ORLICZ-SOBOLEV UZAYLARINDA NONLOKAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Kenan SÜSLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ-SOBOLEV UZAYLARINDA NONLOKAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Kenan SÜSLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalını

Haziran-2017
BATMAN

Ek-2

TEZ KABUL VE ONAYI

Kenan SÜSLÜ tarafından hazırlanan "Orlicz-Sobolev Uzaylarında Nonlokal Denklemlerin Çözümleri Üzerine" adlı tez çalışması 01/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri | **İmza**

Başkan(Danışman)

Doç.Dr.Mustafa AVCI ....

Üye
Yrd.Doç.Dr.Zehra YÜCEDAĞ ....

Üye
Yrd.Doç.Dr.Veysi TURUT ....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr.Bahattin İŞCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü V.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Kenan SÜSLÜ

Tarih:01/06/2017

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORLICZ-SOBOLEV UZAYLARINDA NONLOKAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Kenan SÜSLÜ

Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman:
Doç.Dr.Mustafa AVCI

2017, 61 Sayfa

Jüri
Doç.Dr.Mustafa AVCI
Yrd.Doç.Dr.Zehra YÜCEDAĞ
Yrd.Doç.Dr.Veyis TURUT

İlk bölümde, bundan sonraki bölümlerde işlenecek olan konuları ilgilendiren Lebesgue uzayı ve Sobolev uzayı ve bu uzaylarla ilgili temel kavram,notasyon ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde Orlicz uzayları ve bu uzaylarla ilgili temel kavram,notasyon ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde varyasyonel yaklaşım ve varyasyonel yaklaşımla ilgili temel kavram, tanım ve teoremlerden söz edilmiş, ayrıca varyasyonel yaklaşımın uygulandığı bazı problem türlerinden söz edilmiştir.Varyasyonel yaklaşım,özellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analizinde kullanılan çok etkili bir araçtır.Bazı diferansiyel denklemlerin çözümünü veren genel bir teorinin olmaması,varyasyonel yaklaşımın önemini daha da arttırmaktadır.

Kısacası varyasyonel yaklaşım bir diferansiyel denklemi doğrudan çözmek yerine bu denklemin çözümlerini ilgili enerji fonksiyonelinin kritik noktalarına veya minimize dizisine karşılık getirerek bulmayı amaçlayan bir yaklaşımdır.

Dördüncü bölüm ise tez çalışmasının orijinal kısmı olup, bu bölümde Robin sınır-değer koşullarına sahip nonlokal bir eliptik denklemin çözümleri varyasyonel yaklaşım ve Ekeland varyasyonel prensibi kullanılarak Orlicz-sobolev uzaylarında gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lebesgue uzayları,Orlicz uzayları,Sobolev uzayları,varyasyonel yaklaşım, Ekeland varyasyonel prensibi

ABSTRACT

MSc. THESIS

ON SOLUTIONS OF NONLOCAL EQUATIONS IN ORLICZ-SOBOLEV SPACES

Kenan SÜSLÜ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
BATMAN UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

Advisor
Assoc.Prof.Dr. Mustafa AVCI

2017, 61 Pages

Jury
Assoc.Prof.Dr. Mustafa AVCI
Asst.Prof.Dr.Zehra YÜCEDAĞ
Asst.Prof.Dr.Veyis TURUT

In the first chapter, the basic concepts, notation and theorems regarding Lebesgue and Sobolev spaces are given.

In the second section, the basic concepts, notation and theorems regarding Orlicz spaces are given.

In the third section, the basic concepts,notation and theorems of the variational approach and are given. The variational approach has been applied to many problem types since it is a very effective tool for analyzing nonlinear partial differential equations. The absence of a general theory that solves every type of nonlinear differential equations has increased the importance of the variational approach. In short, the variational approach is a method that aims to find the solution of the given differential equation by corresponding its solutions to the critical points of the corresponding energy functional or the minimize sequence instead of directly solving the differential equation.

The fourth section is the original part of the thesis work, in which the solutions of a nonlocal elliptic equation with Robin boundary-value conditions are obtained in Orlicz-Sobolev spaces by using the variational approach and the Ekeland variational principle.

Keywords: Lebesgue spaces,Orlicz spaces,Sobolev spaces ,variatonal approach, Ekeland variational principle

TEŞEKKÜR

Çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim, zaman ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Mustafa Avcı' ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli eşim Pınar Süslü'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kenan SÜSLÜ
BATMAN-2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

R^n : n -Boyutlu Euclid (Öklid) Uzayı
$\overline{A}$: A kümesinin kapanışı
$\|u\|$: u'nun normu
X': X uzayının duali
Ω : R^N de açık bir bölge
$C(\Omega)$: Ω bölgesinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$L^p(\Omega)$: Ω bölgesinde p.kuvvetten integrallenebilir ölçülebilir fonksiyonlar uzayı (Lebesgue uzayı)
$D^\alpha u$: Kısmi türev operatörü,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in N_0^N, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$$

$W^{m,p}(\Omega)$: Sobolev uzayı, $W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \le |\alpha| \le m) \right\}$

$\tilde{L}_\Phi(\Omega)$: Ω üzerinde tanımlı Orlicz sınıfı, $\tilde{L}_\Phi(\Omega) = \{u : \Omega \to R \text{ ölçülebilir; } \int_\Omega \Phi(|u(x)|)\, dx < \infty\}$

X^* : X in duali
X^{**}: X in ikinci duali
$C^{0,1}(\overline{\Omega})$: Lipschitz-sürekli fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfı
$C_0^\infty(\Omega)$: Ω bölgesindeki kompakt desteğe sahip fonksiyonlardan oluşan fonksiyon sınıfı
$C^m(\Omega)$:Kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlardan oluşan vektör uzayı
$C^m(\overline{\Omega})$: $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayı
A^C: A nın tümleyen kümesi
$|\Omega|$: $\Omega \subset R^N$ bölgesinin Lebesgue ölçümü

$ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$: $|u|$ nun Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu

p' : p nin eşleniği { $p' = \dfrac{p}{p-1}$ }
$\hookrightarrow$: Gömme
$\prec$: Young fonksiyonları arasındaki sıralama
$\ll$: Young fonksiyonları arasındaki sıralama
$\|u\|_\Phi$: u nun Luxemburg normu
$B(\Omega)$: Ω üzerinde tanımlı tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi
$u_n \to u$: Norm (Güçlü) Yakınsama

$u_n \rightharpoonup u$: Zayıf yakınsama

$\overline{\Phi}$: Φ nin eşleniği

$(W^{1,\Phi}(\Omega))^*$: $W^{1,\Phi}(\Omega)$ nin (sürekli) dual uzayı

$B(0;\delta)$: Açık yuvar

$\overline{B(0;\delta)}$: Kapalı yuvar

∇ : Gradient

div : Diverjans

$\Delta_p(\cdot)$: p-Laplace operatörü, $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$; $|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}$

Kısaltmalar

h.h.h.: Hemen hemen her yerde

PS: Palais -Smale

Δ_2 : Delta iki koşulu

1. GİRİŞ

İlk olarak, bir kısmı tez kapsamında gerekli olan ve ayrıca genel anlamda bilinmesinde fayda bulunan temel kavram, tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıca, üzerinde çalışılan Orlicz uzaylarının özel bir sınıfı olmaları açısından, *Lebesgue* ve *Sobolev* uzayları hakkında bilgi verilecektir.

1.1. Normlu Uzay,İç Çarpım Uzayı

Tanım 1.1.1. Bir X vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona fonksiyonel denir. Bu fonksiyonel,

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) \; ; \; x_1, x_2 \in X \text{ ve } a_1, a_2 \in C$$

koşulu altında bir lineer dönüşüm olur.

Tanım 1.1.2. X, bir vektör uzayı olsun. $\|.\| : X \to R$ fonksiyonu için,her $x,y \in X$ ve $\lambda \in$ C olmak üzere,

i) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleri sağlanıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. Bu durumda elde edilen (X, $\|.\|$) ikilisine (veya kısaca X'e) normlu uzay, $\|x\|$ sayısına da $x \in X$ elemanının normu denir.

Her $\|.\|$ normu , d: X x $X \to R$ olmak üzere,

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

şeklinde bir uzaklık fonksiyonu olduğundan her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır. Fakat, bir metrik uzayın normlu uzay olması gerekmez. Bir normlu uzay, üzerinde tanımlanan norm altında vektör uzayı belirtir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $\|.\|_X$ ile X normlu uzayında tanımlanan norm kastedilecektir.

Tanım 1.1.3. X bir normlu uzay, $x \in X$ ve $r \in R$ pozitif bir sayı olmak üzere;

$B_r(x) = \{ y \in X : \|x - y\|_x < r \}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar,

$\overline{B}_r(x) = \{ y \in X : \|x - y\|_x \leq r \}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir kapalı yuvar olarak tanımlanır. $A \subset X$ olmak üzere, her $x \in A$ için $B_r(x) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ varsa A'ya açık küme denir.

Tanım 1.1.4. (x_n) , X normlu uzayında bir dizi olmak üzere , her $\varepsilon > 0$ için $m, n > N$ olduğunda $\|x_n - x_m\|_x < \varepsilon$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayı varsa, yani $n,m \to \infty$ iken $\|x_n - x_m\|_x \to 0$ oluyorsa (x_n) dizisine bir *Cauchy* dizisi denir.

Tanım 1.1.5. Bir X normlu uzayındaki her cauchy dizisi X'in bir elemanına yakınsıyor ise, X 'e tam uzay veya *Banach* uzayı denir.

Tanım 1.1.6. X normlu uzayında tanımlı tüm sürekli ve lineer fonksiyonellerin kümesine X normlu uzayının duali denir ve *X'* veya X^* ile gösterilir. X^* uzayı,

$$\|u\|_{x^*} = \sup_{x \neq 0, x \in X} \frac{|u(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|_{x^*}$ normu ile bir *Banach* uzayı oluşturur.

Tanım 1.1.7. (x_n), X normlu uzayında bir dizi olmak üzere,

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine norma göre *yakınsak* veya *güçlü yakınsak* dizi denir ve yakınsama $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.8. X normlu uzayında tanımlı farklı iki norm $\|\cdot\|_{X,1}$ ve $\|\cdot\|_{X,2}$ olmak üzere, her $x \in X$ için

$$c_1 \|x\|_{X,2} \leq \|x\|_{X,1} \leq c_2 \|x\|_{X,2}$$

olacak şekilde pozitif c_1, c_2 reel sayıları varsa o zaman $\|\cdot\|_{X,1}$ ve $\|.\|_{X,2}$ normlarına denk normlar denir.

Sonlu boyutlu normlu (veya vektör) uzaylarda tanımlanan bütün normlar denktir. Böylelikle sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan bütün normlar o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlarlar; örneğin X normlu uzayındaki bir (x_n) dizisi $\|\cdot\|_{X.1}$ $\left(\|.\|_{X,2}\right)$ normuna göre yakınsak, sınırlı veya Cauchy ise, $\|.\|_{X,2}\left(\|.\|_{X,1}\right)$ normuna göre de yakınsak, sınırlı veya Cauchy'dir.

Tanım 1.1.9. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere, eğer her $x \in X$ için

$$\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$$

özelliğini sağlayan, X uzayını Y uzayı üzerine dönüştüren bire-bir lineer bir L operatörü varsa X ve Y normlu uzaylarına *izometrik* olarak *izomorfizm*a ve L operatörünede X ve Y normlu uzayları arasında *izometrik izomorfizma* denir.

Bu özelliği sağlayan uzaylar aynı uzaylar olarak kabul edilir ve bu durum $X \cong Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.10. X normlu uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, eğer $\bar{A} = X$ oluyorsa, A kümesi X uzayında yoğundur denir. Bununla birlikte A ve B, X normlu uzayının iki alt kümesi olmak üzere, eğer her bir $x \in B$ ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|x - y\|_X < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $y \in A$ elemanı varsa A kümesi B'ye yoğundur denir.

Tanım 1.1.11. X normlu uzay sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahipse X normlu uzayına ayrılabilir uzay denir.

Tanım 1.1.12. X normlu uzay olmak üzere ,$(X^*)^* = X^{**}$ şeklinde tanımlanan lineer vektör uzayına X' in ikinci duali denir.

Sabit bir $x \in X$ ve $f \in X^*$ için

$$\varphi_X(u) = f(x)$$

şeklinde bir φ_X fonksiyoneli tanımlansın.Her $x \in X$ için bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden

$$C : X \underset{\varphi \to \varphi_x}{\to} X^{**}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüme *kanonik dönüşüm* denir.Eğer kanonik dönüşüm üzerine ise, o zaman X uzayına *yansımalı* (*refleksif*) *uzay* denir.X uzayı yansımalı ise $X = X^{**}$ olur.

Tanım 1.1.13. X,K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere ,

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : X \, x \, X \to K$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm için ,her $x,y,z \in X$ ve $a,b \in K$ olmak üzere,

i) $\langle x,x\rangle \geq 0$; $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$,

ii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ ($K=C$ iken $c,\bar{c}$ 'nin kompleks eşleniği,K=R iken $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ dir).

iii) $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$,

özellikleri sağlanıyorsa bu fonksiyona bir iç çarpım denir.Bu durumda $\left(X,\|.\|_X\right)$ ikilisi, her $x\in X$ için

$$\|x\|_X = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan norm altında bir iç çarpım uzayı olur.

Tanım 1.1.14. Bir X iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi yine bu uzaydaki bir elemana yakınsıyorsa X uzayına *Hilbert* uzayı denir.

Tanım 1.1.15. N- boyutlu R^N reel Euclid uzayındaki x =(x_1,....., x_N),

y=(y_1,......, y_N)$\in R^N$ elemanlarının iç çarpımı

$$\langle x,y\rangle = x\cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

şeklindedir.Bir $x \in R^N$ elemanının normu ise

$$|x| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{N} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır. R^N uzayı, ' · ' iç çarpım altında bir Hilbert uzayı olur.

Tanım 1.1.16. X normlu uzayı üzerindeki zayıf topoloji (*weak topology*), X üzerindeki en zayıf topolojidir,öyleki X* dual uzayındaki her fonksiyon altında süreklilik korunur.X sonlu boyutlu olmadıkça X üzerindeki zayıf topoloji,norm toplojiden daha zayıftır.

Tanım 1.1.17. (x_n) , X normlu uzayında bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere, her $f \in X^*$ için n$\rightarrow \infty$ iken

$$f(x_n) \rightarrow f(x)$$

oluyorsa o zaman (x_n) dizisine X normlu uzayında zayıf yakınsak dizi denir ve bu yakınsama $x_n \rightarrow x$ veya $x_n \xrightarrow{z} x$ şeklinde gösterilir.

Not 1.1.18. (x_n), X normlu uzayında bir ve $x \in X$ olmak üzere,

i) Eğer $x_n \rightharpoonup x$ ise, $x_n \to x$ dir (uzay sonlu boyutlu olmadıkça bu önermenin tersi genel olarak doğru değildir).

ii) Eğer $x_n \rightharpoonup x$ ise, ($\|x_n\|_X$) dizisi sınırlıdır.

Eğer *X* normlu uzayı sonlu boyutlu ise,zayıf yakınsaklık ile güçlü yakınsaklık tanımları çakışır.

Tanım 1.1.19. *A*, *X* normlu uzayının bir alt kümesi olmak üzere, A'daki elemanlardan oluşan herhangi bir dizi, *X*' de yakınsak olan (*A*'daki bir eleman yakınsayan) bir alt diziye sahipse *A*'ya bir *dizisel kompakt küme* denir. Eğer *A* kümesinin kapanışı $\overline{A}$, *X* ' de kompakt ise *A*'ya *X*' de *önkompakt* küme denir. *A*' daki elemanlardan oluşan herhangi bir dizi, *X* ' de zayıf yakınsak olan (A'daki bir elemana yakınsayan) bir alt diziye sahipse *A*'ya *zayıf dizisel kompakt küme* denir.

Teorem 1.1.20. Bir *X* Banach uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul *X*' deki bir $\overline{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ kapalı yuvarının kompakt olmasıdır. (Musayev ve Alp,2000).

1.2. Operatörler

Tanım 1.2.1. *X* ve *Y* normlu uzayları verilsin. $L: D_L \subset X \to Y$ dönüşümü her bir $x \in D_L$ elemanını

$$L(x) = Lx = y$$

olacak şekilde *Y* uzayındaki bir tek *y* elemanıyla eşleşiyorsa, *L*'ye *X* üzerinde tanımlanmış bir operatör veya dönüşüm, D_L'ye ise *L* operatörünün tanım kümesi denir.

Tanım 1.2.2. *X* ve *Y* iki normlu uzay olmak üzere ; $L:X \to Y$ operatörü, $(x_n) \subset X$, *X* dizisi ve $x \in X$ elemanı verilsin. *n*' nin yeterince büyük değerinde
($n \to \infty$ iken)

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \quad \text{iken} \quad \|Lx_n - Lx\|_Y \to 0$$

oluyorsa *L* operatörü *x* noktasında süreklidir denir. Eğer *L*, *X* 'deki her noktada sürekli ise *L*'ye sürekli operatör denir.

Tanım 1.2.3. *X* ve *Y* normlu uzayları ve $L:X \to Y$ operatörü verilsin. $A \subset X$ alt kümesi sınırlı iken *L(A)*, *Y*'de sınırlı ise *L* operatörüne sınırlı operatör denir. Bir başka ifadeyle, her $x \in X$ için

$$\|Lx\|_Y \le c\|x\|_X \tag{1.1}$$

olacak şekilde pozitif bir *c* reel sayısı varsa *L*'ye sınırlı operatör denir. Buna ek olarak (1.1) eşitsizliğini sağlayan *c*'lerin *infimumuna L* operatörünün normu denir ve bu norm

$$\|L\| := \sup_{X\neq 0, x\in X} \frac{\|Lx\|_Y}{\|X\|_X} = \sup_{\|X\|_X \le 1} \|Lx\|_Y$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.4. *X* ve *Y* normlu uzayları, $L{:}X \to Y$ operatörü ve $A \subset X$ sınırlı alt kümesi verilsin. Eğer *L(A), Y* 'de önkompakt ise *L* operatörüne kompakt operatör denir. Eğer *L* operatörü sürekli ve kompakt ise o zaman *L* operatörüne tamamen sürekli operatör denir.

Tanım 1.2.5. $L{:}X \to Y$ operatörü ,her $x,y \in X$ ve $\alpha, \beta \in C$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$$

şartını sağlıyorsa *L*'ye lineer operatör denir.

Her kompakt operatör sınırlı, her sınırlı lineer operatör sürekli olduğundan her kompakt lineer operatör tamamen sürekli olur.

Tanım 1.2.6. *X* ve *Y* normlu uzaylar olsun. Eğer,

i) *X*, *Y* ' nin alt uzayı,

ii) Her $x \in X$ için *X*' ten *Y*'ye $I_X = x$ şeklinde tanımlanan *I* birim operatörü (gömme operatörü) sürekli ise, *X* uzayı *Y* uzayına gömülür ve bu gömülme

$$X \to Y$$

veya $X \hookrightarrow Y$ biçiminde gösterilir. *I* birim operatörü lineer olduğundan **(ii)** koşulu, her $x \in X$ için

$$\|Ix\|_Y \le c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir *c>0* sabitinin varlığına denktir. Buna ek olarak, eğer *I* birim operatörü kompakt ise, yani *I* sürekli ve *X* uzayına kompakt gömülür.

1.3. Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 1.3.1 Ω, R^N' nin açık bir bölgesi olmak üzere,

$$C^0(\Omega) := \{ f : \Omega \to R^N ; f \ fonksiyonu\, sürekli \}$$

şeklinde tanımlanan kümeye sürekli fonksiyonlar uzayı denir.Bu uzay; $|\cdot|, R^N$'de tanımlanan norm olmak üzere,

$$\|f\|_{C^0(\Omega)} = \sup_{X\in\Omega}|f(x)| < \infty$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.3.2. $f, \Omega \subset R^N$ bölgesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in \Omega$ için

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$$

olacak şekilde negatif olmayan bir $L = L(f)$ sabiti varsa, f fonksiyonu *lipschitz* koşulunu sağlar veya *Lipschitz-süreklidir* denir. Lipschitz-sürekli fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfı $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ ile gösterilir.

1.4. Diferansiyellenebilir Fonksiyon Uzayı

Tanım 1.4.1. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ negatif olmayan α_i'lerin *n*-bileşenlisi olmak üzere, α'ya çoklu-indis denir ve $x^\alpha, |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1}......x_n^{\alpha_n}$ olarak tanımlanır, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}......x_n^{\alpha_n}$ olur. Buna göre $1 \le i \le n$ için $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere $D^\alpha = D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}....D^{\alpha_n}$ olup, $D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, ifadesi $|\alpha|$.mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir.

Tanım 1.4.2. Bir $G \subset R^N$ kümesinin kapanışı $\overline{G}$ ve Ω, R^N'de bir bölge olmak üzere $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ kümesi R^N'in kompakt bir alt kümesi ise bu durum $G \subset\subset \Omega$ supp $f = \overline{\{x = G : f(x) \ne 0\}}$ biçiminde tanımlanır. Eğer supp $f \subset\subset \Omega$ ise, f fonksiyonu Ω'da kompakt desteğe sahiptir denir.

Tanım 1.4.3. Ω, R^N'de bir bölge olsun. Negatif olmayan herhangi *m* tamsayısı için Ω bölgesinde $|\alpha| \le m$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha f$ kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlardan oluşan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir.

$C(\Omega)=C^0(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ olmak üzere, $C_0(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki tüm fonksiyonlardan oluşur. $C^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına test fonksiyonu veya düzgün (*smooth*) fonksiyon denir. $C^\infty(\Omega)$ uzayının Ω bölgesindeki kompakt desteğe sahip fonksiyonlarından oluşan uzay ise $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.4. Ω, R^N 'de açık bir bölge olduğunda, $C^m(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonlar Ω bölgesinde sürekli olmayabilir. Dolayısıyla,

$C_B^m(\Omega):=\left\{ f\in C^m(\Omega): her\ x\in\Omega\ için\, D^\alpha\ kısmi\, türevleri\ \Omega' da\, sınırlıdır, 0\le|\alpha|\le \mathrm{m} \right\}$

fonksiyon uzayı tanımlanırsa, elde edilen bu yeni uzay

$$\|f\|_{C_B^m(\Omega)}=\max_{0\le|\alpha|\le m}\sup_{x\in\Omega}\left|D^\alpha f(x)\right| \tag{1.2}$$

normu altında bir *Banach uzayı* olur. $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı, Ω bölgesinde $0\le|\alpha|\le m$ için $D^\alpha f$ kısmi türevleri sınırlı ve düzgün sürekli olan $f\in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarında oluşur. Bununla birlikte ; $C^m(\overline{\Omega}), C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğundan $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı da (1.2)'de verilen norma göre bir *Banach* uzayı oluşturur.

Tanım 1.4.5. (*Gâteaux* Türevi) X ve Y *Banach* uzayları ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, her $h\in X$ için

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda}=Lh$$

olacak şekilde bir L sınırlı lineer operatörü varsa $f'ye\, x\in X$ noktasında ve h yönünde *Gâteaux* diferansiyellenebilirdir denir.Bu durumda L operatörüne f fonksiyonunun $x\in X$ noktasındaki *Gâteaux* türevi denir ve $f'(x)=L$ biçiminde gösterilir.Eğer bu durum her $x\in X$ için doğruysa f fonksiyonu *Gâteaux diferansiyellenebilirdir* denir.

Teorem 1.4.6. (Ortalama Değer Teoremi) X bir Banach uzayı ve $x,h\in X$ olmak üzere,eğer $\varphi: X\to R$ fonksiyoneli Gâteaux diferansiyellenebilir ise

$$\varphi(x+h)-\varphi'(x+th)h$$

olacak şekilde bir $0<t<1$ sayısı vardır (Siddiqi, 2004).

Tanım 1.4.7. (*Frêchet* Türevi) X ve Y *Banach* uzayları ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere ,

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|_X}$$

olacak şekilde bir L sınırlı lineer operatörü varsa *f'* ye $x \in X$ noktasında *Frêchet* diferansiyellenebilirdir denir.Bu durumda L operatörüne f fonksiyonunun $x \in X$ noktasındaki *Frêchet* türevi denir ve $f^{'}(x) = L$ şeklinde gösterilir.Eğer bu durum her $x \in X$ için doğruysa f fonksiyon *Frêche*t *diferansiyellenebilirdir* denir.Ayrıca, $f: R^N \to R^N$ şeklinde tanımlandığında f fonksiyonunun x_0 noktasındaki *Frêche*t türevi

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{X = X_0} \right)$$

şeklinde *Jacobian matrisi* olarak;

$f: R^N \to R$ şeklinde tanımlandığında ise f fonksiyonunun x_0 noktasındaki *Frêchet* türevi

$$f^{'}(x_0)h = \nabla f(x_0) \cdot h$$

şeklinde *gardient vektörü* olarak gösterilir.Burada, R^N' deki iç çarpımdır.Yukarıdaki tanımdan kolayca görüleceği üzere,eğer f fonksiyonu *Frêchet* diferansiyellenebilir ise o zaman her $h \in X$ *ve* $\varepsilon > 0$ için

$$\left\| f(x+h) - f(x) - f^{'}(x)h \right\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X$$

olacak şekilde bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı, $\|h\|_X \leq \delta$ olmak üzere, bulunabilir.

Teorem 1.4.8. X ve Y Banach uzayları ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere,eğer f fonksiyonu $x \in X$ noktasında *Frêchet* diferansiyellenebilirse, f fonksiyonu $x \in X$ noktasında süreklidir.Yukarıdaki teorem *Gâteaux* diferansiyellenebilir fonksiyonlar için (genel olarak) geçerli değildir(Siddiqi, 2004).

Teorem 1.4.9. Bir fonksiyonun bir noktada *Frêchet* türevi varsa o noktada *Gâteaux* türevi de vardır ve bu iki türev eşittir (Siddiqi, 2004).

Tanım 1.4.10. X ve Y Banach uzayları ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer f fonksiyonu $x \in X$ noktasında *Frêchet* diferansiyellenebilir ve *f' Frêchet* türevi

$x \in X$ noktasında sürekli ise, f fonksiyonu $x \in X$ noktasında sürekli *Frêchet diferansiyellenebilirdir* denir. Eğer bu durum X 'deki her eleman için gerçekleşiyorsa, bu durumda *f* fonksiyonu *sürekli Frêchet diferansiyellenebilirdir* denir ve $f \in C^1(X,Y)$ biçiminde gösterilir $(Y = R \text{ iken sadece } f \in C^1(X) \text{ şeklinde de gösterilebilir})$.

1.5. Lebesgue Ölçüm ve Ölçülebilir Fonksiyon

Tanım 1.5.1. $\mathcal{A}, R^N$'nin altkümelerinin bir sınıfı olmak üzere,

i) $R^N \in \mathcal{A}$,

ii) $A \in \mathcal{A}$, ise $A^C \in \mathcal{A}$ $(A^C, A' \text{nın tümleyen kümesi})$,

iii) $A_i \in \mathcal{A}$, i=1,2,….., iken $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

koşulları sağlanıyorsa, $\mathcal{A}$ sınıfına bir $\sigma -$cebir adı verilir.

Tanım 1.5.2. $\mathcal{A}$ $\sigma -$cebir üzerinde tanımlı $\mu : \mathcal{A} \to R^+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu, $\mathcal{A}$ sınıfındaki ayrık kümelerin bir $\{A_i\}_{i \in N}$ topluluğunun sayılabilir her birleşimi için

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad \forall A_i \cap A_k = \emptyset, i \neq k$$

eşitliğini sağlıyorsa, μ fonksiyonuna $\mathcal{A}$ sınıfı üzerinde bir *ölçüm* denir.

Tanım 1.5.3. R^N' nin alt kümelerinin aşağıda verilen özelliklere sahip σ-cebiri olan bir $\mathcal{A}$ sınıfının ve bu $\mathcal{A}$ sınıfı üzerinde bir μ ölçümünün varlığı kolaylıkla gösterilebilir;

i) R^N'deki her açık kümeye $\mathcal{A}$'ye aittir,

ii) Eğer $A \subset B, B \in \mathcal{A}$ *ve* $\mu(B) = 0$ *ise*, $A \in \mathcal{A}$ ve $\mu(A) = 0$ dir,

iii) $A = \{x \in R^N : a_i \le x_i \le b_i, i = 1,2,....., N\}$ *ise*, $A \in \mathcal{A}$ *ve* $\mu(A) = \prod_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$ dir.

iv) $x \in R^N$ ve $A \in \mathcal{A}$ iken

$$x + A = \{x + y : y \in A\} \in \mathcal{A} \text{ ve } \mu(x + A) = \mu(A)$$

olur,yani μ ölçümü öteleme altında değişmezdir.

Bu özelliklere sahip bir $\mathcal{A}$ sınıfının elemanlarına R^N'nin *Lebesgue* ölçülebilir altkümeleri, μ ölçüm fonksiyonuna, R^N'de *Lebesgue ölçümü* ve $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A)$

gösterimine ise *A* kümesinin ölçümü denir. Bu tez çalışmasında, bir $\Omega \subset R^N$ bölgesinin *Lebesgue* ölçümü $|\Omega|$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.5.4. Eğer $B \subset A \subset R^N$ ve $|B| = 0$ $ise, A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik *A* kümesinde hemen hemen her yerde (h.h.h.) geçerli olarak adlandırılır.

Tanım 1.5.5. A ölçülebilir bir küme olmak üzere, $f : A \to B \cup \{\pm\infty\}$ şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $a \in R$ için

$$\{x \in A : f(x) > a\}$$

kümesi ölçülebilir ise, f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 1.5.6. Eğer *f* fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli ise, o zaman *f* fonksiyonu her ikisi de ölçülebilir ve negatif olmayan $f^+ = \max\{f,0\}$ ve $f^- = -\min\{f,0\}$ fonksiyonları cinsinden $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazılabilir.Bir Ω bölgesi üzerinde tanımlanan $\int_\Omega f^+(x)dx$ ve $\int_\Omega f^-(x)dx$ integrallerinden en az biri sonlu olmak üzere,

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega f^+(x)dx - \int_\Omega f^-(x)dx$$

olarak alınsın.

Eğer iki integral de sonlu ise f fonksiyonuna Ω bölgesinde *Lebesgue integrallenebilir* denir. Ω bölgesinde *Lebesgue* integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfı $L^1(\Omega)$ ile gösterilir.

1.6. Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 1.6.1. Ω, R^N' de bir bölge ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$L^p(\Omega) := \left\{ u \,|\, u : \Omega \to R \text{ ölçülebilir fonksiyon; } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayına *Lebesgue uzayı* adı verilir.

$1 \le p \le \infty$ iken $L^p(\Omega)$ uzayı

$$L^p(\Omega) \|u\|_{L^p(\Omega)} := |u|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.3}$$

normu altında bir *Banach uzayı* olur.

Tanım 1.6.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için h.h.h. $|u(x)| \le M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa, u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir.Bu şekilde tanımlanan M sabitlerinin en büyük alt sınırına $|u|$' nun Ω bölgesindeki *esas (essential) supremumu* denir $ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $L^{\infty}(\Omega)$ olup,bu uzay

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} := |u|_{\infty} = ess\sup_{X\in\Omega}|u(x)|$$

normu altında bir *Banach uzayı* olur.

Tanım 1.6.3. $1 < p < \infty$ olmak üzere, $1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ veya $p' = \frac{p}{p-1}$ olacak şekilde elde edilen p' sayısına p nin *eşleniği (conjugate)* denir.Buna göre, $1 < p < \infty$ *ve* $\varphi \in (L^{p}(\Omega))'$ alınırsa bu durumda her $u \in L^{p}(\Omega)$ için

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

olacak şekilde bir $v \in L^{p'}(\Omega)$ bulunabilir.Buna ek olarak,

$$|v|_{L^{p'}(\Omega)} = |\varphi|_{(L^{p}(\Omega))'}$$

şeklinde normlar arası bir ilişki de mevcut olacağından, $L^{p'}(\Omega) \cong (L^{p}(\Omega))'$ elde edilir,yani bu iki uzay izomorfiktir. Dolayısıyla elemanları çok farklı olmasına rağmen, *Banach uzayı* olmaları açısından bu iki uzay aynı kabul edilebilir.

Teorem 1.6.4. (*Hölder Eşitsizliği*) Eğer $1 < p < \infty, u \in L^{p}(\Omega)$ ve $v \in L^{p'}(\Omega)$ ise, o zaman $uv \in L^{1}(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega}|u(x)v(x)|dx \leq |u|_{p}|v|_{p'}$$

eşitsizliği sağlanır (Adams, 1975).

Teorem 1.6.5. $|\Omega| = \int_{\Omega} dx < \infty$ *ve* $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^{p}(\Omega)$ ise, bu durumda $u \in L^{q}(\Omega)$ olur ve

$$\|\boldsymbol{u}\|_{p} \leq |\boldsymbol{\Omega}|^{(\frac{1}{p})-(\frac{1}{q})}|\boldsymbol{u}|_{q}$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla,

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır(Adams,1975).

Tanım 1.6.6. $L^p(\Omega)$ uzayında *p=2* alınarak elde edilen $L^2(\Omega)$ uzayı

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega u(x)\cdot\overline{v(x)}dx \qquad (1.4)$$

iç çarpımı altında *Hilbert uzayı* olur ('$\cdot$', R^N 'de tanımlanan iç çarpımdır).

Teorem 1.6.7. Eğer $1 \le p \le \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir ve $C_0(\Omega)$ ile $C_0^\infty(\Omega)$ uzayları $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur.Bununla birlikte; $L^p(\Omega)$ uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul $1 < p < \infty$ olmasıdır.(Adams, 1975).

1.7. Sobolev Uzayları ($W^{m.p}(\Omega)$)

Tanım 1.7.1. Ω , R^N ' de bir bölge ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere, Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde *p*. kuvveti integralleri Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay *p=1* için $L^1_{loc}(\Omega)$ şeklinde gösterilen *lokal integrallenebilir fonksiyonlar* sınıfını gösterir.

Tanım 1.7.2. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu-indislisi verilsin.Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna *u* fonksiyonunun α . *zayıf türevi* (distributional derivative) denir. Bununla birlikte *v* fonksiyonu, *u* fonksiyonunun *genelleştirilimiş türevi* olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.7.3. Ω , R^N ' de bir bölge, *m* pozitif bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$W^{m.p}(\Omega) := \{u \in L^P(\Omega) : D^\alpha u \in L^P(\Omega, 0 \le |\alpha| \le m)\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı denir.* $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

. .

$$\|u\|_{W^{m.p}(\Omega)} := \|u\|_{m.p} = \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \left|D^{\alpha}u\right|_P^P \right)^{1/P} \quad ; 1 \le p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m.p}(\Omega)} := \|u\|_{m,\infty} = \max_{0\le|\alpha|\le m} \left|D^{\alpha}u\right|_{\infty} \qquad ; \; p = \infty$$

tanımlanan normlar altında bir *Banach uzayı* olur.

Tanım 1.7.4. Ω , R^N ' de bir bölge, m pozitif bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere, $\|\cdot\|_{m.p}$ normu ile aşağıda verilen vektör uzayları tanımlanabilir;

i) $\left\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m.p} < \infty\right\}$ kümesinin tanımlanışı (*comletion*), $H^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı olarak tanımlanır,

ii) $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ 'deki kapanışı, $W_0^{m,p}(\Omega)$ *Sobolev uzayı* olarak tanımlanır.

Belirtmekte yarar vardır ki $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olup, $1 \le p < \infty$ iken $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ yazılabilir.Buna ek olarak,

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi de mevcuttur (Adams, 1975).

Teorem 1.7.5. Eğer $1 \le p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir.Ayrıca, $1 < p < \infty$ ise $W^{m.p}(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve dolayısıyla yansımalı olur (Adams, 1975).

Teorem 1.7.6. Eğer $1 \le p < \infty$ ise herhangi bir Ω bölgesi için

$$W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$$

olur.(Adams, 1975).

Teorem 1.7.7. Ω , R^N ' de bir bölge olsun.Eğer $1 \le p < \infty$, $mp < N$ ve $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise

$$\|u\|_{P*} \le C\|u\|_{m,p}$$

olacak şekilde bir $C(N, m, p)$ sabiti vardır (Adams, 1975).Burada

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{N_P}{N - mp} & N > mp \\ +\infty & N \leq mp \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan p* sayısına *Sobolev kritik kuvveti* denir.

Bir $\Omega \subset R^N$ bölgesinde tanımlanan *Sobolev* uzaylarının özelliklerini çoğu ve özellikle bu uzaylarda verilen gömülme özelliği, Ω bölgesinin düzgünlüğüne (*regularity*) bağlıdır. Bu tür özellikler, verilen bölgede sağlanan veya sağlanmayan geometrik özelliklerden biri olan koni özelliğinden bahsedilecektir.

Tanım 1.7.8. R^N 'de $B_{r1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{r2}(y)$ açık yuvarlarını göz önüne alalım.

$$K_x = B_{r1}(x) \cap \{x + \lambda(z - x) : z \in B_{r2}(y), \lambda > 0\}$$

kümesine tepe noktası *x* olan bir *sonlu koni* adı verilir. Ω , R^N 'de açık bir bölge olmak üzere,eğer Ω 'nın her *x* noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir sonlu K konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa, o zaman Ω *bölgesi koni özelliğini sağlar* denir.

Teorem 1.7.9. (*Sobolev Gömme Teoremi*) Ω, R^N 'de koni özelliğine sahip açık bir bölge ,$1 \leq m$ ve $0 \leq j$ şeklinde ki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^*$$

yada

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^*$$

gömmesi elde edilir.

ii) $mp = N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad 1 \leq p < \infty$$

yada

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad 1 \leq p < \infty$$

gömmesi elde edilir. Üstelik *p=1* olarak alınırsa

$$W^{j+n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir(Adams, 2003).

iii) $mp > N$ ise

$$W^{j+n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömmesi elde edilir.

Yukarıdaki gömmelerde W yerine W_0 uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın yukarıdaki gömmeler yine geçerli olur.

Teorem 1.7.10. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur (Adams, 1975).

Teorem 1.7.11. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise o zaman $|\Omega| < \infty$ dur (Adams, 1975).

Teorem 1.7.12. (*Rellich-Kondrachov Teoremi*) Ω, R^N' de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $\Omega_0 \subset \Omega$ sınırlı bir alt küme, $1 \leq m$ ve $0 \leq j$ şeklinde ki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q < q^*$$

ii) $mp = N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q \leq \infty$$

iii) $mp > N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega),$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q \leq \infty$$

gömmeleri kompakttır.

Eğer Ω bölgesi sınırlı ise, yukarıdaki teoremde $\Omega_0 = \Omega$ alınabilir ve Ω bölgesi R^N'de keyfi bir bölge ise $W^{j+m,p}(\Omega)$ yerine $W_0^{j+m,p}(\Omega)$ konulması koşuluyla yukarıdaki gömmeler kompakt olur (Adams, 2003).

2. ORLICZ UZAYLARI

2.1. Giriş

Tanım 2.1.1. Lebesgue uzaylarına tekrar bakacak olursak 1.bölümde $L^p(\Omega)$ uzayının

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty ; \tag{2.1}$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı olduğu verilmişti. Ayrıca

$L^p(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \; 1 \le p < \infty . \tag{2.2}$$

idi. Eğer $\Phi = \Phi(t) = t^p$ alırsak , (2.1) ve (2.2) den şöyle yazabiliriz;

$$\int_\Omega \Phi\left(|u(x)|\right) dx < \infty , \tag{2.3}$$

ve

$$\|u\|_p = \Phi^{-1}\left(\int_\Omega \Phi\left(|u(x)|\right) dx \right), \tag{2.4}$$

burada Φ^{-1}, Φ ’nin ters fonksiyondur ve $\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}$ olarak tanımlanır.

Yukarıda bahsedilen Φ fonksiyonunun daha genel bir fonksiyonla değiştirilebilir. Bunu göstermek için önce Orlicz sınıflarını tanımlamak gerekir.

Tanım 2.1.2. Ω , R^N ’nin açık bir alt kümesi olsun. $\Phi = \Phi(t), [0, \infty[$ üzerinde tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Ω bölgesinde h.h.h. tanımlı, reel (veya kompleks) değerli ölçülebilir fonksiyonların kümesi

$$\tilde{L}_\Phi(\Omega) \tag{2.5}$$

ile gösterilir ve $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ kümesindeki her fonksiyon için

$$\int_\Omega \Phi\left(|u(x)|\right) dx < \infty \tag{2.6}$$

sağlanır.

$\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ kümesine *Orlicz sınıfı* denir ve aşağıdaki gösterim kullanılır

$$\varrho(u; \Phi) = \int_\Omega \Phi\left(|u(x)|\right) dx . \tag{2.7}$$

Örnek 2.1.3.

(i) $L^p(\Omega)$ Lebesgue uzayı, $p \geqq 1$ şartıyla $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzaylarının özel durumudur. Burada $\Phi(t) = ct^p$ ve c yerine pozitif keyfi bir sabit yazılır.

(ii) Φ fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilirse

$$\Phi(t) = t.\log^+ t, \ \ t \in [0, \infty[,$$

burada $\log^+ t = \max(0, \log t)$ dır. $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ 'ye karşılık gelen sınıf $L^1(\Omega)$ Lebesgue uzayı olur.

(iii) $\Phi(t) = |\sin t|, \ t \in [0, \infty[,$ yazarsak, öyleyse $\mu(\Omega) < \infty$ ise Ω ölçülebilir fonksiyon $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ 'dedir

(iv) $N = 1, \Omega =]0,1[\ ve \ \Phi(t) = e^t$ olsun. $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ de, $u(x) = -\frac{1}{2}\log x$ şeklinde yazılır. $v(x) = -\log x = 2u(x)$ şeklinde yazılması doğru olmaz.

Önceki örneğin (iv) şıkkında görüldüğü üzere $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ 'nin bir vektör uzayı olmasına gerek yoktur. Vektör uzayı olsa bile, $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ 'nin normunun nasıl olacağı Φ fonksiyonunun Tanım 2.1.2 deki tanımından açıkça anlaşılamaz çünkü Tanım 2.1.2 de Φ^{-1} ters fonksiyonunun varlığı hakkında bir şey söylenmemiştir. Bu nedenle Tanım 2.1.2 de Φ fonksiyonlarının kümesini sınırlandırmak gerekir.

Not 2.1.4. Bu bölümde ele alınan uzaylarla ilgili temel bilgiler, tanımlar, teoremler ve ispatları.A.Kufner, 1977, A.C. Zaanen,M.A.Krasnosel'skiî ve J.B. Rutickiî kitaplarında bulunmaktadır.

2.2. Young fonksiyonu ve Jensen Eşitsizliği

Tanım 2.2.1. $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$ t $\geqq$ 0 , (2.8)

ise Φ ye Young fonksiyonu denir.Burada $[0, \infty[$ üzerinde tanımlanan gerçek değerli Φ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) φ (0)=0;

(ii) φ (s) > 0 , s > 0 ise;

(iii) φ her noktada süreklidir, s $\geqq$ 0ise ;

(iv) φ , $[0,\infty[$ de azalmayandır ;

(v) $\varphi(\infty)=\infty$, (yani , $\lim_{s\to\infty}\varphi(s)=\infty$).

Young fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.2.2. Φ, $[0, \infty[$ ‘de konveks ve sürekli,negatif olmayan,kesinlikle artan bir Young fonksiyonudur.Diğer taraftan;

$$\Phi\ (0)=0\ , \qquad \Phi(\infty)=\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=\infty\ ; \tag{2.9}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\Phi(t)}{t}=0\ ; \tag{2.10}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t}=\infty\ ; \tag{2.11}$$

$$\Phi(\alpha t)\leqq \alpha\,\Phi(t) \quad , \quad \alpha\in[0,1]\ \ ve\ \ t\geqq 0 \ \text{ ise ;} \tag{2.12}$$

$$\Phi(\beta t)\geqq \beta\,\Phi(t) \quad , \quad \beta>1\ \ ve\ \ t\geqq 0 \ \text{ ise ;} \tag{2.13}$$

Teorem 2.2.3. Φ, bir Young fonksiyonu ve $\mu(\Omega)<\infty$ olsun. O zaman $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ konveks küme ve

$$\tilde{L}_\Phi(\Omega)\subset L^1(\Omega) \tag{2.14}$$

olur.

Not 2.2.4. (2.14) de verilen eşitsizlik kesindir, çünkü Ω üzerinde öyle bir u fonksiyonu bulunabilir ki

$$u\in L^1(\Omega),\ \ \text{ancak}\ \ \ u\notin \tilde{L}_\Phi(\Omega). \tag{2.15}$$

Böyle bir u fonksiyonu şu şekilde oluşturulabilir.(2.11.) den $t>1(n\in N)$ dir.O halde

$$\frac{\Phi(t_n)}{t_n}\geqq 2^n\ , \qquad\qquad n=1,2,....$$

olur.

Birbirinden bağımsız $\Omega_n\subset\Omega$ kümeler seçelim , o halde

$$\mu(\Omega_n)=\frac{1}{t_n.2^n}\mu(\Omega), \qquad\qquad n\in N\ .$$

olur.

$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\Omega_n)=\mu(\Omega).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t_n.2^n}<\mu(\Omega)$ olduğunu biliyoruz . Şimdi aşağıdaki tanımı yapalım,

$$u(x)=\begin{cases} t_n & , \ x\in\Omega_n \quad n=1,2,...., \qquad ise \\ 0 & , \ \Omega \ dışında \ . \end{cases}$$

o zaman ,

$$\int_\Omega |u(x)|\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} t_n\mu(\Omega_n)=\sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{1}{t_n.2^n}\mu(\Omega)=\mu(\Omega)<\infty,$$

fakat,

$$\int_\Omega \varphi\big(|u(x)|\big)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(t_n)\mu(\Omega_n) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} t_n.2^n \frac{1}{t_n.2^n}\mu(\Omega)=\infty,$$

böylece (2.15) de verilen u tanımlanmış olur.

Teorem 2.2.5. $u\in L^1(\Omega)$ ve $\mu(\Omega)<\infty$ olsun. $u\in \tilde{L}_\Phi(\Omega)$ olacak şekilde bir Φ Young fonksiyonu vardır.

Örnek (2.2.6.) (i) $p>1$, $\varphi(t)=t^{p-1}$ ise $\Phi(t)=\dfrac{t^p}{p}$ olur.

(ii) $\varphi(t)=e^t-1$ ise $\Phi(t)=e^t-t-1$ olur

(iii) $\varphi(t)=2te^{t^2}$ ise $\Phi(t)=e^{t^2}-1$ olur

(iv) $\varphi(t)=t$ fonksiyonu $L^1(\Omega)$ Lebesgue uzayına karşılık gelen bir Young fonksiyonudur.

(v) φ fonksiyonu (3.1.4.) örneğindeki (ii) ve (iii) de Young fonksiyonu değillerdir**.**

Not 2.2.7. M.A.Krasnosel'skiî ve J.B. Rutickiî ,Young fonksiyonlarını daha detaylı bir biçimde incelemişlerdir..Bazı yazarlar Young fonksiyonuna *N-fonksyonu* demişlerdir. M.A.Krasnosel'skiî ve J.B. Rutickiî de böyle demişler.

Not 2.2.8.

$$\Phi(t)=t\log^+ t$$

fonksiyonunu inceleyelim.Örnek (2.1.4.)'ün (ii) öncülünün bir Young fonksiyonu olduğu bir önceki notta verilmiştir.Sonuç olarak Jensen eşitsizliğine değinmemiz gerekir.

Teorem 2.2.9. Φ , R de konveks olsun

(i) $u_1,....,u_n \in R ve \alpha_1,....,\alpha_n$ pozitif sayılar olsun.O halde

$$\Phi\left(\frac{\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+......+\alpha_n u_n}{\alpha_1+\alpha_2+.....+\alpha_n}\right) \leqq \frac{\alpha_1\Phi(u_1)+\alpha_2\Phi(u_2)+......+\alpha_n\Phi(u_n)}{\alpha_1+\alpha_2+.....+\alpha_n} \quad (2.16)$$

olur.

(ii) $\alpha=\alpha(x),\Omega$ üzerinde tanımlı ve h.h.h. pozitif olsun.O halde,

$$\Phi\left(\frac{\int_\Omega u(x)\alpha(x)dx}{\int_\Omega \alpha(x)dx}\right) \leqq \frac{\int_\Omega \Phi(u(x))\alpha(x)dx}{\int_\Omega \alpha(x)dx} \quad (2.17)$$

olur.Negatif olmayan tüm u fonksiyonların integrali için (2.17)' yi kullanacağız. ((2.16) daki eşitsizliğe Jensen's eşitsizliği,(2.17)'ye ise Jensen's integral eşitsizliği denir.)

2.3. Tamamlayıcı Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1. Φ, φ fonksiyonu ile oluşturulan bir Young fonksiyonu olsun:

$$\Phi(t)=\int_0^1 \varphi(s)ds. \quad (2.18)$$

yerine yazarsak

$$\Psi(t)=\sup_{\varphi(s)\leq t} s \ , \qquad t \geqq 0\ , \quad (2.19)$$

ve

$$\Psi(t)=\int_0^t \psi(s)ds. \quad (2.20)$$

Ψ fonksiyonuna Φ fonksiyonunun tamamlayıcı fonksiyonu denir.

Not 2.3.2. $\varphi,[0,\infty[$ da sürekli,kesin artan ise Ψ ve φ^{-1} birbirlerinin ters fonksiyonudurlar.Genel olarak, φ ve Ψ ye karşılıklı olarak ters fonksiyondurlar.Sonuç olarak ,Ψ , Φ nin tamamlayıcı fonksiyonu ise Φ de Ψ nin tamamlayıcı fonksiyonudur. Ayrıca Φ ve Ψ ye birbirlerinin tamamlayıcı Young fonksiyonlarıdır denir.

Şimdi biz Young eşitsizliğini inceleyeceğiz.

2.4. Young Eşitsizliği

(W.H.Young, 1912). Φ ve Ψ birbirinin tamamlayıcı Young fonksiyonu olsunlar. O halde tüm $u,v\in[0,\infty[$ için

$$uv \leqq \Phi(u)+\Psi(v) \tag{2.21}$$

sağlanır.Eğer,

$$v=\Phi(u) \text{ veya } u=\Psi(v) \tag{2.22}$$

alınırsa ancak (2.21) deki eşitlik sağlanır.

Örnekler 2.4.1. (i) $\Phi(t)=\dfrac{t^p}{p}$ ve $p>1$ için, tamamlayıcı fonksiyon,

$$\Psi(T)=\frac{1}{q}t^q \text{ burada } q=\frac{p}{p-1} \text{ , yani } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

ile tanımlanır.

(ii) $\Phi(t)=e^{t^2}-1$ fonksiyonu $\Phi(t)=\int_0^t \varphi(s)ds \; (t>0)$ yi sağlar, burada $\Phi(s)=2se^{s^2}$ dir.

ψ fonksiyonu veya Ψ fonksiyonunun için analitik bir ifade veremiyoruz. Sadece $\Psi(t)$ nin asimptotik olarak $\tilde{\Psi}(t)=t\sqrt{(\log t)}$ ye eşit olduğu gösterilebilir.

(iii) $\Phi(t)=e^t-t-1$ ve $\Psi(t)=(1+t)\log(1+t)-t$ tamamlayıcı fonksiyonlardır.

Örnek 2.4.2. $\Phi(t)=t\log^+ t$ olsun. O halde φ şöyle tanımlanır:

$$\varphi(t)=\begin{cases} 0 & ,0<t<1 \; ise \\ \log t+1 & ,t\geq \quad ise \end{cases}$$

Aşağıdaki fonksiyonları yazarsak,

$$\Psi(t)=\begin{cases} 0 & ,\; t=0 \quad ise \\ 1 & ,0<t<1 \; ise \\ e^{t-1} & ,t\geq 1 \quad ise \end{cases}$$

$$\Psi(t)=\int_0^t \psi(s)ds=\begin{cases} t & ,0<t<1 \; ise \\ e^{t-1} & ,t\geq 1 \quad ise \end{cases}$$

Φ,Ψ tamamlayıcı Young fonksiyonları olur.

Aşağıdaki teorem Orlicz sınıflarında Hölder eşitsizliğini verir.

Teorem 2.4.3. Φ,Ψ tamamlayıcı Young fonksiyon çifti olsun. Eğer $u\in \tilde{L}_\Phi(\Omega), v\in \tilde{L}_\Psi(\Omega)$ ise

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leqq \varrho(u;\Phi)+\varrho(v;\Psi) \tag{2.23}$$

yani $uv \in L^1(\Omega)$ olur.

2.5. Δ_2-Koşulu

Bu bölümde Young fonksiyonlarının özel bir sınıfını inceleyeceğiz.Bu daha sonra önemli olacak.

Tanım 2.5.1. Eğer, k>0 ve $T \geqq 0$ sayıları

$$\Phi(2t) \leqq k\Phi(t) \quad , \forall t \geqq T \quad \text{için} \tag{2.24}$$

olacak şekilde varsa Φ Young fonksiyonu Δ_2-koşulunu sağlıyor denir ve kısaca $\Phi \in \Delta_2$ yazılır.

Örnek 2.5.2. $c>0, p>1, \Phi(t)=c^p$ fonksiyonu $k=2^p$, $T=0$ alınırsa Δ_2-koşulunu sağlar.

Aşağıdaki Teorem Φ fonksiyonunun Δ_2-koşulunu sağladığını gösteren önemli (yararlı) bir kriterdir.

Teorem 2.5.3. Φ Young fonksiyonudur ancak ve ancak,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\varphi(t)}{\Phi(t)} < \infty \tag{2.25}$$

ise Δ_2-koşulunu sağlar.

Örnek 2.5.4. Teorem 2.5.3. ten görüldüğü gibi,

$$\Phi(t) = (1+t)\log(1+t) - t$$

ise $\Phi \in \Delta_2$ dir.Eğer

$$\Phi(t) = e^t - t - 1 \quad \text{ve} \quad \Phi(t) = e^{t^2} - 1$$

ise $\Phi \notin \Delta_2$ dir.

Not 2.5.5. $\Phi \in \Delta_2$ olsun**.** Teorem 2.5.3.' ten $t \geqq T$ için,

$$\frac{t\,\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leqq c, \quad \text{yani} \quad (\log \Phi(t))' \leqq (\log t^c)' \tag{2.26}$$

olduğunu biliyoruz.Dolayısıyla $c_0 > 0$ *ve* $T_0 > 0$ dır,öyleyse

$$\Phi(t) \leqq c_0 t^c \quad , \quad t \geqq T_0 \quad \text{ise}$$

olur.

Teorem 2.5.6. Ψ , Φ nin tamamlayıcı Young fonksiyonu olmak üzere, Φ Young fonksiyonunun Δ_2 -koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\Psi(t) \leqq \frac{1}{2k_0}\Psi(k_0 t) \quad , \qquad t \geqq T \tag{2.27}$$

olacak şekilde $T_0 > 0 \; ve \; k_0 > 0$ sayılarının bulunmasıdır.

Örnek 2.5.7.

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & ,t \in [0,1[\quad ise \\ n! & ,t \in [(n-1)!, n![\;, n = 2,3,.... \; ise \end{cases}$$

2.6. Orlicz Sınıflarının Ek Özellikleri

Teorem 2.6.1. Φ_1, Φ_2 iki Young fonksiyonu ve $\mu(\Omega) < \infty$ olsun ve

$$\Phi_1(t) \leqq \Phi_2(t) \;, \qquad t \geqq T > 0 \tag{2.28}$$

sağlansın. O zaman

$$\tilde{L}_{\Phi_2}(\Omega) \subset \tilde{L}_{\Phi_1}(\Omega). \tag{2.29}$$

Teorem 2.6.2. $\mu(\Omega) < \infty$ ve Φ_1, Φ_2 iki Young fonksiyonu olsun. $\tilde{L}_{\Phi_2}(\Omega) \subset \tilde{L}_{\Phi_1}(\Omega)$ nin doğru olması için gerek ve yeter koşul

$$\Phi_1(t) \leqq c\Phi_2(t), \qquad t \geqq T \tag{2.30}$$

olacak şekilde $c > 0$ ve $T > 0$ sayılarının bulunmasıdır.

Teorem 2.6.3. **(i)** $\mu(\Omega) < \infty$ olsun. Ancak ve ancak $\Phi \in \Delta_2$ ise $\tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ lineer bir kümedir.

(ii) $\mu(\Omega) = \infty$ olsun ve $T = 0$ ile $\Phi \in \Delta_2$ olsun.O zaman $\tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ lineer bir kümedir.

Şimdi Young fonksiyonları için bir sıralamayı göstereceğiz.

Tanım 2.6.4. Φ_1, Φ_2 iki Young fonksiyonu olsun.

$$\Phi(\alpha t) \leqq \Phi_2(ct) \quad , \quad t \geqq T \tag{2.31}$$

olacak şekilde c ve T pozitif sabitleri varsa

$$\Phi_1 \prec \Phi_2 \tag{2.32}$$

yazılır. Eğer

$$\Phi_1 \prec \Phi_2 \quad \text{ve} \quad \Phi_2 \prec \Phi_1$$

ise Φ_1 ve Φ_2 *eşdeğerdir(denktir)* denir.

Örnekler 2.6.5.

(i) $t^p \prec t^q$, $1 < p < q$ için

(ii) $t^p \prec t^q \left(\left|\log t\right|+1\right) \prec t^{p+\varepsilon}$ $p > 1$ ve her $\varepsilon > 0$

(iii) Her Φ Young fonksiyonu, $\Phi(t)$ fonksiyonu ve $\Phi_1(t) = \Phi(k\,t), k > 0$,eşdeğerdir.

Notlar 2.6.6. Eğer $\Phi_1 \prec \Phi_2$ ise bu iki fonksiyonun tamamlayıcı fonksiyonları sırasıyla Ψ_1 ve Ψ_2 olmak üzere, $\Psi_2 \prec \Psi_1$ olur.
Aşağıda $\prec$ yerine daha kesin bir sıralama belirten olan $\ll$ yi kullanacağız.

Tanım 2.6.7. Φ_1, Φ_2 iki Young fonksiyonu olsun.

Eğer $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 0$ ise $\Phi_1 \ll \Phi_2$ olur.

Örnekler 2.6.8.

(i) $t^p \ll t^q$, $1<p<q$ ise

(ii) Ayrıca , $p>1$ ve tüm $\varepsilon > 0$ ise, $t^p \ll t^q \left(\left|\log t\right|+1\right) \ll t^{p+\varepsilon}$

Not 2.6.9. $\Phi_1 \ll \Phi_2$ ise $\Phi_1 \prec \Phi_2$'de sağlanır ama tersi için sağlanmaz. Eğer $\lambda > 0$ ise $\Phi_1(t) = \Phi(\lambda t)$ alırsak $\Phi_1 \prec \Phi_2$ olur, fakat $\Phi_1 \ll \Phi_2$ sağlanmaz.

Not 2.6.10. Ψ_1, Ψ_2 fonksiyonları sırasıyla Φ_1, Φ_2 fonksiyonlarının tamamlayıcı fonksiyonları olmak üzere, eğer $\Phi_1 \ll \Phi_2$ ise $\Psi_2 \ll \Psi_1$ olur.

Φ_1 , Φ_2 ' den daha hızlı azaldığı yerde $\prec$ yerine $\ll$ kullanılır. $\prec$ ve $\ll$ sıralamaları ile ilgili daha detaylı bilgi M.A.Krasnosel'skiî ve J.B. Rutickiî kitabında bulabilirisiniz.

2.7. Orlicz Uzayları

Tanım 2.7.1. Φ, Ψ Young fonksiyonları birbirlerinin tümleyeni olsunlar ve *u*, $\Omega \subset R^N$ h.h.h. ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$\|u\|_{\phi} = \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \tag{2.33}$$

sayısı için , $v \in \tilde{L}_{\psi}(\Omega)$ tüm fonksiyonlar üzerinde supremumu vardır. $\varrho(v;\Psi) \leqq 1$ ile gösterilir,*u* 'nun Orlicz normu denir. $\|u\|_{\Phi} < \infty$ olan tüm *u* fonksiyonlarının kümesine Orlicz uzayı denir ve $L_{\Phi}(\Omega)$ sembolü ile gösterilir. (Orlizc normu Teorem 2.7.3. te anlatıldı.Aksi belirtilmediği sürece h.h.h. Ω yı tüm ölçülebilir fonksiyonlar olarak düşüneceğiz.bakınız açıklama 2.1.2.)

Tarihsel ve terminolojik notlar 2.7.2. Orlicz sınıfları ve uzayları 1931 yılında W.Orlicz ve Z.Birnbaum tarafından incelenip tanıtıldı.Elbetteki çeşitli özel durumlar, esasen Fourier serisinin toplanabilirlik teorisi ile bağlantılı olarak 1931'den önce araştırıldı.(Örneğin 1912'de W.H.Young ve diğerleri).Literatürde kullanılan gösterimde farklılıklar vardır.Örneğin M.A.Krasnosel'skiî ve J.B. Rutickiî Orlicz sınıfını $L_{\Phi}(\Omega)$ ile Orlicz uzayını $L^*_{\Phi}(\Omega)$ ile gösterdi. A.C. Zaanen ise sınıfı $L^*_{\Phi}(\Omega)$ ile uzayı ise $L_{\Phi}(\Omega)$ ile göstermiştir.

(2.23) den aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\|u\|_{\Phi} \leqq \varrho(u;\Phi) + \varrho(v;\Psi) \leqq \varrho(u;\Phi) + 1. \tag{2.34}$$

Dolayısıyla $u \in \tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ için $\|u\|_{\Phi} < \infty$ ve böylece ,

$$\tilde{L}_{\Phi}(\Omega) \subset L_{\Phi}(\Omega) \tag{2.35}$$

olur.

Teorem 2.7.3. $L_{\Phi}(\Omega)$ (karmaşık) bir vektör uzayı ve (2.33), $L_{\Phi}(\Omega)$ de bir norm tanımlar.

Açıklama 2.7.4. Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $\sup\limits_{v,Q(v;\Psi)\leq 1}$ yerine $\sup\limits_{v}$ gösterimini kullanacağız.

Not 2.7.5. Literatürde ,yani M.A.Krasnosel'skiî ve J.B. Rutickiî Orlicz uzaylarının biraz değiştirilmiş tanımını vermişlerdir.Eğer her $v \in \tilde{L}_{\Psi}(\Omega)$ için $u\,.\,v\ \ ,L_1(\Omega)$ yani

$$\left|\int_{\Omega} u(x)v(x)dx\right| < \infty \tag{2.36}$$

ise u fonksiyonu Ω üzerinde tanımlı Orlicz uzayına aittir denir. (Burada Orlicz uzayı $\mathcal{L}_{\Phi}(\Omega)$ olarak ifade edilecektir)

$\mathcal{L}_{\Phi}(\Omega)$ nin normu ,

$$|||u|||_{\Phi} = \sup_{v}\left|\int_{\Omega} u(x)v(x)dx\right| \tag{2.37}$$

olur.

(bakınız açıklama 2.74) Ancak,(2.33) deki $\|\cdot\|_{\Phi}$ ile (2.37) deki $|||\cdot|||_{\Phi}$ farklı şeylerdir.Çünkü $u(x) \neq 0$ $(a \notin C, a \neq 0\, için\ \operatorname{sgn} a = a/|a|\,)$ için $v_1(x) = |v(x)/\operatorname{sgn} u(x)|$ ve $u(x) = 0$ için $v_1(x) = v(x)$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx = \left|\int_{\Omega} u(x)v_1(x)dx\right|$$

ve $\varrho(v;\psi) = \varrho(v_1;\psi)$ sonucu çıkar.

M.A.Krasnosel'skiî ve J.B. Rutickiî, $|||u||| < \infty$ olduğunu ispatladı,dolayısıyla $\mathcal{L}_{\Phi}(\Omega) \subset L_{\Phi}(\Omega)$ olur.Diğer taraftan $u \in L_{\Phi}(\Omega)$ için $c \geq 0$ sabit olmak üzere $cu \in L_{\Phi}(\Omega)$ olur.(bakınız Teorem 2.4.3),böylelikle (3.23) den $\int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ sonludur.

Örneğin $u \in \mathcal{L}_{\Phi}(\Omega)$.

Sonuç olarak her iki tanımda da aynı norm ve aynı uzay elde edilir.

Örnek 2.7.6. $p > 1$ için $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{p}$ ve $q = \dfrac{p}{p-1}$ için $\Psi(t) = \dfrac{t^q}{q}$ olur; sonuç olarak,

$$\|u\|_{\Phi} = \sup_{v}\int_{\Omega} |u(x)v(x)|\,dx \tag{2.38}$$

olur. Burada $v \in \tilde{L}_{\Psi}(\Omega)$ olduğundan aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\varrho(v;\Psi)\ \frac{1}{q}\int_{\Omega}|v(x)|^{q}\,dx \leqq 1$$

Not 2.7.7. $\|\cdot\|_{p}$ Orlicz normu monotondur.Şöyleki; eğer $u,w\in L_{\Phi}(\Omega)$ ve tüm $x\in\Omega$ için $|u(x)| \leqq |w(x)|$ ise $\|u\|_{\Phi} \leqq \|w\|_{\Phi}$ olur.

Teorem 2.7.8. Φ,Ψ tamamlayıcı Young fonksiyonları olsunlar. $u\in L_{\Phi}(\Omega)$ ve $v\in L_{\Phi}(\Omega)$ ise $u.v\in L_{1}(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega}|u(x)v(x)|\,dx \leqq \|u\|_{\Phi}\cdot\|v\|_{\Psi} \tag{2.39}$$

Not 2.7.9. (2.39) ta verilen eşitsizlik Hölder eşitsizliğininin başka bir versiyonudur.Fakat bu Hölder eşitsizliği (2.39) ta verilen ifadenin özel bir durumu değildir. Gerçekten,eğer $L^{p}(\Omega)$ ve $L^{q}(\Omega)$ Lebesgue uzaylarını, $L_{\Phi}(\Omega)$ *ve* $L_{\Psi}(\Omega)$ Orlicz uzayları gibi düşünürsek ve $\Phi(t)=\frac{t^{p}}{p},\Psi(t)=\frac{t^{q}}{q}(p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ alırsak , o halde (2.39) ta verilen eşitsizlik aşağıdaki gibi olur

$$\int_{\Omega}|u(x)v(x)dx| \leqq p^{1/p}q^{1/q}\|u\|_{p}.\|v\|_{q}$$

bu eşitsizlik bilinen Hölder eşitsizliğinden farklıdır.

Teorem 2.7.2. Φ bir Young fonksiyonu ve $u\in L_{\Phi}(\Omega)$ ise $\|u\|_{\Phi}\neq 0$ dır. Öyleyse

$$\int_{\Omega}\varphi\left(\frac{1}{\|u\|_{\Phi}}|u(x)|\right)dx \leqq 1$$

olur.

2.8. Luxemburg Normu

Tanım 2.8.1. Φ bir Young fonksiyonu ve u , Ω üzerinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$|||u|||_{\Phi}=\inf\left\{\ k>0;\int_{\Omega}\varphi\left(\frac{1}{k}|u(x)|\right)dx \leqq 1\ \right\}$$

sayısına u'nun Luxemburg normu denir.

Not 2.8.2. Eğer $u\in L_{\Phi}(\Omega)$ ise Teorem 2.7.2. den aşağıdaki ifade yazılır.

$$|||u|||_{\Phi} \leqq \|u\|_{\Phi} \tag{2.40}$$

Not 2.8.3 $\|u\|_{\Phi}$, $L_{\Phi}(\Omega)$ üzerinde bir normdur.

Teorem 2.8.4. $u \in L_{\Phi}(\Omega)$ olsun.O halde,

(i) $\varrho(u;\Phi) \leqq \|u\|_{\Phi}$, $\|u\|_{\Phi} \leqq 1$ ise;

(ii) $\varrho(u;\Phi) \geqq \|u\|_{\Phi}$, $\|u\|_{\Phi} > 1$ ise,

yazılabilir.

Teorem 2.8.5. Her $u \in L_{\Phi}(\Omega)$ için,

$$\|u\|_{\Phi} \leqq \|u\|_{\phi} \leqq 2\|u\|_{\Phi}, \tag{2.41}$$

olur.Yani $\|.\|_{\Phi}$ ve $\|.\|_{\Phi}$ normları eşdeğerdir.

Not 2.8.6. Teorem (2.8.4.) ten $\|v\|_{\Psi} \leqq 1$ ise ancak ve ancak $\varrho(v;\Psi) \leqq 1$ dir.Bu gerçeği kullanarak Orlicz normunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\|u\|_{\Phi} = \sup_{\|v\|_{\psi} \leq 1} \int_{\Omega} |u(x)v(x)|\,dx \tag{2.42}$$

Örnek 2.8.7. $\Phi(t) = t^{p}/p \ (p > 1)$ için

$$\|u\|_{\Phi} = \left(\frac{1}{p}\right)^{1/p} \|u\|_{p} \tag{2.43}$$

olur. Çünkü,

$$\varrho\left(\frac{u}{k};\Phi\right) \leqq 1$$

eşitsizliğinden

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|\,dx \leqq q^{1/q}\left(\frac{1}{q}\right)^{1/q} \|u\|_{p}.\|v\|_{q} = \|u\|_{p}.\|v\|_{q}$$

gösterimi olur ki bu klasik Hölder eşitsizliğinden başka bir şey değil.

2.9. Orlicz Uzaylarının Tamlığı

Teorem 2.9.1. $L_{\Phi}(\Omega)$ Orlicz uzayı bir Banach uzayıdır.

2.10. Orlicz Uzaylarında Yakınsama

$L_{\Phi}(\Omega)$ Orlicz uzayında bildiğimiz yakınsama, $\|.\|_{\Phi}$ Orlicz normları koşullarında verilir, yani

$$L_\Phi(\Omega) \text{ de } u_n \to u \text{ yani } \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_\Phi = 0.$$

Tanım 2.10.1.

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $L_\Phi(\Omega)$ de bir yakınsak dizi ve $u \in L_\Phi(\Omega)$ ise aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n - u; \Phi) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(|u_n(x) - u(x)|)dx = 0. \tag{2.44}$$

Bu durumda $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u \in L_\Phi(\Omega)$ fonksiyonuna $\Phi-$ortalama yakınsaktır denir.

Not 2.10.2. Eğer $w \in L_\Phi(\Omega), \|w\|_\Phi \leqq 1$ ise o halde (2.41) ve Teorem 2.8.4. ten aşağıdaki ifade yazılır.

$$\varrho(w;\Phi) \leqq \|w\|_\Phi . \tag{2.45}$$

$w = u_n - u$, $n \in N$ ile (3.44) eşitsizliğini kullanılarak aşağıdaki sonucu elde ederiz. Φ yakınsama demek $L_\Phi(\Omega)$' de yakınsama anlamına gelir.Bunun tersini düşünmeyeceğimizi M.A.Krasnosel'skiî ve J.B. Rutickiî' de gösterilmiştir..Bu ifade $\Phi \in \Delta_2$ koşuluna dayanmaktadır. $\Phi \in \Delta_2$ için her iki yakınsama eşdeğerdir.

Teorem 2.10.3. Φ, Δ_2 koşulunu sağlasın($T = 0, \mu(\Omega) = \infty$ ise).O halde $L_\Phi(\Omega)$'de u_n, u' ya yakınsar ancak ve ancak u_n, u' ya ortalama yakınsaktır(mean convergent).

2.11. Ayrılabilirlik

Teorem 2.11.1. Φ, Δ_2 koşulunu sağlasın ($T = 0, \mu(\Omega) = \infty$ ise).O halde $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayı ayrılabilirdir.

Not 2.11.2. Φ'nin Δ_2 koşulunu sağlaması tek başına yeterli değildir, aynı zamanda $L_\Phi(\Omega)$' nin de ayrılabilir olması gerekir (bakınız M.A.Krasnosel'skiî ve J.B. Rutickiî veya W.A.Luxemburg)

2.12. $E_\Phi(\Omega)$ Uzayı

Açıklama 2.12.1. Aksi belirtilmedikçe Ω, R^n ' nin boş olmayan açık alt kümesi ve $\mu(\Omega) < \infty$ olarak alınacaktır.

Bu açıklamada yeni bir fonksiyon uzayını tanımlayacağız.

Tanım 2.12.2. $B(\Omega), \Omega$ üzerinde tanımlı tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $E_\Phi(\Omega)$ uzayı, $B(\Omega)$'nın $\|\cdot\|_\Phi$ Orlicz normu altında kapanışı olarak tanımlanır. $E_\Phi(\Omega)$ bir vektör uzayı olduğu açıktır. Öncelikle $E_\Phi(\Omega)$ uzayı ile $L_\Phi(\Omega)$ ve $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ uzayları arasındaki ilişkiye bakacağız.

Teorem 2.12.3. Aşağıdaki ifade sağlanır

$$E_\Phi(\Omega) \subset \tilde{L}_\Phi(\Omega) \tag{2.46}$$

Eğer Φ, Δ_2 koşulunu sağlıyorsa O halde,

$$E_\Phi(\Omega) = \tilde{L}_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)\,. \tag{2.47}$$

Not 2.12.4. Eğer $\Phi \notin \Delta_2$ ise,

$$E_\Phi(\Omega) \subsetneqq \tilde{L}_\Phi(\Omega) \subsetneqq L_\Phi(\Omega)\,,$$

olur. $E_\Phi(\Omega)$ ve $L_\Phi(\Omega)$ vektör uzaylarıdır ve $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ Teorem 2.6.3. e göre lineer bir küme değildir.

Teorem 2.12.5. $E_\Phi(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir.

2.13. Sürekli Doğrusal Fonksiyoneller

Teorem 2.13.1. Φ, Ψ tamamlayıcı Young fonksiyon çifti olsunlar. v, $L_\Psi(\Omega)$'de sabit bir fonksiyon olmak üzere

$$F(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx\,, \quad u \in L_\Phi(\Omega) \tag{2.48}$$

formülünden $L_\Phi(\Omega)$ 'de sürekli lineer bir F fonksiyoneli tanımlanır ve

$$\tfrac{1}{2}\|v\|_\Psi \leqq \|F\| \leqq \|u\|_\Psi\,, \tag{2.49}$$

olur. Burada $\|F\|$, $F \in [L_\Phi(\Omega)]^*$ nin bir normudur.

Not 2.13.2. (2.49) den hareketle $L_\Psi(\Omega)$ uzayının $[L_\Phi(\Omega)]^*$ nin bir altkümesi olduğunu düşünebiliriz. Fakat, genellikle,

$$L_\Psi(\Omega) \neq [L_\Phi(\Omega)]^*$$

dir.

Teorem 2.13.3. Φ 'nin Δ_2 koşulunu sağlamadığını varsayalım. O zaman (2.48) daki gibi $L_\Phi(\Omega)$ de tanımlı sürekli doğrusal bir fonksiyonel olduğunu söyleyemeyiz.

Teorem 2.13.4. F, $E_\Phi(\Omega)$ de tanımlı sınırlı doğrusal bir fonksiyonel olsun. O zaman

$$F(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad u \in E_\Phi(\Omega) \tag{2.50}$$

olacak şekilde sadece bir $v \in L_\Psi(\Omega)$ vardır.

Teorem 2.13.5. (2.50) de verilen ifade kullanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir ki bu eşitlikler Orlicz uzayları ile onların dual uzayları arasındaki ilişkileri vermektedir:

$$L_\Psi(\Omega) = [E_\Phi(\Omega)]^* \tag{2.51}$$

olur.Ayrıca

$\Phi \in \Delta_2$ ise

$$L_\Psi(\Omega) = [L_\Phi(\Omega)]^*$$

$\Psi \in \Delta_2$ ise,

$$L_\Phi(\Omega) = [L_\Psi(\Omega)]^*.$$

olur.

Teorem 2.13.6. . Φ, Ψ tamamlayıcı Young fonksiyonları olmak üzere, $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayı dönüşümlüdür(reflexiftir) ancak ve ancak Φ ve Ψ **,** Δ_2 koşulunu sağlar.

3. DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARYASYONEL YAKLAŞIM

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. X bir Banach uzayı ve $J : X \to R, C^1$ sınıfından bir fonksiyonel olmak üzere; $\forall v \in X$ için

$$\langle J'(u), v \rangle = 0 \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlayan bir $u \in X$ elemanına J fonksiyonelinin bir *kritik noktası* denir.Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$, Hilbert uzayındaki iç çarpımıdır.

Tanım 3.1.2. X Banach uzayı ve $A : X \to X^*$ operatörü verilsin. Eğer

$$A(\cdot) = J'(\cdot)$$

olacak şekilde bir $J \in C^1(X, R)$ fonksiyoneli varsa A operatörüne *varyasyonel* denir. A bir varyasyonel olmak üzere,bir problem

$$A(\cdot) = 0$$

şeklinde bir fonksiyonel denklem biçiminde yazılabiliyorsa bu probleme *varyasyonel problem* denir.

Tanım 3.1.3. X bir Babach uzayı, $\Omega \subset R^N$ sınırlı bir bölge, $f : \Omega x R \to R$ sürekli bir fonksiyon ve $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ olmak üzere;

$$-\Delta_p u = -div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = f(x,u) \tag{E}$$

şeklinde verilen kısmi diferansiyel denklemini düşünürsek;bu durumda, $J \in C^1(X, R)$ olmak üzere

$$J(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{p} dx - \int_\Omega F(x,u)dx$$

ifadesine (**E**) denklemine karşılık gelen *Euler-Langrange* veya *enerji fonksiyoneli* denir.

Burada $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$, $|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2}$ şeklindedir.

$J \in C^1(X, R)$ fonksiyonelinin türevi her $u, v \in X$ için

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{P-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx$$

şeklinde tanımlanır.

Buna göre,her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ test fonksiyonu için,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{P-2} \nabla u \cdot \nabla \phi dx - \int_{\Omega} f(x,u)\phi dx = 0 \tag{3.2}$$

eşitliğini sağlayan $u \in X$ fonksiyonuna (**E**) denkleminin bir *zayıf çözümü* (*weak solution*) veya *genelleştirilmiş çözümü* denir.

Sonuç 3.1.4. Tanım 3.1.1 ve Tanım 3.1.3 birlikte değerlendirildiğinde kolayca anlaşılacağı üzere bir fonksiyonelin kritik noktaları ile bu fonksiyonele karşılık gelen denklemin zayıf çözümleri çakışmaktadır.

Not 3.1.5. Bir kısmi diferansiyel denklemde görülen tüm kısmi sürekli türevlere sahip çözüme,*klasik çözüm* denir. Bununla birlikte; bir zayıf çözüm, denklemdeki bazı kısmi sürekli türevlere sahip olmayabilir.

Tanım 3.1.6. X Banach uzayı ve $J : X \to R$ fonksiyoneli verilsin. Eğer her $u \in X$ için

$$|J(u)| \leq M$$

olacak şekilde bir pozitif $M \in R$ varsa J fonksiyoneli sınırlıdır veya *iyi tanımlıdır* denir.

Tanım 3.1.7. X Banach uzayı ve $J : X \to R$ fonksiyoneli verilsin. Eğer her $u \in X$ için

$$J(u^*) \leq J(u)$$

olacak şekilde $u^* \in X$ varsa u^* fonksiyonuna J fonksiyonelinin bir minimumu veya minimize edicisi denir ve

$$\inf_{X} J(u) = J(u^*)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.8. X Banach uzayı ve $J : X \to R$ fonksiyoneli verilsin. Eğer her $u \in X$ için

$$\inf_{X} J(u) = -\infty, \sup_{X} J(u) = +\infty$$

oluyorsa J fonksiyoneli *iyi tanımlı değildir* (*sınırsızdır*) denir.

Tanım 3.1.9. X Banach uzayı, $J : X \to R$ fonksiyoneli ve $(u_n) \subset X$ dizisi verilsin.

$$\lim_{n \to +\infty} J(u) = \inf_{u \in X} J(u)$$

eşitliğini sağlayan (u_n) dizisine *J* fonksiyonelinin bir *minimize* (edici) *dizisi* denir.

Tanım 3.1.10. Daha önce *p*-Laplace denklemi

$$-\Delta_p u = -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0$$

şeklinde tanımlanmıştı. Buna göre *p*-Laplace denklemine karşılık gelen $J \in C^1(X,R)$ fonksiyoneli

$$J(u) = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{p} dx$$

şeklinde; bu fonksiyonelin türevi de, $L = J': X \to X^*$ olmak üzere,

$$\langle L(u), v\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre *L* için aşağıdaki önermeler denktir(Fan ve Zhang, 2003).

i) $L: X \to X^*$ operatörü sürekli, sınırlı ve kesin monotondur;

ii) $L: X \to X^*$ operatörü (S_+) koşulunu sağlar, yani, eğer $(u_n) \subset X$ dizisi için *X*'de $u_n \rightharpoonup u$ iken

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle L(u_n) - L(u), u_n - u\rangle \le 0$$

oluyor ise o zaman *X* 'de

$$u_n \to u$$

olur;

iii) $L: X \to X^*$ operatörü bir homeomorfizmadır.

Tanım 3.1.11. *X* bir Banach uzayı olmak üzere; bir $(u_n) \subset X$ dizisi

i) $|J(u_n)| \le c, c \in R$

ii) $J'(u_n) \to 0, J': X \to X^*$

özelliklerini sağlıyorsa o zaman (u_n) dizisine $J \in C^1(X,R)$ fonksiyonelinin *palais-Smale* ((**PS**)) *dizisi* denir.

Not 3.1.12. $J \in C^1(X,R)$ fonksiyonelinin (**PS**) dizisi bu fonksiyonelin bir minimize dizisidir. Bu diziler yakınsak bir alt diziye sahipse *J* için kritik nokta (lar) üretirler.

Not 3.1.13. Eğer $J \in C^1(X,R)$ fonksiyoneli alttan sınırlı değilse bu durumda *J* fonksiyoneli için bir (**PS**) dizisinin varlığı hakkunda kesin bir şey söylenemez; ancak alttan sınırlı ise *J* fonksiyoneli için bir (**PS**) dizisi daima bulunabilir.

Tanım 3.1.14. Eğer X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X,R)$ olmak üzere; *J*'nin her (**PS**) dizisnin yakınsak bir alt dizisi varsa *J* fonksiyoneli (**PS**) *koşulunu sağlar* denir.

Not 3.1.15. Eğer bir *J* fonksiyoneli alttan sınırlı ve (**PS**) koşulunu sağlıyorsa, tanımlı olduğu bölgede bir minimuma sahip olur.

Tanım 3.1.16. X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X,R)$ olmak üzere;

i) $\lim_{n\to+\infty} J(u) = c, c \in R$

ii) $J'(u_n) \to 0, J': X \to X^*$

koşullarını sağlayan bir $(u_n) \subset X$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse *J* fonksiyoneli $c \in R$ seviyesinde $(PS)_c$ *koşulunu sağlar* denir.

Not 3.1.17. Eğer *J* fonksiyoneli (**PS**) koşulunu sağlarsa her $c \in R$ için $(PS)_c$ koşulunu da sağlar.

Tanım 3.1.18. $\left(X, \|\cdot\|_X\right)$ bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X,R)$ olmak üzere; bir $(u_n) \subset X$ dizisi

i) $|J(u_n)| \le c, c \in R$

ii) $\left(1 + \|u_n\|_X |J'(u_n)|\right) \to 0, J': X \to X^*$

özelliklerini sağlıyorsa o zaman (u_n) dizisine $J \in C^1(X,R)$ fonksiyonelinin *Cerami* dizisi denir.Bununla birlikte,eğer bu (u_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse J fonksiyoneli *Cerami koşulunu sağlar* denir.

Not 3.1.19. Cerami koşulu, (**PS**) koşulundan daha zayıf bir koşuldur. Bu iki koşul arasındaki temel fark uygulamada ortaya çıkar.Yani sınırsız bir bölge üzerinde çalışılırken (**PS**) koşulunun sağlanmadığı durumlarda Cerami koşulu sağlanabilir.Buna ek olarak,eğer ilgili $J \in C^1(X,R)$ fonksiyoneli alttan sınırlı ise bu iki koşul çakışır.

Tanım 3.1.20. $\Omega \subset R^N$ sınırlı bir bölge, $f:\Omega x R \to R$ sürekli bir fonksiyon ve $F(x,u)=\int_0^u f(x,s)ds$ olmak üzere;

$$0<\theta F(x,u) \leq f(x,u)u, \quad \forall x \in \Omega, \forall u \in R \setminus \{0\}$$

olacak şekilde bir $\theta > p(p \geq 2)$ pozitif sayısı varsa *f* fonksiyonu *Ambrosetti-Rabinowitz* koşulunu sağlar denir.

Not 3.1.21. Ambrosetti-Rabinowitz koşulu,ilgili $J \in C^1(X,R)$ fonksiyonelinin (**PS**) dizisinin sınırlılığını elde etmek için kullanılan oldukça önemli bir koşuldur.

Tanım 3.1.22. $\left(X, \|\cdot\|_X\right)$ bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X,R)$ olmak üzere;

$$\|u\|_X \to \infty \quad \text{iken} \quad J(u) \to +\infty$$

oluyorsa *J* fonksiyoneline *coercive fonksiyonel* denir.

Tanım 3.1.23. *X* bir Banach uzayı, $J: X \to R$ fonksiyoneli ve $x_n \to x$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin.Buna göre; bir $x \in X$ elemanı için

$$J(x) \leq \liminf_{n\to\infty} J(x_n) \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, *J* fonksiyoneline $x \in X$ noktasında alttan *yarı-süreklidir* (*lower semi-continuous*) denir.Eğer yukarıdaki eşitsizlik $x_n \rightharpoonup x$ dizisi için gerçekleşiyorsa, *J* fonksiyoneline $x \in X$ noktasında alttan zayıf yarı-süreklidir (*weakly lower semi-continuous*) denir.

Tanım 3.1.24. $\Omega \subset R^N$ açık bir küme ve $f:\Omega \times R^N \to R \cup \{+\infty\}$ olmak üzere;

i) h.h.h. $x \in \Omega$ için $\xi \to f(x,\xi)$ eşlemesi sürekli

ii) her $\xi \in R^N$ için $x \to f(x,\xi)$ eşlemesi ölçülebilebilir

oluyorsa f fonksiyonu *Carathêodory koşulunu sağlar* denir.

3.2. Varyasyonel Yaklaşım

Varyasyonel yaklaşım, özellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analizinde kullanılan çok etkili bir araçtır.Bu yaklaşım *u* bilinmeyen bir fonksiyon ve $F(\cdot)$ lineer olmayan bir operatör olmak üzere,

$$F(u) = 0 \tag{3.4}$$

şeklinde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için, fonksiyonel analiz tekniklerinin kullanıldığı bazı varyasyonel hesaplamalara (calculus of variations) dayanır.Şu ana kadar, (3.4) tipindeki denklemlerin çözümünü veren genel bir teorinin mevcut olmaması,varyasyonel yaklaşımın önemini daha iyi ortaya koymaktadır.

Varyasyonel yaklaşım,bir diferansiyel denklemi doğrudan çözmek yerine bu denklemin çözümlerini ilgili enerji fonksiyonelinin kritik noktalarına veya minimize dizisine karşılık getirerek bulmayı amaçlayan bir yaklaşımdır.Varyasyonel yaklaşımda iki temel yöntem kullanılır.

Birincisi klasik metot olarak adlandırılır.Bu metoda göre, (3.4) denklemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli *J* olmak üzere

$$F(u) = J'(u) \tag{3.5}$$

eşitliği yazılabildiğinde (3.4) denklemi

$$J'(u) = 0 \tag{3.6}$$

haline dönüşür.Bu gösterim sayesinde kolayca görüleceği üzere,(3.4) denklemini sağlayan u_0 bilinmeyen fonksiyonlarını bulma problemi, (3.6) denklemini sağlayan u_0 bilinmeyen fonksiyonlarını bulma problemine dönüşecek ve dolayısıyla *J(u)* enerji fonksiyonelinin kritik noktaları,(3.4) denkleminin (zayıf) çözümlerine karşılık gelecektir.Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse, *X* bir Banach uzayı, $J : X \to R$, $\Omega \subset R^N$ sınrlı bir bölge ve $F \in C^1(\Omega \times R^N, R)$ olmak üzere,

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))dx, \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

olarak verilen enerji fonksiyonelinin bir düzgün (smooth) minimumu olan u_0 fonksiyonu

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\right)=0, \quad u_{x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanan ve (3.5)'ye karşılık gelen Euler-Lagrange kısmi diferansiyel denkleminin bir (zayıf) çözümü olacaktır.

İkinci metod *direkt metod* olarak adlandırılır.Bu metoda göre,*X* bir Banach uzayı ve (3.4) denklemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli $J : X \to R$ olmak üzere

$$J(u_n) \to \inf\left\{ J(u) : u \in X \right\}$$

olacak şekilde bir $(u_n) \subset X$ dizisi hesaba katılarak

$$u_{n_k} \to u_0 \in X \ \ ve \ J(u_0) = \inf_{u\in X} J(u)$$

olacak şekilde bir (u_{n_k}) alt dizisinin varlığı gösterilir. Bu durumda (u_n) dizisi *J* fonksiyonelini minimize eder ve (u_{n_k}) alt dizisinin yakınsadığı u_0 değeri de *J* fonksiyonelinin bir minimumu (kritik değer) ve dolayısıyla (3.6) denkleminin bir (zayıf) çözümü olur.

Belirtmekte yarar vardır ki yukarıda bahsedilen yakınsamanın gerçekleşebilmesi için bir başka deyişle yakınsak bir alt dizinin varlığından emin olmak için bazı kompaktlık koşulları ((**PS**) koşulu,Cerami koşulu) ve nispeten daha zayıf topolojiler (Dual uzay üzerinde tanımlı topolojik yapılar) kullanma zarureti doğabilir.

4.ORLICZ-SOBOLEV UZAYLARINDA NONLOKAL BİR ROBIN PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Bu bölüm, tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturmakta olup, bu bölümde Robin sınır-değer koşullarına sahip bir nonlokal eliptik denklemin çözümleri varyasyonel yaklaşım ve Ekeland varyasyonel prensibi kullanılarak Orlicz-Sobolev uzaylarında elde edilecektir. Daha açıkça ifade etmek gerekirse, aşağıdaki denklemin çözümleri elde edilecektir:

$$\begin{cases} -M\left(\int_{\Omega}(\Phi(|\nabla u|)+\Phi(|u|))\,\mathrm{dx}\right)(\mathrm{div}(a(|\nabla u|)\nabla u)-a(|u|)u)=\lambda f(u), \ x\in\Omega, \\ a(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial \eta}+b(x)|u|^{p-2}u=0, \ x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

(4.1) denkleminde Ω, R^N $(N\geq 3)$ sınırlı bir bölge ve Ω'nın sınırı $\partial\Omega$ Lipschitz sınıra sahiptir. η, $\partial\Omega$ daki dış birim vektör, $b\in L^{\infty}(\partial\Omega)$ öyleki $\inf_{x\in\partial\Omega} b(x)>0$; M , f reel-değerli sürekli bir fonksiyondur.

(4.1) deki $\varphi(t):=a(|t|)t$ fonksiyonu R'den R üzerine olan artan bir homeormorfizma dır. (4.1) denkleminde eğer $a(t)=|t|^{p-2}$ seçilirse, p -Laplace Kirchhoff denklemi ve eğer $p=p(x)$, yani $a(t)=|t|^{p(x)-2}$ olarak seçilirse (4.1) denklemi $p(x)$-Laplace Kirchhoff denklemine dönüşür. Ek olarak $M(t)=1$ seçilirse (4.1) denklemi $p(x)$-Laplace denklemine dönüşür. p, $p(x)$-Laplace ve Kirchhoff denklemleri farklı disiplinlerde uygulama alanlarına sahip olduğundan, örneğin varyasyonel yaklaşım, non-linear potansiyel teorisi, non-Newtonian akışkanlar, imaj işleme, birçok bilim insanı tarafından çalışılmıştır (bkz. [2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,16,17,18]).

(4.1) deki $\varphi(t):=a(|t|)t$ fonksiyonu, bazı matematiksel modeller için aşağıdaki gibi verilebilir (bkz. [12]),

(1) Nonlinear elasticity: $\varphi(t)=(1+t^2)^{\alpha}-1, \alpha>\frac{1}{0,}$

(2) Plasticity: $\varphi(t)=t^{\alpha}(\log(1+t))^{\beta}, \alpha\geq 1, \beta>0,$

(3) Generalized Newtonian fluids : $\varphi(t)=\int_0^t s^{1-\alpha}(\sin^{-1}s)^{\beta}ds,\ 0\leq\alpha\leq 1, \beta>0$.

Orlicz-Sobolev uzayları ile ilgili detaylı bilgi 3.bölümde verilmişti. Aşağıda, önce bu bölümde ihtiyaç duyacağımız bazı ek tanım ve teoremlere yer vereceğiz daha sonra temel sonuçlarımızı ifade edip ispatlayacağız.

$a:(0,\infty)\to R$ fonksiyonu

$$\varphi(t):=\begin{cases} a(|t|)t, & t\neq 0, \\ 0, & t=0, \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanan φ fonksiyonunu R 'den R üzerine olan artan ve tek olan bir homeormorfizma yapacak şekilde bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu için

$$\Phi(t)=\int_0^t \varphi(s)ds, \qquad \bar{\Phi}(t)=\int_0^t \varphi^{-1}(s)ds \quad t\in R, \tag{4.3}$$

biçimindeki Φ ve onun tamamlayıcı fonksiyonu $\bar{\Phi}$ tanımlansın. Φ ve $\bar{\Phi}$ fonksiyonlarına N -fonksiyonları da denir ki bu fonksiyonlar 3.bölümde verilen Young fonksiyonlarının özelliklerini sağlayan fonksiyonlardır (bkz [1],[19],[20]).

Φ ve $\bar{\Phi}$ fonksiyonları bize $L_\Phi(\Omega)$ ve $L_{\bar{\Phi}}(\Omega)$ Orlicz uzaylarını tanımlama imkanı verir.

Şimdi çok önemli bir koşulu vereceğiz

$$1<\varphi_0:=\inf_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}\leq\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}\leq\varphi^0:=\sup_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}<\infty,\ t\geq 0. \tag{4.4}$$

(4.4) koşulu sayesinde, $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayı

$$L_\Phi(\Omega)=\left\{u:\Omega\to R \text{ ölçülebilir}, \exists\lambda>0 \text{ öyleki } \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)dx<\infty\right\}$$

$u:\Omega\to R$ olmak üzere

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx<\infty, \tag{4.5}$$

biçiminde tanımlanan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfları ile çakışır ve Luxemburg normu denilen aşağıdaki norm altında Banach uzayı olur.

$$|u|_\Phi:=\inf\left\{k>0:\ \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)dx\leq 1\right\}. \tag{4.6}$$

Orlicz uzaylarında Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi verilir (bkz [1,16])

$$\int_\Omega uvdx\leq 2\|u\|_{L_\Phi(\Omega)}\|u\|_{L_{\bar{\Phi}}(\Omega)},\quad u\in L_\Phi(\Omega),\ v\in L_{\bar{\Phi}}(\Omega).$$

$W^1L_\Phi(\Omega)$ Orlicz-Sobolev uzayı

$$W^1L_\Phi(\Omega):=\left\{u\in L_\Phi(\Omega):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L_\Phi(\Omega), i=1,2,....N\right\}.$$

biçiminde tanımlanır ve

$$\|u\|_{1,\Phi} := |u|_{\Phi} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi} \tag{4.7}$$

normu altında bir Banach uzayıdır. Belirtmekte fayda vardır ki, $L_{\Phi}(\Omega)$ ve $W^1 L_{\Phi}(\Omega)$ uzayları sırasıyla klasik Lebesgue $L^p(\Omega)$ ve Sobolev uzaylarında $W^{1,p}(\Omega)$, $t \longrightarrow \frac{|t|^p}{p}$ dönüşümünün daha genel bir konvex fonksiyon olan Φ ile değiştirilmesidir. Daha açıkçası, eğer

$$\varphi(t) = p|t|^{p-2} t, \;\; \forall t \in R, \; p > 1$$
$$\Phi(t) = |t|^p, \quad \varphi_0 = \varphi^0 = p$$

olarak seçilirse $L_{\Phi}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ve $W^1 L_{\Phi}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$ olur.

Bu bölümde $W^1 L_{\Phi} = W^{1,\Phi}$ ve $L_{\Phi} = L^{\Phi}$ notasyonlarını kullanacağız.

Eğer $\forall t \in [0,\infty)$ için $t \to \Phi(\sqrt{t})$ dönüşümü konveks olarak kabul edilirse (4.4) koşulu ile birlikte bu koşul, $L_{\Phi}(\Omega)$ ve $W^1 L_{\Phi}(\Omega)$ uzaylarının ayrılabilir reflexive Banach uzayı olmalarına imkan verir.

Yardımcı Teorem 4.1.1. (bkz. [13]). Ω, R^N $(N \geq 3)$ sınırlı bir bölge ve Ω'nın sınırı $\partial\Omega$ koni özellikli Lipschitz sınıra sahip olsun. Eğer $1 \leq r < p^*$ ise $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ gömmesi kompakttır, burada $p < N$ ise $p^* := \frac{Np}{N-p}$ diğer durumlarda $p^* := +\infty$ dır.

Yardımcı Teorem 4.1.2 (bkz. [9,13]). Ω, R^N $(N \geq 3)$ sınırlı bir bölge ve Ω'nın sınırı $\partial\Omega$ Lipschitz sınıra sahip olsun. Eğer $1 \leq r < p^*$ ise $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\partial\Omega)$ gömmesi kompakttır.

Not 4.1.3. (4.4) koşulu sayesinde $W^{1,\Phi}(\Omega)$ Orlicz-Sobolev uzayı, $W^{1,\varphi_0}(\Omega)$ klasik Sobolev uzayına sürekli olarak gömülür. Ayrıca, $W^{1,\varphi_0}(\Omega)$ uzayı $L^r(\Omega)$ Lebesgue uzayına kompakt olarak gömülür. Dolaysıyla $1 \leq r < \varphi_0^*$ ise $W^{1,\Phi}(\Omega)$ Orlicz-Sobolev uzayı $L^r(\Omega)$ Lebesgue uzayına sürekli ve kompakt olarak gömülür.

Yardımcı Teorem 4.1.4. (bkz. [14,18]) $\rho(u) := \int_{\Omega} (\Phi(|\nabla u|) + \Phi(|u|)) dx : W^{1,\Phi}(\Omega) \to R$ fonksiyoneline modular denir.Buna göre $u_n, u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$, aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\|u\|_{1,\Phi}^{\varphi^0} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{1,\Phi}^{\varphi 0}$ $eger$ $\|u\|_{1,\Phi} < 1$

(ii) $\|u\|_{1,\Phi}^{\varphi 0} \le \rho(u) \le \|u\|_{1,\Phi}^{\varphi^0}$ *eger* $\|u\|_{1,\Phi} > 1$

(iii) $\|u_n - u\|_{1,\Phi} \to 0 \Leftrightarrow \rho(u_n - u) \to 0$

(iv) $\|u_n - u\|_{1,\Phi} \to \infty \Leftrightarrow \rho(u_n - u) \to \infty$

Φ, (4.4) ü sağlamak üzere Yardımcı Teorem 4.1.4. (iii)-(iv) önermeleri, $L^{\Phi}(\Omega)$ üzerinde norm ve modular topolojinin çakıştığını gösterir ki (4.4) özelliği aşağıda verilen ve Δ_2-koşulu olarak bilinen özelliğin sağlanması için de yeterli bir koşuldur: Her $t \in [0,\infty)$

$$\Phi(2t) \le K\Phi(t), \text{ tüm } t \in [0,\infty)$$

olacak şekilde pozitif bir K sabiti varsa Φ fonksiyonu Δ_2-koşulunu sağlar denir (bkz. [18]).

Yardımcı Teorem 4.1.5. (Ekeland Varyasyonel Prensibi) X bir Banach uzayı ve $I: X \to R$ fonksiyoneli Gateaux türevlenebilir, alttan sınırlı ve alt yarı-sürekli olsun. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $u_\varepsilon \in X$ fonksiyonu

$$\Theta(u_\varepsilon) \le \varepsilon + \inf \Theta$$

olacak şekilde verilsin. Bu durumda öyle bir $v_\varepsilon \in X$ fonksiyonu bulunabilir ki aşağıdakiler sağlanır

$$\Theta(v_\varepsilon) \le \Theta(u_\varepsilon)$$
$$\|v_\varepsilon - u_\varepsilon\| \le \varepsilon$$
$$\|\Theta'(v_\varepsilon)\|_{X^*} \le \varepsilon$$

Yardımcı Teorem 4.1.5 in bir sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir (bkz [10]).

Yardımcı Teorem 4.1.6. X bir Banach uzayı ve $I: X \to R$ fonksiyoneli Gateaux türevlenebilir, alttan sınırlı ve alt yarı-sürekli olsun.Bu durumda bir $u_n \in X$ dizisi vardır ki,

$$\Theta(u_n) \to \underline{c} = \inf_X \Theta \text{ ve } \Theta'(u_n) \to 0 \text{ (veya } \|\Theta'(u_n)\|_{(W^{1,\Phi}(\Omega))^*} \to 0)$$

olur (bkz [10]).

Tanım 4.1.7. Bir $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ fonksiyonu $\forall v \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ için

$$-M\Big(\int_\Omega (\Phi(|\nabla u|) + \Phi(|u|))\,\mathrm{dx}\Big)\int_\Omega (a(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla u + a(|u|)uv)dx + \int_{\partial\Omega} b(x)|u|^{p-2}uvd\gamma = \lambda\int_\Omega f(u)vdx,$$

eşitliğini sağlıyorsa u fonksiyonuna (4.1) denkleminin bir zayıf çözümü (weak solution) denir. Burada $d\gamma, \partial\Omega$ üzerindeki ölçüdür.

(4.1) denklemine karşılık gelen Enerji fonksiyoneli $I : W^{1,\Phi}(\Omega) \to R$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$I(u) := \overline{M}\left(\int_\Omega (\Phi(|\nabla u|) + \Phi(|u|))dx\right) + \int_{\partial\Omega} \frac{b(x)}{p}|u|^p d\gamma - \lambda \int_\Omega F(u)dx,$$

burada $F(u) = \int_0^u f(s)ds,\ \overline{M}(u) = \int_0^u M(s)ds$ dir. Aşağıda verilen (F) ve (M) koşulları ve gerekli gömmeler kullanılarak $I \in C^1(W^{1,\Phi}(\Omega)), R)$, ve I nın türevinin de

$$\langle I'(u), v\rangle = M\left(\int_\Omega (\Phi(|\nabla u|) + \Phi(|u|))\,\mathrm{dx}\right)\int_\Omega (a(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla v + a(|u|)uv)dx$$

$$+\int_{\partial\Omega} b(x)|u|^{p-2}uvd\gamma - \lambda\int_\Omega f(u)vdx$$

olduğu standart metotlar kullanılarak gösterilebilir.

Yukarıdaki bilgiler açıkça göstermektedir ki bir $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ fonksiyonunun (4.1) denkleminin bir zayıf çözümü olabilmesi için gerek ve yeter koşul u ' nun I 'nın bir kritik noktası olmasıdır.

Not 4.1.8. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ den dual uzay $(W^{1,\Phi}(\Omega))^*$ aşağıdaki biçimde tanımlanan

$$\langle \Lambda(u), v\rangle := \int_\Omega (a(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla v + a(|u|)uv)dx,$$

Λ operatörü için $u_n \rightharpoonup u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ ve $\limsup\langle \Lambda(u_n), u_n - u\rangle \le 0$ iken $u_n \to u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ oluyorsa Λ operatörü (S_+) özelliğini sağlıyor denir. Bu tezde elde ettiğimiz temel (orijinal) sonuç aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.1.9. φ ve Φ fonksiyonlar yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere;

(M) $\mathrm{M} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ bir sürekli fonksiyondur ve $1 < m_1 \le m_2,\ \alpha > 1$ olmak üzere

$$m_1 t^{\alpha-1} \le M(t) \le m_2 t^{\alpha-1},\ \ \forall t > 0\ ,$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde m_1, m_2 pozitif sabitleri vardır.

(F) $f : \Omega \to R$ bir sürekli fonksiyondur ve $1 \le s < q < \varphi_0^*$ olmak üzere

$$c_1|t|^{s-1} \le f(t) \le c_2|t|^{q-1},\ \ \forall t > 0\ ,$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde c_1, c_2 pozitif sabitleri vardır.

Ek olarak $1 \leq s < q < p < \alpha\varphi_0$ koşulu da sağlanıyorsa o zaman, öyle bir $\lambda^* > 0$ sayısı bulunabilir ki her $\lambda \in (0,\lambda^*)$ için (4.1) probleminin $W^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayında sıfırdan farklı bir çözümü vardır.

Önce aşağıdaki yardımcı teoremleri ispatlayacağız.

Yardımcı Teorem 4.1.10. Öyle bir $\lambda^* > 0$ sayısı bulunabilir ki her $\lambda \in (0,\lambda^*)$ sayısı için $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ ve $\|u\|_{1,\Phi} = \delta$ olmak üzere $I(u) \geq \tau > 0$ olacak şekilde $\tau, \delta > 0$ sayıları vardır.

İspat. (F) koşulundan $F(u) \leq \frac{c_2}{q}|u|^q$ olur. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.1.4. ve $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ kompakt gömmesinde aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$I(u) = \overline{M}\left(\int_\Omega (\Phi(|\nabla u|) + \Phi(|u|))dx\right) + \int_{\partial\Omega} \frac{b(x)}{p}|u|^p\, d\gamma - \lambda\int_\Omega F(u)dx$$

$$\geq \frac{m_1}{\alpha}\left(\int_\Omega (\Phi(|\nabla u|) + \Phi(|u|))dx\right)^\alpha - c_2\lambda\int_\Omega \frac{|u|^q}{q}dx$$

$$\geq \frac{m_1}{\alpha}\|u\|_{1,\Phi}^{\alpha\varphi^0} - \frac{c_2\lambda}{q}\|u\|_{1,\Phi}^q$$

$$\geq \left(\frac{m_1}{\alpha}\|u\|_{1,\Phi}^{\alpha\varphi^0 - q} - \frac{c_2\lambda}{q}\right)\|u\|_{1,\Phi}^q$$

olsun. Şimdi

$$\Psi(\delta) := \frac{m_1}{\alpha}\delta^{\alpha\varphi^0 - q} - \frac{c_2\lambda}{q}$$

fonksiyonunu tanımlarsak, Ψ fonksiyonu $\delta = 0$ da sürekli olur ve $\Psi \neq 0$. Eğer

$$\lambda^* = \frac{qm_1}{2c_2\alpha}\delta^{\alpha\varphi^0 - q} \tag{4.8}$$

olarak tanımlarsak, her $\lambda \in (0,\lambda^*)$ için öylebir $\delta_0 > 0$ sayısı vardır ki Ψ fonksiyonunun $\Psi(\delta_0)$ ile aynı işaretli olduğu orijinin her komşuluğunda

$$\tau := \frac{m_1}{2\alpha}\delta^{\alpha\varphi^0} = \Psi(\delta_0) > 0\,.$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak her $\lambda \in (0,\lambda^*)$ ve $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$, $\|u\|_{1,\Phi} = \delta$, için $I(u) \geq \tau > 0$ olur. İspat biter.

Yardımcı Teorem 4.1.11. Bir $\theta \in W^{1,\Phi}(\Omega)$, $\theta \geq 0, \theta \neq 0$,fonksiyonu vardır öyle ki $t > 0$ yeterince küçük iken $I(t\theta) < 0$ olur.

İspat: (F) koşulundan $F(u) \geq \frac{c_1}{s}|u|^s$ yazılır. Bu durumda $0 < t < 1$ ve $1 \leq s < p < \varphi_0$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir

$$I(t\theta) \leq \overline{M}\left(\int_\Omega (\Phi(|\nabla(t\theta)|) + \Phi(|(t\theta)|))dx\right) + \int_{\partial\Omega} \frac{b(x)}{p}|t\theta|^p\, d\gamma - c_1\lambda\int_\Omega \frac{|t\theta|^s}{s}dx$$

$$\leq \frac{m_2}{\alpha} t^{\alpha\varphi_0}\left(\int_\Omega (\Phi(|\nabla(t\theta)|) + \Phi(|(t\theta)|))dx\right)^\alpha + \frac{t^p}{p}\int_{\partial\Omega} b(x)|\theta|^p\, d\gamma - \frac{c_1\lambda t^s}{s}\int_\Omega |\theta|^s dx$$

$$\leq \max\{\frac{m_2}{\alpha}, \frac{1}{p}\} t^p \Theta(\theta) - \frac{c_1\lambda t^s}{s}\int_\Omega |\theta|^s dx\,,$$

Burada $\Theta(\theta) = \left(\int_\Omega (\Phi(|\nabla(t\theta)|) + \Phi(|(t\theta)|))dx\right)^\alpha + \int_{\partial\Omega} \frac{b(x)}{p}|\theta|^p\, d\gamma$. Bu durumda $t < \eta^{1/(p-s)}$ ve $0 < \eta < \min\left\{1, \dfrac{\lambda c_1}{\max\{\frac{m_2}{\alpha}, \frac{1}{p}\}\Theta(\theta)s}\displaystyle\int_\Omega |\theta|^s\, dx\right\}$ olmak üzere

$$I(t\theta) < 0$$

elde edilir. İspat biter.

İspat.(**Teorem 4.1.9. un ispatı**) Yardımcı Teorem 4.1.10.den öyle bir

$$\overline{B(0;\delta)} = \left\{u \in W^{1,\Phi}(\Omega) : \|u\|_{1,\Phi} \leq \delta\right\}$$

yuvarı vardır ki burada I fonksiyoneli alttan sınırlıdır, dolaysıyla $\underline{c} := \inf_{B(0;\delta)} I$ yazabiliriz. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 4.1.11 den

$$-\infty < \underline{c} := \inf_{B(0;\delta)} I < 0 \tag{4.9}$$

yazılabilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.1.10.den

$$\inf_{\partial B(0;\delta)} I > 0 \tag{4.10}$$

olur. (4.9) ve (4.10) dan

$$0 < \varepsilon < \inf_{\partial B(0;\delta)} I - \inf_{\overline{B(0;\delta)}} I \tag{4.11}$$

olur.

I fonksiyoneli alttan sınırlı ve zayıf alt yarı-sürekli olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.5.i uygulayabiliriz. Bu durumda $I:\overline{B(0;\delta)}\to R$ fonksiyoneli için öyle bir $u_\varepsilon\in\overline{B(0;\delta)}$ fonksiyonu vardır ki

$$I(u_\varepsilon)<\inf_{\overline{B(0;\delta)}} I+\varepsilon \tag{4.12}$$

$$I(u_\varepsilon)<I(u)+\varepsilon\left\|u-u_\varepsilon\right\|_{1,\Phi},\ u\neq u_\varepsilon . \tag{4.13}$$

(4.11) ve (4.12) den

$$I(u_\varepsilon)\le\inf_{\overline{B(0;\delta)}} I+\varepsilon\le\inf_{B(0;\delta)} I+\varepsilon<\inf_{\partial B(0;\delta)} I$$

elde edilir ki bu $u_\varepsilon\in B(0;\delta)$ olduğu anlamına gelir. $J:\overline{B(0;\delta)}\to R$ fonksiyoneli

$$J(u)=I(u)+\varepsilon\left\|u-u_\varepsilon\right\|_{1,\Phi}, \tag{4.14}$$

biçiminde tanımlanırsa bu J fonksiyonel I fonksiyonelinin bir perturbe fonksiyoneli olur. Yukarıdaki işlemler u_ε fonksiyonunun J için bir minimum olduğunu gösterir.

Şimdi $u=u_\varepsilon+tv$, $v\in B(0;1)$, fonksiyonunu (4.14) te yazarsak, $t>0$ yeterince küçük iken

$$\frac{J(u_\varepsilon+tv)-J(u_\varepsilon)}{t}\ge 0 \tag{4.15}$$

olur. (4.15) eşitsizliğinden

$$\frac{I(u_\varepsilon+tv)-I(u_\varepsilon)}{t}+\varepsilon\left\|v\right\|_{1,\Phi}>0 \tag{4.16}$$

olur. (4.16) eşitsizliğinde $t\to 0$ alınırsa

$$\left\langle I'(u_\varepsilon),v\right\rangle+\varepsilon\left\|v\right\|_{1,\Phi}>0 \tag{4.17}$$

ve (4.17) de v fonksiyonunu $-v$ fonksiyonu ile değiştirilirse

$$-\left\langle I'(u_\varepsilon),v\right\rangle+\varepsilon\left\|v\right\|_{1,\Phi}>0 \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.17), (4.18) ve $\left\|I'(u_\varepsilon)\right\|_{(W^{1,\Phi}(\Omega))^*}=\sup_{v\in W^{1,\Phi}(\Omega)}\dfrac{\left|\left\langle I'(u_\varepsilon),v\right\rangle\right|}{\left\|v\right\|_{1,\Phi}}$ norm tanımından

$$\left\|I'(u_\varepsilon)\right\|_{(W^{1,\Phi}(\Omega))^*}\le\varepsilon \tag{4.19}$$

elde edilir.

Ekeland prensibinin bir sonucu olarak (Yardımcı Teorem 4.1.6.), (4.12), (4.13) ve (4.19) ifadeleri I fonksiyonelinin bir $(\omega_n)\in B(0;\delta)$ minimize dizisinin

$$I(\omega_n)\to\underline{c}=\inf_{B(0;\delta)} I \text{ ve } I'(\omega_n)\to 0 \text{ (veya } \left\|I'(\omega_n)\right\|_{(W^{1,\Phi}(\Omega))^*}\to 0\text{)} \tag{4.20}$$

olacak şekilde bulunabileceğini söyler. (4.20) deki yakınsamadan (ω_n) dizisinin $W^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayında sınırlı olduğu anlaşılır. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ refleksif olduğundan (ω_n) dizisinin bir alt dizisi (yine ω_n ile gösterilmek üzere) bulunabilir ki bu alt dizi $W^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayındaki bir ω fonksiyonuna zayıf yakınsar. Ayrıca

$$\|I'(\omega_n)\|_{(W^{1,\Phi}(\Omega))^*} = \sup_{\|\omega_n-\omega\|_{1,\Phi}\leq 1} \left|\langle I'(\omega_n), \omega_n - \omega\rangle\right|$$

olduğundan (4.20) den

$$\langle I'(\omega_n), \omega_n - \omega\rangle \to 0,$$

elde edilir ki bu

$$\langle I'(\omega_n), \omega_n - \omega\rangle = M\Big(\int_\Omega (\Phi(|\nabla\omega_n|) + \Phi(|\omega_n|))\,\mathrm{dx}\Big)\int_\Omega (a(|\nabla\omega_n|)\nabla\omega_n \cdot \nabla(\omega_n - \omega) + a(|\omega_n|)\omega_n(\omega_n - \omega)) +$$

$$\int_{\partial\Omega} b(x)|\omega_n|^{p-2}\,\omega_n(\omega_n - \omega)d\gamma - \lambda\int_\Omega f(\omega_n)(\omega_n - \omega)dx \to 0.$$

$W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$ ve $W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ kompakt gömmelerini, Hölder eşitsizliğini, (F) koşulunu ve $b \in L^\infty(\partial\Omega)$ olduğunu göz önünde bulundurursak

$$\left|\int_\Omega b(x)|\omega_n|^{p-2}\,\omega_n(\omega_n - \omega)d\gamma\right| \leq \left|b(x)|\omega_n|^{p-1}\right|_{L^{p/(p-1)}(\partial\Omega)} |\omega_n - \omega|_{L^p(\partial\Omega)} \to 0,$$

ve

$$\left|\int_\Omega f(\omega)(\omega_n - \omega)dx\right| \leq c_2\int_\Omega \left||\omega_n|^{q-1}(\omega_n - \omega)dx\right| \leq \left||\omega_n|^{q-1}\right|_{L^{q/(q-1)}(\Omega)} |\omega_n - \omega|_{L^q(\Omega)} \to 0.$$

olur. Bu durumda

$$M\Big(\int_\Omega (\Phi(|\nabla\omega_n|) + \Phi(|\omega_n|))\,\mathrm{dx}\Big)\int_\Omega (a(|\nabla\omega_n|)\nabla\omega_n \cdot \nabla(\omega_n - \omega) + a(|\omega_n|)\omega_n(\omega_n - \omega))dx \to 0$$

olması gerekir. Dolaysıyla (M) koşulundan

$$\langle \Lambda(\omega_n), \omega_n - \omega\rangle = \int_\Omega (a(|\nabla\omega_n|)\nabla\omega_n \cdot \nabla(\omega_n - \omega) + a(|\omega_n|)\omega_n(\omega_n - \omega))dx \to 0$$

olmak zorundadır. Ayrıca, Λ operatörü (S_+) özelliğini sağladığından

$\omega_n \to \omega \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ elde edilir. Yani (ω_n) dizisi I fonksiyonelini minimize eden ω fonksiyonuna $W^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayında güçlü yakınsar ki bu ω fonksiyonu I fonksiyonelinin bir kritik noktası ve dolaysıyla (4.1) denkleminin bir zayıf çözümü olur, yani

$$I(\omega) = \underline{c} < 0 \;\text{ ve }\; I'(\omega) = 0$$

olur. İspat biter.

Örnek 4.1.12. (4.1) denkleminde $M(t)=1,\ a(t)=|t|^{p-2}$ ve $f(t)=|t|^{\beta-1}$ olarak seçilirse, $1\leq s<\beta\leq q<p$ olmak üzere, (4.1) denklemi

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+|u|^{p-2}u=\lambda|u|^{\beta-1},\ x\in\Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial\eta}+b(x)|u|^{p-2}u=0, \quad x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{4.21}$$

denklemine dönüşür ki bu denklem Robin sınır koşuluna sahip *p*-Laplace denklemidir. Ayrıca (4.21) denklemine karşılık gelen Enerji fonksiyoneli $\Upsilon: W^{1,p}(\Omega)\to R$,

$$\Upsilon(u):=\frac{1}{p}\int_{\Omega}(|\nabla u|^{p}+|u|^{p})dx+\frac{1}{p}\int_{\partial\Omega}b(x)|u|^{p}\,d\gamma-\frac{\lambda}{\beta}\int_{\Omega}|u|^{\beta}\,dx$$

olup, Teorem 4.1.9. in tüm koşulları sağlandığından (4.21) denklemi sıfırdan farklı bir zayıf çözüme sahiptir.

KAYNAKLAR

[1] Adams, R., (1975), Sobolev Spaces, Academic Press, New York.
[2] Avci, M. and Pankov, A., (2015), Nontrivial solutions of discrete nonlinear equations with variable exponent, J. Math. Anal. Appl., 431, pp. 22-33.
[3] Avci, M., (2013), Existence and multiplicity of solutions for Dirichlet problems involving the p(x)-Laplace operator, Elec. J. Dif. Eqn., 14, pp. 1-99.
[4] Avci, M., Solutions to a system of p(k)-Kirchhoff discrete boundary value problems, Nonlinear Studies, {23} (2016) 4, 665-674.
[5] Avci, M., On a nonlocal problem involving the generalized anisotropic p(.)-Laplace operator, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, {43} (2016) 2, 259-272.
[6] Cammaroto, F., Vilasi, L., Multiple solutions for a Kirchhoff–type problem involving the p(x)-Laplacian operator, Nonlinear Analysis, {74} (2011), 1841–1852.
[7] Cammaroto, F. and Vilasi, L., (2012), Multiple solutions for a non-homogeneous Dirichlet problem in Orlicz-Sobolev spaces, Appl. Math. Comput., 218, pp. 11518-11527.
[8] Chung, N. T., (2014), Multiple solutions for a nonlocal problem in Orlicz-Sobolev space, Ricerche di Matematica, 63, pp. 169-182.
[9] Colasuonno, F., Pucci, P., Multiplicity of solutions for p(x)-polyharmonic Kirchhoff equations, Nonlinear Anal. {74} (2011), 5962-5974.
[10] Deng, S. G., (2009), Positive solutions for Robin problem involving the p(x)-Laplacian, J. Math. Anal. Appl., 360, pp. 548-560.
[10] Ekeland, I., (1974), On the variational principle, J. Math. Anal. Appl., 47, pp. 324-353.
[11] Fan, X. L., (2010), On nonlocal p(x)-Laplacian Dirichlet problems, Nonlinear Anal., 72, pp. 3314-3323.
[12] Fang, F. and Tan, Z., (2012), Existence and Multiplicity of solutions for a class of quasilinear elliptic equations: An Orlicz-Sobolev setting, J. Math. Anal. Appl., 389, pp. 420-428.
[13] Fan, X. L. and Zhao, D., (2001), On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl., 263, pp. 424–446.
[14] Fukagai, N., Ito, M. and Narukawa, K., (2006), Positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Orlicz-Sobolev nonlinearity on R^{N}, Funkcial. Ekvac., 49, pp. 235–267.
[15] Kufner, A., John, O. and Fucik, S., (1977), Function Spaces, Noordhoff, Leyden.
[16] Mashiyev, R., Avci, M., Chung, N.T. , Existence of Solutions for Nonlocal Problems in Sobolev-Orlicz Spaces via Monotone Method, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Appl. {4} (2016) 1, 63-73.
[17] Mihailescu, M. and Repovs, D., (2011), Multiple solutions for a nonlinear and non-homogeneous problem in Orlicz-Sobolev spaces, Appl. Math. Comput., 217, pp. 6624-6632.
[18] Mihailescu, M. and Radulescu, V., (2008), Neumann problems associated to non-homogeneous differential operators in Orlicz-Sobolev spaces, Ann. Inst. Fourier, 58, pp. 2087-2111.
[19] Musielak, J., (1983), Modular spaces and Orlicz spaces, Lecture Notes in Math, vol.1034, Springer-Verlag, Berlin.
[20] Rao, M. M. and Ren, Z. D., (1991), Theory of Orlicz Spaces, Marcel Dekker Inc., New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Kenan Süslü
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Siirt-02.02.1981
Telefon	**:**	0505 590 29 01
Faks	**:**	
e-mail	**:**	knnssl56@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	14 Eylül Şeref Lisesi	Siirt	1999
Üniversite	:	Dicle Üniversitesi	Diyarbakır	2005
Yüksek Lisans	:			
Doktora	:			

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2005-2017	M.E.B	Öğretmen

UZMANLIK ALANI Fonksiyonlar Teorisi

YABANCI DİLLER İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

1981 yılında Siirt'in Kurtalan ilçesinde doğdum.İlk ve orta öğrenimimi Kurtalan'da, lise öğrenimimi Siirt'te tamamladım.2005 yılında Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmeliğini bitirdim.2005 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı farklı okullarda çalışıyorum.

YAYINLAR

1. Mustafa Avci and Kenan Süslü, *On a Robin Problem in Orlicz-Sobolev Spaces*, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, in press, 2017.