MATRİS KONDİSYON SAYISINDA BÖLGE BÜYÜKLÜĞÜNÜN ROLÜ

FURKAN ERDEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2014

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

FURKAN ERDEN tarafından hazırlanan MATRİS KONDİSYON SAYISINDA BÖLGE BÜYÜKLÜĞÜNÜN ROLÜ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Burak AKSOYLU
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Oktay DUMAN

Üye : Doç. Dr. Burak AKSOYLU

Üye : Doç. Dr. Ali Cafer GÜRBÜZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Furkan ERDEN

Üniversitesi	**:**	**TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Burak AKSOYLU**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans – AĞUSTOS 2014**

Furkan ERDEN

MATRİS KONDİSYON SAYISINDA BÖLGE BÜYÜKLÜĞÜNÜN ROLÜ

ÖZET

Peridinamik, malzemelerdeki çatlak ve kırıkları belirlemek için kullanılan, başarısı birçok uygulamada sınanmış oldukça etkin bir modelleme yöntemidir. Peridinamiğin başarısı, çatlaklar gibi şiddetli süreksizlikleri türev yerine yerel olmayan integral operatörü kullanarak modelleyebilmesidir. Peridinamiğe olan ilgi son yıllarda oldukça artmış, teorik ve uygulamalı bir çok araştırma yapılmıştır. Peridinamik kullanılarak elde edilen sayısal çözümlerde ayrıklaştırma ilk adımı oluşturmaktadır. Ayrıklaştırma neticesinde ortaya çıkan matrisin kondisyon sayısı, kullanılan sayısal yöntemin yakınsama performansını belirlemektedir. Bu sebeple kondisyon sayısında yer alan tüm parametre bağımlılıklarının açık bir şekilde ortaya çıkartılması büyük önem arz etmektedir. Aksoylu ve Unlu [3] kondisyon sayısının davranışını belirlemiş ve kondisyon sayısı için kesirli Sobolev uzayının mertebesi s, ufuk ölçüsü δ ve adım ölçüsü h parametrelerine bağlı keskin bir üst sınır elde etmişlerdir ve elde ettikleri sınırın keskinliğini hem teorik hem de sayısal olarak ispatlamışlardır. Bu çalışmamızda, Aksoylu ve Unlu'nun ortaya çıkardığı parametrelere bağımlılıklarının üzerine, bölge büyüklüğü parametresi H'a olan bağımlılığı ortaya çıkarttık.

Anahtar Kelimeler: Bölge büyüklüğü, kondisyon sayısı, yerel olamayan operatörler, peridinamik, bölgelere ayırma.

University	**:**	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	**:**	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	**:**	**Mathematics**
Supervisor	**:**	**Assoc. Prof. Dr. Burak AKSOYLU**
Degree Awarded and Date	**:**	**M.Sc. – AUGUST 2014**

Furkan ERDEN

ACT OF DOMAIN SIZE TO CONDITION NUMBER OF MATRIX

ABSTRACT

Peridynamics is used for cracks which occur from materials, and it is a powerful and challenged method for a lot of applications. Its success is coming from modeling the discontinuities like cracks with using nonlocal integral operators instead of derivatives. In the recent years, interest for peridynamics is increasing, and there are a lot of researches in theory and applications. In peridynamics, discretization of an equation constitutes the first step in obtaining numerical solutions of a problem. The condition number resulting from the discretization determines the convergence performance of the numerical solution of the problem. For this reason, the studies on understanding and obtaining the condition number of a discretized peridynamics problem gains importance. Aksoylu and Unlu (2014) identified the behavior of the condition number and found a sharp upper bound depending on "regularity of the fractional Sobolev space s, mesh size h and size of nonlocality δ", and they proved the sharpness of upper bound both in theory and numerically. In this study, we deduce the dependence of subdomain size H adding to the results of dependence parameters found by Aksoylu and Unlu (2014).

Keywords: Subdomain size, condition number, nonlocal operators, peridynamics, domain decomposition.

TEŞEKKÜR

Araştırmalarımın her aşamasında değerli bilgi ve yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarımı katkılarıyla yönlendiren tez danışmanım Doç.Dr. Burak AKSOYLU'ya,

Yüksek lisans eğitimi sırasında kıymetli tecrübelerinden yararlandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve tüm asistan arkadaşlarıma,

Tüm hayatım boyunca maddi manevi hiçbir yardımı esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük rol oynayan aileme teşekkür ederim.

Bu tez "TBAG 112T240, Peridinamik Uygulamaları için Çözücüler" başlıklı proje ile TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir. Bu proje ve tezime desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İçindekiler

Semboller

Ω := Yerel bir tanım kümesi

$\overline{\overline{\Omega}}$:= Yerel olmayan bir tanım kümesi

$C^m(a, b)$:= (a, b) arasındaki olan tüm m. dereceden sürekli fonksiyonlar kümesi

$\kappa(A)$:= A matrisinin kondisyon sayısı

$\|A\|_n$:= A matrisinin n matris normu

δ := Ufuk ölçüsü

h := Adım ölçüsü

s := Kesirli Sobolev uzayının mertebesi

$W^{k,p}$:= Sobolev uzayı

$W_0^{k,p}$:= Kompakt Sobolev uzayı

H^k := Sobolev uzayı(Hilbert)

H_0^k := Kompakt Sobolev uzayı(Hilbert)

α := Çoklu indis

D^α := α. dereceden zayıf türev

1. Giriş

2000'li yıllarda bulunmuş olan peridinamiğe verilen önem gün geçtikçe artmaktadır. Bu teoriyi ilk ortaya atan Silling [10] olmuştur. Peridinamik teorisi, klasik sürekli ortamlar mekaniğinden farklıdır. Peridinamik teorisi, parçalı diferansiyel denklemlere bağlı olan klasik sürekli ortamlar mekaniği teorisinin aksine integral operatörlerine bağlıdır. Çatlaklar üzerinde yapılmış olan işlemlerde, kısmi türevlerin kullanılamadığı görülmüştür. Kısmi türevler, çatlak yüzeyler üzerinde mevcut olmadıklarından ötürü, deformasyon ile ilgili işlemlerde klasik sürekli ortamlar mekaniği denklemleri kulanılamamaktadır. Peridinamik teorisinde integral denklemler kullanılabilmektedir, çünkü integral denklemler kısmi türev içermezler. Deforme olan yüzeylerde yapılan matematiksel modellemeler, integral denklemlerle kolayca uygulanabilir hale gelmiştir. Basit bir peridinamik denklemi örneği verilecek olursa:

$$p(x)u(x,t) = \int Rf(u(x',t) - u(x,t), x' - x, x)dV_{x'} + b(x,t)$$

x, R'de bir nokta, t zaman, u yer değiştirme vektörü ve p'de deforme olmamış gövdede ki kütle yoğunluğu olsun. Vektör değerli f fonksiyonu x'den x''e olan kuvvet yoğunluğudur. Bu ve benzer denklemlerle yeni bir tanım ortaya konuldu: yerel olmayan operatörler. Bu operatörler, Siling'in makalesi gibi birçok makale [11–13] ile birlikte yerel olmayan modellemelerin geliştirilmesine öncülük edip, çoklu ölçekli modellemeler ile birlikte kullanılmaya başlandı. Peridinamik teorisinden bir örnek verilecek olursa:

$$u_{tt}(x,t) = L(u(x,t)) - b(x),$$

olmak üzere lineer yerel olmayan L operatörü

$$L(u)(x) := -\int_{\Omega \cap B\Omega} C(x,x') = (u(x') - u(x))dx'$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımda Ω, R^d'de sınırlı bir bölge olmak üzere, $B\Omega$ yerel olmayan sınırı göstermektedir. Ölçülebilir vektör değerli fonksiyon u, yer değiştirme alanını simgelemektedir. Çekirdek fonksiyonu olan C, materyalin fiziksel özelliğini nitelemektedir. Yerel olmama, $x'(= x)$ noktasının x ile etkileşimde olabilmesi üzerine ortaya çıkmıştır. Böylece *ufuk ölçüsü* tanımlanmıştır. $\delta > 0$ ufuk ölçüsü olmak üzere, *ufuk ölçüsü büyüklüğü*,

$$H_x := x' : \|x' - x\| < \delta$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Yerel sınır ile yerel olmayan sınırlarının önemli bir farkı vardır: Yerel bir bölge d boyutlu ise bölgenin sınırı $d-1$ boyutlu olurken, yerel olmayan bir bölgenin boyutu d iken bu bölgenin sınırı da d boyutlu olmaktadır. Bu sebepten dolayı $B\Omega$ sınırının bir kalınlığı mevcuttur. Biz de bu kalınlığın boyu *ufuk ölçüsü* olarak tanımlanmakta ve δ ile gösterilmektedir. Bir bölgenin *yerel olmayan kapanışını* da,

$$\overline{\overline{\Omega}} = \Omega \cap B\Omega$$

şeklinde tanımlanmış olur.

Bu tanımlardan sonra bu tezdeki bulgularla ilgili olan sonlu elemanlar yönteminden bahsedilecektir. Sonlu elemanlar yöntemi, bilim ve mühendislik alanlarında birçok problemde kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar analizi, esas itibariyle yapı mühendisliği ile ilgili problemlerde kullanılmış, günümüzde bu mühendislik alanında temel rolü oynamaya başlamıştır. Bu teknik, diferansiyel denklemlerde sayısal çözümler bulunmasında çok yaygın kullanılmaya başlanarak ve de günümüze kadar geliştirilerek güçlü bir soru çözme yöntemi olmuştur. Bu tezde bu yöntem derinlemesine kullanılmasa da bu yöntemle ilgili birkaç kaynaktan [4, 6, 8, 9] yararlanılmıştır. Bu yöntem, kondisyon sayısına sınır bulurken yararlanılan bir yöntemdir.

Bu tezdeki işlemler, esas itibari ile kondüsyonyon sayısı ile alakalıdır. Numerik analizin bir alanı olan fonksiyonun kondisyon sayısı, esas olarak fonksiyona koyulan değerlerin arasındaki küçük farkların fonksiyonun görüntüsünü ne kadar etkilediğini ölçmeye yarar. Böylece, bu sayı ile çözüm aranılan denklemlerin çözümlerindeki hata payının aralığı kolaylıkla belirlenmektedir. Bu sayının en önemli uygulama alanlarından biri de matrisler üzerindedir. Kondisyon sayısı, matrisler üzerinden yapılan lineer işlemlerde sonuca dair olan yaklaşımların hata payını hesaplamada kullanılır. A matrisinin kondisyon sayısı $\kappa(A)$,

$$Ax = b$$

denkleminin x çözümündeki değişlikliğin miktarını belirlemede önemli bir rol oynar. Buradaki eşitlikte A, $n \times n$'lik bir matris, x $n \times 1$'lik bir bilinmeyen ve b de $n \times 1$ bir yük vektörüdür. Önceden verilmiş olan b ne kadar değişir ise x bilinmeyeni de b'de olan değişikliğin mikterına ve kondisyon sayısına bağlı olarak değişir. Kondisyon sayısının tanımı:

Tanım 1. *M tekil olmayan $n \times n$ matris olsun. $\|\cdot\|$ matris normu olmak üzere*

$$\kappa(M) = \|M\| \left\|M^{-1}\right\|$$

*sayısına **kondisyon sayısı** denir.*

Kondisyon sayısı, matrisin tüm elemanları bilindiği takdirde hesaplanabilir. Şimdi kondisyon sayısı örnekler ile daha detaylı anlatılacak olursa:

Örnek 1. $A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$ *olsun.*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca bulunur.

$$\|A\|_\infty = \|A\|_1 = 1999 = \|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}\|_1$$

olduğu için kondisyon sayısı

$$\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = (1999)^2 = 3.996 \times 10^6$$

bulunur.

Örnekte ki A matrisinin kondisyon sayısı, $\|\cdot\|_2$ matris normuna göre hesaplanacak olursa $\kappa_2(A)$ yaklaşık 3.992×10^6 bulunur. Yani kondisyon sayısı, kullanılan norma bağlı değildir. Ayrıca A matrisinin kondisyon sayısı 10^6 ile orantılıdır. Yani $Ax = b$ denkleminde b vektöründeki az bir değişim x çözümünde büyük değişiklik 10^6 ile orantılı bir değişikliğe yol açar. Bu sebepten dolayı kondisyon sayısı ne kadar düşük olursa $Ax = b$ denklemindeki b vektörünün değişmesi x çözümünü o kadar az etkiler.

Ama bu alanda yapılan çalışmalarda, belirli özellikleri bilinen matrislerin kondisyon sayılarının sınırlandırılması kullanılmıştır. Bu sınırlandırmalarda kullanılan eşitsizliklerde matrise bağlı değişkenler, bağlı olmayan değişkenler, içeriği bilinen sabitler, bilinmeyen sabitler bulunmaktadır. Aksoylu'nun [3] makalesinde bulunan direngenlik matrisinin kondisyon sayısına yerel ve yerel olmayan bölümlerine ve integrallenebilir çekirdeğin kondisyon sayısına bulunmuş sınırlar vardır. Bu tezde yapılan ise bulunmuş olan eşitsizliklerdeki sabitleri biraz daha bilinir kılmaktır. Bu eşitsizlikler tekrar oluşturulurken yapılan işlemler 3. bölümde verilecektir.

Bu alanlarla ilgili genel bilgiler verildikten sonra, bu tezin yazılmasının amacı verilecek olursa: "*Aksoylu'nun [3] makalesinde kondisyon sayısına bulunmuş olan üst sınırda bulunan sabitlerde, yukarıda tanımladığımız H değişkeni ne kadar bulunmaktadır ve bu H değişkenini bu sabitlerin içinden tamamen ayrıştırabilir* *miyiz?"* sorusunu cevaplandırmaktır. Bu sorunun tam olarak cevabı 3. bölümde hesaplamalar sonucunda verilecektir.

Kullanılacak bir kaç teorem ve tanıma bakılacak olursa:

Norm uzayları bu tezde önemli bir rol oynamaktadır. Bu sebepten dolayı norm uzaylarına biraz değinilecektir. Örnek verilecek olursa, $C^m[a,b]$, $m \leq 0$ için bir norm uzayı

$$\|f\|_\infty = max_{a\leq x\leq b}\,|f(x)| \quad , \quad f \in C^m[a,b]$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Örnek 2. $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere,*

$$\|f\| = \left[\sum_{j=0}^{m} \left\|f^{(i)}\right\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

dönüşümü $C^m[a,b]$ uzayına göre bir normdur. Ama $C^m[a,b]$ norm uzayı bu norma göre Banach uzayı değildir. $C^m[a,b]$ uzayının bu norma göre tamlaması, $W^{m,p}(a,b)$ uzayıdır. Bu uzay Sobolev uzaylarına bir örnektir.

Sobelev uzayları tanımlanmadan önce birkaç tanıma daha ihitiyaç vardır.

Tanım 2. *L^p uzayları, sonlu boyutlu olan fonksiyonlar uzayıdır ve*

$$L^p(\Omega) = \left\{ [f] \mid \int\limits_{\Omega} f^p x < \infty \ ve\ f \in \Omega \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$ *olmak üzere,*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

ifadesine ***çoklu indis*** *denir.*

Bir başka ifade ile α, n boyutlu doğal sayılar kümesinin($\mathbb{N}_0^n$) bir elemanını ifade eder. Artık Sobolev uzayları tanımlanabilir.

Tanım 4. *k negatif olmayan bir tamsayı ve $p \in [1,\infty]$ olsun. α çoklu indis olmak üzere, $|\alpha| \leq k$ olan tüm α'lar için v'nin zayıf türevi $D^\alpha v$ varsa ve $D^\alpha \in L^p(\Omega)$ ise bu koşulları sağlayan tüm $v \in L^p(\Omega)$'leri içeren uzaya* ***Sobolev Uzayı*** *denir ve $W^{k,p}$ ile gösterilir.*

$W^{k,p}$ uzayı,

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|<k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ max_{|\alpha|<k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)} & p = \infty \end{cases}$$

normuna göre bir norm uzayı olarak tanımlanmaktadır [5]. Ayrıca $p = 2$ için $W^{k,2}(\Omega) \equiv H^k(\Omega)$ olmaktadır. H^k iç çarpım uzayı,

$$(u,v)_{H^k} = \sum_{i=0}^{k} (D^i u, D^i v)_{L^2}$$

iç çarpımına göre Hilbert uzayıdır. $W_0^{k,p}(\Omega)$ kümesi, $C_0^\infty(\Omega)$ kümesinin kapanışı olmak üzere $W^{k,p}(\Omega)$ kümesinin alt kümesidir. $W_0^{k,p}(\Omega)$ kümesinin daha genel tanımı verilecek olursa:

Tanım 5. *α çoklu indis olmak üzere $W_0^{k,p}(\Omega)$ kümesi,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{v \mid v \in W^{k,p}(\Omega),\ \forall v \in \partial\Omega\ , \\ \forall \alpha \in N^d \ ve\ |\alpha| \leq k-1 \ için\ \ D_\alpha v(x) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

$p = 2$ seçildiği takdirde, $W_0^{k,2}(\Omega) \equiv H_0^k(\Omega)$ olmaktadır.

Tanım 6. *$V = H_0^1(\Omega)$ olmak üzere, $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ olan bilinear form*

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad , \quad \forall u, v \in V$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1. *(Yerel Poincaré, [[7],Lemma.A14]) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı bir bölge ve $u \in H^1(\Omega)$ olmak üzere, öyle bir $\lambda_{Pncr} > 0$ sayısı vardır ki,*

$$\lambda_{Pncr} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.0.1}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 2. *(Yerel Olmayan Poincaré,[[3], Denk. (3.1)]) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı bir bölge ve $u \in L_{2,0}(\overline{\overline{\Omega}})$ olmak üzere, öyle bir $\lambda_{Pncr} = \lambda_{Pncr}(\overline{\overline{\Omega}}, \lambda) > 0$ sayısı vardır ki,*

$$\lambda_{Pncr} \|u\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})} \leq a(u,u)$$

eşitsizliğini sağlar.

Tanım 7. *E vektör uzayı olmak üzere, $\|\|_a$ ve $\|\|_b$ normları denktir ancak ve ancak*

$$c_1 \|u\|_a \leq \|u\|_b \leq c_2 \|u\|_a \quad , \quad \forall u \in E$$

eşitsizliklerini sağlayan $c_1, c_2 \in \mathbb{R} > 0$ sayıları vardır.

Teorem 3. *(Ters Eşitsizlik) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı bir bölge ve $u \in H^1(\Omega)$ olmak üzere, öyle bir sabit $c > 0$ sayısı vardır ki,*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

eşitsizliğini sağlar.

Tanım 8. $\{\phi_i\}_{i=1}^{N}$ *kümesi,* V_N *sonlu boyutlu uzayının bir bazı olsun.* $A_{N\times N} = (a(\phi_j, \phi_i))_{N\times N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *matrisine* ***direngenlik matrisi*** *denir.*

2. Alt Bölge Büyüklüğü

Bu bölümde alt bölge büyüklüğü ayrıntılı bir şekilde anlatılıp, bu büyüklük ile ilgili işlemlerde kullanılacak bulgular hesaplanacaktır. Alt bölge büyüklüğü tanımlanacak olursa:

Tanım 9. *Ω herhangi bir bölge olmak üzere, bu kümeyi barındıran en küçük çemberin yarıçapına **alt bölge büyüklüğü** denir ve H notasyonu ile gösterilir.*

Öncelikle $|\Omega| = H$'nin değişkenlerde yaptığı değişiklikler ve "şapka" kavramının ne anlama geldiği detaylı anlatılacaktır. $\hat{x}$ ile x'in bulunduğu bölge birim çemberin içine taşınmış olur. Yani x, Ω'yı çevreleyen çemberin yarıçapı(H) oranı ile küçültülmektedir. Böylece $\hat{\Omega}$'yı barındıran en küçük çemberin yarıçapı 1 oluyor. Bu çember ise birim çemberdir. x ile $\hat{x}$'in ilişkilerine bakıldığında benzer bulgular elde edilmektedir.

$|\hat{x}| = 1$ ve $x = H\hat{x}$ olmak üzere $|x| = H$ bulunmuş olur. Aynı uygulama, ufuk ölçüsü(δ) ve adım ölçüsü(h) için yapılacak olursa $h = H\hat{h}$ ve $\delta = H\hat{\delta}$ bulunur.

H ile tekrar yazma, fonksiyonlara da uygulanabilmektedir. $u(x)$'in gradyanı H ile tekrar düzenlenirse,

$$\nabla_x u(x) = \nabla_x u(H\hat{x}) = \nabla_x \hat{u}(\hat{x})$$

şeklinde bulunur. Bir sonraki adım, normal gradyanda nasıl bir değişikliğe neden olduğunun hesaplanmasıdır. Öncelikle 1-boyut için

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{x}}{\mathrm{d}x} = \hat{\nabla}\frac{1}{H} \Longrightarrow \nabla = \hat{\nabla} \cdot \frac{1}{H}$$

bulunur. 2-boyutta bir örnek üzerinde bakılacak olursa:

Örnek 3. *Jacobian dönüşümünü kullanarak* $\mathrm{d}(x_1, x_2)$*:*

$$\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(H\hat{x}_1, H\hat{x}_2) = \begin{vmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{vmatrix} \mathrm{d}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = H^2 \mathrm{d}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

şeklinde hesaplanmış olur.

2-boyuttaki değişiklik $\mathrm{d}(x_1, x_2) = H^2 \hat{\mathrm{d}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ şeklinde bulunur.

Benzer şekilde n-boyutta bir örnek üzerinde incelenecek olursa:

Örnek 4. *Jacobian dönüşümünü kullanarak* $\mathrm{d}(x_1, x_2, ..., x_n)$*:*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x_1, x_2, ..., x_n) =& \mathrm{d}(H\hat{x}_1, H\hat{x}_2, ..., H\hat{x}_1) \\ =& \begin{vmatrix} H & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H \end{vmatrix} \mathrm{d}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_1) \\ =& H^n \mathrm{d}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_1) \end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

n-boyuttaki değişiklik $\mathrm{d}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_1) = H^n \mathrm{d}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_1)$ şeklinde bulunur. Dikkat edilirse, $\mathrm{d}x$ değişikliklerden etkilenmemiş olup, sadece içinde bulunan değişkenler etkilenmiştir. Bunun sebebi, d dönüşümünün verilen bölgenin ilk halindeki işlevi ne ise bölgenin birim çember içine sığdırılmış halindeki işlevi de odur. Bazı fonksiyonlar bu değişiklerden etkilenebilir. Bunun örnekleri tezin ilerleyen kısımlarında gösterilecektir.

Görüldüğü gibi alt bölge büyüklüğü olan H, değişkenlerde ve fonksiyonlarda boyuta bağlı bir birimdir.

$\ell(u,u)$ ve $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$'nin benzer şekilde H'a bağlılığını hesaplanacak olursa:

$$\begin{aligned}\ell(u,u) &= \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{H^2}\int\limits_{\hat{\Omega}} \left|\hat{\nabla}\hat{u}(\hat{x})\right|^2 H^d \mathrm{d}\hat{x} \\ &= H^{d-2}\int\limits_{\hat{\Omega}} \left|\hat{\nabla}\hat{u}\right|^2 \mathrm{d}\hat{x} = H^{d-2}\hat{\ell}(\hat{u},\hat{u})\end{aligned} \tag{2.0.1}$$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |u(x,x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\hat{\Omega}} |\hat{u}(\hat{x},\hat{x})|^2 H^d \mathrm{d}\hat{\mathrm{x}} = H^d \|\hat{u}\|^2_{L^2(\hat{\Omega})} \tag{2.0.2}$$

Elde edilen bu bilgiler, kondisyon sayısına üst sınır bulunurken kullanılacaktır.

3. Kondisyon Sayısının Üst Sınırı

Şimdiye kadar kondisyon sayısı, üst sınır bulmak için kullanılacak birkaç materyal ve bölge büyüklüğü tanıtıldı. Bu bölümde, bulunmuş olan sonuçlar ve bu sonuçlarla ilgili işlemler bulunmaktadır. Üç ana bölümden oluşmaktadır. Bu üç bölüm, farklı başlıklar altında verilecek olmasına rağmen benzer sonuçlar içermektedir.

3.1 Yerel Bölüm

Bu bölümde sırası ile Poincaré eşitsizliği ve ters dönüşüm, alt bölge büyüklüğüne(H) bağlı olarak tekrar yazılacak ve ardından yerel bölümün kondisyon sayısının üst sınırı H'a bağlı olarak tekrar hesaplanacaktır. Öncelikle $\Omega := \hat{\Omega}$ olarak seçilecek olursa, Poincaré eşitsizliğinden (1.0.1),

$$
\begin{aligned}
c_{Pncr}(\hat{\Omega}) \left\| \hat{u} \right\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} &\leq \hat{\ell}(\hat{u}, \hat{u}) + \left\| \hat{u} \right\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} \\
(c_{Pncr}(\hat{\Omega}) - 1) \left\| \hat{u} \right\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} &\leq \hat{\ell}(\hat{u}, \hat{u})
\end{aligned}
$$

bulunur. Notasyonda kolaylık olması için $c_1(\hat{\Omega}) = (c_{Pncr}(\hat{\Omega}) - 1)$ denilirse, çalışılan boyut 1 olduğu için $d = 1$ alınır. (2.0.1), (2.0.2) ları kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
c_1(\hat{\Omega}) H^{-d} \left\| u \right\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} &\leq H^{2-d} \ell(u, u) \\
c_1(\hat{\Omega}) H^{-1} \left\| u \right\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} &\leq H^{1} \ell(u, u) \\
c_1(\hat{\Omega}) H^{-2} \left\| u \right\|^2_{L_2} &\leq \ell(u, u)
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

elde edilmiş olur. Ters yaklaşım eşitsizliği, benzer şekilde alt bölge büyüklüğüne(H) bağlı olarak yazıldığında, tekrar $\Omega := \hat{\Omega}$ olarak seçilerek, adım ölçüsü(h) için yapılan $h = H\hat{h}$ dönüşümü, (2.0.1) ve (2.0.2) eşitlikleri yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa($d = 1$),

$$\begin{aligned}
\hat{\ell}(\hat{u},\hat{u}) + \|\hat{u}\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} &\leq c_2(\hat{\Omega})\hat{h}^{-2}\|\hat{u}\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} \\
\hat{\ell}(\hat{u},\hat{u}) &\leq c_2(\hat{\Omega})\hat{h}^{-2}\|\hat{u}\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} - \|\hat{u}\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} \\
\hat{\ell}(\hat{u},\hat{u}) &\leq c_2(\hat{\Omega})\hat{h}^{-2}\|\hat{u}\|^2_{L_2(\hat{\Omega})} \qquad (3.1.2) \\
H^1\ell(u,u) &\leq c_2(\hat{\Omega})H^1h^{-2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \\
\ell(u,u) &\leq c_2(\hat{\Omega})h^{-2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. (3.1.1) ve (3.1.2) de bulunan iki sonuç aynı eşitsizlikte yazılırsa,

$$\Rightarrow c_1(\hat{\Omega})H^{-2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \ell(u,u) \leq c_2(\hat{\Omega})h^{-2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

L_2 ile l_2 arasındaki h'a bağlı

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \cong h^d\|u\|^2_{\ell_2(\Omega)}$$

norm denkliği de kullanılırsa, ($d = 1$) olmak üzere,

$$c_1(\hat{\Omega})H^{-2}h^1c_3\|u\|^2_{\ell_2(\Omega)} \leq \ell(u,u) \leq c_2(\hat{\Omega})h^{-2}h^1c_4\|u\|^2_{\ell^2(\Omega)}$$

iki tarafta da $\ell(u,u)\,\|u\|^2_{\ell_2(\Omega)}$ ile bölünürse,

$$c_1c_3h^1H^{-2} \leq \frac{\ell(u,u)}{\|u\|^2_{\ell_2(\Omega)}} \leq c_2c_4h^{-1}$$

bulunmuş olur. c_3 ve c_4 norm eşitliğinden gelmektedir. Norm eşitsizliğinden gelen bu sabitler Ω'ya bağlı değillerdir, yani H çarpanı içermemektedirler. Böylece kondisyon sayısının üst sınırı

$$
\begin{aligned}
\kappa(K) &\leq \frac{c_2 c_4 h^{-1}}{c_1 c_3 h^1 H^{-2}} \\
&\lesssim H^2 h^{-2}
\end{aligned}
$$

olacak şekilde h ve H'a bağlı bulunur ve eşitsizlikte bulunan c_1, c_2, c_3 ve c_4 sabitleri H ve h'ların ikisine de bağlı değildir.

3.2 Yerel Olmayan Bölüm

Yerel Olmayan direngenlik matrisi'nin kondisyon sayısı için bulunan üst sınır, H'a bağlı olarak tekrar yazılacaktır. Aksoylu'nun [3] makalesinde

$$
\begin{aligned}
&\underline{c}(\overline{\overline{\Omega}})h \left\| u \right\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})} \leq a(u,u) \\
&\quad \leq \overline{c}(\overline{\overline{\Omega}}) \left\{ \frac{8(2^{1-2s}-1)}{s(1-2s)(3-2s)} h^{1-2s} \delta^{-(2-2s)} - \frac{8(1-s)}{3s} h \delta^{-2} \right\} \left\| u \right\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunmaktadır. Gösterimde kolaylık olması için

$$
c_+ = \frac{8(2^{1-2s}-1)}{s(1-2s)(3-2s)} \quad , \quad c_- = \frac{8(1-s)}{3s}
$$

şeklinde sabitler ile tekrar yazılacak olursa,

$$
\underline{c}(\overline{\overline{\Omega}})h \left\| u \right\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})} \leq a(u,u) \leq \overline{c}(\overline{\overline{\Omega}})h \left\{ c_+ h^{-2s} \delta^{-(2-2s)} - c_- \delta^{-2} \right\} \left\| u \right\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})}
$$

bulunur. Bu eşitsizlikte bölge değiştirilerek, yani $\overline{\overline{\Omega}} = \hat{\overline{\overline{\Omega}}}$ seçilerek, $h = H\hat{h}$, $\delta = H\hat{\delta}$ değişiklikleri de göz önünde bulundurularak yukarıdaki eşitsizlik tekrar yazılacak olursa,

$$
\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})\hat{h} \left\| \hat{u} \right\|^2_{L_2(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})} \leq \hat{a}(\hat{u},\hat{u}) \leq \overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})\hat{h} \left\{ c_+ \hat{h}^{-2s} \hat{\delta}^{-(2-2s)} + c_- \hat{\delta}^{-2} \right\} \left\| \hat{u} \right\|^2_{L_2(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})} \tag{3.2.1}
$$

bulunur. Burada

$\hat{a}(\hat{u},\hat{u})$'yı H'a bağlı olarak tekrar yazılsın.

$$\begin{aligned}
\hat{a}(\hat{u},\hat{u}) &= \frac{1-s}{\hat{\delta}^{2-2s}} \int\limits_{\hat{\overline{\overline{\Omega}}}} \int\limits_{\hat{\overline{\overline{\Omega}}} \cap |\hat{x}-\hat{y}| \le \hat{\delta}} \frac{(\hat{u}(\hat{x})-\hat{u}(\hat{y}))^2}{|\hat{x}-\hat{y}|^{1+2s}} \mathrm{d}\hat{y}\mathrm{d}\hat{x} \\
&= H^{2-2s} \frac{1-s}{\delta^{2-2s}} \int\limits_{\overline{\overline{\Omega}}} \int\limits_{\overline{\overline{\Omega}} \cap |x-y| \le \delta} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{1+2s}} H^{-2d} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \qquad (3.2.2) \\
&= H^{3-2d} a(u,u)
\end{aligned}$$

$\hat{a}(\hat{u},\hat{u})$'yu (3.2.1) eşitsizliğinde yerine yazılırsa ve $(d=1)$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}}) H^{-1} H^{-1} h \|u\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})} &\le H^1 a(\hat{u},\hat{u}) \\
&\le \overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}}) H^{-1} h \left\{ c_+ H^{2s} h^{-2s} H^{2-2s} \delta^{-(2-2s)} + c_- H^2 \delta^{-2} \right\} H^{-1} \|u\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})} \\
\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}}) H^{-3} h \|u\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})} &\le a(\hat{u},\hat{u}) \\
&\le \overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}}) h \left\{ c_+ H^{2s} h^{-2s} H^{2-2s} \delta^{-(2-2s)} + c_- H^2 \delta^{-2} \right\} H^{-3} \|u\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})}
\end{aligned}$$

bulunur. Tekrar L_2 ile l_2 arasındaki h'a bağlı

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \cong h^d \|u\|^2_{\ell_2(\Omega)}$$

norm denkliği kullanılırsa, $(d=1)$ ve c_1, c_2 norm denkliğinden gelen H'a bağlı olmayan sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}}) H^{-3} c_1 h^2 \|u\|^2_{\ell_2(\overline{\overline{\Omega}})} &\le a(\hat{u},\hat{u}) \\
&\le \overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}}) \left\{ c_+ h^{-2s} H^2 \delta^{-(2-2s)} + c_- H^2 \delta^{-2} \right\} H^{-3} c_2 h^2 \|u\|^2_{\ell_2(\overline{\overline{\Omega}})}
\end{aligned}$$

bulunur. Her taraf $\|u\|^2_{\ell_2(\overline{\overline{\Omega}})}$ ile bölünürse,

$$\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})H^{-3}c_1h^2 \leq \frac{a(\hat{u},\hat{u})}{\|u\|^2_{\ell_2(\overline{\overline{\Omega}})}} \leq \overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})\left\{c_+h^{-2s}H^2\delta^{-(2-2s)} + c_-H^2\delta^{-2}\right\}H^{-3}c_2h^2$$

olur. Böylece kondisyon sayısının üst sınırı,

$$\kappa(K) \leq \frac{\overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})\left\{c_+h^{-2s}H^2\delta^{-(2-2s)} + c_-H^2\delta^{-2}\right\}}{\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})}\frac{H^{-3}}{H^{-3}}\frac{c_1h^2}{c_2h^2}$$

$$\kappa(K) \leq \frac{\overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})c_1\left\{c_+h^{-2s}\delta^{2s} + c_-\right\}}{\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})c_2}\delta^{-2}H^2$$

olacak şekilde bulunmuş olur. En başta işlemlere başlarken kullandığımız [3] makalesinde bulunmuş olan kondisyon sayısının üst sınırı ile şimdi bulunan bulgu alt alta yazılırsa,

$$\kappa(K) \leq \frac{\overline{c}(\overline{\overline{\Omega}})}{\underline{c}(\overline{\overline{\Omega}})}\frac{c_1\left\{c_+h^{-2s}\delta^{2s} + c_-\right\}}{c_2}\delta^{-2}$$

$$\kappa(K) \leq \frac{\overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})}{\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})}H^2\frac{c_1\left\{c_+h^{-2s}\delta^{2s} + c_-\right\}}{c_2}\delta^{-2}$$

olur. Yapılan işlemlerde sadece eşitlikler kullanıldığı için üstte bulunan iki üst sınır birbirine eşittir. $\frac{\overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})}{\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})}$ sabiti sadece $(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})$ bölgesine bağlı olduğu için içerisinde H bulunmamaktadır. Aksoylu'nun makalesinde bulunmuş olan kondisyon sayısının üst sınırında bulunan $\frac{\overline{c}(\overline{\overline{\Omega}})}{\underline{c}(\overline{\overline{\Omega}})}$ sabitinin içerisindeki tüm H'lar bulunup çarpan olarak yazılmıştır. Böylece sınırda bulunan sabitlerin içeriği daha bilinir hale getirilmiş oldu.

3.3 Integrallenebilir Çekirdek

Bu bölümde, Aksoylu'nun [3] makalesinde bulunmuş olan yerel olmayan bölümde integrallenebilir çekirdeğin kondisyon sayısının üst sınırını H değişkeni eklenerek tekrar hesaplanacaktır. Öncelikle üst sınırı bulunan eşitsizlik hatırlanacak olursa:

$$\underline{c}(\overline{\overline{\Omega}})h \left\| u \right\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})} \leq b(u,u) \leq \overline{c}(\overline{\overline{\Omega}})(5\delta^{-2} - 6h\delta^{-3})h \left\| u \right\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})} \tag{3.3.1}$$

Bu eşitsizlik, bölge değiştirilerek yazıcalak olursa, $\overline{\overline{\Omega}} := \hat{\overline{\overline{\Omega}}}$ seçildiğinde,

$$\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})\hat{h} \left\| \hat{u} \right\|^2_{L_2(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})} \leq \hat{b}(\hat{u},\hat{u}) \leq \overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})(5\hat{\delta}^{-2} - 6\hat{h}\hat{\delta}^{-3})\hat{h} \left\| u \right\|^2_{L_2(\overline{\overline{\Omega}})}$$

bulunur. $\hat{b}(\hat{u},\hat{u})$'yu H'a bağlı olarak tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\hat{b}(\hat{u},\hat{u}) &= \frac{3}{2\hat{\delta}^3} \int\limits_{\hat{\overline{\overline{\Omega}}}} \int\limits_{\hat{\overline{\overline{\Omega}}} \cap |\hat{x}-\hat{y}|<\hat{\delta}} (\hat{u}(\hat{x}) - \hat{u}(\hat{y}))^2 \mathrm{d}\hat{y}\mathrm{d}\hat{x} \\
&= H^3 \frac{3}{2\delta^3} \int\limits_{\overline{\overline{\Omega}}} \int\limits_{\overline{\overline{\Omega}} \cap |x-y|<\delta} (u(x) - u(y))^2 H^{-2d} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= H^{3-2d} b(u,u)
\end{aligned}$$

bulunur. $\hat{b}(\hat{u},\hat{u})$'nun H ile tekrar yazılmış hali, $h = H\hat{h}$ ve $\delta = H\hat{\delta}$ değişiklikleri ve (2.0.1), (2.0.2) eşitlikleri kullanılarak, (3.3.1) eşitsizliği tekrar yazılacak olursa($d = 1$),

$$\underline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})H^{-2}h \left\| u \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq H^1 b(u,u) \leq \overline{c}(\hat{\overline{\overline{\Omega}}})(5H^2\delta^{-2} - 6H^{-1}hH^3\delta^{-3})H^{-2}h \left\| u \right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

bulunur. L_2 ile l_2 arasındaki h'a bağlı

$$\left\| u \right\|^2_{L_2(\Omega)} \cong h^d \left\| u \right\|^2_{\ell_2(\Omega)}$$

norm denkliği kullanırsa($d = 1$), c_3 ve c_4 norm denkliğinden gelen sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\underline{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})H^{-2}c_3h^2\,\|u\|^2_{\ell_2(\Omega)} &\leq H^1b(u,u) \\
&\leq \bar{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})(5H^2\delta^{-2} - 6H^{-1}hH^3\delta^{-3})H^{-2}h^2c_4\,\|u\|^2_{\ell_2(\Omega)} \\
\underline{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})H^{-3}h^2c_3\,\|u\|^2_{\ell_2(\Omega)} &\leq b(u,u) \\
&\leq \bar{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})(5H^2\delta^{-2} - 6hH^2\delta^{-3})H^{-3}h^2c_4\,\|u\|^2_{\ell_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

bulunur. Her taraf $\|u\|^2_{\ell_2(\bar{\bar{\Omega}})}$ ile bölünürse,

$$\underline{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})H^{-3}h^2c_3 \leq \frac{b(u,u)}{\|u\|^2_{l_2(\Omega)}} \leq \bar{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})(5H^2\delta^{-2} - 6hH^2\delta^{-3})H^{-3}h^2c_4$$

olur. Böylece kondisyon sayısının üst sınırı,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} &\leq \frac{\bar{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})H^2\delta^{-2}(5 - 6h\delta^{-1})}{c(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})} \cdot \frac{H^{-3}}{H^{-3}}\frac{c_3h^2}{c_4h^2} \\
&\leq \frac{\bar{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})c_3\delta^{-2}(5 - 6h\delta^{-1})}{c(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})c_4}H^2
\end{aligned}$$

olacak şekilde bulunmuş olur. En başta işlemlere başlanırken kullanılan Aksoylu'nun makalesinde bulunmuş olan kondisyon sayısının üst sınırı ile şüst kısımda elde edilmiş bulguyu alt alta yazarsak,

$$\begin{aligned}
\kappa(K) &\leq \frac{\bar{c}(\bar{\bar{\Omega}})}{\underline{c}(\bar{\bar{\Omega}})}\frac{c_3\left\{5 - 6h\delta^{-1}\right\}}{c_4}\delta^{-2} \\
\kappa(K) &\leq \frac{\bar{c}(\bar{\bar{\Omega}})}{\underline{c}(\bar{\bar{\Omega}})}\frac{c_3\left\{5 - 6h\delta^{-1}\right\}}{c_4}H^2\delta^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Yapılan işlemlerde sadece eşitlikler kullanıldığı için üstte bulunmuş olan iki üst sınır birbirine eşittir. $\frac{\bar{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})}{\underline{c}(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})}$ sabiti sadece $(\hat{\bar{\bar{\Omega}}})$ bölgesine bağlı olduğu için içerisinde H bulunmamaktadır. Aksoylu'nun makalesindeki denklemde bulunmuş olan kondisyon sayısının üst sınırında bulunan $\frac{\bar{c}(\bar{\bar{\Omega}})}{\underline{c}(\bar{\bar{\Omega}})}$ sabitinin içerisindeki tüm

H'lar bulunup çarpan olarak yazılmıştır. Böylece sınırda bulunan sabitin içeriği daha bilinir hale getirilmiştir.

4. SONUÇ

Bu bölüme kadar bulgular, nasıl bulundukları ve bulurken neler kullanıldığı gösterildi. Bu tezin amacı [3] makalesinde bulunmuş olan kondisyon sayısının üst sınırında, alt bölge büyüklüğü(H)nün rolünü göstermek idi. H'nin bölgeye, fonksiyonlara, değişkenlere ve sabitlere ne kadar etkisi olduğu, bunların içerisinde hangi miktarlarda bulunduğu araştırıldı ve hesaplandı. Bu bulgular yerel ve yerel olmayan direngenlik matrislerinin kondisyon sayısının üst sınırını yeniden hesaplamada kullanıldı. En önemlisi de H değişkeni, kondisyon sayılarının üst sınırlarında bulunan değişkenlerden ve sabitlerden tamamiyle ayrıştırılmış oldu. Yerel olmayan integrallenebilir çekirdek de dahil toplam üç bölümde sınırdaki tüm alt bölge büyüklüğü katsayı miktarının H^2 olduğu, bir başka deyişle kondisyon sayısının sınırının H^2 ile orantılı olduğu bulundu. Alt bölge büyüklüğü(H) ne kadar değiştirilirse, karesi oranında kondisyon sayısının da değiştiği görüldü. Kondisyon sayısının daha fazla sınırlanması istenildiğinde, alt bölge büyüklüğünün küçültülmesi, kondisyon sayısının sınırını küçültecektir; diğer bir söylemle işlem yapılan bölge daha fazla alt bölgeye ayrıldığında alt bölge büyüklüğü azalacak, dolayısı ile kondisyon sayısının üst sınırı da küçülecektir. Bu sonuç, işlemlerin bilgisayar hesaplamaları ile yapıldığı problemlerin daha kolay çözülmesine yarar sağlamaktadır. Özellikle deforme olmuş yüzeylerde çatlaklarla ilgili günümüzde kullanılan bilgisayarların kapasitesini aşacak hesaplamalar yapılmak istediğinde, bu hesaplamalar küçük bölgelere ayrılıp yapılmaktadır. İşlem yapılmak istenen bölge, küçük bölgelere ayrıldığında ise kondisyon sayısının ne kadar etkileneceği, bölgelere ayırma yöntemi ile ilgili araştırmalara katkı sağlayıcı niteliktedir. Bu tezdeki sonuçlar 1-boyutlu bölgeler için olup benzer bulguların 2 ve daha fazla boyutlar için de geçerli olup olmadığı araştırmaya açıktır. Çok boyutlu bölgeler için bulunacak sonuçlar, mühendislik ve de bilim uygulamaları için son derece yararlı olabilecek yaklaşımları ve modellemeleri ortaya çıkaracaktır.

Kaynakça

[1] B. Aksoylu ve T. Mengesha, *Results on nonlocal boundary value problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 31 (2010), pp. 1301-1317

[2] B. Aksoylu ve M. L. Parks, *Variational theory and domain decomposition for nonlocal problems*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011), pp. 6498-6515

[3] B. Aksoylu ve Z. Unlu, *Conditioning Analysis of Nonlocal Integral Operators In Fractional Sobolev Spaces*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 52 (2014), pp. 653-677

[4] M. S. Gockenbach, Understanding and Implementing the Finite Element Method, SIAM, (2006)

[5] K. Atkinson ve W. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, Springer, 2nd Edition (2000)

[6] S. C. Brenner ve L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 3rd Edition (2008)

[7] A. Toselli ve O. Windlund, *Domain Decomposition Method-Algorithms and Theory*, Springer, Verlag Berlin Heidelberg(2005)

[8] P. Solin, *Partial Differential Equantions and the Finite Elemen Method*, Wiley & Sons(2006)

[9] D. Braess, *Finite Elements*, Theory, Fast Solvers and Applications in Solid Mechanics, Cambridge University Press, 3rd Edition(2007)

[10] S. A. Silling, *"Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces." Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48.1 (2000): 175-209.

[11] M. L. Parks,R. B. Lehoucq, S. J. Plimpton, S. A. Silling , *Implementing peridynamics within a molecular dynamics code*, Computer Physics Communications, 179(11) (2008), 777-783.

[12] Q. Du, M. Gunzburger, R. B. Lehoucq, and K. Zhou, *A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws, Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, SIAM Rev., 23 (2013), pp. 493-540

[13] Q. Du, M. Gunzburger, R. B. Lehoucq, and K. Zhou, *Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints*, SIAM Rev., 54 (2012), pp. 667-696

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: ERDEN, Furkan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 28.06.1988 İzmir
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 05078916356
e-mail	: furkanerden@hotmail.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Y. Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2014
Lisans	Orta Doğu Teknik Üniversitesi	2012

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2012-2014	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Proje Bursiyeri

Yabancı Dil

İngilizce (İyi)

Projeler

Tubitak 1001 TBAG 112T240, Peridinamik Uygulamaları için Çözücüler, (01.12.2012-30.11.2014)

Yayınlar

27. Ulusal Matematik Sempozyumu, (26.08.2014-29.08.2014)
"Matris Kondisyon Sayısının Üst Sınırında Bölge Büyüklüğünün Rolü"

Ödüller

Sınav	Yıl	Madalya
13. Tubitak Ulusal Matematik Olimpiyatı	2005	Bronz Madalya
10. Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları	2005	Mansiyon
İstanbul Bilgi Üniversitesi Cahit Arf Matematik Günleri	2004	Bronz Madalya
İstanbul Bilgi Üniversitesi Cahit Arf Matematik Günleri	2003	Mansiyon
8. Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları	2003	Gümüş Madalya
7. Tubitak Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı	2002	Gümüş Madalya
7. Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları	2002	Gümüş Madalya