonuçları

Teorem 4.2.1 deki tüm özel haller, $f^{(2r+1)}$ tek mertebeli türevlere yaklaşım için de geçerlidir.

5.2.4 Teorem 4.2.4 ün Sonuçları

Teorem 4.2.2 deki tüm özel haller, $f^{(2r+1)}$ tek mertebeli türevlere yaklaşım için de geçerlidir.

5.3 Uygulamalar

Bu kısımda yapmış olduğumuz çalışmanın özel bir örneği grafik üzerinden gösterilecektir.
$u_k(x)$ fonksiyon dizisi $u_k : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$u_k(x) := \begin{cases} x^2 & ; \ k \text{ tek} \\ 2 - x^2 & ; \ k \text{ çift} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $C[0,1]$ uzayında $L_k(f;x)$ pozitif lineer operatörü $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$L_k(f;x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f(\frac{j}{k}) u_k(x) \{ j x^{j-1}(1-x)^{k-j} - (k-j)x^j(1-x)^{k-j-1} \} \tag{5.9}$$

şeklinde tanımlansın. L_k operatörünün tanımından $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$L_k(f;x) = u_k(x) B'_k(f;x) \tag{5.10}$$

olduğu görülebilir. Burada $B_k(f;x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f(\frac{j}{k}) x^j (1-x)^{k-j}$ Bernstein polinomlarını ve $B'_k(f;x)$ ise Bernstein polinomunun türevini göstermektedir. $[0,1]$ aralığında tanımlı Borel ölçülebilir altkümelerinin oluşturduğu $\sigma-$cebir üzerinde tanımlı (sonlu) Borel ölçümü kullanılarak [5], kümülatif dağılım fonksiyonları [23] göz önünde bulundurulduğunda (5.9) daki L_k operatörünün (3.1) şeklinde yazılabildiği görülebilir. $\mathcal{A} = \{C_1\}$ alınırsa $[0,1]$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = 1, \ (x \text{ e göre düzgün})$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - 1 \right\| = 0 \tag{5.11}$$

olduğu görülür. Ayrıca [19] dan $[0,1]$ aralığında $\forall f \in C^1[a,b]$ için

$$\lim_{k\to\infty} B'_k(f;x) = f'(x) \text{ (düzgün)} \tag{5.12}$$

olduğu biliniyor. (5.12) de Teorem 2.3.1 den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \| B'_k(f) - f' \| = 0 \tag{5.13}$$

olduğu görülebilir. (5.10) dan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilmektedir:

$$\begin{aligned}L_k(f;x) - f'(x) &= (u_k(x)-1)\left(B_k'(f;x) - f'(x)\right) + f'(x)\,(u_k(x)-1)\\&\quad + B_k'(f;x) - f'(x).\end{aligned}$$

Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f;x) - f'(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k(x)-1)\left(B_k'(f;x) - f'(x)\right)\\&\quad + f'(x)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k(x) - 1\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(B_k'(f;x) - f'(x)\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|u_k - 1\| \leq 1$ olduğundan, $M := \|f'\|$ şeklinde tanımlanırsa

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f) - f'\right\| \leq \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\|B_k'(f) - f'\| + M\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k - 1\right\| \tag{5.14}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.14) te (5.11) ve (5.13) göz önüne alınıp $n \to \infty$ için limit alınırsa $[0,1]$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;x) = f'(x) \text{ (x e göre düzgün)}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $S_n(f;x)$

$$S_n(f;x) := \frac{L_1(f;x) + L_2(f;x) + ... + L_n(f;x)}{n}. \tag{5.15}$$

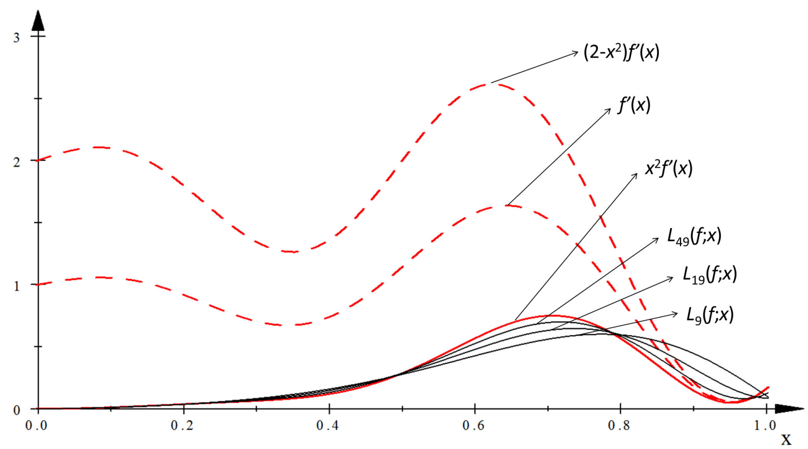
şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla L_k operatörü Teorem 4.2.3 teki $\mathcal{A} = \{C_1\}$ özel halini sağlamış oldu. Fakat dikkat edilirse f' fonksiyonuna $L_k(f)$ operatörüyle klasik manada yaklaşılması sabit fonksiyonlar dışında imkansızdır. Çünkü $(u_k(x))$ dizisi $[0,1)$ aralığında yakınsak olmayan bir fonksiyon dizisidir.

Ayrıca herhagi bir regüler A matrisi için $L_k(f)$ operatörünün f' türevine $A-$istatistiksel yakınsaması da imkansızdır. Çünkü

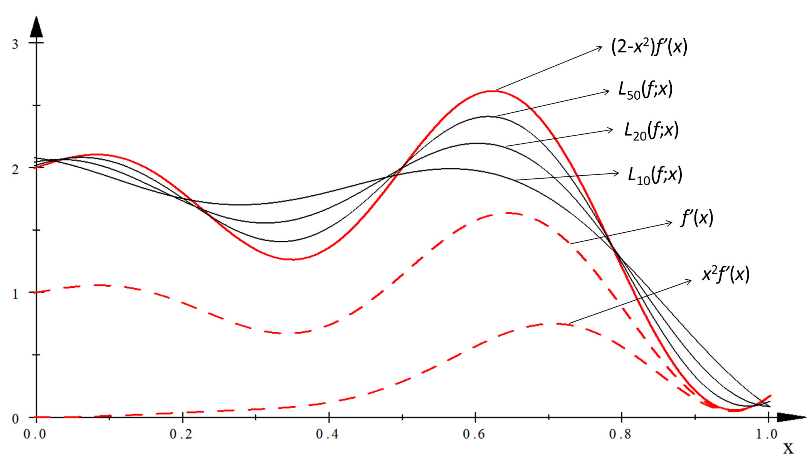
$$st_A - \limsup_{k\to\infty} u_k(x) = 2 - x^2 \quad \text{ve} \quad st_A - \liminf_{k\to\infty} u_k(x) = x^2 \tag{5.16}$$

şeklindedir. Burada $st_A - \limsup$ ve $st_A - \liminf$ üst ve alt $A-$istatistiksel limiti göstermektedir [9, 12]. (5.16) dan anlıyoruz ki sabit bir $x \in [0,1)$ için $u_k(x)$ dizisi hem klasik manada hem de $A-$istatistiksel manada yakınsak değildir.

Şimdi $f(x) = x + \frac{x}{10}\sin(10x) + \frac{1}{100}\cos(10x)$ fonksiyonunu ve bu fonksiyonun türevi olan $f'(x) = 1 + x\cos(10x)$ fonksiyonunu ele alalım. Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 bize, (5.9) da tanımlanan $L_k(f)$ operatörünün f' türevine yakınsayamayacağını göstermektedir. Çünkü k nın tek değerleri için operatörümüz $x^2 f'(x)$ fonksiyonuna, çift değerleri için ise $(2 - x^2)f'(x)$ fonksiyonuna yaklaşmaktadır.

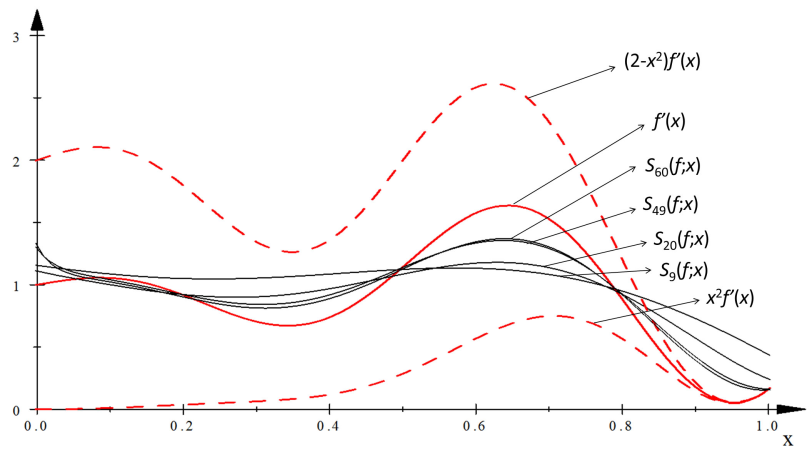


Şekil 5.1: $f(x) = x + \frac{x}{10}\sin(10x) + \frac{1}{100}\cos(10x)$ *fonksiyonu için (5.9) da tanımladığımız* $L_k(f;x)$ *operatörü* k *nın yeterince büyük tek değerleri için* $x^2 f'(x)$ *fonksiyonuna yaklaşmaktadır.*



Şekil 5.2: $f(x) = x + \frac{x}{10}\sin(10x) + \frac{1}{100}\cos(10x)$ *fonksiyonu için (5.9) da tanımladığımız* $L_k(f;x)$ *operatörü* k *nın yeterince büyük çift değerleri için* $(2 - x^2)f'(x)$ *fonksiyonuna yaklaşmaktadır.*

Fakat Şekil 5.3 ten anlaşılıyor ki yeterince büyük k değerleri için $L_k(f)$ operatörünün aritmetik ortalaması f' türevine yaklaşmaktadır.



Şekil 5.3: $f(x) = x + \frac{x}{10}\sin(10x) + \frac{1}{100}\cos(10x)$ *fonksiyonu için (5.15) te tanımladığımız* $S_n(f;x)$ *operatörü* k *nın yeterince büyük değerleri için* $f'(x)$ *fonksiyonuna yaklaşmaktadır.*

5.4 Değerlendirmeler

Bu tez ile birlikte yaklaşımlar teorisi ile toplanabilme teorisi arasında güçlü bir köprü kurulmuştur. Daha önceden benzer düşünceler bazı diğer yaklaşımlarda kullanılmış olsa da (bkz: [4, 21, 24]), bu çalışmada sunulan grafiksel gösterimler, konunun daha elle tutulur ve derinlemesine incelenmesi için imkan sağlamaktadır. Pozitif lineer operatörleri kapsayan geniş bir operatör ailesi yardımıyla, fonksiyonlara ve türevlerine toplanabilme metotları yardımıyla çeşitli yaklaşım teoremleri elde edilmiştir.

Bütün tez boyunca yapılan çalışmalar tek değişkenli fonksiyonlara yaklaşım için incelenmiştir. Dolayısıyla çok değişkenli fonksiyonlar üzerinde yaklaşım sonuçlarının araştırılması doğal bir problemdir. Gelecekte bu konu üzerinde yapılacak çalışmalar, sadece bu tezdeki sonuçlara değil, aynı zamanda çok değişenli Korovkin teorisine de önemli katkılar sağlayacaktır. Dolayısıyla bu probleme bulunacak çözümler, gelecekteki öncelikli hedeflerimiz arasındadır.

Bu tezdeki sonuçların derlenmesiyle elde edilen bir bilimsel makale, uluslararası indekse giren hakemli bir dergide yayınlanması isteğiyle gönderilmiştir. Ayrıca aynı çalışma "International Conference: Mathematics Days in Sofia MDS 2014" isimli bir uluslararası konferasın "Approximation Theory and Special Functions" isimli özel serisinde sunulmuş olmakla birlikte "International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2014)" isimli uluslararası konferansta sunulacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Altomare, F., Campiti, M., Korovkin-type Approximation Theory and Its Applications, *de Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 17, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[2] Anastassiou, G. A., Duman, O., A Baskakov type generalization of statistical Korovkin theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 340 476–486, 2008.

[3] Anastassiou, G. A., Duman, O., Towards Intelligent Modeling: Statistical Approximation Theory, *Intelligent Systems Reference Library*, vol. 14, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[4] Atlihan, Ö. G., Orhan, C., Summation process of positive linear operators, *Comput. Math. Appl.*, 56 1188–1195, 2008.

[5] Baskakov, V. A., Generalization of certain theorems of P. P. Korovkin on positive operators, *Mat. Zametki*, 13 785–794, 1973.

[6] Bell, H. T., $\mathcal{A}-$summability, *Dissertation, Lehigh University*, Bethlehem.,Pa.,1971.

[7] Bell, H. T., Order summability and almost convergence, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38 548–552, 1973.

[8] Cesàro, E., Cesàro Summability, *Pure and Applied Mathematics*, Volume 123, 28-47, 1986.

[9] Demirci, K., A-statistical core of a sequence, *Demonstratio Math.*, 33 343-353, 2000.

[10] Fast, H., Sur la convergence statistique, *Colloquium Math.*, 2 241–244, 1951.

[11] Freedman, A. R., Sember, J. J., Densities and summability, *Pacific J. Math.*, 95 293–305, 1981.

[12] Fridy, J. A., Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 3625-3631, 1997.

[13] Gadjiev, A. D., Orhan, C., Some approximation theorems via statistical convergence, *Rocky Mountain J. Math.* 32 129–138 2002.

[14] Hardy, G. H., Divergent Series, *Oxford Univ. Press*, London,1949.

[15] Jurkat, W. B., Peyerimhoff, A., Fourier effectiveness and order summability, *J. Approx. Theory*, 4 231–244, 1971.

[16] Jurkat, W. B., Peyerimhoff, A., Inclusion theorems and order summability, *J. Approx. Theory*, 4 245–262, 1971.

[17] Korovkin, P. P., Linear Operators and Approximation theory, *Hindustan Publishing Corp.*, Delhi, 1960.

[18] Lorentz, G. G., A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Math.* 80 167–190, 1948.

[19] Lorentz, G. G., Bernstein Polynomials (2nd edition), *Chelsea Publishing Co.*, New York, 1986.

[20] Maddox, I.J., Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press*, 1970.

[21] Mohapatra, R. N., Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators, *J. Approx. Theory*, 20 239–250, 1977.

[22] Niven, I., Zuckerman, H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, *John Wiley&Sons, 4^{th}ed.*, New York, 1980.

[23] Royden, H. L., Real Analysis (3rd edition), *Macmillan Publishing Company*, New York, 1988.

[24] Swetits, J. J., On summability and positive linear operators, *J. Approx. Theory*, 25 186–188, 1979.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	ASLAN, İsmail
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	01.07.1988 Bursa
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0507 824 06 46
e-mail	:	iaslan@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Y. Lisans	TOBB ETÜ	2014
Lisans	Hacettepe Üniversitesi	2011

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2012-2014	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Y. L. Öğrencisi

Yabancı Dil

İngilizce (Çok İyi)

Yayınlar

- İ. Aslan and O. Duman, “Summability Process On The Baskakov-Type Approximation” (submitted for publication).

Uluslararsı Konferans Bildirileri

- İ. Aslan and O. Duman, "Summability Process On The Baskakov-Type Approximation Theory", *Mathematics Days in Sofia MDS 2014*, July 7-10, 2014, Sofia, Bulgaria.
- İ. Aslan and O. Duman, "Application of Summability Process on Baskakov-Type Korovkin Theory", *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2014)*, November 6-9, 2014, Antalya, Turkey (submitted for presentation).